ŞUBAT KAMPI SINAVI-1993

1. Bir su damlası nemli bir havada yolda karşılaştığı küçük su damlalarını kendisine katarak gittikçe artan bir kütle ve sabit bir ivme ile hareket etmektedir.

Bu su damlanın ivmesini kaç g dir?

2. Andromeda galaksisi $N_A = 3{,}6.10^{11}$ kadar, bizim galaksimiz Samanyolu ise $N_S = 2{,}5.10^{11}$ kadar yıldız içermektedir. Her yıldızın kütlesi yaklaşık olarak Güneşin kütlesine eşit $m_G = 2.10^{30}$ kg olarak kabul edilebilir. İki galaksi arasındaki uzaklık $r = 1{,}42.10^{11} r_0$ dır.($r_0 = 1{,}5.10^{11}$ m Güneş-Dünya uzaklığıdır) Gözlemler sonucu iki galaksinin ortak kütle merkezinin etrafında döndükleri tespit edilmiştir. Gözlemler çapı D=5 m olan bir teleskopla λ=600 nm dalga boyunda ışıkla yapılmaktadır.

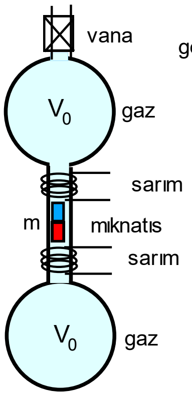
Farklı zamanlarda çekilen fotoğraflarda iki galaksinin ortak kütle merkezinin etrafında döndükleri tespit etmek için iki fotoğrafın çekimleri arasında en az ne kadar zaman geçmesi gerekir?

3. Aynı genlikli, farklı frekanslı iki harmonik dalga üst üste bindiği zaman oluşan dalganın denklemi;

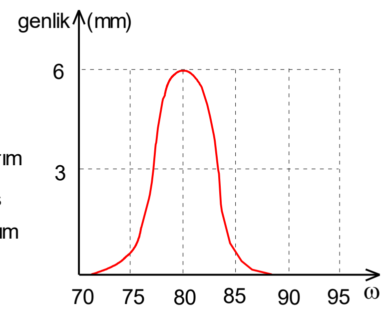
$$\Psi = 20\cos\left(3\pi\, t - \frac{5\pi\, x}{6}\right)\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi\, x}{2}\right)$$

şeklinde verilmektedir.

Bu sonucu oluşturan iki dalganın denklemleri ayrı ayrı nedir? Bu dalgaların hızlarının oranını nedir? Süperpozisyon sonucu oluşan dalgaya ait faz ve grup hızları nedir? Bu hızlar size dalganın yayıldığı ortam hakkında ne gibi bilgi vermektedir?



Şekil a)

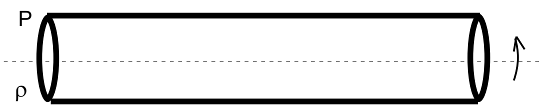


Şekil b)

4. Bir gazın sabit basınçtaki ve hacimdeki ısı kapasitesi oranı ya da adyabatik katsayısı olarak bilinen $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ bulmak için iki tane içi gaz dolu ve birbiriyle dar bir boru ile bağlı ve düşey konumunda bulunan aynı tip cam balon kap kullanılmaktadır. Borunun kesit alanı S=1 cm^2, balonların hacimleri ise $V_0 = 0{,}22$ m^3 olarak veriliyor. Üst balon bir vana ile kapatılmıştır. Boruda hafif ve sıkıca yerleştirilmiş kütlesi m=20 g olan bir sabit mıknatıs bulunmaktadır. Borunun üzerinde mıknatısın alt ve üst kısmına iki ayrı sarım Şekil a daki gibi yerleştiriliyor ve sinüzoidal bir akım verilip mıknatısın farklı frekanslarda basit harmonik hareketi sağlanmaktadır. Deney sabit $P_0 = 10^5$ Pa basıncından yapılmaktadır. Sürtünmeler ihmal ediliyor.

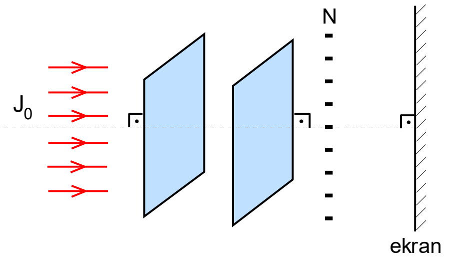
a) Başlangıçta vana kapatılmış durumdadır ve deney sonucu Şekil b) deki gibi verilen genlik-açısal frekans grafiği elde edildiğine göre balonlarda bulunan gazın adyabatik katsayısı nedir?

b) Aynı deney vana açık durumunda yapılır ise mıknatısın frekansı nedir? (x<<1 için ln(1+x)≈x olarak veriliyor.)



5. Uzunluğu yarıçapından çok büyük olan dielektrik silindirik bir kabuğun kalınlığı kabuğun yarıçapından çok çok küçüktür. Silindirik kabuğun yapıldığı mad-denin öz kütlesi ρ, maddenin mekaniksel olarak dayanabileceği maksimum basınç P dir. Silindirik kabuğa homojen olacak bir şekilde yük verilip kabuk geometrik ekseni etrafında maddenin mekaniksel olarak dayanabileceği maksimum açısal hız ile döndürülüyor.

Silindirik kabuğun ekseni üzerinde oluşan manyetik alanı ile silindirik kabuk üzerindeki elektrik alanı arasındaki oran nedir? Silindir içindeki manyetik indüksiyon alanın ile silindirin oluşturduğu elektrik alanların maksimum enerji yoğunluklarının arasındaki oran nedir? (Işık hızı c olarak veriliyor. Elektrik ve manyetik indüksiyon alanların oluşturdukları basınçlar madde basıncından çok çok küçük olduğunu kabul ediniz.)

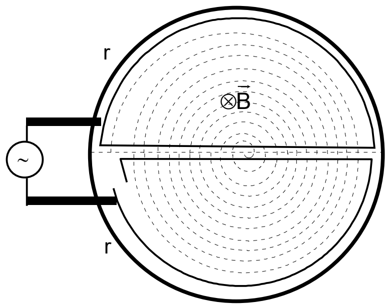


6. J_0 ışık şiddetinde paralel ışık demeti %20 geçirgenliği olan iki levhadan sol tarafındakine düşmektedir. Sağdaki levha ve düşey konumdaki bir ekranın arasında birim uzunluktaki delik sayısı N olan bir kırınım ağı bulunmaktadır.

Buna göre ekran üzerindeki merkezi aydınlık bölgenin ışık şiddeti nedir?

7. Kütlesi m_1 olan parçacık, kütlesi m_2 ($m_1>m_2$) diğer bir parçacıkla esnek olan ve merkezi olmayan bir çarpışmadan sonra maksimum θ açısı ile saçılmaktadır.

Bu açıyı klasik ve rölativistik hızlar için nedir?



8. Siklotron adı verilen hızlandırıcı birbirinden küçük bir aralıkla ayrılmış iki tane r yarıçaplı yarım silindirden oluşmuştur. Bu düzeneğe dik ve sabit B manyetik alanı uygulanmaktadır.

a) İki silindir arasına uygulanan gerilim $U=U_0\cos\omega t$ ise q yüklü m kütleli bir parçacık ne kadar bir zaman sonra en yüksek hıza ulaşır?

Siklatronun en zayıf yanı parçacıkların enerji sınırlamasıdır. Başlangıçta parçacık uygulanan gerilim ile aynı fazdadır. Daha sonra parçacıkla gerilim arasında faz farkı oluşmaya başlar. Bu faz farkı $U=U_0\cos\varphi$ şeklinde ifade edilmektedir. Burada φ hareketle gerilim arasındaki faz farkıdır.

b) Bu faz farkı 90° olduğunda parçacığın kinetik enerjisi nedir?

9. Işık c hızıyla boşlukta yayılan ve şiddeti J_0 olan ışık demeti v ($v<<c$) hızı ile hareket eden bir düzlem aynaya, aynanın düzlemine dik olacak şekilde düşmektedir.

Buna göre yansıyan ışık demetinin ışık şiddeti nedir?

10. Klasik hızlandırıcılarda iki eşit m kütleli parçacıklardan birisi hareketsiz, diğeri ise hareketlidir. Bu parçacıklar inelastik (esnek olmayan) çarpışma yaparak kütlesi m' olan bir parçacığı meydana getirmektedir.

Eğer m kütleli parçacıkların her ikisi de hareketli ise ve kafa kafaya (Head on) inelastik çarpışma yaparak m' kütleli parçacığını meydana getirirse, her iki tür çarpışmadaki parçacıkların enerjilerin arasındaki bağıntıyı nedir? (Her iki durumda hızları ultrarölativistik kabul ediniz.)

ŞUBAT KAMPI SINAVI CEVAPLARI-1993

1. $\frac{g}{7}$

2. $\frac{\lambda T_0}{2\pi D}\sqrt{\frac{m_G r^3}{(m_A + m_S) r_0^3}} \approx 1000$ yıl

3. $A\cos\left(4\pi t - \frac{4\pi}{3}x\right)$; $A\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}x\right)$; $\frac{1}{2}$; $v_f = 3{,}6$ birim/s; $v_{gr} = 2$ birim/s

4. a) $\gamma = \frac{m\omega_0^2 V_0}{2P_0 S^2} = 1{,}4$

b) $\sqrt{2}\,\omega_0 = 112$ rad/s

5. $\frac{1}{c}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$; $\frac{P}{\rho c^2}$

6. $\frac{N^2 J_0}{9}$

7. $\frac{m_2}{m_1}$

8. a) $\frac{\pi q B r_{mak}^2}{2\Delta \mathcal{E}_k}$

b) $\sqrt{\frac{2mc^2 q U_0}{\pi}}$

9. $J_0(1-4\beta)$; $\beta = \frac{v}{c}$

10. $2mc^2\left(\sqrt{1+\frac{\mathcal{E}_k}{2mc^2}} - 1\right)$; $\frac{2\mathcal{E}_k^2}{mc^2}$

ŞUBAT KAMPI SINAVI SORULARIN ÇÖZÜMLERİ-1993

1. Su damlanın hareketi ağırlık kuvvetin etkisi ile gerçekleşmektedir. Damlanın momentum değişimi;

$$mg=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}$$

olarak yazılabilir. Damla küçük bir dh yolu aldığında yarıçapı dr artmaktadır. İntegre edersek damlanın yarıçapı r alınan yol h ile doğru orantılı olduğu anlaşılmaktadır. Alınan yol;

$$h=\frac{at^2}{2}$$

damlanın hızı;

$$v=at$$

damlanın yarıçapın zamana göre değişimi;

$$r=\xi t^2$$

olarak yazılabilir. Damlanın kütlesi;

$$m=\rho V=\frac{4}{3}\rho\pi r^3=\frac{4}{3}\rho\pi\xi^3 t^6$$

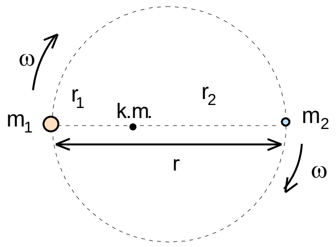
olur. Momentum değişimi bu durumda;

$$\frac{4}{3}\rho\pi\xi^3 t^6 g=\frac{d\left(\frac{4}{3}\rho\pi\xi^3 t^6 .at\right)}{dt}=7a.\frac{4}{3}\rho\pi\xi^3 t^6$$

olarak yazılabilir. Buradan damlanın hareket ivmesi;

$$a=\frac{g}{7}$$

olarak bulunur.



2. Kepler'in üçüncü yasası güneşin kütlesi çok büyük ise uygulanmaktadır. İki dönen yıldız veya galaksi ise dönme artık ortak kütle merkezin etrafında gerçekleşmektedir. Dolayısıyla bu durum için geçerli olan Kepler yasasına ihtiyaç vardır. Kütle merkezinin korunumu için

$$m_1 r_1=m_2 r_2\ ;\ r_2=\frac{m_1 r_1}{r_2}\ ;\ r=r_1+r_2=r_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right);\ r_1=\frac{m_2 r}{m_1+m_2}$$

yazabiliriz. Ortak merkeze göre

$$m_1\omega^2 r_1=\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}\ ;\ \frac{m_1 m_2 r}{m_1+m_2}\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}\ ;\ \frac{(m_1+m_2)T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{\gamma}=\text{sabit}$$

yazabiliriz. Bu ifade Keplerin genelleştirilmiş üçüncü yasası olarak bilinmektedir. Bu yasayı hem güneş ile Dünya, hem de Andromeda ve Samanyolu galaksisi için uygulayabiliriz.

$$\frac{(m_G+m_D)T_0^2}{r_0^3}=\frac{(m_S+m_A)T^2}{r^3}$$

Buradan iki galaksinin kütle merkezinin etrafında dönme periyodu

$$T=T_0\sqrt{\frac{m_G r^3}{(m_A+m_S)r_0^3}}$$

olarak bulunur. Gözlemlerde kısıtlama optik teleskopta gözlenen kırınımdan kaynaklanmaktadır. İki galaksini ayrıştırabilmesi için

$$\Delta\theta=\frac{\lambda}{D}$$

olmalıdır. Bu açıya dönebilmesi için

$$t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{\Delta\theta T}{2\pi}=\frac{\lambda T_0}{2\pi D}\sqrt{\frac{m_G r^3}{(m_A+m_S)r_0^3}}\approx 1000 \text{ yıl}$$

zaman gereklidir.

3. Aynı genlikli, farklı frekanslı iki harmonik dalganın üst üste binmesi ile duran dalga oluşabiliyor. İlerleyen bir dalganın dalga denklemi;

$$\Psi_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x);\ \Psi_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

olarak yazılabilir. Bu dalgalarının süperpozisyonu

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = A[\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] = A\cos\frac{(\omega_1+\omega_2)t-(k_1+k_2)x}{2}\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t-(k_1-k_2)x}{2} =$$

$$= 20\cos\left(3\pi\, t - \frac{5\pi\, x}{6}\right)\cos\left(\pi\, t - \frac{\pi\, x}{2}\right)$$

Bu iki ifadeyi karşılaştırdıktan sonra genlik A=20 birim;

$$\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = 3\pi;\ \frac{k_1+k_2}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{\omega_1-\omega_2}{2} = \pi;\ \frac{k_1-k_2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

yazabiliriz. Bu denklemlerden $\omega_1 = 4\pi$; $\omega_2 = 2\pi$, $k_1 = \frac{4\pi}{3}$, $k_2 = 0$ olarak bulunur. Her iki dalganın dalga denklemleri;

$$\Psi_1 = A\cos\left(4\pi t - \frac{4\pi}{3}x\right);\ \Psi_2 = A\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}x\right)$$

olarak yazılabilir. Her dalganın hızı ve aralarındaki oran;

$$v_1 = \frac{\omega_1}{k_1} = 3 \text{ birim/s};\ v_2 = \frac{\omega_2}{k_2} = 6 \text{ birim/s};\ \frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Süperpozisyon sonucu oluşan dalgaya ait faz hızı ve grup hızı;

$$v_f = \frac{\omega_{ort}}{k_{ort}} = \frac{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}{\frac{k_1+k_2}{2}} = 3{,}6 \text{ birim/s};\ v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} = 2 \text{ birim/s} < v_f$$

olarak bulunur.

4. a) Adyabatik proseste;

$$PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma = \text{sabit}$$

Burada γ adyabatik katsayısıdır. Her bölmede yeni basınçlar;

$$P_0 V_0^\gamma = P_{1;2}(V_0 \pm Sx)^\gamma = P_{1;2} V_0^\gamma \left(1 \pm \frac{Sx}{V_0}\right)^\gamma = P_{1;2} V_0^\gamma \left(1 \pm \frac{\gamma Sx}{V_0}\right);\ P_{1;2} = {}_0 \approx P\frac{P_0}{1 \pm \frac{\gamma Sx}{V_0}}\left(1 \mp \frac{\gamma Sx}{V_0}\right)$$

olarak bulunur. Mıknatısa etki eden kuvvet;

$$F = ma = -(P_1 - P_2)S = -\frac{2P_0 S^2 \gamma x}{V_0};\ \ddot{x} + \frac{2P_0 S^2 \gamma x}{mV_0} = 0$$

ve pistonun titreşim açısal frekansı ifadesinden adyabatik katsayısı;

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2P_0 S^2 \gamma}{mV_0}};\ \gamma = \frac{m\omega_0^2 V_0}{2P_0 S^2} = \frac{20.10^{-3}.80^2.0{,}22}{2.10^5.(10^{-2})^2} \approx 1{,}4 \approx 1{,}4$$

olarak bulunur. Burada $\omega_0 = 80$ rad/s dir.

b) Vanalardan birisi açılırsa sadece bir kaptan geri çağıran kuvveti meydan gelir. Mıknatısa etki eden kuvvet ;

$$F = ma = -(P_0 - P_1)S = -\frac{P_0 S^2 \gamma x}{V_0};\ \ddot{x} + \frac{P_0 S^2 \gamma x}{mV_0} = 0$$

ve pistonun titreşim açısal frekansı;

$$\omega' = \sqrt{2}\,\omega_0 = 1{,}4.80 = 112 \text{ rad/s}$$

olarak bulunur.

5. Silindirik kabuğun uzunluğu ℓ, yarıçapı $R<<\ell$, kabuğun kalınlığı δ, yükü q olsun. Bu durumda elektrik alanı için Gauss teoremi uygulanılabilir. Elektrik alan;

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R\ell}$$

silindirik kabuğun kütlesi;

$$m=\rho V=\rho.2\pi R\delta\ell$$

silindirik kabuk ω açısal ile döndürülürse kabuğa etki eden kuvvet;

$$F=m\omega^2 R=2\pi\rho R^2\delta\ell\omega^2$$

olur. Kabuğun parçalanmasının önlenmesi madde içinde oluşan gerilmeden sağlanmaktadır. Bu kuvvetleri bulmak için merkezden küçük bir $\Delta\theta$ açısı ile gözlenen bir kabuk parçası seçelim. Bu kabuk parçasına etki eden kuvvet;

$$\Delta F=\frac{F\Delta\theta}{2\pi}=\rho R^2\delta\ell\omega^2\Delta\theta$$

ile verilir. Bu kuvvetin dengelenmesi gerilme kuvvetleri ile mümkündür. Gerilme kuvveti;

$$T=PS=P\ell\delta$$

olur. Denge durumunda

$$\Delta F=2T\sin\frac{\Delta\theta}{2}\approx T\Delta\theta$$

yazabiliriz. Buradan silindirik kabuğun parçalanmadan döndürebileceği maksimum açısal hız;

$$\rho R^2\delta\ell\omega^2\Delta\theta=P\ell\delta\Delta\theta;\ \omega=\sqrt{\frac{P}{\rho R^2}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

olarak bulunur. Dönme sonucu silindirik kabuk üzerinde akan akım;

$$I=\frac{q}{T}=\frac{q}{\frac{2\pi}{\omega}}=\frac{q\omega}{2\pi}=\frac{q}{2\pi R}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

birim uzunluğa düşen elektrik akım;

$$I_1=\frac{I}{\ell}=\frac{q}{2\pi R\ell}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

bu silindirik kabuk bir selenoid gibi düşünülürse silindirin ekseni üzerindeki manyetik indüksiyon alanı;

$$B=\mu_0 I_1=\frac{\mu_0 q}{2\pi R\ell}\sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

manyetik indüksiyon alanı ile silindirik kabuk üzerindeki elektrik alanı arasındaki oran;

$$\frac{B}{E}=\frac{\frac{\mu_0 q}{2\pi R\ell}\sqrt{\frac{P}{\rho}}}{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R\ell}}=\mu_0\varepsilon_0\sqrt{\frac{P}{\rho}}=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{P}{\rho}};\ c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

silindir içindeki manyetik ve silindirin üzerindeki elektrik alanın maksimum enerji yoğunlukları;

$$w_{man}=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 q}{2\pi R\ell}\sqrt{\frac{P}{\rho}}\right)^2=\frac{\mu_0 qP}{8\pi^2R^2\ell^2\rho};\ w_{elek}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R\ell}\right)^2=\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2\ell^2}$$

aralarındaki oran;

$$\frac{w_M}{w_E}=\frac{\frac{\mu_0 qP}{8\pi^2R^2\ell^2\rho}}{\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 R^2\ell^2}}=\frac{\mu_0\varepsilon_0 P}{\rho}=\frac{P}{\rho c^2}$$

olarak bulunur.

6. Levhaya düşen ışığın geçirgenlik ξ=0,2 olsun. J_0 ışık şiddetinde paralel ışık demeti sol levhaya düşerse;

$$J_1=\xi J_0$$

kadar ışık geçer;

$$J'_{11}=(1-\xi)J_0$$

kadar geri yansıyor. Birinci levhadan geçen demet ikinci levhaya düştüğünde ikinci levhadan geçen ışık şiddeti;

$$J_{21}=\xi J_1=\xi^2 J_0$$

olur. Birinci levhaya doğru yansıyan ışık şiddeti;

$$J'_{21}=(1-\xi)J_1=(1-\xi)\xi J_{0\ 0}$$

olur. Bu ışık şiddetin;

$$J_{11}=(1-\xi)J'_{21}=\xi(1-\xi)^2 J_0$$

kadarı birinci levhadan ikinci levhaya doğru geri yansıyor. İkinci levhaya düşen ışık şiddetinden;

$$J_{22}=\xi J_{11}=\xi^2(1-\xi)^2 J_0$$

bu levhadan geçmektedir. Sağ levhaya düşen bu demetten;

$$J'_{22}=(1-\xi)J_{22}=\xi(1-\xi)^3 J_0$$

birinci levhaya doğru yansıyor. Birinci levhadan ikinci levhaya doğru yansıyan demetin ışık şiddeti;

$$J_{12}=(1-\xi)J'_{22}=\xi(1-\xi)^4 J_0$$

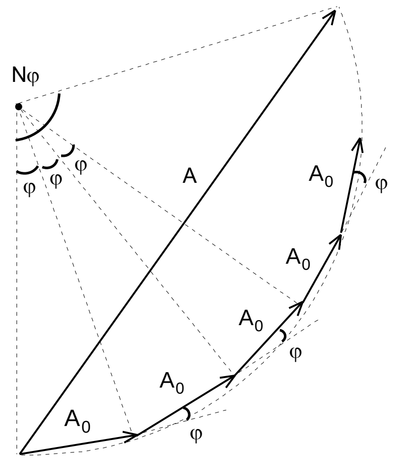
bu demetten geçen ışık şiddeti;

$$J_{23}=(1-\xi)J'_{21}=\xi^2(1-\xi)^4 J_0$$

Bu şekilde işleme devam edersek bir seri elde edebiliriz. İkinci levhadan geçen toplam ışık şiddeti;

$$J=\xi^2 J_0+\xi^2(1-\xi)^2 J_0+\xi^2(1-\xi)^4 J_0+\xi^2(1-\xi)^6 J_0+....=\xi^2 J_0\frac{1}{1-(1-\xi)^2}=\frac{\xi J_0}{2-\xi}$$

olarak bulunur.



Geçen ışık demeti kırınım ağı üzerine düştükten sonra her yarıktan kırınım ve sonra hepsinin girişimi yapmalıyız. Bu demektir ki N tane aynı φ faz farkı ile titreşimler toplamalıyız. Toplam açı $N\varphi$ olup;

$$\varphi=kd\sin\theta$$

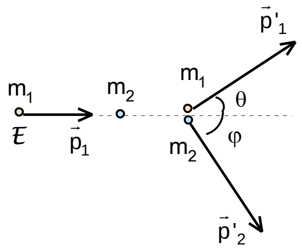
olarak verilmektedir. Toplam genlik

$$A=2R\sin\frac{N\varphi}{2}\ ;\ R=2A_0\sin\frac{\varphi}{2}\ ;\ A=A_0\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\approx A_0\frac{\frac{N\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}=NA_0$$

Işık şiddeti $J\sim A^2$ olduğu için kırınım ağından geçen ışık şiddeti;

$$J_k=N^2 J=\frac{N^2\xi J_0}{2-\xi}=\frac{N^2.0,2J_0}{2-0,2}=\frac{N^2 J_0}{9}$$

olarak bulunur.



7. Klasik durumda çarpışmalarda enerji ve momentum korunumu yasaları geçerlidir.

$$\mathcal{E}_{k1}=\mathcal{E}'_{k1}+\mathcal{E}'_{k2}\,;\ \mathcal{E}_{k1}=\frac{p_1^2}{2m_1}\,;\ \mathcal{E}'_{k1}=\frac{p'^2_1}{2m_1}\,;\ \mathcal{E}'_{k2}=\frac{p'^2_2}{2m_2}\,;\ \mathcal{E}'_{k2}=\mathcal{E}_{k1}-\mathcal{E}'_{k1}$$

$$p_1=p'_1\cos\theta+p'_2\cos\varphi;\ 0=p'_1\sin\theta-p'_2\sin\varphi$$

φ açısını devre dışı bırakarak

$$p'^2_2=p_1^2+p'^2_1-2p_2\,p'_1\cos\theta$$

yazabiliriz. Buradan açı için

$$\cos\theta=\frac{p_1^2+p'^2_1-2p_2^2}{2p_1p'_1}=\frac{\mathcal{E}'_1(m_1+m_2)-\mathcal{E}_1(m_1-m_2)}{2m_1\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}'_1}}$$

bulunur. Maksimum saçılma gerçekleşmesi için

$$\frac{d\cos\theta}{d\mathcal{E}'_1}=0$$

olmalıdır. Buradan

$$\mathcal{E}'_1=\frac{(m_1-m_2)\mathcal{E}_1}{m_1+m_2}\,;\ \cos\theta_{mak}=\sqrt{1-\frac{m_2^2}{m_1^2}}\,;\ \sin\theta_{mak}=\frac{m_2}{m_1}$$

olarak bulunur. Çarpışma rölativistik ise rölativistik enerji ve momentum korunumu yasaları geçerlidir.

$$\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=\mathcal{E}'_1+\mathcal{E}'_2\,;\ \mathcal{E}'_2=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2-\mathcal{E}'_1$$

$$\sqrt{p_1^2c^2+m_1^2c^4}+m_2c^2=\sqrt{p'^2_1c^2+m_1^2c^4}+\sqrt{p'^2_2c^2+m_2^2c^4}$$

$$p_1^2=\frac{\mathcal{E}_1^2-m_1^2c^4}{c^2}\,;\ p'^2_1=\frac{\mathcal{E}'^2_1-m_1^2c^4}{c^2}\,;\ p'^2_2=\frac{\mathcal{E}'^2_2-m_2^2c^4}{c^2}$$

Momentum için aynı işlem yapılabilir.

$$\cos\theta=\frac{p_1^2+p'^2_1-2p_2^2}{2p_1p'_1}=\frac{\mathcal{E}'\left(\mathcal{E}_1+m_2c^2\right)-\mathcal{E}_1m_2c^2-m_2^2c^4}{p_1\sqrt{\mathcal{E}'^2_1-m_1^2c^4}}$$

Maksimum saçılma gerçekleşmesi için

$$\frac{d\cos\theta}{d\mathcal{E}'_1}=0;\ \mathcal{E}'_1=\frac{m_1^2c^4\left(\mathcal{E}_1+m_2c^2\right)}{\mathcal{E}_1m_2c^2+m_2^2c^4}\,;\ \cos\theta_{mak}=\sqrt{1-\frac{m_2^2}{m_1^2}}\,;\ \sin\theta_{mak}=\frac{m_2}{m_1}$$

olarak bulunur.

8. a) Parçacık bu iki yarım silindir arasında her geçtiğinde;

$$\Delta \mathcal{E} = qU$$

enerji kazanmaktadır. Parçacıkların düşük hızlarda kazandıkları enerjileri siklatronun geometrik boyutları ile sınırlıdır. Lorentz kuvvetinin merkezcil kuvvetine eşit şartından;

$$v=qBr$$

enerji;

$$\mathcal{E}_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2B^2r^2}{2m}$$

kazanılan maksimum enerji;

$$\mathcal{E}_{kmak} = \frac{q^2B^2{r_{mak}}^2}{2m}$$

olur. Parçacık bir periyot içinde iki kere enerji kazanmaktadır. Toplam bir parçacık;

$$N=\frac{\mathcal{E}_k}{2\Delta\mathcal{E}_k}$$

devir;

$$t=NT=\frac{\pi qBr_{mak}^2}{2\Delta\mathcal{E}_k}$$

zamanda yapacaktır.

b) Siklatronun en zayıf yanı parçacığın enerjisinin sınırlamasıdır. Başlangıçta parçacığın hareketi uygulanan gerilim ile aynı fazdadır, fakat sonra bir faz farkı oluşmaya başlar. Bu durum;

$$U=U_0 \cos\varphi$$

ile ifade edilir. Burada φ hareket ile gerilim arasında faz farkıdır. Faz farkının oluşmasının sebebi hızın artışıyla meydana gelen kütledeki artıştır. Bu artış siklotron frekansın azalmasına sebep oluyor. Küçük hızlarda;

$$\omega_0 = \frac{qB}{m} = \frac{qBc^2}{mc^2} = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}} \;;\; \mathcal{E} = mc^2$$

yüksek hızlarda ise;

$$\omega=\frac{qBc^2}{W+\mathcal{E}_k} = \frac{qBc^2\mathcal{E}}{\mathcal{E}\left(\mathcal{E}+\mathcal{E}_k\right)} = \frac{\omega_0\mathcal{E}}{\mathcal{E}+\mathcal{E}_k}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$\gamma\mathcal{E} = \gamma mc^2 = \mathcal{E}+\mathcal{E}_k = mc^2+\mathcal{E}_k$$

parçacığın rölativistik enerjisidir. Açısal hız ifadesini işlemleri yapmak için uygun bir şekilde yazarak parçacığın yarım periyodu;

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_0}\left(1+\frac{\mathcal{E}_k}{mc^2}\right) ;\; T_{1/2} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega_0}\left(1+\frac{\mathcal{E}_k}{mc^2}\right)$$

olur. $T_{1/2}$ zamanda parçacığı hızlandıran gerilimin fazı $\omega_0 T_{1/2} > \pi$ olup parçacığın süpürdüğü açı π den büyüktür. Bir yarım devirde gerilim ile parçacık arasındaki faz farkı;

$$\Delta\varphi=\omega_0 T_{1/2} - \pi = \frac{\pi\mathcal{E}_k}{mc^2}$$

ile artmaktadır. Devir sayısı çok büyük olduğu için kinetik enerji $\mathcal{E}_k$ ve faz farkı φ devir sayısının sürekli fonksiyonları olacaktır. dn devir için;

$$d\varphi=\frac{\pi\mathcal{E}_k}{mc^2}dn ;\; d\mathcal{E}_k = \frac{d\mathcal{E}_k}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dn} = \frac{\pi\mathcal{E}_k}{mc^2}\frac{d\mathcal{E}_k}{d\varphi} = qU = qU_0\cos\varphi$$

olur. Buradan kinetik enerji faz değişimine bağlı olarak;

$$\int_0^{\mathcal{E}_k} \mathcal{E}_k d\mathcal{E}_k = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{mc^2 qU_0 \cos\varphi d\varphi}{\pi}$$

integrasyondan sonra

$$\mathcal{E}_k(\varphi) = \sqrt{\frac{2mc^2qU_0\left(\sin\varphi - \sin\varphi_0\right)}{\pi}}$$

olarak bulunur. Bu faz farkı 90° olduğunda parçacığın kazandığı kinetik enerji;

$$\mathcal{E}_{k\pi/2} = \sqrt{\frac{2mc^2qU_0}{\pi}}$$

olarak bulunur.

9. c ışık hızı ile boşlukta yayılan ve ışık şiddeti J_0 ışık demeti için;

$$J_0 = N_0 \hbar\omega_0$$

yazabiliriz. Burada ω_0 gelen fotonların frekansları,

$$N_0 = \frac{\ell}{\ell_{01}}$$

ise birim zamanda düşen foton sayısıdır. Bu sayıyı belli ℓ mesafesinde artarda hareket eden iki fotonun arasındaki ℓ_{01} mesafeye bölünerek bulunulabilir. v hızı ile hareket eden bir düzlem aynaya göre fotonların frekansları Doppler olayına göre değiştiğini göz önünde tutmalıyız. Fotonlar gelirken ayna ile aynı yönde hareket ettiklerine göre aynaya göre frekansları;

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

olur. Aynadan yansıdıktan sonra frekansları;

$$\omega = \omega_1 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \omega_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

olur. Bu sonuca rölativistik enerji ve momentum korunumu yasaları kullanarak da ulaşabiliriz. Aynanın durgun kütlesi büyük ve m ise;

$$\hbar\omega_0 + \frac{mv^2}{2} = \hbar\omega + \frac{mv'^2}{2}$$

$$\frac{\hbar\omega_0}{c} + mv = -\frac{\hbar\omega}{c} + mv'$$

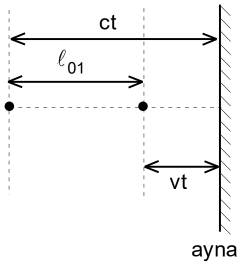
yazabiliriz. Buradan;

$$v' = \frac{\hbar\left(\omega_0 + \omega\right)}{mc} + v; \; \hbar(\omega_0 - \omega) = \frac{v\hbar\left(\omega_0 + \omega\right)}{c} + \frac{\hbar^2\left(\omega_0 + \omega\right)^2}{2mc^2}$$

elde edilir. İkinci terim ihmal edilirse;

$$\omega = \omega_0 \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuç aynıdır.



Frekansla birlikte fotonlar arasındaki mesafe, dolayısıyla birim zamanda geçen foton sayısı da değişmektedir. t sürede foton ℓ_{01} mesafeyi kat etmenin dışında aynanın kat ettiği vt yolu da kat etmek zorundadır ki yansıma gerçekleşebilsin. Bu durumda;

$$ct = vt + \ell_{01}; \; t = \frac{\ell_{01}}{c-v}$$

yazabiliriz. Fotonlar yansıdıktan sonra aralarındaki uzaklık;

$$\ell_{02} = ct + vt = \frac{\ell_{01}\left(c+v\right)}{c-v} = \ell_{01}\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda demetin ışık şiddeti;

$$J = N\hbar\omega = \frac{\ell}{\ell_{02}}\hbar\omega_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) = \frac{\ell}{\ell_{01}}\hbar\omega_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 = J_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2$$

olarak bulunur. v<<c ise;

$$J = J_0\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 \approx J_0\left(\frac{1-2\beta}{1+2\beta}\right) = J_0\left(1-2\beta\right)^2 = J_0(1-4\beta)$$

olarak bulunur.

10. Klasik hızlandırıcılarda eşit m kütleli iki parçacıktan birisi hareketsiz, diğeri ise hareket etmekte olup inelastik (esnek olmayan) çarpışma yaparak bir m' kütleli parçacığı meydana getirmek için gerekli minimum enerji;

$$\Delta\mathcal{E} = m'c^2 - 2mc^2$$

olması gerekir. Hareketli parçacığın kinetik enerjisi $\mathcal{E}_k$ ise momentumu;

$$p^2 = \frac{\left(\mathcal{E}_k + mc^2\right)^2 - m^2c^4}{c^2} = \text{sabit} = p'^2$$

olarak yazılabilir. Çarpışmadan önceki enerji;

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_k + 2mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ;\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ;\ \beta = \frac{v}{c}\ ;\ \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{mc^2}{\mathcal{E}_1}$$

olur. Çarpışmadan sonraki enerji;

$$\mathcal{E}_2^2 = p'^2c^2 + m'^2c^4$$

olur. Buradan meydana gelen parçacığın kütlesi;

$$(\mathcal{E}_k + 2mc^2)^2 = (\mathcal{E}_k + mc^2)^2 - m^2c^4 + m'^2c^4$$

$$m' = 2m\sqrt{1 + \frac{\mathcal{E}_k}{2mc^2}} = 2m\sqrt{1 + \frac{(\gamma-1)mc^2}{2mc^2}} = m\sqrt{2(\gamma+1)}$$

bu parçacığın oluşması için gereken enerji ise;

$$\Delta\mathcal{E} = 2mc^2\left(\sqrt{1 + \frac{\mathcal{E}_k}{2mc^2}} - 1\right)$$

olarak bulunur. Hızlar ultrarölativistik ise $\mathcal{E}_k \gg mc^2$ olur. Buradan bu enerji;

$$\Delta\mathcal{E} \approx \sqrt{2\mathcal{E}_k mc^2}$$

olarak yazılabilir. İkini parçacık karşı karşıya hareket edip çarpıştırılırsa bir parçacığın diğer parçacığın koordinat sistemine göre hızı;

$$u = \frac{v+v}{1 + \frac{v.v}{c^2}} = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

olur. Bu durumda bir parçacığın diğer parçacığa göre enerjisi;

$$\mathcal{E}_3 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) = mc^2\left(\frac{2\mathcal{E}_1^2}{m^2c^4} - 1\right) \approx \frac{2\mathcal{E}_1^2}{mc^2}$$

parçacıkların kinetik enerjisi;

$$\mathcal{E}_{k3} = \mathcal{E}_3 - mc^2 = 2mc^2\left[\left(1 + \frac{\mathcal{E}_k^2}{mc^2}\right)^2 - 1\right] \approx \frac{2\mathcal{E}_k^2}{mc^2}$$

olur. Bu durumda görüldüğü gibi meydana gelen enerjiler çok daha büyük ve ulaşılması daha kolaydır. Özellikle küçük kütleli parçacıklar için bu tip hızlandırıcılar daha etkilidir. Problemin çözümünde;

$$W^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

ifadesinin değişmez olmasından faydalanabiliriz. Parçacıklardan oluşan koordinat sistemin kütle merkezine göre momentum sıfırdır. Buradan;

$$[2(\mathcal{E}_k + mc^2)]^2 = (\mathcal{E}'_k + 2mc^2)^2 - \mathcal{E}'_k(\mathcal{E}'_k + 2mc^2);\ \mathcal{E}'_k = \frac{2\mathcal{E}_k\left(\mathcal{E}_k + 2mc^2\right)}{mc^2} \approx \frac{2\mathcal{E}_k^2}{mc^2}$$

olarak bulunur. Yani aynı sonuç çıkar.