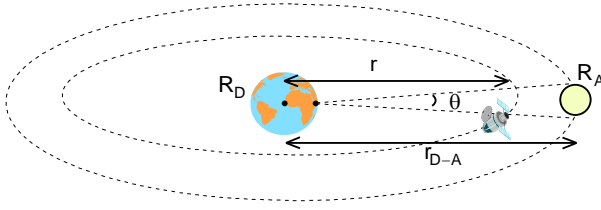


DENEME SINAVI



1. Bilgi: Ekvator düzleminde r yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir uydu Ayın diskin önünden geçebilir. Uydunun ne kadar süreyle Ayın diskin önünden geçtiğini değerlendirebiliriz. Bunun için uydu Ayın çapı boyunca geçtiğini kabul edelim. Dünyanın yarıçapı R_D , Ayın yarıçapı R_A , Aya kadar olan ortalama uzaklık r_{D-A} olduğuna göre, Dünyadan Ay diskinin gözlemlendiği açı;

$$\theta = \frac{2R_A}{r_{D-A} - R_D} \ll 1$$

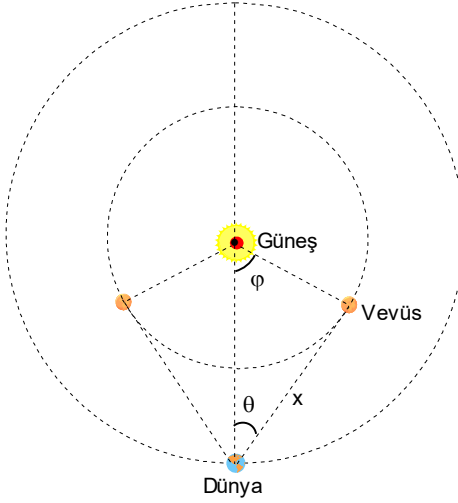
olur. Uydu Dünya ile aynı yönde dönerse geçiş süresi;

$$(\omega - \omega_D)t_1 = \theta; t_1 = \frac{2R_A}{(r_{D-A} - R_D)(\omega - \omega_D)} = \frac{2R_A}{(r_{D-A} - R_D) \left(R_D \sqrt{\frac{g}{r^3}} - \frac{2\pi}{T_D} \right)}$$

uydu Dünyanın dönme yönüyle zıt yönde hareket ederlerse;

$$(\omega + \omega_D)t_2 = \theta; t_2 = \frac{2R_A}{(r_{D-A} - R_D)(\omega + \omega_D)} = \frac{2R_A}{(r_{D-A} - R_D) \left(R_D \sqrt{\frac{g}{r^3}} + \frac{2\pi}{T_D} \right)}$$

olur. Bu durumda iki farklı çözüm uydunun farklı yönlerde hareket edebilmesinden kaynaklanmaktadır.



Dünya ile Güneş arasında hareket eden bir içi gezegen ile aynı yönde hareket ettikleri için aralarındaki bağıl açısal hız;

$$\omega_{D-G} = \omega_G - \omega_D$$

Dünya ile iç gezegen arasındaki uzaklığın minimum olma süresi;

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{D-G}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_G} - \frac{2\pi}{T_D}} = \frac{T_D T_G}{T_D - T_G}$$

olur. İç gezegenler Dünyadan gözlenirse Güneşten maksimum açısal sapma durumunda açı şeklin geometrisinden;

$$\sin \theta = \frac{r_{G-G}}{r_{G-D}}; \theta = \arcsin \frac{r_{G-G}}{r_{G-D}}$$

ile verilir. r_{G-G} Güneş ile gezegen arasındaki uzaklık, r_{G-D} Güneş ile Dünya arasındaki uzaklıktır. Bir maksimum açısal sapma durumundan diğer maksimum açısal sapma durumuna geçmek için gereken süreler;

$$\frac{t_1}{T} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow t_1 = \frac{T\theta}{2\pi}; \frac{t_2}{T} = \frac{2\pi - \theta}{2\pi} \Rightarrow t_2 = \frac{T(2\pi - \theta)}{2\pi}$$

olur. Dünya ile dış gezegen arasındaki bağıl açısal hız;

$$\omega_{D-G} = \omega_D - \omega_G$$

aralarındaki uzaklığın minimum olma süresi;

$$T = \frac{2\pi}{\omega_{D-G}} = \frac{2\pi}{\omega_D - \omega_G} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_D} - \frac{2\pi}{T_G}} = \frac{T_D T_G}{T_G - T_D}$$

olur.

Dünya ile Güneş arasındaki ortalama uzaklık 149,6 milyon kilometre, Merkür ile Güneş arasındaki ortalama uzaklık 57,9 milyon kilometre, Dünyanın Güneş etrafındaki dolanım periyodu 365,26 gün, Merkür'ün Güneş etrafındaki dolanım periyodu 87,97 gün olarak veriliyor. Belli bir anda Dünya ile Merkür arasındaki uzaklık minimumdur. Bu andan sonra belli süre sonra Merkür'ün açısal sapması maksimum oluyor.

Buna göre, maksimum açısal sapma gerçekleşmesinden kaç saat sonra Dünya ile Merkür arasındaki uzaklık maksimum olabilir?

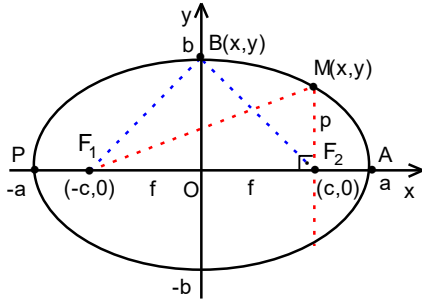
A) 768,4

B) 836,5

C) 879,6

D) 924,2

E) 962,8



$$F_1M + MF_2 = 2a$$

Odak noktasına olan en yakın P noktası perihelion en yakın nokta, odak noktasına olan en yakın A noktası aphelion en uzak nokta olan uzaklıklar;

$$r_P = |F_1 P| = a - f; r_A = |F_2 A| = a + f$$

olur. Elips özelliğini kullanarak bu sistemin odak uzaklığı $M=B(x, y)$ noktasını y ekseninde seçersek simetrik durum gerçekleşir. Bu durumda;

$$F_1 B = B F_2 = a$$

olur. Buradan

$$2\sqrt{f^2 + b^2} = 2a; f = c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

olarak bulunur. Odak uzaklığının büyük yarı eksenine oranına elipsin elips eksantrisitesi denir.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; r_P = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

Odak noktasına göre en yakın ve en uzak noktalara olan uzaklıkları kullanarak;

$$a = \frac{r_P + r_A}{2}; c = a - r_P = \frac{r_A - r_P}{2}; b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{r_P + r_A}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_A - r_P}{2}\right)^2} = \sqrt{r_A r_P}$$

yazabiliriz. $M(x, y)$ noktası elips üzerinde özel olarak seçilirse x eksenine geçirilen dik doğru elipsin F_2 odağından geçmektedir. $M F_2 = p$ olsun. Bu durumda;

$$p + \sqrt{(2f)^2 + p^2} = 2a$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\sqrt{4f^2 + p^2} = 2a - p \Rightarrow 4f^2 + p^2 = 4a^2 - 4ap + p^2; p = \frac{a^2 - f^2}{a} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2)$$

olarak bulunur. Bu temsil ile perihelion ve aphelion uzaklıkları;

$$r_P = a - f = a - \varepsilon a = \frac{p(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{1 + \varepsilon}; r_A = a + f = a + \varepsilon a = \frac{p(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{1 - \varepsilon}$$

ile temsil edilebilir.

Güneş sisteminde en parlak kuyruklu yıldızlardan birisi Hale-Bopp kuyruklu yıldızdır. Hale-Bopp kuyruklu yıldızın Güneşin etrafındaki dolanım periyodu 2533 yıl, güneşe en yakın uzaklık 0,93 AB olarak ölçülmüştür.

Buna göre Hale-Bopp kuyruklu yıldızın eliptik yörüngenin küçük yarı eksenin uzunluğu yaklaşık olarak kaç astronomik birimdir?

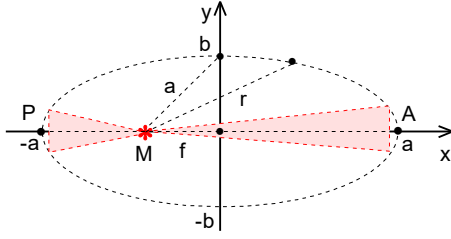
A) 9,46

B) 12,52

C) 15,86

D) 18,57

E) 24,38



3. Bilgi: Kütlesi M olan bir gezegenin etrafında bir uydunun O merkezli, büyük yarı eksenini a, küçük yarı eksenini b, odak uzaklığı f olan eliptik yörünge üzerinde hareket etmektedir. Uydunun gezegene en yakın perihelion P noktasından ve gezegene en uzak aphelion A noktasından da geçmektedir. Perihelion ve aphelion noktalarına kadar uydunun gezegene olan uzaklıkları;

$$r_p = a(1-\varepsilon); r_A = a(1+\varepsilon)$$

ile verilir. Burada ε elipsin elips eksantrisitesidir. Bu durumda;

$$r_p + r_A = 2a; r_p r_A = a^2(1-\varepsilon^2) = a(1-\varepsilon)a(1+\varepsilon) = b^2$$

ile verilir. Enerji korunumu yasası için;

$$\frac{mv_p^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r}$$

açısal momentum korunumu yasası için;

$$m v_p r_p = m v_A r_A; v_A = \frac{v_p r_p}{r_A}$$

yazabiliriz. Buradan uydunun perihelion noktasındaki hızı;

$$v_p^2 - \frac{2\gamma M}{r_p} = v_A^2 - \frac{2\gamma M}{r_A}; v_p^2 - \frac{2\gamma M}{r_p} = \frac{v_p^2 r_p^2}{r_A^2} - \frac{2\gamma M}{r_A}$$

$$v_p^2 \left(1 - \frac{r_p^2}{r_A^2}\right) = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_A}\right); v_p^2 \frac{(r_A - r_p)(r_A + r_p)}{r_A^2} = \frac{2\gamma M(r_A - r_p)}{r_p r_A} = \frac{2\gamma M r_A}{r_p (r_A + r_p)} = \frac{2\gamma M a(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon) \cdot 2a} = \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}$$

gezegenden herhangi r uzaklıktaki uydunun hızı;

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{m}{2} \cdot \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} - \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} = \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} \left(\frac{1+\varepsilon}{2} - 1\right) = -\frac{\gamma Mm}{2a}; v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

olarak bulunur. Perihelion ve aphelion noktalarında taranan alanlar ve alan hızı;

$$\Delta S = \frac{r_p v_p \Delta t}{2} = \frac{m r_p v_p \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \Delta S = \frac{r_A v_A \Delta t}{2} = \frac{m r_A v_A \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{r_p v_p}{2} = \frac{r_A v_A}{2}$$

$$\frac{mv_p^2 r_p^2}{2r_p^2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = \frac{mv_A^2 r_A^2}{2r_A^2} - \frac{\gamma Mm}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_p}\right)^2 - \frac{\gamma M}{r_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_A}\right)^2 - \frac{\gamma M}{r_A} \Rightarrow \frac{2\sigma^2}{r_p^2} - \frac{2\sigma^2}{r_A^2} = \frac{\gamma M}{r_p} - \frac{\gamma M}{r_A}$$

$$\frac{2\sigma^2(r_A^2 - r_p^2)}{r_p^2 r_A^2} = \frac{\gamma M(r_A - r_p)}{r_p r_A} \Rightarrow \frac{2\sigma^2(r_A - r_p)(r_A + r_p)}{r_p r_A} = \gamma M(r_A - r_p) \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\gamma M r_p r_A}{2(r_p + r_A)}} = \sqrt{\frac{\gamma M b^2}{2 \cdot 2a}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{a}}$$

olar. Perihelion ve aphelion noktaları için enerji ifadesinden;

$$\mathcal{E} = \frac{m^2 v^2 r^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r}; r^2 + \frac{\gamma Mmr}{\mathcal{E}} - \frac{L^2}{2m\mathcal{E}} = 0$$

olar. İkinci derece denklemin köklerin özelliklerinden elipsin elips eksantrisitesi;

$$r_p + r_A = -\frac{\gamma Mm}{\mathcal{E}} = 2a; a = -\frac{\gamma Mm}{2\mathcal{E}}$$

$$r_p r_A = \left(\frac{\gamma Mm}{\mathcal{E}}\right)^2 - 4\left(-\frac{L^2}{2m\mathcal{E}}\right) = \frac{\gamma^2 M^2 m^2}{\mathcal{E}^2} + \frac{2L^2}{m\mathcal{E}} = a^2(1-\varepsilon^2) = \frac{\gamma^2 M^2 m^2}{4\mathcal{E}^2}(1-\varepsilon^2); \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL}{\gamma^2 M^2 m^3}}$$

olarak bulunur.

Güneşin etrafında bir uydunun büyük yarı eksenini a ve küçük yarı eksenini b olan eliptik yörünge üzerinde hareket etmektedir. Uydunun Güneşe en yakın olan P perihelion noktasından ve en uzak A aphelion noktasında arasında hareket etmektedir. Uydunun elipsin merkezine en yakın noktasında bulunduğu hızı, uydunun maksimum hızının yarısı kadardır.

Buna göre uydunun Güneşe olan maksimum uzaklığı küçük yarı ekseninin kaç katıdır?

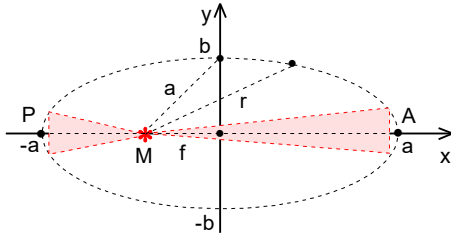
A) $\frac{3}{2}$

B) 2

C) $\frac{5}{2}$

D) 3

E) $\frac{7}{2}$



4. Bilgi: Kepler birinci yasasına göre M kütleli çekim merkezinin alanında büyük yarı eksenini a, küçük yarı eksenini b olan elips üzerinde hareket eden $m \ll M$ kütleli bir cisime etki eden genel çekim kuvveti vektörel temsilini kullanarak çekim merkezinden cisme uyguladığı tork için;

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{\gamma M m \vec{r}}{r^3} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

yazabiliriz. Bu vektörel çarpım sıfır olduğu için açısal momentum L korunur. . Elipsin alanı;

$$S = \pi ab$$

ile verilir. Uydu gezegene en yakın perihelion P noktasından ve gezegene en uzak aphelion A noktasından da geçmektedir. Perihelion ve aphelion noktalarına kadar uydunun gezegene olan uzaklıkları;

$$r_p = a(1-\varepsilon); r_A = a(1+\varepsilon)$$

ile verilir. Burada ε elipsin elips eksantrisitesidir. Bu durumda;

$$r_p + r_A = 2a; r_p r_A = a^2(1-\varepsilon^2) = a(1-\varepsilon)a(1+\varepsilon) = b^2; b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$$

ile verilir. m kütleli cismin perihelion ve aphelion noktalarında bulunurken cismin hızları v_p ve v_A ise cismin açısal momentumunu için;

$$L = m v_p r_p = m v_A r_A = \text{sabit}$$

Δt sürede taranan üçgenlerin alanları için ve alan hızı için;

$$\Delta S = \frac{r_p v_p \Delta t}{2} = \frac{m r_p v_p \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \Delta S = \frac{r_A v_A \Delta t}{2} = \frac{m r_A v_A \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{r_p v_p}{2} = \frac{r_A v_A}{2}$$

yazabiliriz. Enerji korunumu yasasından alan hızı;

$$E = \frac{m v_p^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_p} = \frac{m v_A^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_A}; \frac{m v_p^2 r_p^2}{2 r_p^2} - \frac{\gamma M m}{r_p} = \frac{m v_A^2 r_A^2}{2 r_A^2} - \frac{\gamma M m}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_p} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_A} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_A}$$

$$\frac{2\sigma^2}{r_p^2} - \frac{2\sigma^2}{r_A^2} = \frac{\gamma M}{r_p} - \frac{\gamma M}{r_A} \Rightarrow \frac{2\sigma^2(r_A^2 - r_p^2)}{r_p^2 r_A^2} = \frac{\gamma M(r_A - r_p)}{r_p r_A} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\gamma M r_p r_A}{2(r_p + r_A)}} = \sqrt{\frac{\gamma M b^2}{2 \cdot 2a}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{a}} = \frac{\sqrt{\gamma M a(1-\varepsilon^2)}}{2}$$

olarak bulunur. Cismin dolanım periyodu T;

$$S = \sigma T; \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\gamma M a(1-\varepsilon^2)}}{2} T; T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$

olarak bulunur. Buradan periyot ile büyük yarı eksen arasındaki ilişki;

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{sabit}$$

üçüncü Kepler yasası olarak bilinir. Üçüncü Kepler yasasını kullanarak eliptik yörüngenin uç noktalarında yörüngenin eğrilik yarıçapı bulunabilir. Örneğin a uzaklığı için;

$$\frac{\gamma M m}{r_A^2} = \frac{m v_A^2}{R} \Rightarrow R = \frac{r_A^2 v_A^2}{\gamma M}; r_A v_A = \sqrt{\gamma M R}$$

yazabiliriz. Burada R bulunan yörüngenin eğrilik yarıçapıdır. İkinci Kepler yasası kullanarak eğrilik yarıçapı;

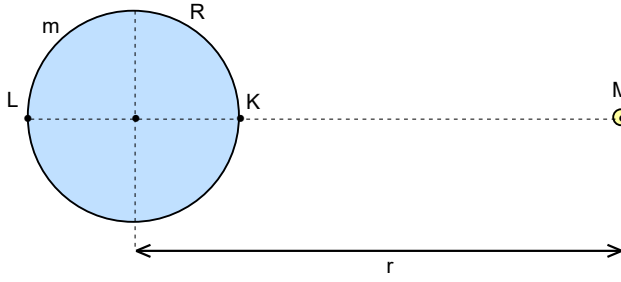
$$\sigma = \frac{r_A v_A}{2} = \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow \frac{\sqrt{\gamma M R}}{2} = \frac{\pi ab}{2\pi} \sqrt{\frac{\gamma M}{a^3}}; R = \frac{b^2}{a}$$

olarak bulunur.

Güneşin etrafında çembersel yörüngeler üzerinde hareket eden iki gök cismin dolanım periyotları T_1 ve T_2 dir. Eliptik yörünge üzerinde hareket eden bir asteroidin Güneşe en yakın olan uzaklığı birinci gök cismin dolandığı çembersel yörüngenin yarıçapı kadar, Güneşe en uzak olan uzaklığı ikinci gök cismin dolandığı çembersel yörüngenin yarıçapı kadardır.

Buna göre asteroidin dolanım periyodu nedir?

A) $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt[3]{T_1^2} + \sqrt[3]{T_2^2}}{2}\right)^2}$ B) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{T_1^3} + \sqrt{T_2^2}}{4}\right)^3}$ C) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{T_1^3} + \sqrt{T_2^2}}{2}\right)^3}$ D) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{T_1^2} + \sqrt[3]{T_2^2}}{2}\right)^3}$ E) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{T_1^2} + \sqrt[3]{T_2^2}}{4}\right)^3}$



5. Bilgi: M kütleli çekim merkezin etrafında r uzaklıkta hareket eden $m \ll M$ kütleli ve $R \ll r$ yarıçaplı bir gök cismin çekim merkeze olan en yakın K noktası ile çekim merkezine olan en uzak L noktası arasındaki çekim ivmeleri farklıdır. Çekim merkezin çekim kuvvetinden kaynaklanan K ve L noktalarındaki çekim ivmeleri;

$$g_{KM} = \frac{\gamma M}{(r-R)^2}; g_{LM} = \frac{\gamma M}{(r+R)^2}$$

ile verilir. Burada çekim ivmeleri arasındaki farklar çok

küçük oldukları için binom açılım formülünü kullanabiliriz.

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots; x = \frac{R}{r}$$

istediğimiz hassasiyetine bağlı olarak ilk iki ya da daha çok sayıda terim hesaba katılabilir. $n = -2$ için;

$$(1+x)^{-2} = 1 + (-2)x + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}x^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$$

$$(1-x)^{-2} = 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}(-x)^3 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

yazabiliriz. Buradan K ve L noktalarındaki çekim ivmeleri;

$$g_{KM} = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} + \frac{4R^3}{r^3} \right); g_{LM} = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 - \frac{2R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} - \frac{4R^3}{r^3} \right)$$

olarak bulunur. Gök cismin çekim merkezinin etrafındaki açısal hız;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = m\omega^2 r; \omega^2 = \frac{\gamma M}{r^3}$$

ile verilir. Gök cismin K ve L noktalarında çekim merkezi etrafında hareketinden kaynaklanan ivmeleri;

$$a_{nK} = m\omega^2 (r-R) = \frac{\gamma M}{r^3} r \left(1 - \frac{R}{r} \right) = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right); a_{nL} = m\omega^2 (r+R) = \frac{\gamma M}{r^3} r \left(1 + \frac{R}{r} \right) = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{R}{r} \right)$$

K ve L noktalarında çekim merkezinin kütle çekiminden ve gök cisminin çekim merkezinin etrafında hareketinden kaynaklanan toplam ivmeler;

$$g_K = g_{KM} - a_{nK} = g_{KM} = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} + \frac{4R^3}{r^3} \right) - \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 - \frac{R}{r} \right) = \frac{\gamma M}{r^2} \left(\frac{3R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} + \frac{4R^3}{r^3} \right) = \frac{3\gamma MR}{r^3} \left(1 + \frac{R}{r} + \frac{4R^2}{3r^2} \right)$$

$$g_L = g_{LM} - a_{nL} = g_{KM} = \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 - \frac{2R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} - \frac{4R^3}{r^3} \right) + \frac{\gamma M}{r^2} \left(1 + \frac{R}{r} \right) = \frac{\gamma M}{r^2} \left(2 - \frac{R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} - \frac{4R^3}{r^3} \right)$$

bu iki ivme arasındaki fark;

$$g_L - g_K = \frac{\gamma M}{r^2} \left(2 - \frac{R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} - \frac{4R^3}{r^3} \right) - \frac{\gamma M}{r^2} \left(\frac{3R}{r} + \frac{3R^2}{r^2} + \frac{4R^3}{r^3} \right) = \frac{\gamma M}{r^2} \left(2 - \frac{4R}{r} - \frac{8R^3}{r^3} \right)$$

olur.

Bir uzay istasyonu uzunluğu ℓ olan iple birbirine bağlı m kütleli iki uydudan oluşmaktadır. Uzay istasyonu yarıçapı $r \approx R \gg \ell$ olan yörünge üzerinde Dünyanın etrafında dolanmaktadır. İki uyduyu bağlayan ip yörüngeye sürekli dik olacak şekildedir.

Buna göre uyduları birbirine bağlayan ipteki gerilme kuvveti nedir? (Dünyanın kütlesi M ve yarıçapı R, evrensel çekim sabiti γ olarak veriliyor.)

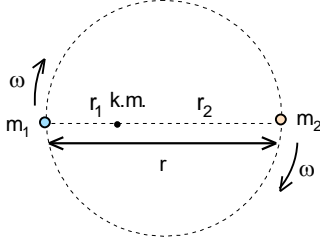
A) $\frac{\gamma M m \ell}{2R^3}$

B) $\frac{3\gamma M m \ell}{R^3}$

C) $\frac{\gamma M m \ell}{R^3}$

D) $\frac{3\gamma M m \ell}{2R^3}$

E) $\frac{2\gamma M m \ell}{3R^3}$



6. Bilgi: Kütle çekiminde genelde çok büyük kütleli çekim merkezi etrafında hareket eden bir cismin hareketi incelenir. Çembersel yörünge üzerinde çok büyük M kütleli çekim merkezi etrafında hareket eden bir cismin dolanım periyodu;

$$\frac{mv_0^2}{r} = \frac{\gamma Mm}{r^2}; v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}; T_0 = \frac{2\pi r}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}$$

ile verilir. İki çekim merkezi söz konusu ise bu iki çekim merkezi ortak kütle merkezi etrafında dönmektedir. İki çekim merkezi arasındaki uzaklık r, kütleleri m_1 ve m_2

olsun. Çekim merkezlerin kütle merkezine olan uzaklıklar;

$$m_1 r_1 = m_2 r_2; r = r_1 + r_2; r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}; r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$$

ile verilir. Yıldızların kütle merkezi etrafındaki açısal hız;

$$m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2 \omega^2 r}{m_1 + m_2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{\gamma (m_1 + m_2)}{r^3}; \omega = \sqrt{\frac{\gamma (m_1 + m_2)}{r^3}}$$

dolanım periyotları;

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma (m_1 + m_2)}}$$

olur. Fizikte;

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

indirgenmiş kütle denir. Bu kavramı kullanarak iki cismin kütle merkezinin etrafındaki hareketi hareketsiz çekim merkezinin etrafında hareket eden bir cismin probleme indirgenebilir. Bunun için hareketsiz çekim merkezinin kütlesi indirgenmiş kütle olmalıdır. Bu sistemin açısal momentumu;

$$L = m_1 \omega^2 r_1^2 + m_2 \omega^2 r_2^2 = \frac{m_1 m_2^2 r^2 \omega}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 r^2 \omega}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1 m_2 r^2 \omega}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2 r \sqrt{\gamma m_1 m_2}}{m_1 + m_2} = \frac{r \sqrt{\gamma m_1^3 m_2^2}}{m_1 + m_2} = \mu r^2 \omega$$

sistemin enerjisi;

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{m_1 \omega^2}{2} \left(\frac{m_2 r}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2 \omega^2}{2} \left(\frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \right)^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2) r^2 \omega^2}{2(m_1 + m_2)^2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{m_1 m_2 r^2 \omega^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{\mu r^2 \omega^2}{2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \\ &= \frac{m_1 m_2 r^2 \omega^2}{2(m_1 + m_2)} \frac{\gamma (m_1 + m_2)}{r^3} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = \frac{\gamma m_1 m_2}{2r} - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{2r} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Ayın Dünyanın etrafında eliptik yörünge üzerinde hareket etmektedir. Ayın Dünyaya olan ortalama uzaklığı 384400 km, en küçük uzaklığı 356410 km, en büyük uzaklığı 406700 km, elipsin elips eksantrisitesi $\epsilon=0,055$, Ayın dünya etrafındaki dolanım periyodu $T=27,3$ gündür. Ayın elips eksantrisitesi bu kadar küçük elips üzerinde hareket ettiği için Ay yaklaşık olarak çembersel yörünge üzerinde hareket ettiği kabul edilmektedir. Ayın dolanım periyodu hesaplanırken genelde Ayın kütlesi ihmal edilmektedir. Bu periyot T_0 olsun. Ayın kütlesi de hesaba katılırsa Ayın dolanım periyodu T olsun.

Buna göre $\frac{T_0 - T}{T_0}$ yüzdeler oranı yaklaşık olarak kaçtır? (Evrensel çekim sabiti $\gamma=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Dünyanın

kütlesi $m_D = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Dünyanın yarıçapı $R=6370 \text{ km}$, Ayın yarıçapı $R=1737 \text{ km}$, Ayın kütlesi $m_{Ay} = 7,3477 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $\pi=3,14$ olarak veriliyor.)

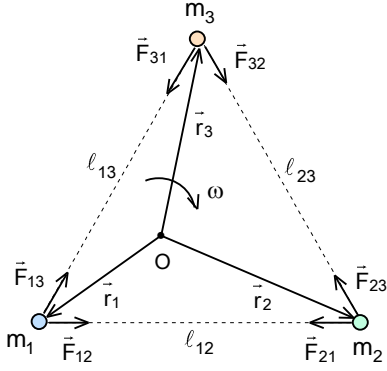
A) 0,2

B) 0,6

C) 1

D) 1,4

E) 1,8



7. Bilgi: Fizikte üç gök cisminin hareketi incelemektedir. Bazı durumlarda vektörlerle çalışırsak çözüm daha sade ve anlaşılır oluyor. Örneğin kütleleri $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ olan noktasal cisimlerden oluşan sistemde, cisimlerin belli noktaya olan uzaklıkları $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N$ ise sistemin bu noktaya olan kütle merkezinin uzaklığı;

$$\vec{r}_{\text{merkez}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N}$$

ile verilir. m_1, m_2 ve m_3 kütleli cisimler sistemin kütle merkezi etrafında ω açısal hızı ile dönerse kütle merkezinde yerleştirilen bir koordinat sisteminin başlangıç noktasına göre;

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 = 0$$

yazabiliriz. Buradan kütle merkezinden cisimlerden birisinin, mesela m_2 kütleli cisminin olan konum vektörü;

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3}{m_2}$$

olarak verilir. Her hangi bir yıldızın hareketini inceleyebiliriz. Mesela m_1 kütleli cisim için;

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = -m_1 \omega^2 \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{\gamma m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{l_{12}^3}; \vec{F}_{13} = \frac{\gamma m_1 m_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{l_{13}^3}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{\gamma m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{l_{12}^3} + \frac{\gamma m_1 m_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{l_{13}^3} = -m_1 \omega^2 \vec{r}_1; \frac{\gamma m_1 m_2}{l_{12}^3} \left(-\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_3 \vec{r}_3}{m_2} - \vec{r}_1 \right) + \frac{\gamma m_1 m_3 (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{l_{13}^3} = -m_1 \omega^2 \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_1 \left(m_1 \omega^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{l_{12}^3} - \frac{\gamma m_1 m_3}{l_{13}^3} - \frac{\gamma m_1^2}{l_{12}^3} \right) + \vec{r}_3 \left(\frac{\gamma m_1 m_3}{l_{12}^3} - \frac{\gamma m_1 m_3}{l_{23}^3} \right) = 0$$

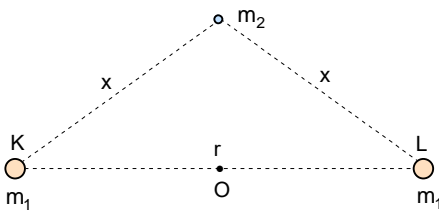
olarak yazılabilir. Bu ifadenin sıfır verebilmesi için katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan;

$$l_{12} = l_{13}$$

elde edilir. Başka bir cisim için benzer işlem yapılırsa;

$$l_{12} = l_{13} = l_{23} = l; \omega^2 = \frac{\gamma (m_1 + m_2 + m_3)}{l^3}$$

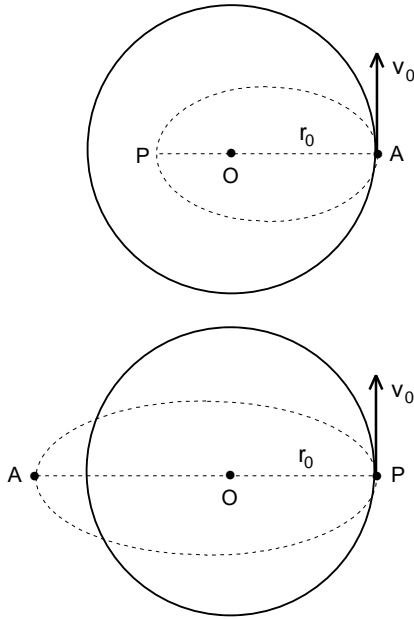
olarak bulunur. Üç cismin kütleleri aynı mertebesinde ise bu cisimler hepsi ortak kütle merkezinin etrafında dönmektedir. Sadece iki gök cisminin kütleleri aynı mertebeden, üçüncü gök cisminin kütlesi bu ikisinden çok küçük mertebeden ise iki büyük kütleli gök cisim ortak kütle merkezi etrafında, üçüncü küçük kütleli gök cisim ise bu ikisinin etrafında dönmektedir.



m_1 kütleli K ve L yıldızlar arası uzaklık r olup iki yıldız ortak O kütle merkezinin etrafında dönmektedir. Kütle merkezinden ve iki yıldız birleştiren doğruya dik doğru üzerinde kütlesi $m_2 \ll m_1$ olan bir gezegen hareket etmektedir.

Buna göre hareket süresince yıldızlar arası ile gezegenin ve yıldızların arasındaki konum değişmediğine göre, x kaç r dir?

- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$



8. Bilgi: Çekim merkezinin etrafında hareket eden bir uydunun yörüngesi ya çembersel ya da eliptik olur. Çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir uydu çekim merkezinin etrafında kalmak koşulu ile iki farklı şekilde eliptik yörünge üzerinde harekete geçirilebilir. Uydu yarıçapı r_0 çembersel yörünge üzerinde v_0 hızıyla hareket ederse uydunun hızı herhangi bir noktada hızı azaltılırsa, uydu eliptik yörünge üzerinde harekete geçer. Uydunun hızının azaltıldığı nokta eliptik yörünge'nin aphelion A noktası olur. Bu durumda eliptik yörünge'nin perihelion P noktasına kadar olan uzaklık r_0 dan küçük olur. Uydunun hızı herhangi bir noktada hızı artırılırsa, uydu yine eliptik yörünge üzerinde harekete geçer. Uydunun hızının artırıldığı nokta eliptik yörünge'nin perihelion P noktası olur. Bu durumda eliptik yörünge'nin aphelion A noktasına kadar olan uzaklık r_0 dan büyük olur. Uydu gezegene en yakın perihelion P noktasından ve gezegene en uzak aphelion A noktasından da geçmektedir. Perihelion ve aphelion noktalarına kadar uydunun gezegene olan uzaklıklar;

$$r_p = a(1-\epsilon); r_A = a(1+\epsilon)$$

ile verilir. Burada ϵ elipsin elips eksantrisitesidir. Bu durumda;

$$r_p + r_A = 2a; r_p r_A = a^2(1-\epsilon^2) = a(1-\epsilon)a(1+\epsilon) = b^2; b = a\sqrt{1-\epsilon^2}$$

ile verilir. m kütleli uydunun perihelion ve aphelion noktalarında bulunurken uydunun hızları v_p ve v_A ise uydunun açısal momentumu için;

$$L = m v_p r_p = m v_A r_A = \text{sabit}$$

Uydunun hızı Δv kadar artırılırsa açısal momentum ve enerji korunumu yasaları için

$$L = m v_p r_p = m v_A r_A; v_p = v_0 + \Delta v; r_p = r_0$$

$$E = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_A}$$

yazabiliriz. Buradan;

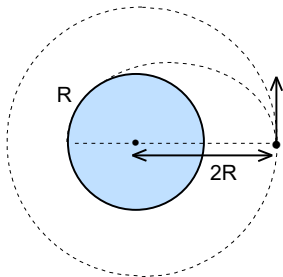
$$v_p^2 \left(1 - \frac{r_p^2}{r_A^2}\right) = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_A}\right) = 2 \left(\frac{\gamma m_D}{r_p}\right) \left(1 - \frac{r_p}{r_A}\right) = 2v_0^2 \left(1 - \frac{r_p}{r_A}\right)$$

$$1 + \frac{r_p}{r_A} = \frac{2v_0^2}{v_p^2} = \frac{2v_0^2}{(v_0 + \Delta v)^2}; r_A = \frac{r_0 (v_0 + \Delta v)^2}{2v_0^2 - (v_0 + \Delta v)^2}$$

elde edilir. Elipsin büyük yarım eksenini a ve küçük yarım eksenini b arasındaki oran

$$\frac{a}{b} = \frac{r_A + r_p}{2\sqrt{r_A r_p}} = \frac{v_0^2}{(v_0 + \Delta v)\sqrt{2v_0^2 - (v_0 + \Delta v)^2}}$$

olarak bulunur.



Bir uzay aracı, yarıçapı R , kütlesi M olan bir gezegenin etrafında $2R$ yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket etmektedir. Uzay aracın hızı aracın yörüngesine teğet olacak şekilde belli değerlerde azaltıldığında uzay aracı gezegenin karşı tarafına düşmektedir.

Buna göre uzay aracın alan hızı ve hızdaki değişimi nedir? (Evrensel çekim sabiti γ olarak veriliyor.)

A) $\frac{\sqrt{2\gamma MR}}{2}; \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

B) $\frac{\sqrt{3\gamma MR}}{3}; \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

C) $\frac{\sqrt{2\gamma MR}}{2}; \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

D) $\frac{\sqrt{3\gamma MR}}{3}; \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{35}}\right)$

E) $\frac{\sqrt{3\gamma MR}}{3}; \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

9. Bilgi: Birinci kurtulma hızı, bir uydunun Dünya yüzeyine çok yakın mesafesinde çembersel yörünge üzerinde hareket etmesi için gereken v_I hızıdır. Bu uydunun hızı;

$$\frac{\gamma m_D m}{R_D^2} = \frac{mv_I^2}{R_D} \Rightarrow v_I = \sqrt{\frac{\gamma m_D}{R_D}} = \sqrt{\frac{\gamma m_D R}{R_D^2}} = \sqrt{g R_D} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 7907 \text{ m/s} \approx 8 \text{ km/s}$$

olarak bulunur. Bir uyduyu Dünyadan uzaklaştırmak fakat Güneş sistemi içinde kalması için uyduya verilmesi gereken minimum v_{II} hızına ikinci kurtulma hızı denir. İkinci kurtulma hızı ile fırlatılan bir uydunun Dünyadan çok uzakta hızı sıfır olur. İkinci kurtulma hızı enerji korunumu yasasından;

$$\frac{mv_{II}^2}{R_D} - \frac{\gamma m_D m}{R_D} \Rightarrow v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma m_D}{R_D}} = \sqrt{2g R_D} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}}{6370 \cdot 10^3}} = 11182 \text{ m/s} \approx 11 \text{ km/s}$$

olarak bulunur. Dünyadan fırlatılan bir uydunun roketin güneş sisteminin dışına çıkarılmak için roketeye verilen minimum v_{III} hızına üçüncü kurtulma hızı denir. Uyduya verilmesi gereken hızının minimum olması için uydu Dünyanın dönme yönünde fırlatılmalı ve verilen enerji Dünyanın çekiminden ve Güneşin çekiminden kurtulabilmek için yeterli olmalıdır. Enerji korunumu yasası için bu durumda;

$$\frac{mv_{III}^2}{2} = \frac{mv_{II}^2}{2} + \frac{m(\Delta v)^2}{2}$$

yazabiliriz. Verilmesi gereken ilave hızı Δv hızı bulabilmek için ilk olarak Dünyanın Güneşin etrafındaki yörüngesel hızı bulunmalıdır. Bunun için Güneşin kütlesi $m_G = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg ve Güneş-Dünya arasındaki uzaklık $r_{G-D} = 150$ milyon kilometredir. Dünyanın çembersel yörünge üzerindeki hızı;

$$\frac{mv_D^2}{r_{G-D}} = \frac{\gamma m_G m_D}{r_{G-D}^2}; v_D = \sqrt{\frac{\gamma m_G}{r_{G-D}}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{149,6 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 29779,3 \text{ m/s} \approx 30 \text{ km/s}$$

Güneşin çekiminden bu yörüngede bulunan bir cismin kaçış hızını enerji korunumu yasasından bulabiliriz.

$$\frac{mv'^2}{2} - \frac{\gamma m_G m}{r_{G-D}} = 0; v' = \sqrt{\frac{2\gamma m_G}{r_{G-D}}} = v_D \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{149,6 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 42114,3 \text{ m/s} \approx 42 \text{ km/s}$$

olur. Zaten v_D hıza sahip olan bir cisme verilmesi gereken hız;

$$\Delta v = v' - v_D = (\sqrt{2} - 1)v_D = 12,4 \text{ km/s}$$

olmalıdır. Buradan verilen minimum üçüncü kurtulma hızı;

$$v_{III} = \sqrt{v_{II}^2 + (\Delta v)^2} = \sqrt{v_{II}^2 + [(\sqrt{2} - 1)v_D]^2} = \sqrt{11,2^2 + 12,4^2} = 16,7 \text{ km/s}$$

olarak bulunur.

Yeryüzünden h yükseklikte çembersel yörünge üzerinde bir uydu hareket etmektedir.

Buna göre uydunun parabolik yörünge üzerinde Dünyadan uzaklaşmak için uyduya verilmesi gereken minimum hız nedir? (Dünyanın yarıçapı R, yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.)

A) $\sqrt{\frac{gR(R+h)}{h}}$

B) $\sqrt{\frac{g(R+h)^2}{R}}$

C) $\sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$

D) $\sqrt{\frac{2gR^2}{R+h}}$

E) $\sqrt{\frac{gR^2}{2(R+h)}}$

10. Bilgi: Milisaniye pulsaları olarak bilinen yıldızlar birkaç milisaniye arasındaki periyotlarla çok kısa puls şeklinde radyasyon yayan kaynaklardır. Bu radyasyon, radyo dalgaları bandında olup, uygun bir radyo alıcısı ile izlenebilir ve böylece pulsaların periyotları büyük bir doğrulukla ölçülebilir. Pulsar, kendi etrafında dönen ve elektromanyetik ışımaya yayan bir nötron yıldızıdır. Yayınladığı bu ışımaya dünyamıza ulaştığında pulsarın her bir dönüşü için bir sinyal (puls) kaydedilmektedir. Milisaniye pulsaları olarak bilinen yıldızlar birkaç milisaniye arasındaki periyotlarla çok kısa puls şeklinde radyasyon yayan kaynaklardır. Bu radyasyon, radyo dalgaları bandında olup, uygun bir radyo alıcısı ile izlenebilir ve böylece pulsaların periyotları büyük bir doğrulukla ölçülebilir. Tipik bir pulsarın kütlesi güneşin M_G kütlesine, özkütlesi de nükleer özkütlesine eşit olup R yarıçapı yaklaşık onlarca kilometre boyutunda ve kendi eksenini etrafında dönme T periyodu birkaç saniyedir. Çok hassas ölçümlerle pulsarların ışımaya periyodunun senede $\Delta T \ll T$ arttığı ölçülmüştür. Bu süre içinde pulsarın kütle ve yarıçapının sabit kaldığı kabul edilebilir. Dönen pulsarın kinetik enerjisi;

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{2J\pi^2}{T^2}$$

bu kinetik enerjinin değişimi;

$$\Delta E_k = \frac{2J\pi^2}{(T+\Delta T)^2} - \frac{2J\pi^2}{T^2} = \frac{2J\pi^2}{T^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)^2} - \frac{2J\pi^2}{T^2} = \frac{2J\pi^2}{T^2 \left(1 + \frac{2\Delta T}{T}\right)} - \frac{2J\pi^2}{T^2} = \frac{2J\pi^2}{T^2} \left(1 - \frac{2\Delta T}{T}\right) - \frac{2J\pi^2}{T^2} = -\frac{4J\pi^2 \Delta T}{T^3}$$

kinetik enerjiden kaynaklanan güç;

$$P = -\frac{\Delta E_k}{\Delta t} = -\frac{4J\pi^2 \Delta T}{T^3 \Delta t}$$

olarak bulunur. Pulsarlarda iç bölgelerdeki nötron bir akışkan gibi davranır üst katman ise kristal yapıdadır. Kristal katı üst katman iç sıvı akışkanın şeklini almaya çalışır. Böylece, nötron yıldızı hızlı dönme sonucu hafif yassılmaya başlar Bu kadar hızlı dönen bir pulsarın basık olması (elipsoit şeklinde) beklenmesine rağmen daha çok küresel şekilde kalır. Fizikte dönen bir cismin küresel simetriden ne kadar saptığını basınlık faktörü ile ifade edilmektedir. Basınlık faktörü merkezkaç kuvvetinin, çekim kuvvetine oranıdır. Tipik bir pulsar Güneş kütlesine sahip olduğunu, yarıçapı 10 km ve dönme periyodu 1 s olduğunu kabul edelim. Pulsarın basınlık faktörü;

$$\xi_D = \frac{mv_p^2}{R_p} = \frac{4\pi^2 R_p^3}{\gamma m_p T_p^2} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot (10 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1^2} \approx 3 \cdot 10^{-7}$$

olarak bulunur. Bu değer çok küçük olduğu için pulsarlar neredeyse tamamen küresel simetriye sahiptir. Yıldızların sahip oldukları manyetik alan manyetik dipol momentine sahip bir manyetik dipole benzemektedir. Yıldızın pulsara dönüşme sürecinde manyetik akı korunduğu için nötron yıldızın yüzeyindeki manyetik alan çok büyük değerlere ulaşmaktadır. İlk manyetik alan B_0 ise nötron yıldızın manyetik alanı;

$$\Phi = B_0 \cdot 4\pi R_0^2 = B \cdot 4\pi R^2; B = \frac{B_0 R_0^2}{R^2} = \frac{B_0 \cdot 700000^2}{10^2} \approx 5 \cdot 10^9 B_0$$

olur. Büyük değerlerde dönen manyetik alan elektronları çok yüksek hıza kadar hızlandırmaktadır. Elektronlar ivmelendikleri için ışımaya yaymaktadır. Bu ışımaya sadece gözlem doğrultusunda ise algılanabilir.

Güneş gibi bir yıldız pulsara dönüşürse yarıçapı yaklaşık olarak 10 km olur.

Yıldız hiç madde kaybına uğramazsa kendi eksenini etrafında dönme kinetik enerjisi ilk kinetik enerjinin kaç katı olur? (Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Güneşin kütlesi $M_G = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, Güneşin yarıçapı $R = 700000 \text{ km}$, Güneşin kendi eksenini etrafında dönme periyodu $T = 27 \text{ gün}$ olarak veriliyor.)

A) $7,6 \cdot 10^{13}$

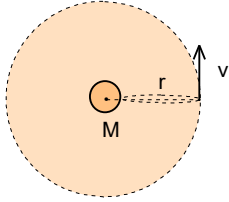
B) $1,9 \cdot 10^{14}$

C) $3,8 \cdot 10^{15}$

D) $2,4 \cdot 10^{16}$

E) $5,2 \cdot 10^{17}$

11. Bilgi: Bugün yıldızların toz ve gaz bulutlarında meydana gelen gravitasyonel dengesizlikler sonucu oluştuğu kabul edilmektedir. Toz ve gaz bulutlarının özkütlesi $\rho=10^{-24} \text{ g/cm}^3$ civarında olduğu gözlemler sonucu tespit edilmiştir. Çok büyük bir hacimde bulunan böyle bir bulutta gravitasyonel dengesizlikler sonucu toz ve gaz bulutlarını oluşturan madde içe çökme (collapse) sonucu sıkışmaya başlar ve sıcaklığı devamlı artar. Bahsedilen hacimlerin boyutları ve bu hacimde bulunan maddenin kütlesi çok çok büyük oldukları için oluşumlar çok kararlı bir şekilde davranamazlar çünkü özkütlesinin artması ile kompleksin bazı alt oluşumları kendi başına hareket etmeye başlarlar. Böylece devasa kompleks daha küçük lokal oluşumlara dağılmaktadır. Bahse-dilen oluşum aşaması neden yıldızların küme halinde oluştuğunu izah etmektedir. Kompleksin oluşumu ve dağılması sürecinde lokal bölgeleri temsil eden maddesel oluşumlar birbirine göre belirli hızla hareket etmektedir. Bu hareketten dolayı oluşumda belirli momentum ve açısal momentum mevcuttur. Boyutların azalması ile açısal momentumun korunumu yasası gereği oluşumun dönme hızı artması gerekir. Bu oluşumların çok hızlı dönmediği deneysel olarak kanıtlanmıştır. Yani bir şekilde oluşum açısal momentumunu kaybetmektedir. Açıklama oluşumun izole edilmemesi ile ilgilidir. Yani oluşum diğer benzer oluşumlarla ya da galaksilerle manyetik alan çizgiler sayesinde bağlıdır. Oluşumda bulunan madde iyonize olduğu için uzayan manyetik alan çizgileri sayesinde madde yan bölgeler aktarılmaktadır. Bu şekilde oluşumun açısal momentumun büyük kısmı oluşumun dışına aktarılmaktadır. Bu aktarıma ancak maddenin yoğunluğu artması, iyonizasyonun ve iletkenliğin azalması ile manyetik bağ kesilmesi ile son bulur. Bu şekilde yıldız öncesi oluşan nesneye protoyıldız denilir. Protoyıldızların açısal momentumları hala çok yüksek olabilir. Bu yüksek açısal momentumdan kurtulmanın yolu ya madde kaçıyla gezegen sistemi oluşturmak, ya da yıldız rüzgarı sayesinde yıldızın manyetik alanı çizgileri boyunca madde kaçırmak olur.



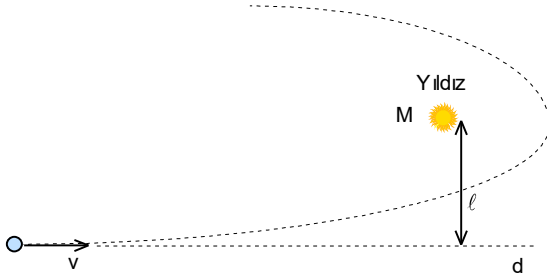
Oluşumun merkezinden r uzakta bulunan bir tanecik gravitasyonel kuvvetin etkisi altında merkeze doğru düşmeye başlamaktadır. Model olarak bir tanecik çembersel yörünge üzerinde M kütleli oluşumun merkezinden r uzaklıkta hareket ettiğini ve merkezci kuvvet gravitasyonel kuvvete eşittir. Bu şarttan taneciğin yörünge üzerindeki periyodu;

$$\frac{mv_0^2}{r} = \frac{\gamma Mm}{r^2}; T_0 = \frac{2\pi r}{v_0} = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}}; M = \rho V = \frac{\rho \cdot 4\pi r^3}{3}$$

olarak bulunur. Toz tanecikleri oluşumun merkezine doğru hareketi için ışına etkili oluncaya kadar engelsiz devam eder. Toz taneciklerinin düşme süresini değerlendirmek için üçüncü Kepler yasasından faydalanabiliriz. Eğer tanecik aniden durursa çekim merkezine doğru düşmeye başlayacaktır. Bu düşme tanecik sanki çok dar bir elips üzerinde hareket ediyor gibi düşünülebilir. Kepler yasasın kullanarak taneciklerin merkeze düşme süresi;

$$\frac{T^2}{T_d^2} = \frac{r^3}{a^3}; a = \frac{r_0}{2}; t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\gamma\rho}} \approx 10^6 \text{ yıl}$$

olarak bulunur.



Oluşan yıldızlar galaksilerdeki hareketlerinde daha küçük kütleli cisimleri kendisine doğru çekmektedir. Bir cisim yıldız doğru d doğrusu boyunca ℓ nişan hatası ve v hızı ile gelirse yıldız üzerine düşebilir ya da yıldızdan belli minimum mesafesinde geçebilir. M kütleli yıldız göre cismin açısal momentumu korunumu yasası ve enerji korunumu yasası için;

$$mv\ell = mur; \frac{mv^2}{2} = -\frac{\gamma Mm}{r} + \frac{mu^2}{2}$$

yazabiliriz. Buradan Yıldızla olan en yakın uzaklık;

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{\gamma Mm}{r} + \frac{m}{2} \left(\frac{v\ell}{r} \right)^2 \Rightarrow r^2 + \frac{2\gamma Mr}{v^2} - \ell^2 = 0; r = \frac{\gamma M}{v^2} \left(\sqrt{1 + \frac{v^4 \ell^2}{\gamma^2 M^2}} - 1 \right)$$

olarak bulunur.

Özkütlesi ρ olan bir parçacık bulutu kütlesi M ve yarıçapı R olan bir yıldızla doğru v hızı ile yaklaşmaktadır.

Yıldızın kütlesinin artış hızı nedir? (Burada yıldız ile çarpışmaya uğrayan parçacıkların yıldız tarafından yutulduğunu varsayınız. Evrensel çekim sabiti γ olarak veriliyor.)

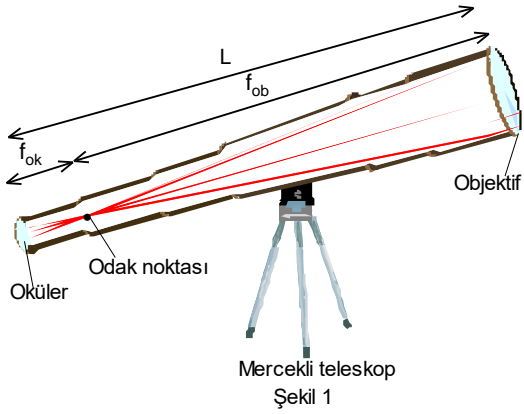
A) $\rho\pi v \left(R^2 + \frac{2v^2}{\gamma MR} \right)$

B) $\rho\pi v \left(R^2 + \frac{v^2}{2\gamma MR} \right)$

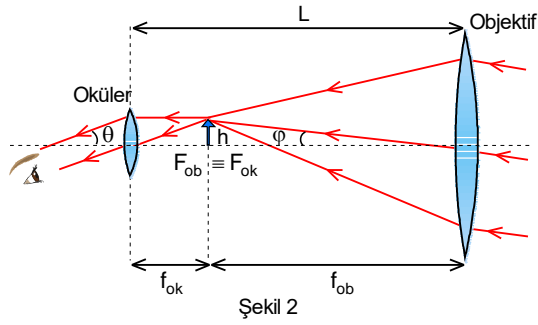
C) $\rho\pi v \left(R^2 + \frac{\gamma MR}{v^2} \right)$

D) $\rho\pi v \left(R^2 + \frac{2\gamma MR}{v^2} \right)$

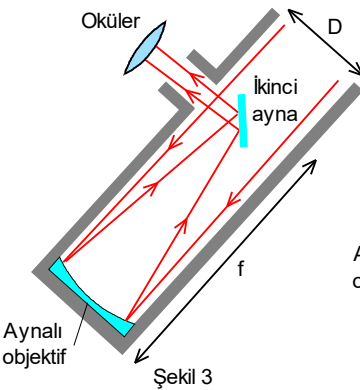
E) $\rho\pi v \left(R^2 + \frac{\gamma MR}{2v^2} \right)$



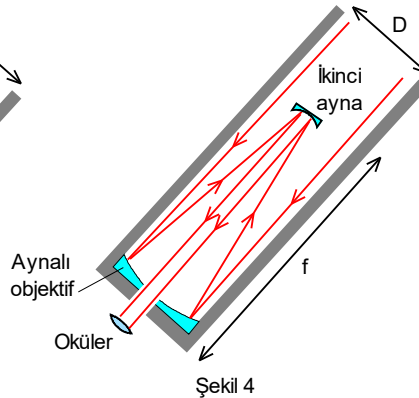
Mercekli teleskop
Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3



Şekil 4

12. Bilgi: Mercekli teleskop objektif ve oküler (göz merceği) merceklerin yardımıyla çok uzaktaki cisimleri gözlemlemek için kullanılır. Bir teleskobun objektif merceğinin odak uzaklığı f_{ob} , oküler merceğinin odak uzaklığı f_{ok} dır. Teleskoptaki objektifin odak uzaklığı büyük, okülerin odak uzaklığı ise küçüktür. Teleskopta net görüntü oluşturmak için teleskobun eksenini boyunca oküleri ileri geri hareket ettirilir. Teleskobun objektifinin çapı daha fazla ışık toplaması için okülerin çapından oldukça büyüktür. Teleskopta objektifin ikinci odağı ile okülerin birinci odağı çakışacak şekilde yerleştirilir. Teleskobun uzunluğu Şekil 1 deki gibi objektif ve okülerin odak uzaklıklarının toplamına eşittir.

$$L = f_{ob} + f_{ok}$$

Objektifte oluşan görüntü noktasal olamaz. Bu görüntünün boyu h ise objektifin açısal büyütmesi Şekil 2 deki gibi;

$$m_{ob} = \tan \varphi \approx \varphi = \frac{h}{f_{ob}}$$

okülerin açısal büyütmesi;

$$m_{ok} = \tan \theta \approx \theta = \frac{h}{f_{ok}}$$

teleskobun büyütmesi;

$$m_M = \frac{m_{ok}}{m_{ob}} = \frac{f_{ob}}{f_{ok}}$$

olarak bulunur.

Aynalı optik teleskoplarda küresel ya da parabolik bir aynalı objektif kullanılır. Aynalı objektiften yansıyan ışınlar Şekil 3 teki gibi aynalı objektifin neredeyse odak noktasında bulunan ikinci düzlem bir aynaya yansıtılır. Düzlem aynadan yansıyan ışınlar ile oluşan görüntü oküler (göz merceği) ile gözlenmektedir. Aynalı teleskopta ikinci ayna Şekil 4 teki gibi eliptik bir ayna da kullanılabilir. İkinci ayna yansıyan ışınları aynalı objektifte bulunan bir açıklığa yansıtır. Buradan geçen ışınlar oküler (göz merceği) ile gözlenmektedir.

Aynalı teleskobun odak uzaklığı aynanın çapın orana odak/çap oranı denir $\frac{f_D}{D}$ ile gösterilir. Aynalı teleskoplardaki büyütme oranı yine;

$$m_D = \frac{f_D}{f_{ok}}$$

olarak bulunur.

Mercekli bir teleskobun objektif merceğinin odak uzaklığı 120 cm olup teleskobun büyütme oranı 50 dir. Bu teleskobun göz merceğinin odak uzaklığına sahip olan göz merceği ile odak/çap oranı 6 ve çapı 0,5 m olan aynalı teleskopta oluşan görüntü izlenmektedir.

Buna göre aynalı teleskobun büyütme oranı nedir?

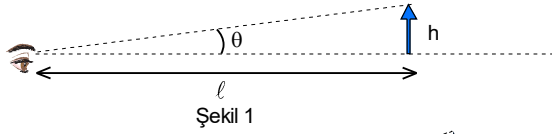
A) 750

B) 1000

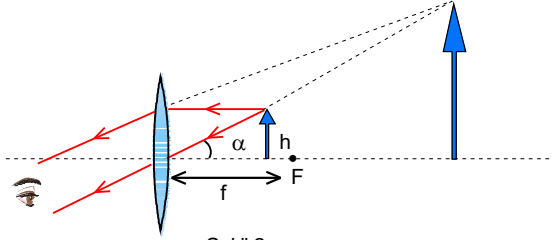
C) 1250

D) 1500

E) 1750



Şekil 1



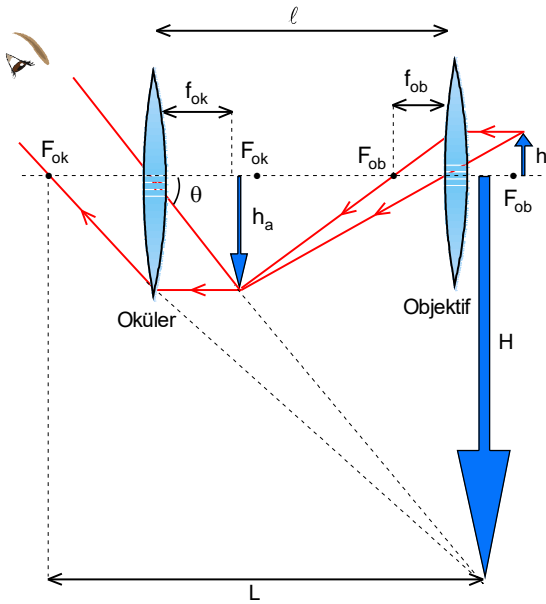
Şekil 2

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{h}{f}$$

olur. Büyüteçlerde açısal büyütme ifade edilir. Açısal büyütme;

$$m = \frac{\alpha}{\theta} = \frac{f}{l}$$

olarak bulunur. Yetişkin insanlarda sağlıklı bir gözün yakın noktası yaklaşık 25 cm uzaklıktadır. Kullanılan büyütecin odak uzaklığı 5 cm ise açısal büyütme 5 olur. Fakat büyütecin odak uzaklığı ne kadar küçük olursa açısal büyütmesi o kadar büyük olur ve cismin görüntüsündeki bozulmalar artar.



gözlenen cismin boyu;

$$H = kmh = \frac{(\ell - f_{ok})Lh}{f_{ob}f_{ok}}$$

olarak bulunur.

Bir mikroskopta objektif ile oküler mercekler arasındaki uzaklık 20 cm dir. Okülerin odak uzaklığı 0,5 mm ve gözlemi yapan gözlemcinin en iyi gördüğü uzaklık 25 cm dir.

Bu mikroskopun büyütme oranı 150 olduğuna göre objektifin odak uzaklığı kaç cm dir?

A) 5

B) 5,5

C) 6

D) 6,5

E) 7

13. Bilgi: Küçük bir cisme daha yakından bakmak için gözümüzü olabildiğince bu cisme yaklaştırmalıyız. Fakat gözümüz yakın noktasından daha yakındaki bir cisme odaklanamaz. Bir cismin kendisinden daha büyük görüntüsünü gözlemlemek için kullanılan odak uzaklıkları küçük olan merceklerle büyüteç denir. ℓ uzaklıkta ve h yüksekliğindeki çok küçük bir cisim çıplak göz ile Şekil 1 deki gibi gözleniyor. Cismin gözlendiği açı;

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{h}{\ell}$$

olur. Bundan sonra cisim odak uzaklığı f olan bir büyüteç ile gözleniyor. Bunun için cisim Şekil 2 deki gibi büyütecin odak noktasına çok yakın bir noktaya konuluyor. Bu durumda cismin gözlendiği açı;

Mikroskopta objektif ve oküler merceklerin yardımıyla gözle görülemeyecek kadar küçük cisimler gözlenir. Mikroskopta odak uzaklığı f_{ob} olan objektif merceği ile odak uzaklığı f_{ok} olan oküler merceği arasındaki uzaklık ℓ , gözün en iyi gördüğü uzaklık L olsun. Gözlenen cisim objektifin odak noktasına çok yakına konulur. Objektifin önüne yerleştirilen cismin görüntüsü objektifin odak noktası ile oküler arasında, ters ve gerçek olarak oluşur. Bu görüntü, oküler için cisim gibi davranır. Objektifte oluşan görüntü okülerin odak noktasına çok yakın olmalıdır. Cismin boyu h ise objektifin boyca büyütmesi;

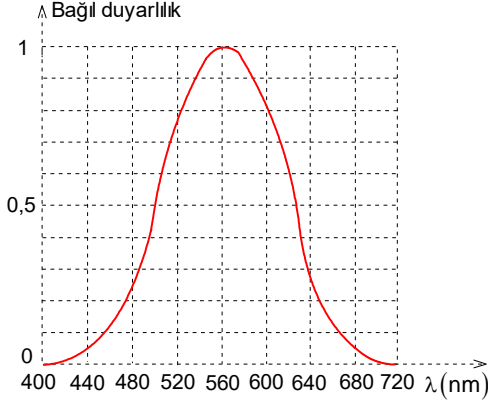
$$k = \frac{b_{ob}}{a_{ob}} = \frac{h_a}{h} \Rightarrow \frac{\ell - f_{ok}}{f_{ob}} = \frac{h_a}{h}$$

ile verilir. Objektifte oluşan görüntü okülerin odak noktasına çok yakında olduğu için okülerden bir büyüteç gibi gözlenir. Okülerin açısal büyütmesi;

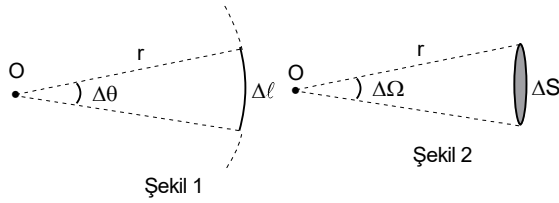
$$m = \frac{L}{f_{ok}}$$

toplam büyütme;

$$km = \frac{(\ell - f_{ok})L}{f_{ob}f_{ok}}$$



dalga boyu 660 nm olan kırmızı ışığın, dalga boyu 555 nm olan yeşil ışık kadar etki oluşturması için göze 10 kat fazla ışık akısı gelmelidir. Kırmızı ışığın dalga boyu 760 nm ise, göze 20 000 kat fazla ışık akısı gelmelidir. Grafikte dalga boyu 555 nm olan yeşil ışığa karşılık gözün duyarlılığı 1 olarak kabul edilmiştir. Fotoelektrik olaya bağlı olarak çalışan araçlarda da benzer bir durum geçerlidir. Bu araçların ışığa karşı duyarlılığı ışık spektrumunun farklı dalga boyları için farklı olur. Güneş'in yaydığı ışığın şiddetinin maksimum olduğu dalga boyu görünür ışığın sarı rengine karşılık gelir. Canlılar Güneş etrafında evrim geçirip yaşadıkları için göz en çok sarı renge ve bu renge yakın yeşil renkte olan bitkilerin rengine duyarlıdır.



İki boyutlu düzlemde merkezi O ve yarıçapı r olan bir çember çizilir. Bu çemberde Şekil 1 deki gibi merkez açısı $\Delta\theta$ olan küçük bir açı çizilir. Bu açının karşısında bulunan yay parçasının uzunluğu $\Delta\ell$, çemberin yarıçapından çok küçük olmalıdır. Bu durumda düzlemsel açı;

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\ell}{r}; \theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

olarak tarif edilir. Yay parçalarının tüm uzunlukları toplanırsa düzlemsel açı toplamı 2π dir. Üç boyutlu uzayda gözlem yaptığımız açıya katı açı denir. Üç boyutlu uzayda merkezi O ve yarıçapı r olan bir küre çizilir. Bu kürede Şekil 2 deki gibi merkez açısı $\Delta\Omega$ olan küçük bir katı açı çizilir. Bu açının karşısında bulunan dairesel parçanın alanı ΔS ise, bu dairenin çapı kürenin yarıçapından çok küçük olmalıdır. Oluşan koni için katı açı;

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S}{r^2}; \Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

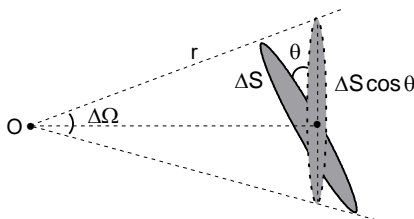
olarak tarif edilir. Dairesel parçaların alanları toplanırsa katı açı toplam 4π dir. Küresel yüzey seçmemizin sebebi ise kürenin merkezinde bulunan noktasal ışık kaynağının yaydığı ışık ışınlarının küre yüzeyinin tüm noktalarında yüzeye dik olarak gelmesidir. (Noktasal ışık kaynağın boyutları incelenen mesafelere göre çok çok küçüktür.) Bir kaynaktan birim katı açıdan yayılan ya da birim zamanda birim alana düşen ışık akısına ışık şiddeti denir. Matematiksel olarak;

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}$$

tarif edilir. Işık şiddetinin birimi kandela (cd) olur. Bir kandela (cd), bir atmosfer basınç altında platinin erime sıcaklığındaki siyah cismin 1/60 000 metrekare büyüklüğündeki yüzeyine dik doğrultuda birim zamanda yaydığı ışık enerjisi olarak tanımlanır. SI birim sisteminde kandela (cd) birimi temel birimlerden birisidir. Bu birim sayesinde ışık akısının birimi lümen (Lm) birim katı açıya ışık şiddeti 1 cd olan ışık kaynağının yaydığı ışık akısı olarak tanımlanır. Pratikte belli akımla ve potansiyel farkında çalışan ve ışık şiddeti 1 cd olan lambalar kullanılır. Yanan bir mumun ışık şiddeti de 1 cd olarak da kabul edilebilir. Bir ışık kaynağın yaydığı toplam ışık akısı;

$$\Phi = L = 4\pi I$$

olarak verilir.



$\Delta\Omega$ katı açısının açıortayına konulan ΔS alanlı bir yüzey açıortayla şekildedeki gibi θ açısı yaparsa, alanın açıortaya dik olan izdüşümü;

$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \theta$$

ile verilir. Bu durumda katı açı;

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2} = \frac{\Delta S \cos \theta}{r^2}$$

ışık şiddeti;

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega} = \frac{\Delta\Phi r^2}{\Delta S \cos\theta}$$

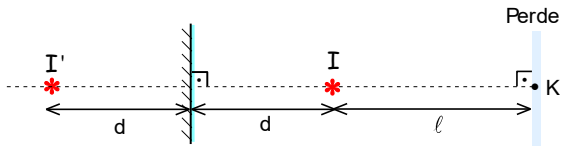
olur. Aydınlanma birim yüzeye düşen ışık akısına denir.

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{I \cos\theta}{r^2}$$

Aydınlanmayı veren ifade Lambert yasası olarak bilinir. Işık bir yüzeye dik olarak gelirse aydınlanma;

$$E = \frac{I}{r^2}$$

ile verilir. Aydınlanmanın birimi lükstür (Lx). Işık şiddeti 1 cd olan noktasal bir ışık kaynağından 1 m uzaklıkta bulunan yüzeye dik gelen ışığın oluşturduğu aydınlanma şiddetine 1 Lx denir. Ayrıca ışık şiddeti 1 cd olan noktasal bir ışık kaynağından 1 m uzaklıkta ve 1 m² büyüklükteki yüzeye dik olarak gelen ışık akısına 1 lümen (Lm) denir.

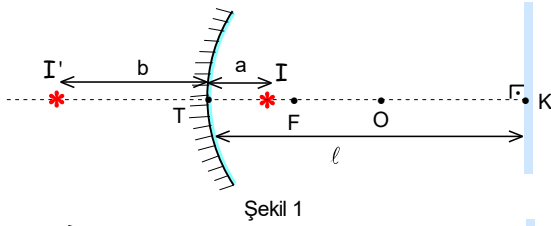


Düzlem ayna, küresel ayna ya da mercekler gibi optik araçlara noktasal ışık kaynaklardan oluşan görüntüler optik aracın cinsine ve mesafeye göre oluşan görüntülerin ışık şiddetleri farklı olabilir. Düzlem aynada oluşan görüntüler aynı büyüklükte, düz ve simetriktir. Işık şiddeti I olan noktasal ışık kaynağı bir perdeden l kadar ve düzlem aynadan d kadar uzaklıkta

şekildeki gibi yerleştiriliyor. Perdeye doğru giden ışınlar perde üzerinde bir aydınlanma oluşturur. Aynaya doğru gelen ışınlar aynadan yansıyor perde üzerinde ilave bir aydınlanma oluşturur. Görüntü kaynağın ışık şiddeti, kaynağın ışık şiddetine eşit olur. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{\ell^2} + \frac{I}{(\ell + 2d)^2}$$

ile verilir.



Çukur aynalarda oluşan görüntülerin türü ve uzaklığı cismin konumuna bağlıdır. Oluşan görüntünün ışık şiddeti, ışık kaynağı ve görüntü kaynağın oluşturdukları aydınlanmaların eşit olma şartından bulunur. Çukur ayna ile perde arasındaki uzaklık l, ışık şiddeti I olan noktasal ışık kaynağı ile ayna arasındaki uzaklık a olsun. Perdeye doğru giden ışınlar perde üzerinde bir aydınlanma oluşturur. Aynaya doğru giden ışınlar aynadan yansıyor perdenin üzerinde ilave bir aydınlanma oluşturur. Işık kaynağı Şekil 1 deki gibi tepe noktası T ile odak noktası F arasında bulunursa oluşan görüntü sanaldır. Görüntünün aynaya olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{f-a}$$

görüntü kaynağın ışık şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(f-a)^2}$$

ışık kaynağının şiddetinden büyüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{(\ell-a)^2} + \frac{I'}{(\ell+b)^2}$$

olur. Işık kaynağı Şekil 2 deki gibi odak noktası F ile merkez noktası O arasında bulunursa oluşan görüntü gerçektir. Görüntünün aynaya olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a-f}$$

görüntü kaynağın ışık şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a-f)^2}$$

ışık kaynağının şiddetinden büyüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{(\ell-a)^2} + \frac{I'}{(\ell-b)^2}$$

Işık kaynağı Şekil 3 teki gibi merkez noktası O dan daha uzakta bulunursa oluşan görüntü gerçektir. Görüntünün aynaya olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a-f}$$

görüntü kaynağın ışık şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a-f)^2}$$

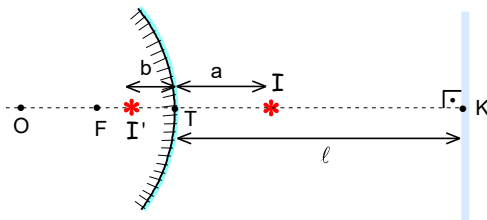
ışık kaynağının şiddetinden küçüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{(\ell-a)^2} + \frac{I'}{(\ell-b)^2}$$

olur. Çukur aynanın odağında bulunan ışık kaynağından yansıyan ışınların oluşturduğu paralel ışık demetindeki aydınlanma uzaklıktan bağımsızdır. Perdenin K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{f^2} + \frac{I}{(\ell-f)^2}$$

ile verilir.



Tümsek aynalarda oluşan görüntüler sanal, düz ve küçüktür. Perdeye doğru giden ışınlar perde üzerinde bir aydınlanma oluşturur. Aynaya doğru gelen ışınlar ayna-dan yansıyıp perdenin üzerinde ilave bir aydınlanma oluşturur. Görüntünün aynaya olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a+f}$$

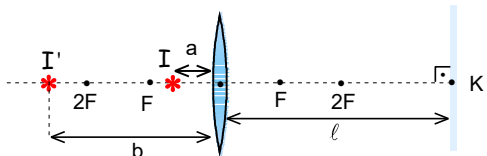
görüntü ışık kaynağın şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a+f)^2}$$

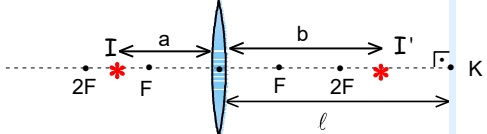
olur ve ışık kaynağının şiddetinden küçüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I}{(\ell-a)^2} + \frac{I'}{(\ell+b)^2}$$

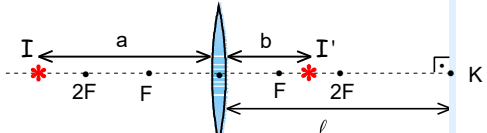
olur.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

İnce kenarlı mercekte oluşan görüntülerin türü ve uzaklığı cismin konumuna bağlıdır. Oluşan görüntünün ışık şiddeti, ışık kaynağının ve görüntü kaynağın oluşturdukları aydınlanmaların eşit olma şartından bulunur. Mercek ile perde arasındaki uzaklık ℓ , ışık şiddeti I olan noktasal ışık kaynağı ile mercek arasındaki uzaklık a olsun. Mercekte kırılan ışınların görüntüsü perde üzerinde aydınlanma oluşturuyor. Işık kaynağı Şekil 1 deki gibi odak noktası F ile mercek arasında bulunursa oluşan görüntü sanaldır. Görüntünün merceğe olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{f-a}$$

görüntü kaynağının şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(f-a)^2}$$

ışık kaynağının şiddetinden büyüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_k = \frac{I'}{(\ell+b)^2}$$

olur. Işık kaynağı Şekil 2 deki gibi odak noktası F ile $2F$ noktası arasında bulunursa oluşan görüntü gerçektir. Görüntünün merceğe olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a-f}$$

görüntü ışık kaynağının şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a-f)^2}$$

Işık kaynağının şiddetinden büyüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_K = \frac{I'}{(\ell-b)^2}$$

Işık kaynağı Şekil 3 teki gibi 2F noktasından daha uzakta bulunursa oluşan görüntü gerçektir. Görüntünün merceğe olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a-f}$$

görüntü ışık kaynağın ışık şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a-f)^2}$$

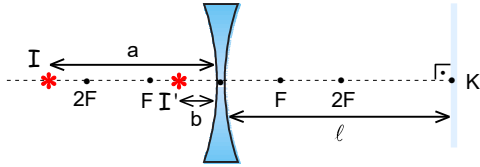
Işık kaynağının şiddetinden küçüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_K = \frac{I'}{(\ell-b)^2}$$

olur. İnce kenarlı merceğin odağında bulunan ışık kaynağından kırılan ışınların oluşturduğu paralel ışık demetindeki aydınlanma uzaklıktan bağımsızdır. Aydınlanma;

$$E = \frac{I}{f^2}$$

ile verilir.



Kalın kenarlı mercede oluşan görüntüler sanal, düz ve küçüktür. Mercede kırılan ve perdeye doğru giden ışınlar perde üzerinde aydınlanma oluşturur. Görüntünün merceğe olan uzaklığı;

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \Rightarrow b = \frac{af}{a+f}$$

görüntü kaynağının şiddeti;

$$\frac{I}{a^2} = \frac{I'}{b^2} \Rightarrow I' = \frac{If^2}{(a+f)^2}$$

Işık kaynağının ışık şiddetinden küçüktür. Perdenin en yakın K noktasındaki aydınlanma;

$$E_K = \frac{I'}{(\ell+b)^2}$$

olur. Optik araçlar üzerine düşen enerji optik aracın alanı sabit ise;

$$E = \Phi t = L t$$

ile verilir. Genelde optik araç sayesinde görüntü elde edilecekse ancak belirli seviyede enerji düşerse fotoğraf filmi üzerinde ya da dijital matris üzerine bir görüntü oluşur.

Güneşli bir günde fotoğraf çekimlerinde bir cismin farklı uzaklıklardan fotoğrafı çekiliyor. İlk çekimde cismin görüntüsünün büyütme oranı k_1 , bu görüntünün filmde net olarak çıkması için objektifin açık kalma süresi t_1 dir. İkinci durumda cismin görüntüsünün büyütme oranı k_2 oluyor.

Buna göre ikinci durumda fotoğraf makinesinin objektifi ne kadar süreyle açık kalmalıdır?

A) $\frac{t_1(k_2-1)^2}{(k_1-1)^2}$

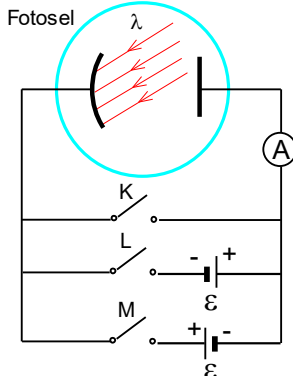
B) $\frac{t_1(k_2+1)^2}{(k_1+1)^2}$

C) $\frac{t_1 k_2^2}{k_1^2}$

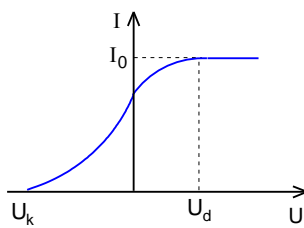
D) $\frac{t_1(k_1-1)^2}{(k_2-1)^2}$

E) $\frac{t_1(k_1+1)^2}{(k_2+1)^2}$

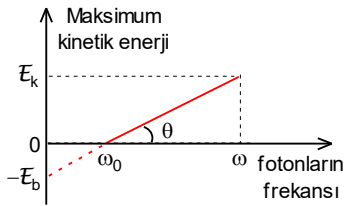
15. Bilgi: Metaller periyodik tabloda 1.ci, 2.ci ve 3.cü grupta bulunan elementlerdir. Metallerde oda sıcaklığında serbest elektronlar bulunmaktadır. Serbest elektronlar tüm metalin hacminde serbestçe hareket etmektedir. Serbest elektronları metalden uzaklaştırmak için metal ısıtılabilir, yüksek enerjili yüklü parçacıklarla bombardıman edilir ya da büyük elektrik alanı uygulanabilir.



Şekil 1



Şekil 2



Şekil 3

Yapılan deneylerde metallere düşen ışık da elektron söktüğü keşfedilmiştir. Işık ve parçacıklar ikili karaktere sahip olup parçacık ve dalga özellikleri göstermektedir. Işık bir parçacık gibi düşünülürse foton olarak adlandırılır. Bir fotonun enerjisi $E = \hbar\omega$, momentumu ise $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ ile verilir. Burada $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h Planck sabiti,

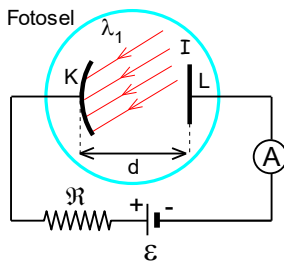
ω fotonun açısal frekansıdır. Fotonların parçacık özellikleri gösterdikleri en etkili deneylerden birisi de metal yüzeylere düşen fotonların metalden elektronlar sökmeleridir. Fizikte bu olaya fotoelektrik olay denir. Genelde deneyde cam kabında katot ve anottan oluşan Şekil 1 deki gibi vakumlu ve fotosel olarak adlandırılan bir düzenek kullanılmaktadır. Katoda düşen fotonlardan sökülen elektronlar anot tarafından toplanır. Fotocele sadece bir ampermetre bağlanıp katoda ışık düşürülürse ampermetre devrede K anahtarı kapatılırsa akım geçtiği gözlenmektedir. Anottan sökülen fotoelektronlar rastgele çıktıkları ve belirli hızlarla sadece bir kısmı anoda ulaşmaktadır. Akan akımın fotocele uygulanan potansiyel farkına nasıl bağlı olduğu ya da çıkan elektronların çıkış hızı hangi parametrelere bağlı olduğunu incelemek için potansiyel fark uygulanmadan ya da kutupları iki farklı şekilde uygulanabilir. Devredeki L anahtarı kapatılırsa ve uygulanan potansiyel fark artırılırsa ilk olarak fotoelektrik akım artar, sonra da sabit bir değere ulaşır. Devredeki M anahtarı kapatılırsa ve uygulanan potansiyel farkı artırılırsa ilk olarak akım azalır ve sonra da sıfır değer düşer. Akımın doyum noktasına kadar ulaştıran potansiyel fark U_d fotocele gönderilen ışığın ışık şiddetine bağlı, akımın kesilmesini sağlayan potansiyel fark U_k fotocele gönderilen ışığın frekansına bağlıdır.

Elde edilen deneysel grafik Şekil 2 deki gibidir. Bununla birlikte katoda düşen ışık demetin dalga boyu da değişebilir. Yapılan deneylerde sökülen elektronların sayısı ve dolayısıyla fotosel devresinde akan akım düşen ışığın şiddetiyle doğru orantılı, sökülen fotoelektronların maksimum kinetik enerjileri düşen fotonun frekansına ya da dalga boyuna şekil 3 teki gibi bağlı, sökülen fotoelektronların kinetik enerjileri düşen fotonların frekansı ile doğru orantılı, sökülen fotoelektronların durdurulması ya da akımın kesilmesi katodun cinsine bağlı, belli eşik frekansı

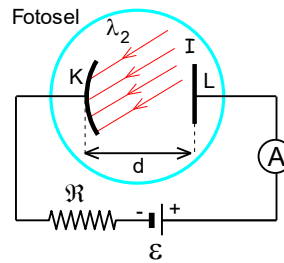
altında fotoelektronların sökülemeyeceği gösterilmiştir. Fotoelektrik olayında deneysel sonuçlarını açıklayan denklem Einstein tarafından;

$$\hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{mv^2}{2} + E_b = eU + E_b = eU + \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_b}$$

olarak teklif edilmiştir. Burada E_b elektronun katottaki bağlanma ya da eşik enerjisi, λ_b eşik dalga boyu olarak bilinir.



Şekil 1



Şekil 2

Bir fotoelektrik deneyinde fotosel lambanın K katodun üzerine dalga boyu λ_1 olan ışık düştüğünde elektronların kesme potansiyeli U oluyor. Bu durumda devrede akım akmaz.

Üretcin kutupları ters çevrilip ve katodun üzerine dalga boyu λ_2 olan ışık düştüğünde sökülen elektronların maksimum kinetik enerjisi nedir? (Elektronun yükü e, Planck sabiti \hbar , ışık hızı c olarak veriliyor.)

A) $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} + \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - 2eU$

B) $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} + eU$

C) $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} + 2eU$

D) $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - 2eU$

E) $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - 2eU$

16. Bilgi: Fotonlar enerjisi $E = \hbar\omega$ ve momentumu $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ olan parçacıklardır. Fotonların enerjileri oldukları için yayıldıkları yıldızların çekim alanından etkilenmektedir. Yıldızlardan uzaklaşırken çekim alanından uzaklaşmak için enerji kaybetmektedir. Fotonun denk kütlesi;

$$m_f = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{2\pi\hbar}{c\lambda}$$

olarak yazılabilir. Yıldızın kütlesi M, yarıçapı R olsun. Bu durumda $r > R$ uzaklığına geldiğinde fotonun dalga boyu;

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{\gamma M}{R} \cdot \frac{2\pi\hbar}{c\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{\gamma M}{r} \cdot \frac{2\pi\hbar}{c\lambda}; \frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{\gamma M}{r} \cdot \frac{1}{c\lambda} = \frac{c}{\lambda} - \frac{\gamma M}{R} \cdot \frac{1}{c\lambda}; \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)} - \frac{\gamma M}{c^2\lambda r} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\gamma M}{c^2\lambda R}$$

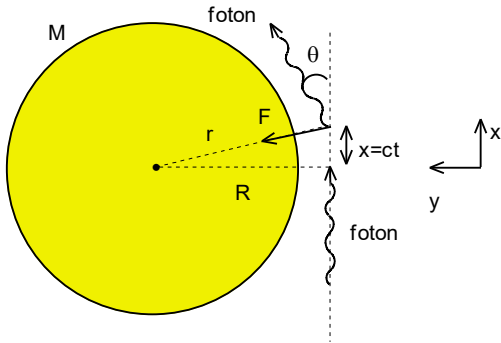
$$\frac{c}{\lambda + \Delta\lambda} - \frac{\gamma M}{r} \cdot \frac{1}{c\lambda} = \frac{c}{\lambda} - \frac{\gamma M}{R} \cdot \frac{1}{c\lambda}; \frac{1}{\lambda \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)} - \frac{\gamma M}{c^2\lambda r} = \frac{1}{\lambda} - \frac{\gamma M}{c^2\lambda R}; \frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} - \frac{\gamma M}{c^2 r} = 1 - \frac{\gamma M}{c^2 R}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda}} = 1 - \left(\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}\right); 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}\right)}; \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}}{1 - \left(\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}\right)}; \Delta\lambda = \frac{\lambda \left(\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}\right)}{1 - \left(\frac{\gamma M}{c^2 R} - \frac{\gamma M}{c^2 r}\right)}$$

kadar artmaktadır. $r \gg R$ durumunda fotonun dalga boyundaki artışı;

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda\gamma M}{c^2 R} = \frac{\lambda\gamma M}{c^2 R - \gamma M}$$

olur. Foton yıldızdan uzaklaşırken dalga boyunun artmasına kırmızıya gravitasyonel kayma denir. Bir yıldızın kütlesi ne kadar büyük, yarıçapı da ne kadar küçük ise kırmızıya kayma daha büyük olur.



Fotonlar bir kütle çekim merkezinin yanından geçerken çekilir ve hareket ettikleri yönden sapmaktadır. Bu sapma yıldızın en yakın noktalar için en büyük olur. İlk yaklaşımda fotonun x ekseninde hareket ettiğini, y ekseninde ise fotonun çekim merkezinden R uzakta geçtiğini kabul edelim. Yani en büyük sapma çekim merkezine teğet geçen fotonlar için gerçekleşmektedir. Şekilde verilen koordinat sistemi kullanarak bu mesafe;

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + c^2 t^2}$$

fotona y yönünde etki eden kuvvetin sağladığı momentum değişimi;

$$\Delta p_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma M m_f dt}{r^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma M m_f dt}{R^2 + c^2 t^2} = \frac{2\gamma M m_f}{cR}$$

fotonun toplam sapması;

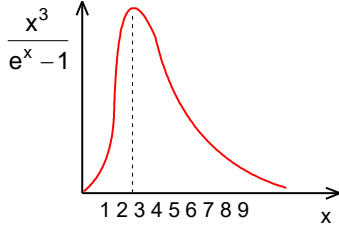
$$\tan\theta \approx \theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{2\gamma M m_f}{Rc} = \frac{2\gamma M}{Rc^2}$$

olarak bulunur. İntegral hesabı merak edenler matematik kitaplara bakabilir. Bulunan sonuç genel izafiyet teorisinin verdiği sonucun yarısı kadardır. Özel izafiyet teorisinde uzayın bükülmesi hesaba katılmadığı için bulunan sonuç deneysel sonucundan farklı çıkıyor.

Belli hacimde bulunan fotonlar gaz gibi davranır. anyol galakside bir yıldızın çok çok uzaklıktaki sabit bir yıldızın göre konumu değişmediği bilinmektedir. Bu yıldız incelenmekte ve yıldızın uzaklığı ℓ , yüzey sıcaklığı T, bu yıldızdan Dünyaya gelen ışın gücü P olarak ölçülmüştür. Yıldızdan çıkan λ dalga boyundaki bir foton Dünyadaki dalga boyu $\Delta\lambda$ daha büyük olarak algılanır.

Buna göre yıldızın kütlesi M nedir? (Evensel çekim sabiti γ , Stefan-Boltzmann sabiti σ olarak veriliyor.)

- A) $\frac{c^2 \ell \Delta\lambda}{\gamma(\lambda + \Delta\lambda)} \sqrt{\frac{\sigma T^4}{P}}$ B) $\frac{c^2 \ell \Delta\lambda}{\gamma(\lambda + \Delta\lambda)} \sqrt{\frac{\sigma T^4}{P}}$ C) $\frac{\gamma(\lambda + \Delta\lambda)}{c^2 \ell \Delta\lambda} \sqrt{\frac{P}{\sigma T^4}}$ D) $\frac{\gamma(\lambda + \Delta\lambda)}{c^2 \ell \Delta\lambda} \sqrt{\frac{\sigma T^4}{P}}$ E) $\frac{c^2 \ell \Delta\lambda}{\gamma(\lambda + \Delta\lambda)} \sqrt{\frac{P}{\sigma T^4}}$



17. Bilgi: Sıcaklığı sabit olan bir sistemde Boltzmann dağılımı geçerlidir. Ayrıca enerji kesikli kuantum değerler almaktadır. Fotonun enerjisi kuantizasyon ilkesine göre sadece $n\hbar\omega$ değerleri alabilir. Enerjinin yani fotonların harmonik osilatörler sayesinde yayılmakta ve ve n.ci seviyede bulunan bir harmonik osilatörün enerjisi;

$$E_n = n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}$$

ile verilmektedir. Oldukça uzun hesaplamalar sonucunda T sıcaklığına ve ω açısal frekansına bağlı ifade;

$$dU_{T;\omega} = \frac{V\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3 \left(e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1 \right)} = \frac{Vk^4 T^4 x^3 dx}{\pi^2 \hbar^3 c^3 (e^x - 1)}; x = \frac{\hbar\omega}{kT}$$

olur. Bu enerjini dağılımın grafiği şekildeki gibidir. Enerji dağılımının maksimum değeri;

$$x_{\text{mak}} = 2,82 = \frac{\hbar\omega_{\text{mak}}}{kT}$$

olur. Maksimumun gerçekleştiği değer için dalga boyu;

$$\lambda_{\text{mak}} = \frac{2\pi c}{\omega_{\text{mak}}} = \frac{b}{T}; b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K}$$

şeklinde yazılabilir. Burada b Wien sabiti olarak bilinir. Tüm frekanslara göre $dU_{T;\omega}$ ifadesi integre edilirse birim zamanda birim alandan yayılan ışımaya yoğunluğu;

$$j_u = \frac{dU_T}{dSdt} = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60 \hbar^3 c^2} = \sigma T^4 = \frac{d(n_0 S c dt \cdot \hbar\omega)}{dSdt} = n_0 c \hbar\omega; \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 \hbar^3 c^2}$$

ile verilir. Burada n_0 fotonların konsantrasyonu, $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ Stefan-Boltzmann sabiti olarak bilinir. R yarıçaplı bir cisimden birim zamanda yayılan enerji akısı ya da ışımaya gücü;

$$\Phi = L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

ile verilir. Bir yüzeye dik düşen ve yansıyan ile soğrulan fotonların momentum değişimleri;

$$\Delta p_1 = 2 \cdot \frac{\hbar\omega}{c}; \Delta p_2 = \frac{\hbar\omega}{c}$$

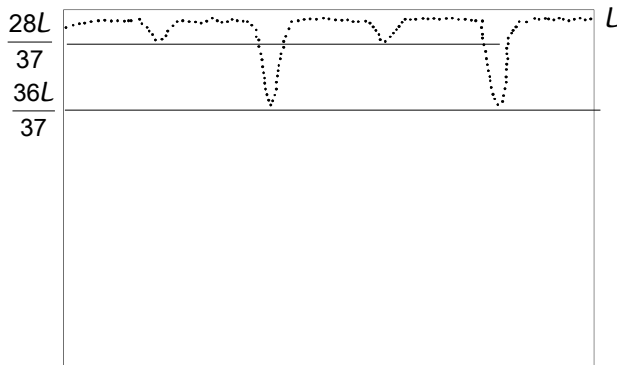
olur. Düşen fotonların yansıma katsayısı ρ olsun. ρ katsayısı düşen fotonların ne kadarı yansıdığını vermektedir. dS yüzeye uyguladıkları kuvvet;

$$dF = \rho n_0 c dS dt \cdot \Delta p_1 + (1-\rho) n_0 c dS dt \cdot \Delta p_2 = \frac{2\rho n_0 c dS dt \cdot \hbar\omega}{c} + \frac{(1-\rho) n_0 c dS dt \cdot \hbar\omega}{c} = \frac{(1+\rho) j_u dS}{c}$$

bu yüzeye etki eden basınç;

$$P = \frac{dF}{dS} = \frac{(1+\rho) j_u}{c} = \frac{(1+\rho) \sigma T^4}{c}$$

olarak bulunur.



Samanyolu galakside ikili yıldız sistemindeki yıldızların yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 , sıcaklıkları T_1 ve T_2 dir. İkili yıldız kendi kütle merkezleri etrafında dönmektedir. Bir teleskop ile ikili yıldızdan gelen ışımaya gücü incelenmektedir. Bu sistemden gelen ışımaya gücü zamanla değişimler göstermektedir. Uzun süre boyunca ışımaya gücü L , belirli kısa aralıklarla $\frac{36L}{37}$ ya da $\frac{28L}{37}$ oluyor. Basit

bir yaklaşımla her bir yıldız küre yerine bir disk gibi ışımaya yaptığını ve bu diskin tabanı gözlem doğrultusuna dik olduğunu kabul edelim.

Buna göre $\frac{R_1}{R_2}$ ve $\frac{T_1}{T_2}$ oranları nedir?

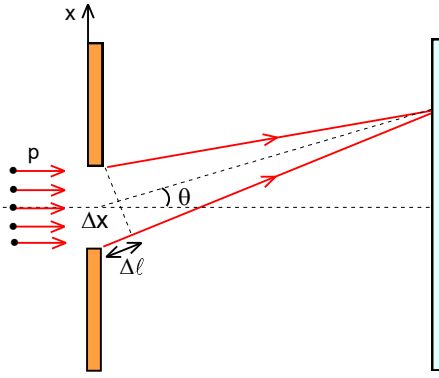
A) $2; \sqrt{2}$

B) $2; \sqrt{3}$

C) $2; \sqrt{6}$

D) $3; \sqrt{2}$

E) $3; \sqrt{3}$



19. Bilgi: Işık ve parçacıklar ikili karaktere sahip oldukları için parçacık ve dalga özellikleri göstrebilmektedir. Dalga özellikleri parçacıkların incelenen mesafelerle aynı boyutta olduklarına ön plana çıkmaktadır. Boyutu Δx çok küçük açıklıktan geçen bir parçacık dalga özelliklerinden dolayı x eksenini boyunca sapmaktadır. Ekran üzerine düşen parçacığın açıklığının uçlarına olan fark kırınım şartından;

$$\Delta x \sin \theta = \lambda = \frac{2\pi\hbar}{mv}; \sin \theta \approx \theta = \frac{\Delta p}{p}$$

ile verilir. Burada Δp parçacığın x yönünde parçacığın kazandığı momentum. Buradan;

$$\Delta p \Delta x = 2\pi\hbar; \Delta p \Delta x \sim \hbar$$

elde edilir. Bu ifade bir modelleme sonucu elde edilmiş olup Hayzenberg

belirsizlik prensibi olarak bilinmektedir. Bu prensibe göre bir parçacığın bulunduğu konumu daha büyük hassasiyetle ölçmeye yapılan deneylerde parçacığın momentumdaki belirsizlik artmaktadır. Çok küçük nesnelerin boyutlarını ölçmek için bu nesnelere daha küçük ölçekli bir nesne kullanılmalıdır. Böyle daha küçük nesnelere çok küçük dalgalı parçacıklar olabilir. Bir parçacığın dalga boyu ne kadar küçük ise enerjisi ve momentumu o kadar büyüktür. Bir nesnenin boyutunu ölçmek için çok küçük dalga boyulu iki parçacık kullanılmalıdır. İlk parçacığın nesnenin bir ucunu, ikinci parçacık ise nesnenin diğer uca gelmelidir. Çok büyük enerjili parçacık daha nesnenin ilk teması ile nesneye çok büyük enerji ve momentum aktardığı için ikinci gelen parçacık nesneyi aynı noktada bulamamaktadır. Hayzenberg belirsizlik ilkesi enerji ve bu enerjini ölçme süresi ve açısal momentum ile açıdaki belirsiz için de geçerlidir. Bu durumda;

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar; \Delta L \Delta \phi \sim \hbar$$

yazabiliriz. Çok küçük parçacıklar özellikle atom ve moleküllerde bulunan elektronlar hareket ettikleri mesafeler de çok küçük oldukları için belirsizlikler de bu mertebededir. Momentum belirsizlikleri de momentum mertebededir. Bu durumda;

$$p_x \sim \hbar; p \sim \frac{\hbar}{x}$$

yazabiliriz. Örneğin hidrojen atomdaki elektronun enerjisi için;

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Kararlı ve tek olan yörünge için bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan yarıçap ve elektronun enerjisi;

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0; r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}; E = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

olarak bulunur. Elde edilen sonuç Bohr atom teorisindeki sonucu ile aynıdır. Örneğin kuantum mekaniksel osilatörün enerjisi için;

$$E = E_k + E_p = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \frac{\hbar^2 k}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin x yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan x ve enerji;

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mx^3} + kx = 0; x = \sqrt{\frac{\hbar}{mk}}; W = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} = \hbar \omega$$

olarak bulunur.

Nötron yıldızların kütleleri Güneşin $M=2.10^{30}$ kg kütlesi ile mukayese edilecek kadar büyüklükte olup yarıçapları $R=10$ km mertebesinde.

Buna göre nötron yıldızı oluşturan nötronların kinetik enerjileri Joule birimi cinsinden hangi mertebededir?

(Nötronun kütlesi $m=1,675.10^{-27}$ kg, Planck sabiti $\hbar=1,05456.10^{-34}$ J.s olarak veriliyor.)

A) 10^{28}

B) 10^{42}

C) 10^{46}

D) 10^{50}

E) 10^{54}

20. Bilgi: Modern fizikte özellikler uzay ve zamanla ilgili ve ölçülebilecek en küçük uzunluk ℓ_{Pl} , en küçük zaman t_{Pl} , gravitasyonel etkileşmelerin taşıyıcının en büyük kütleli parçacık m_{Pl} , en büyük özkütle ρ_{Pl} , en büyük sıcaklık T_{Pl} gibi büyüklükler Planck sabitleri olarak bilinmektedir. Planck sabiti $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05.10^{-34}$ J/s, gravitasyonel teorisinde kullanılan evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67.10^{-11}$ Nm²/kg², özel ve genel rölativite teorisinde kullanılan ışık hızı $c = 3.10^8$ m/s ve özellikler Planck sıcaklığını ifade etmek için Boltzmann $k = 1,38.10^{-23}$ J/K sabitlerin yardımıyla Planck sabitleri ifade edilir. Planck sabitleri özellikle çok çok büyük Evreni ve bu Evrenin içinde sonsuz sayılabilecek oluşumlarda geçerli olan ve oluşumları izah edecek kuantum fiziği yasaları ve genel çekim teorisinde kullanılmaktadır. Evrendeki yapılar elementer parçacıklardan oluştukları için Planck sabitleri çok çok küçük yapılar için de kullanılmaktadır. Planck uzunluğu için birim analiz yapabiliriz.

$$\ell_{Pl} = \hbar^a \gamma^b c^d; m = \left(\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg.s}^2} \right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^d$$

Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 1 &= 2a + 3b + d & \text{kg}; 0 &= a - b & s; 0 &= -a - 2b - d \\ a = b &= \frac{1}{2}; d &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Planck uzunluğunun mertebesi;

$$\ell_{Pl} \sim \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^3}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.1,05.10^{-34}}{(3.10^8)^3}} \sim 10^{-35} \text{ m}$$

olur. Bunun anlamı ise bu mesafeden daha küçük mesafeler fiziksel anlam taşımamaktadır ve ölçülemez. Planck zamanı için birim analiz yapabiliriz.

$$t_{Pl} = \hbar^a \gamma^b c^d; s = \left(\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg.s}^2} \right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^d$$

Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 0 &= 2a + 3b + d & \text{kg}; 0 &= a - b & s; 1 &= -a - 2b - d \\ a = b &= \frac{1}{2}; d &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Planck zamanın mertebesi;

$$t_{Pl} \sim \sqrt{\frac{\gamma \hbar}{c^5}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.1,05.10^{-34}}{(3.10^8)^5}} \sim 10^{-43}$$

olur. Bunun anlamı ise bu süreden daha küçük süreler fiziksel anlam taşımamaktadır ve ölçülemez. Planck kütlesi için birim analiz yapabiliriz.

$$m_{Pl} = \hbar^a \gamma^b c^d; \text{kg} = \left(\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg.s}^2} \right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^d$$

Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 1 &= 2a + 3b + d & \text{kg}; 0 &= a - b & s; 0 &= -a - 2b - d \\ a = d &= \frac{1}{2}; b &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Planck kütesinin mertebesi;

$$m_{Pl} \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{\gamma}} = \sqrt{\frac{1,05.10^{-34}.3.10^8}{6,67.10^{-11}}} \sim 10^{-8} \text{ kg}$$

olur. Bunun anlamı ise bu kütlede daha büyük elementer bir parçacık olamaz. Planck özkütlesi için birim analiz yapabiliriz.

$$\rho_{Pl} = \hbar^a \gamma^b c^d; \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \left(\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg.s}^2} \right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^d$$

yazabiliriz. Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 1 &= 2a + 3b + d & \text{kg}; -3 &= a - b & s; 0 &= -a - 2b - d \\ a = 1; b &= -2; d &= 5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Planck özkütlesinin mertebesi;

$$\rho_{Pl} \sim \frac{c^5}{\hbar \gamma^2} = \frac{(3 \cdot 10^8)^5}{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot (6,67 \cdot 10^{-11})^2} \sim 10^{95} \text{ kg/m}^3$$

olur. Bunun anlamı ise bu özkütleden daha büyük özkütle olamaz. Planck sıcaklığı için birim analiz yapabiliriz.

$$T_{Pl} = \hbar^a \gamma^b c^d k^f; K = \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right)^b \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^d \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{K} \cdot \text{s}^2} \right)^f$$

yazabiliriz. Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 0 &= 2a + 3b + d + 2f & \text{kg}; 0 &= a - b + f & s; 0 &= -a - 2b - d - 2f & K; 1 &= -f \\ a &= 1; b = -\frac{1}{2}; d = \frac{5}{2}; f = -1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Planck sıcaklığının mertebesi;

$$T_{Pl} \sim \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{\gamma}} = \frac{1}{1,38 \cdot 10^{-23}} \sqrt{\frac{1,05 \cdot 10^{-34} \cdot (3 \cdot 10^8)^5}{6,67 \cdot 10^{-11}}} \sim 10^{32} \text{ K}$$

olur. Bunun anlamı ise bu sıcaklıktan daha büyük sıcaklık olamaz. Bir sisteme enerji verildiğinde sıcaklık artmaktadır. Sıcaklığın en büyük değer açısından sınırlandırılmasının fiziksel olarak bir açıklaması olmalıdır. Çok çok yüksek sıcaklıklarda parçacıkların hızları çok büyük oldukları için çarpışmalarda artık yeni parçacıklar oluşmaya başlıyor. Sisteme enerji verilmesi artık sıcaklığı arttırmak yerine sistemdeki parçacık sayısını arttırmaya başlıyor. Parçacık sayısını artması özkütlenin artmasına sebep oluyor. Artan özkütle bir parçacığa düşen hacmi azalmasına sebep olur. Belli bir mesafenin altında artık parçacıklar sıkıştırılmaz duruma gelir. Bir parçacığın sıkıştırılmış birçok küçük bölgeden neredeyse ışık hızıyla ancak komşu bir sıkıştırılmış bölgeye sıçrayacağı için bu süreden daha küçük süreler de meydana gelmez. Görüldüğü gibi fizikte çok büyük ya da çok küçük kavramları büyük ya da küçük olsun sonlu sayılarla ifade edilmektedir. Bu sayısal değerlerin dışında fiziksel büyüklükler anlam taşımamaktadır. Kara cisim ışımasında birim zamanda birim alanda yayılan ışımının sıcaklığın dördüncü kuvveti ile orantılı olduğu bilinmektedir. Bu orantıyı veren σ sabiti Stefan-Boltzmann sabiti olarak bilinmektedir. Bu sabit birim temel fiziksel sabitler ve Boltzmann sabiti cinsinden ifade edilebilir. Kara cisim ışıması için;

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \sigma T^4; \sigma = \hbar^a c^b \gamma^d k^f = \frac{\Delta E}{T^4 \Delta S \Delta t}; \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \right)^a \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^b \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right)^d K^f = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{K}^4 \cdot \text{s}^3}$$

yazabiliriz. Birim analizinden;

$$\begin{aligned} m; 0 &= 2a + b + 3d & \text{kg}; 1 &= a - d & s; -3 &= -a - b - 2d & K; -4 &= -f \\ a &= -3; b = -2; d = 0; f = 4 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Stefan-Boltzmann sabiti temel sabiti cinsinden;

$$\sigma \sim \frac{k^4}{c^2 \hbar^3}$$

ile verilir.

Karadeliklerin bir özelliği olay ufku alanı olup bu olay ufku karadeliğin sınırır. Bu sınır içerisinde yerçekimi o kadar kuvvetlidir ki ışık bile bu sınırın kapattığı alandan kaçamaz. Karadeliğin M kütlesi ne kadar büyük ise karadeliğin ufuk alanı o kadar büyüktür.

Karadeliğin ufuk alanı karadeliğin kütlesine ve bu özelliğini etkileyecek temel fiziksel sabitlere nasıl bağlıdır?

- A) $\frac{M^3 \gamma^3}{c^3}$ B) $\frac{M^3 \gamma^2}{c^2}$ C) $\frac{M \gamma}{c^2}$ D) $\frac{M^2 \gamma^2}{c^4}$ E) $\frac{M^2 \gamma^3}{c^3}$

21. Bilgi: Hidrojen benzeri atomların teorisinde kısmen klasik fizik kısmen de kuantum fiziği fikirleri kullanılmaktadır. Kuantum mekaniğinde elektronların Hayzenberg belirsizlik ilkesi gereği çekirdeklerin etrafındaki hareketlerde yörüngeden bahselemez. Kuantum mekaniğinde elektronların belirli olasılıkla nerde bulduklarından bahsedilir. Bohr atom modelinde elektronlar belirli ve sadece kuantum yasaları sonucu yörüngeler üzerinde hareket edebilir. Hidrojen benzeri atomunun yarıçapını bulmak için dinamik ve enerji korunumu yasalarına ve açısal momentumun kuantize olduğu ilkesine ihtiyaç vardır. Bu durumda elektronun kütlesi çekirdeğin kütlesine göre çok çok küçük olduğunu ve elektron çekirdeğin etrafında hareket ettiği kabul edilmektedir. Elektronun kütlesi m , yükü e , Planck sabiti \hbar kullanılarak;

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}; L = n\hbar = mvr$$

yazabiliriz. Buradan yörüngelerin yarıçapı ve bu yörünge üzerindeki elektronun hızı;

$$mv^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}; m^2 v^2 r^2 = n^2 \hbar^2; m^2 \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m r} r^2 = n^2 \hbar^2; r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \cdot \frac{n^2}{Z}; v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{Z}{n}$$

yörüngedeki enerjisi;

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2}$$

yörüngedeki ivmesi ve dolanım periyodu;

$$a_n = \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{me^6}{(4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^4} \cdot \frac{Z^3}{n^4}; T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n} = \frac{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3}{me^4} \cdot \frac{n^3}{Z^2}$$

elektronun hareketinden kaynaklanan elektrik akım ve çekirdeğin bulunduğu noktada elektron tarafından oluşturulan manyetik alan;

$$I_n = \frac{e}{T_n} = \frac{me^5}{2\pi(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^3 n^3}; B_n = \frac{\mu_0 I_n}{2\pi r_n} = \frac{\mu_0 m^2 e^7}{4\pi^2 (4\pi\epsilon_0)^3 \hbar^5 n^5} Z^3$$

iki enerji seviyesi arasında elektronların geçişiyle meydana gelen fotonun enerjisi;

$$\hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = 13,6 Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); \frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = 13,6 \text{ eV}$$

olarak bulunur. Optik spektroskopisinde birim uzunlukta dalga boyları ile çalışılır. Birim uzunlukta dalga boyu;

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3 c} Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right); R_\infty = \frac{me^4}{64\pi^3 \epsilon_0^2 \hbar^3 c} = 1,0973731568525 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

ile verilir. Burada R_∞ Rydberg sabiti olarak bilinir. Elektronun hareket ettiği yörünge numarası n , elektrona enerji verilip elektronun geçtiği yörünge numarası $n+\Delta n$ ve $\Delta n \ll n$ ise gerekli olan enerji;

$$E_{n,n+\Delta n} = E_{n_2} - E_{n_1} = \frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\Delta n)^2} \right] = \frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{\Delta n}{n} \right)^2} \right] \approx$$

$$\approx \frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 \left(1 + \frac{2\Delta n}{n} \right)} \right] \approx \frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2\Delta n}{n} \right) \right] = \frac{me^4 Z^2 \Delta n}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2 n^3}$$

olur.

Uzayda en çok bulunan element hidrojen ve bundan sonra helyum elementi gelmektedir. Helyum atomu bir kere iyonize edilirse hidrojen benzeri atomu gibi davranmaya başlıyor. Hidrojen atomunda birinci yörünge üzerinde hareket eden bir elektronun çekirdek üzerinde oluşturulan manyetik alan B_1 , bir kere iyonize edilmiş helyum iyonunun ikinci yörünge üzerinde hareket eden bir elektronun çekirdek üzerinde oluşturulan manyetik alan B_2 dir.

Buna göre $\frac{B_1}{B_2}$ oranı nedir?

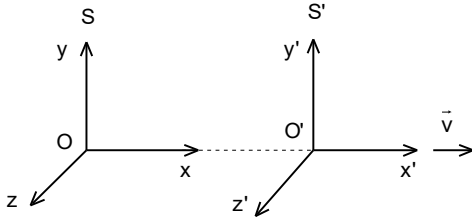
A) 2

B) 4

C) 8

D) 16

E) 32



22. Bigi: Aynı olayı x eksenleri birbirine çakışık olan hareketsiz S ve bu sisteme göre +x yönünde sabit bir v hızı ile hareket eden S' referans sistemlerinde inceleyelim. S sisteminde x=y=z=0 koordinatlarında ve t=0 anında bir işaret fişeği ateşlenerek etrafında küresel aydınlanma oluşturduğunu kabul edelim. t=0 anında her iki koordinat sisteminin orijinleri üst üste bulunsun. Işığın küresel dağılımını her iki koordinat sisteminde de ifade edebiliriz. Küresel aydınlanma S koordinat sisteminde;

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2;$$

şeklinde yazılabilir. Bizi ilgilendiren x yönündeki dönüşümlerdir. Bu sebeple iki koordinat sisteminde küresel aydınlanma;

$$x^2 - c^2 t^2 = 0; \quad x'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

olur. Klasik fizikte iki koordinat sistemi arasındaki Galilei dönüşümleri düşük hızlarda geçerli olmasına rağmen yüksek hızlarda özel rölativite teorisindeki ikinci postülatı uymamaktadırlar. Bu durumda zaman koordinatlarında değişikliğe uğrayacağını göz önüne alarak iki koordinat sisteminin koordinatları arasındaki dönüşüm;

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad t = \alpha(\delta x' + t')$$

şeklinde aranabilir. Burada γ , α ve δ hızla bağlı birtakım katsayılarıdır. Bu dönüşüm kullanarak küresel aydınlanma için;

$$[\gamma(x' + vt')]^2 - c^2 [\alpha(\delta x' + t')]^2 = x^2 - c^2 t^2$$

yazabiliriz. Buradan katsayıları eşitleyerek üç denklem elde edebiliriz. Bu denklemlerin çözümü;

$$\begin{aligned} \gamma^2 x'^2 + 2\gamma^2 v x' t' + \gamma^2 v^2 t'^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 x'^2 - 2c^2 \alpha^2 \delta x' t' - c^2 \alpha^2 t'^2 &= x^2 - c^2 t^2 & \gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 &= 1 \\ (\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2) x'^2 + 2(\gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta) x' t' + (\gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2) t'^2 &= x^2 - c^2 t^2 & \gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta &= 0 \\ & & \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 &= -c^2 \end{aligned} \quad ; \quad \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \delta = \frac{\beta}{c}$$

olur. Fizikte yüksek hızlarda konum ve zaman arasındaki ilişki Lorentz dönüşümleri olarak bilinmektedir. Bu dönüşümleri ve ters dönüşümleri $y=y'$ ve $Z=z'$ için;

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x' + vt'); \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - vt); \quad t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right); \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

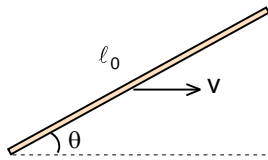
şeklinde yazılabilir. $\beta \ll 1$ yani $v \ll c$ durumunda Lorentz dönüşümleri Galilei dönüşümlere geçmektedirler. İki farklı için zaman dönüşümü ve iki koordinat sistemi arasındaki zaman ilişkisi;

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{\beta x_1'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{\beta x_2'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

olarak yazılabilir. Burada t_0 hareketli koordinat sisteminde geçen süre, t ise hareketsiz koordinat sisteminde geçen süredir. Bu bağıntı zaman genişlemesi olarak da adlandırılır. Hareketsiz koordinat sistemindeki saatinde geçen süre, hareketli koordinat sistemindeki saatinde geçen süreden büyüktür. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli koordinat sisteminin boyunu ölçmek için ölçüm bu koordinat sistemindeki saatinde göre eş zamanlı yapılmalıdır. Bu durumda;

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \ell = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

olarak bulunur. Burada ℓ_0 bir cismin hareketsiz iken boyudur. Hareketli bir cisimde bu uzunluk değişmez çünkü ölçüm yapılacağı metrenin de boyu kısaldığı için hareketli koordinat sistemindeki gözlemci boyun azaldığını tespit edemez. Hareketsiz bir gözlemciye göre hareketli bir cismin boyu sadece hareket yönünde azalır ve buna uzunluk büzülmesi denir.



Öz boyu ℓ_0 olan bir çubuk $v=\beta c$ hızı ile hareket etmektedir. Hız ile çubuk arasındaki açı θ dır.

Hareketsiz bir gözlemci çubuğun boyu ne kadar ölçer? Çubuğun hız ile yaptığı açı nedir?

A) $\ell_0 \sqrt{1-\beta^2}; \quad \frac{\cot \theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

B) $\ell_0 \sqrt{1-\cos^2 \theta}; \quad \frac{\cot \theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

C) $\ell_0 \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \theta}; \quad \frac{\cot \theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

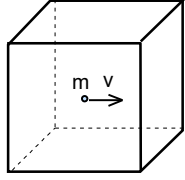
D) $\ell_0 \sqrt{1-\cos^2 \theta}; \quad \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

E) $\ell_0 \sqrt{1-\beta^2 \cos^2 \theta}; \quad \frac{\tan \theta}{\sqrt{1-\beta^2}}$

23. Bilgi: Molekül kinetik teoriden klasik m kütleli parçacıklardan oluşan gazın basıncı bilinmektedir. Basınç hesabı yapılırken sadece moleküllerin buldukları kabın yüzeyi ile çarpışmalar göz önünde bulundurulmaktadır. Bundan dolayı basınç hesaplamalarında tüm moleküller tek atomlu gaz gibi davranır. Tek atomlu gazların adyabatik katsayısı $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3}$

tür. Adyabatik süreçlerde P basınç, v hacmi ve T sıcaklığı için geçerli olan denklemler:

$$PV^\gamma = \text{sabit}; P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T = \text{sabit}; TV^{\gamma-1} = \text{sabit}$$



Çok çok büyük sayıda parçacıklardan oluşan sistemlerde parçacıkların kütleleri m, parçacıkların sayısı N, hızları v eşit olduğunu kabul edelim. İdeal gazın iç enerjisi parçacıkların kinetik enerjilerin toplamıdır. Bu gazın iç enerjisi;

$$U = N \cdot \frac{mv^2}{2}$$

ile verilir. Belli yönde de parçacıkların;

$$\Delta N = \frac{n_0 S v \Delta t}{6}; n_0 = \frac{N}{V}$$

kadarı hareket ettiğini kabul edebiliriz. Burada n_0 parçacıkların konsantrasyonu, S parçacıkların geçtikleri alan, Δt ise S alanından parçacıkların geçiş süreleridir. Parçacıklar bir küpün içinde bulduklarını ve sadece küpün yan yüzeylere doğru dik olarak hareket ettiğini kabul edelim. Bu durumda esnek çarpışmadan sonra bir parçacığın momentum değişimi;

$$\Delta p_1 = mv - (-mv) = 2mv$$

N parçacığın momentum değişimi;

$$\Delta p = N \Delta p_1 = \frac{mv^2 n_0 S \Delta t}{3} = \frac{Nm v^2 S \Delta t}{3V}$$

Bu moleküllerin yüzeye oluşturdukları basınç;

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Nm v^2}{3V} = \frac{2N}{3V} \frac{mv^2}{2} = \frac{2U}{3V} = \frac{\left(\frac{5}{3}-1\right)U}{V} = \frac{(\gamma-1)U}{V} = \frac{Np \cdot v}{3}$$

olarak bulunur. Bu yöntemi foton gazı için de kullanabiliriz. Fotonlar enerjisi $E = \hbar\omega$ ve momentumu $p = \frac{\hbar\omega}{c}$ olan

parçacıklardır. Belli hacimde bulunan fotonlar gaz gibi davranır. Fotonların kütleleri olmadıkları için sabit T sıcaklıkta ısı verildiğinde yeni fotonlar meydana gelir. Sisteme ısı verilmezse foton gazının basıncın ya da birim hacimdeki enerji sıcaklıkla bağlıdır. Bunu incelemek için hacmi değişebilen ve iç yüzeyi tamamen yansıtıcı aynalarla kaplı bir silindir ve silindirde hareketli aynalı bir piston düşünelim. Foton gazda bulunan foton sayısı N, foton gazın hacmi V, foton gazın konsantrasyonu n_0 , pistonun kesit alanı S olsun. Pistona Δt sürede çarpan foton sayısı;

$$\Delta N = \frac{n_0 S c \Delta t}{6}$$

pistona çarpan fotonların momentum değişimi $\Delta p = 2p$ olur. Fotonların uyguladıkları kuvvet ve basınç;

$$F = \frac{\Delta N \Delta p}{\Delta t}; P = \frac{F}{S} = \frac{Npc}{3V} = \frac{Np \cdot c}{3} = \frac{N\hbar\omega}{3V} = \frac{U}{3V} = \frac{(\gamma-1)U}{V}$$

olur. Burada U foton gazın iç enerjisidir. Foton gazı için $\gamma = \frac{4}{3}$ olarak bulunur. Foton gazı için adyabatik denklemler;

$$PV^\gamma = PV^{\frac{4}{3}} = \text{sabit}; P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T = P^{\frac{1}{4}} T = \text{sabit}; TV^{\gamma-1} = TV^{\frac{1}{3}} = TR = \text{sabit}$$

şeklinde yazılabilir.

Kozmik mikrodalga arka plan ışınması evrenin her yönünden gelen yaklaşık olarak 3 K sıcaklığına karşılık gelen bir kara cisim ışınmasıdır. Bu ışınımaya ait fotonlar, evrenin yeniden birleşme evresinde protonların serbest elektronları yakalamasının sonucunda madde ile etkileşmeden uzayda yayılmaktadır. Büyük patlamada evrendeki sıcaklık 3000 K kadar düştüğünde madde ile ışınım arasındaki etkileşme bittiğini bilinmektedir. Şimdi evrenin ortalama özkütlesi 10^{-26} g/cm^3 mertebesindedir.

Buna göre evrendeki sıcaklık 3000 K iken evrenin ortalama özkütlesi kaç g/cm^3 mertebesindedir?

A) 10^{-15}

B) 10^{-16}

C) 10^{-17}

D) 10^{-18}

E) 10^{-19}

24. Bilgi: Bir yüzeydeki aydınlanma ile bu yüzeyin görünür parlaklığı arasında belirli ilişki bulunmaktadır. Astronomi ve astrofizikte gök cisimlerle ilgili görünür parlaklık kavramı kullanılmaktadır. Görünü parlaklığı kadir birimi ile ölçülür. Görünür parlaklığı ile ilgili belirli ölçek türetilmiştir. Bu ölçeğe göre 5 kadir fark aydınlanmada 100 kat fark oluşturmaktadır. Buna göre;

$$(100)^{\frac{1}{5}} = 2,5118864315 \approx 2,512$$

olur. Bu durumda iki gök cisminin görünür parlaklığı arasındaki fark 1 ise aydınlanmalar farkı 2,512 kat olur. İki gök cisminin görünür parlaklığı arasındaki fark 2 ise aydınlanmalar farkı $(2,512)^2 = 6,309573444 \approx 6,31$ kat olur. İki gök cisminin görünür parlaklığı arasındaki fark 3 ise aydınlanmalar farkı $(2,512)^3 = 15,8489319 \approx 15,85 \approx 16$ kat olur. İki gök cisminin görünür parlaklığı arasındaki fark 4 ise aydınlanmalar farkı $(2,512)^4 = 39,810717 \approx 39,85$ kat olur. Bir yüzeyin aydınlanması E olsun. Bir yıldız küresel olarak tüm yönlerde radyasyon yaydığı için aydınlanma E ile yıldızın ışınım gücü L arasındaki ilişki;

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}$$

ile verilir. Astrofizikte yüzeyin aydınlanması ile yakından ilişkilendirilen görünür parlaklığı m arasındaki ilişki;

$$m = -2,512 \log E \approx -2,5 \log E = -2,5 \log \frac{L}{4\pi r^2}$$

olarak tarif edilmektedir. İki gök cisminin sağladığı aydınlanmalar E_1 ve E_2 , görünür parlaklıkları m_1 ve m_2 ise aralarındaki ilişki;

$$m_1 = -2,5 \log E_1; m_2 = -2,5 \log E_2; \log \frac{E_1}{E_2} = -0,4(m_1 - m_2)$$

ile verilir. Bazı gök cisimlerden Güneşin görünür parlaklığı -26,74 kadir, Ayın maksimum görünür parlaklığı -12,5 kadir, Vega yıldızın görünür parlaklığı yaklaşık olarak 0,04 ≈ 0 kadir, Sirius yıldızın görünür parlaklığı -1,46 kadir, kutup yıldızın görünür parlaklığı 2,3 kadir olarak ölçülmüştür. Çıplak bir göz ile görünür parlaklığı 5 ÷ 6 kadirdir. Gök cisimleri gözlemleme aletlerle bu 35 kadir kadar da olabilir. Örneğin görünür parlaklığı Güneş için yaklaşık olarak -25 kadir gibi düşünülürse Güneşin sağladığı aydınlanma Vega yıldızın sağladığı aydınlanmanın 10^{10} katıdır. Dünyanın etrafında ve atmosfer etkilerden arındırılmış teleskoplarla bu görünür parlaklık daha da düşebilir. Görünür parlaklığı gözlemciye göre farklı uzaklıklarda aynı olabilir ya da farklı uzaklıklardaki gök cisimlerinin görünür parlaklıkları eşit olabilir. Bundan dolayı tüm gök cisimlerinin aynı mesafede buldukları mesafelerden gözlenen görünür parlaklıkları birbirinden objektif olarak ayırt edilebilir. Tanım olarak bir yıldızın mutlak parlaklığı;

$$M = -2,5 \log \frac{L}{4\pi \cdot 10^2}$$

olarak verilir. Mutlak parlaklık tüm yıldızlar Dünyadan 10 pc uzaklıkta buldukları varsayılmaktadır. Buradan görünür ve mutlak parlaklıklar arasındaki ilişki;

$$\begin{aligned} m - M &= -2,5 \log \frac{L}{4\pi r^2} + 2,5 \log \frac{L}{4\pi \cdot 10^2} = -2,5 \log L + 2,5 \log(4\pi) + 2,5 \log(r^2) + 2,5 \log L - 2,5 \log(4\pi) - 2,5 \log(10^2) = \\ &= 2 \cdot 2,5 \cdot \log r - 2,5 \log 10 = -5 + 5 \log r \end{aligned}$$

olarak bulunur. İki yıldızın mutlak parlaklıkları ile ışınım şiddetleri arasındaki ilişki;

$$M_1 - M_2 = -2,5 \log \frac{L_1}{4\pi \cdot 10^2} + 2,5 \log \frac{L_2}{4\pi \cdot 10^2} = -2,5 \log \frac{L_1}{L_2}$$

$$\log \frac{L_1}{L_2} = -0,4(M_1 - M_2); \frac{L_1}{L_2} = 10^{-0,4(M_1 - M_2)}$$

olur. Güneşin mutlak parlaklığı $M_G = 4,83$ kadir, Güneşin ışınım gücü $L_G = 3,846 \cdot 10^{26}$ W olarak veriliyor. Genelde gök cisimlerinin mutlak parlaklığı ve ışınım gücü Güneşin mutlak parlaklığı ve ışınım gücüyle kıyaslanır.

Dünyadan $r = 25,5$ pc uzaklıkta bulunan bir yıldızın görünür parlaklığı $m = 2,5$ kadir olup yıldızın yarıçapı güneşin yarıçapının 3 katıdır.

Güneşin sıcaklığı yaklaşık olarak 6000 K kabul edilirse bu yıldızın sıcaklığı kaç K dir?

A) 6455

B) 7285

C) 8725

D) 9345

E) 10375

25. Bilgi: Güneş-Dünya arasındaki 1 AB uzaklığı gözlenen açıya paralaks denir ve pc birimi ile gösterilir. Bir radyan açısı;

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,2957795^\circ = 3437,74677' = 206264,8'' \approx 206265''$$

olarak tarif edilir. 1'' yay saniyesi/1/60 yay dakikası 1' yay dakikası 1/60 derecedir. Bu durumda paralaks p'' ile r uzaklığı için;

$$\frac{p''}{206265''} = \frac{1 \text{ AB}}{r}$$

yazabiliriz. Çözme gücü çok yüksek olan teleskoplarla gözlenen gök cisimlerin yarıçapları R, bu cisimlere olan uzaklık r, teleskopun çapı D, gözlem dalga boyu λ olsun. Bu durumda teleskopun çözme gücü;

$$\theta \approx \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{2R}{r}$$

astronomi ve astrofizikte gök cisimlerin görünür ve mutlak parlaklığı arasındaki ilişki;

$$m - M = -5 + 5 \log r$$

mutlak parlaklık;

$$M = -2,5 \log \frac{L}{4\pi \cdot 10^2}$$

bir yıldızın ışınım gücü:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

ile verilir. Farklı yöntemlerle yıldızların yarıçapları ile sıcaklıkları ölçülebilir. Buradan yıldızın uzaklığı;

$$M = -2,5 \log \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma T^4}{4\pi \cdot 10^2} = -2,5 \log(4\pi R^2 \sigma T^4) - 2 = 5 - \log(4\pi R^2 \sigma T^4)$$

$$m - 5 + \log(4\pi R^2 \sigma T^4) = -5 + 5 \log r; r = 10^{0,2[m + \log(4\pi R^2 \cdot \sigma T^4)]}$$

gözlemi yaparak yıldızın yarıçapını gözlemleyebilmesi için teleskopun çapı;

$$\frac{1,22\lambda}{D} = \frac{2R}{10^{0,2[m + \log(4\pi R^2 \cdot \sigma T^4)]}}; D = \frac{1,22\lambda \cdot 10^{0,2[m + \log(4\pi R^2 \cdot \sigma T^4)]}}{2R}$$

ile verilir. Bugün kullanılan büyük teleskoplar çok büyük ve karmaşık sistemler. Teleskoplarda çok hassas ve sarsıntısız hareket ettirilen mekanizmalar, çok duyarlı ve genelde fotoelektrik olayına dayalı detektörler ve sensörler, oluşan görüntüleri kaydetmek için dijital sistemler kullanılmaktadır. Dijital sistemlerde sensörlerle algılanan sinyal dijitalize edilir ve her bir görüntü elemanına piksel denir ve oluşan görüntüde bağımsız olarak kontrol edilebilen en küçük parçasıdır. Dijital görüntüler piksellerin oluşturduğu görüntüye matris denilir. Matris, yatay ve dikey sırada bulunan piksel sayılarının çarpımı sonucu hesaplanan toplam piksel sayısıdır. Dijital görüntüleme sistemlerinde, genellikle 256x256, 520x520, 1024x1024 matrisli görüntüler kullanılır. Dijital görüntü oluşturan sensörlere CCD görüntü sensörü denir. Daha çok bilgi kaydetmek için genelde 1024x1024 matrisli kullanılmaktadır. Bir teleskop sayesinde oluşan görüntünün boyu;

$$l \approx f\theta = \frac{1,22\lambda f}{D}$$

olur. Elde edilen görüntüyü dijital olarak kaydederken 1024x1024 matrisde oluşan görüntünün boyu;

$$\Delta l = \frac{l}{1024} = \frac{1,22\lambda f}{1024D}$$

olarak bulunur.

Aldebaran Yıldızın paralaksı p''=0,05'', görünür parlaklığı m =0,85 kadir olarak veriliyor. Aldebaran yıldızın yarıçapı yaklaşık olarak Güneş yarıçapının 44 katıdır.

Buna göre Aldebaran yıldızın yüzey sıcaklığı yaklaşık olarak kaç K dir? (Güneşin mutlak parlaklığı $M_G = 4,83$ kadir,

1 AB=150.10⁶ km, Güneşin yüzey sıcaklığı 6000 K, 1 pc=3,26 ışık yılı olarak veriliyor.)

A) 2700

B) 3000

C) 3200

D) 3600

E) 4100

BİLGİ DENEME SINAVI

1. C)

2. D)

3. B)

4. D)

5. D)

6. B)

7. B)

8. E)

9. C)

10. D)

11. D)

12. C)

13. B)

14. B)

15. C)

16. E)

17. B)

18. D)

19. C)

20. C)

21. B)

22. E)

23. B)

24. A)

25. C)