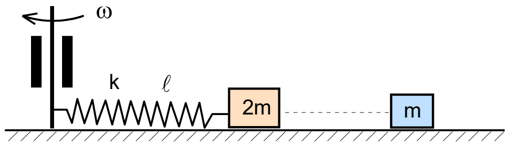
ŞUBAT KAMPI SINAVI-1990

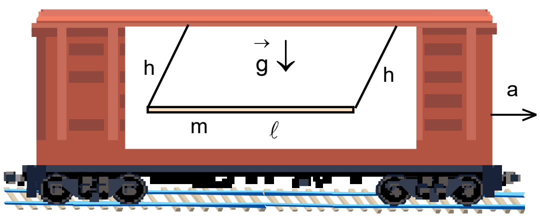


1. Yatay bir düzlemde açılan bir yuvada düşey durumda bulunan bir çubuk bilinmeyen bir ω açısal hızı ile döndürülmeye başlıyor. Çubukla beraber çubuğun alt ucunda bulunan yay sabiti k ve gerilmemiş haldeki uzunluğu ℓ olan bir yay da dönmektedir. Yayın öbür ucunda, yatay düzlem üzerinde kütlesi 2m olan bir cisim bulunuyor. Çubuğun ve yayın kütleleri ve tüm sürtünmeler ihmal ediliyor. Yayın dönme sonucu yavaşça ℓ kadar uzadığı gözlenmektedir. Uzamada Hooke yasası yeterlidir.

a) Bu durumda cismin dönme yönündeki hızı nedir?

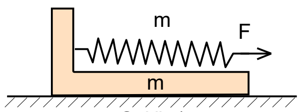
b) Sistemin bu duruma getirilmesi için yapılan iş nedir?

c) Bir anda yay çubuktan kopuyor ve 2m kütleli cisim çubuktan belli uzakta bulunan m kütleli cisim ile esnek olarak çarpışıyor. Bu çarpışmadan sonra her iki cismin hızı nedir?



2. Yatay yolda a ivmesiyle gitmekte olan bir vagonun tavanına her biri h uzunlukta iplerle iki ucundan homojen, kütlesi m ve uzunluğu ℓ olan bir çubuk asılıdır. Belirli bir süre sonra soldaki ip kopuyor.

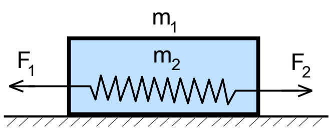
Sol ipin koptuğu anda sağdaki ipteki gerilme kuvveti nedir?



Şekil a)

3. a) Sürtünmesiz yatay düzlem üzerinde bulunan bir dinamometreye Şekil a) daki gibi yatay F kuvveti uygulamaktadır. Yayın kütlesi m, dinamometre kutusunun m kütlesine eşittir.

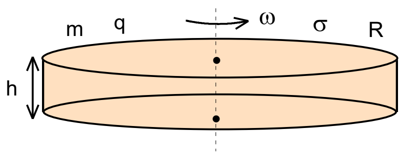
Buna göre dinamometrenin gösterdiği kuvvet nedir?



Şekil b)

b) Yatay ve sürtünmesiz düzlem üzerinde bulunan bir dinamometrenin kutusunun kütlesi m_1, içindeki yayın kütlesi m_2 dir. Dinamometrenin sol ve sağ tarafından F_1 ve F_2 kuvvetleri Şekle b) deki gibi uygulanıyor.

Buna göre dinamometrenin gösterdiği kuvvet nedir?



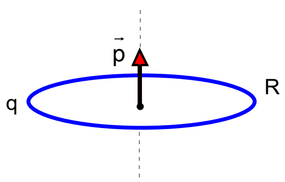
4. Kütlesi m, yükü q, yarıçapı R, yüksekliği h<<R olan dielektrik bir disk yük ile homojen olarak yüklüdür. Disk merkezinden geçen tabana dik olan eksen etrafında sabit ω açısal hızı ile döndürülmektedir.

a) Diskin merkezindeki manyetik alanı nedir?

b) Oluşan manyetik dipol momenti nedir? Dipol momentin açısal momentine oranı olarak bilinen jiromanyetik oranı nedir?

c) Diskin ekseni üzerinde ve diskten z uzaklıktaki manyetik alanı nedir?

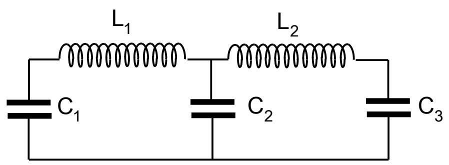
d) z>>R eş eksenli ikinci özdeş bir disk bulunmaktadır. İki disk arasında etki eden kuvvet nedir?



5. R yarıçaplı dielektrik bir halkaya homojen bir şekilde q yükü veriliyor ve merkezine halkanın ekseni boyunca p elektrik dipol momentine sahip m kütleli bir dipol yerleştiriliyor. Dipol serbest bırakıldığında sadece halkanın ekseni boyunca hareket edebilmektedir.

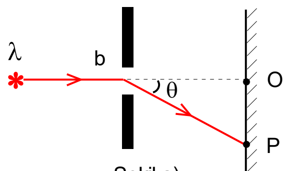
a) Dipolün ulaşacağı maksimum hız nedir?

b) Dipolün yapacağı küçük titreşimlerin titreşim periyodu nedir?

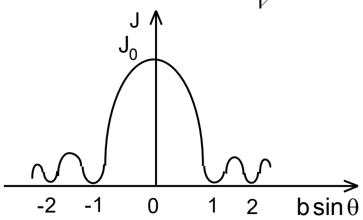


6. Sığaları C_1, C_2, C_3 üç kondansatör ve öz indüktans katsayıları L_1 ve L_2 olan iki özdeş bobin bir devre oluşturmaktadırlar. Başlangıçta C_1 kondansatör yüklüdür.

Sistemin yapacağı titreşimlerin frekanslarını $C_1=C_2=C_3=C$ durumu için nedir?



Şekil a)



Şekil b)

7. Tek yarık kırınım olayında ekrandaki bir P noktanın aydınlanması $J=J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$, $\beta=\frac{\pi\, b\sin\theta}{\lambda}$ olduğunu gösteriniz. Burada b yarık aralığı, λ ışık kaynağının dalga boyu, J_0 merkezi noktanın aydınlanması, θ ise Şekil a) daki gibi merkezi doğru ile ekran üzerindeki istediğimiz nokta arasındaki açıdır. Ekrandaki aydınlanma dağılımı ise Şekil b) deki gibidir.

a) Yarık aralığı (b) nin iki katına çıkarıldığı durumda aydınlanma dağılımı nedir? Verilen aydınlanma grafiği nasıl değişir?

b) Yarık aralığı b ile yarıklar arası d uzaklığının eşit olduğu (b=d) çift yarıklı düzeneği ile oluşturulan kırınım olayındaki aydınlanma dağılımı nedir? Bu dağılım ilk duruma göre nasıl değişir?

8. Belirsizlik prensibi kullanarak aşağıda verilen problemleri sizin seçtiğiniz sabitler cinsinden çözünüz.

a) Hidrojen ve helyum atomlarındaki elektronların bağlanma enerjileri nedir?

b) Molar kütlesi μ olan gümüş atomları T sıcaklığında buharlaştırılarak, bir yarıktan geçip ℓ uzaklıkta bulunan ekran üzerindeki ekrana düşmektedirler. Ekranda oluşacak gümüş kaplı bölgenin minimum çapı nedir? Bunu gerçekleştirmek için yarığın çapı ne olmalıdır?

c) Nötron yıldızların kütleleri Güneşin $M=2.10^{30}$ kütlesi ile mukayese edilecek kadar büyük, yarıçapları r=10 km kadar küçük durumunda yıldızı oluşturan nötronların kinetik enerjileri nedir?

d) Beta ışıması yapan radyoaktif bir maddeden çıkan ışınların soygaz olan sıvı helyuma nüfus etmeleri mümkün değildir. Ancak helyum atomlarının elektronları iterek o bölgede bir boşluk oluşturmaları mümkündür. Helyumun öz kütlesi ρ, molar kütlesi μ ve Avagadro sayısı veriliyor.

Bu boşluğun yarıçapı nedir? Bu boşluktan dışlanan helyum atomların sayısı nedir?

e) Metallerde valans elektronların oluşturan gazın, kuantum mekaniksel hareketinden dolayı meydana gelen basınç nedir? (Metalin öz kütlesi ρ ve molar kütlesi μ veriliyor.)

f) Kuantum mekaniksel osilatörün minimum enerjisi nedir?

ŞUBAT KAMPI SINAVI CEVAPLARI-1990

1. a) $\sqrt{\frac{k\ell^2}{m}}$; b) $\frac{3k\ell^2}{2}$; c) $\frac{4v}{3}$; $\frac{v}{3}$

2. $\frac{m\sqrt{\left(g^2+a^2\right)^3}}{4g^2+a^2}$

3. a) $\frac{3F}{4}$

b) $F_2 - \frac{\left(2m_1+m_2\right)\left(F_2-F\right)_1}{2\left(m_1+m_2\right)}$

4. a) $\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$

b) $\frac{q}{2m}$

c) $\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R^2}\left(\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}-2z\right)$

d) $\frac{\mu_0\omega q R^2}{8\pi z^3}$

5. a) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}qp}{9\pi\varepsilon_0 mR^2}}$; b) $\pi R^2\sqrt{\frac{\sqrt{3^5}\pi m\varepsilon_0}{pq}}$

6. $\omega = \frac{1}{C}\sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)^2+\frac{4}{L_1L_2}}-\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\right]}$

7. a) $J\cos^2\beta$; yeni şiddet dağlımı merkezde aynı değerde, merkezden uzaklaştıkça azalmaktadır.

b) $4J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\beta$

8. Belirsizlik prensibi kullanarak aşağıda verilen problemleri sizin seçtiğiniz sabitler cinsinden çözünüz.

8. a) $-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -R_y = -13{,}6\text{ eV}; -\frac{49me^4}{256\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -\frac{49R_y}{8} = -84\text{ eV}$

b) $\sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}}$; $2\sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}}$

c) $\frac{\hbar^2}{2mR^2}\sqrt[3]{\frac{M^5}{m^5}} \sim 10^{46}$ J

d) $\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}}$; $\frac{4\pi\rho N_A}{3\mu}\sqrt[4]{\left(\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}\right)^3}$

e) $\frac{\hbar^2}{m}\sqrt[3]{\left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^5}$

f) $n\hbar\omega$; $\hbar\omega_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$

ŞUBAT KAMPI SINAVI SORULARIN ÇÖZÜMLERİ-1990

1. a) 2m kütleli cisim sabit ω açısal hızı ile döndürülürse yarıçapı $r=2\ell$ olan dairesel yörüngeyi izlemektedir. Bu durumda;

$$kx=k\ell=2m\omega^2.2\ell$$

yazabiliriz. Buradan cismin açısal hızı ve hız;

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{4m}}\ ;\ v=2\omega\ell=\sqrt{\frac{k\ell^2}{m}}$$

olarak bulunur.

b) Sistemin bu duruma getirilmesi için yapılan iş;

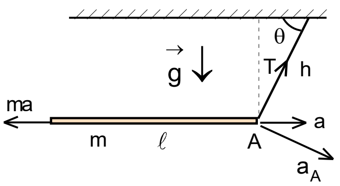
$$W=E_k+E_p=\frac{2mv^2}{2}+\frac{k\ell^2}{2}=\frac{3k\ell^2}{2}$$

olarak bulunur.

c) 2m kütleli cisim çubuktan uzaklaşmaya v hızı ile başlar. m kütleli cisim ile esnek çarpıştığında momentum ve enerji korunumu yasaları geçerlidir. Buradan hızlar;

$$2mv=mv_1+2mv_2\ ;\ \frac{2mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{2mv_2^2}{2}\ ;\ v_1=\frac{4v}{3}\ ;\ v_2=\frac{v}{3}$$

olarak bulunur.



2. a ivmesiyle gitmekte olan vagonda çubuğu tutan ipler vagonun tavanı ile θ açısı yapmaktadır. Bu durumda;

$$mg=2T\sin\theta$$
$$ma=2T\cos\theta$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\tan\theta=\frac{g}{a}\ ;\ \sin\theta=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}\ ;\ \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}$$

elde edilir. Sol ip koptuğunda ilk an için;

$$mg-T\sin\theta=ma'_y\ ;\ T\cos\theta-ma=ma'_x$$

yazabiliriz. Çubuğun kütle merkezine moment alabiliriz.

$$T\sin\theta.\frac{\ell}{2}=J\alpha;\ J=\frac{m\ell^2}{12}$$

Buradan kütle merkezinin etrafında çubuğu dönme açısal ivmesi;

$$\alpha=\frac{6T\sin\theta}{m\ell}$$

olarak bulunur. Çubuğun A ucunun ivmesi;

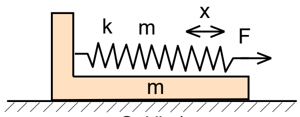
$$a_{Ax}=a'_x=\frac{T\cos\theta}{m}-a;\ a_{Ay}=a'_y-\frac{\ell\alpha}{2}=g-\frac{T\sin\theta}{m}-\frac{3T\sin\theta}{m}=g-\frac{4T\sin\theta}{m}$$

olarak yazılabilir. Bu bileşke ivmenin ipe dik olması gerekir, çünkü bu uç dairesel yörünge takip etmektedir. Buradan;

$$\frac{a_{Ax}}{a_{Ay}}=\tan\theta=\frac{\frac{T\cos\theta}{m}-a}{g-\frac{4T\sin\theta}{m}}\ ;\ g\sin\theta-\frac{4T\sin^2\theta}{m}=\frac{T\cos^2\theta}{m}-a\cos\theta;\ g\sin\theta+a\cos\theta=\frac{4T\sin^2\theta}{m}+\frac{T\cos^2\theta}{m}$$

$$T=\frac{m(g\sin\theta+a\cos\theta)}{1+3\sin^2\theta}=\frac{m\left(g.\frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}+a.\frac{a}{\sqrt{g^2+a^2}}\right)}{1+3.\left(\frac{g}{\sqrt{g^2+a^2}}\right)^2}=\frac{m\sqrt{g^2+a^2}}{1+\frac{3g^2}{g^2+a^2}}=\frac{m\sqrt{\left(g^2+a^2\right)^3}}{4g^2+a^2}$$

olarak bulunur.



Şekil a)

3. a) Sürtünmesiz düzlem üzerinde bulunan dinamometreye F değerinde yatay yönde kuvvet uygulandığında dinamometre;

$$a=\frac{F}{2m}$$

ivme ile hareket eder. Yaydaki gerilme kuvveti uçtan x uzaklığına bağlı olarak;

$$T(x)=F-m_x a=F-\frac{mx}{\ell}\frac{F}{2m}=F\left(1-\frac{x}{2\ell}\right)=\frac{YSd\ell}{dx}$$

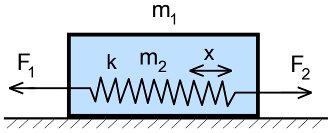
şeklinde yazılabilir. Burada dx, x uzaklıkta seçilen küçük bir yay parçasının uzunluğu, dℓ ise bu parçanın uzama miktarıdır. Buradan yayın toplam uzaması;

$$\Delta\ell=\int d\ell=\int_0^{\ell}\frac{F}{SY}\left(1-\frac{x}{2\ell}\right)dx=\frac{3F\ell}{4SY}$$

olarak bulunur. Burada S kesit alanı, Y Young modülü olarak bilinir. Dinamometrenin gösterdiği kuvvet;

$$k\Delta\ell=\frac{SE3F\ell}{\ell 4SY}=\frac{3F}{4}\;;\;k=\frac{YS}{\ell}$$

olarak bulunur. k yay sabitidir.



Şekil b)

b) Dinamometre kutusunun kütlesi m_1, içindeki yayın kütlesi m_2, dinamometrenin sol ve sağ tarafında uygulanan kuvvetler F_1 ve F_2 ise sürtünmesiz düzlem üzerinde bulunan dinamometre;

$$a=\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}$$

ivme ile hareket eder. Yaydaki gerilme kuvveti uçtan x uzaklığına bağlı olarak

$$T(x)=F_2-(m_1+m_2)a=F_2-\left(m_1+\frac{m_2x}{\ell}\right)\left(\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}\right)=\frac{YSd\ell}{dx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada dx x uzaklıkta seçilen küçük bir yay parçasının uzunluğu, dℓ ise bu parçanın uzama miktarıdır. Buradan yayın toplam uzaması

$$\Delta\ell=\int d\ell=\int_0^{\ell}\frac{1}{YS}\left[F_2-\left(m_1+\frac{m_2x}{\ell}\right)\left(\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}\right)\right]dx=\frac{1}{YS}\left[F_2\ell-\frac{m_1(F_2-F_1)\ell}{m_1+m_2}-\frac{m_2(F_2-F_1)\ell}{2(m_1+m_2)}\right]$$

olarak bulunur. Dinamometrenin gösterdiği kuvvet

$$k\Delta\ell=\frac{k}{ES}\left[F_2\ell-\frac{m_1(F_2-F_1)\ell}{m_1+m_2}-\frac{m_2(F_2-F_1)\ell}{2(m_1+m_2)}\right]=F_2-\frac{(2m_1+m_2)(F_2-F)_1}{2(m_1+m_2)}$$

olarak bulunur.

4. a) Diskin yükü ifadesinden yükün yüzeysel yük yoğunluğu;

$$q=\sigma\pi R^2;\ \sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

olarak yazılabilir. Diskin merkezindeki manyetik indüksiyon alanı bulmak için seçilen yüzeyin üzerindeki yük aslın-da dairesel bir akım oluşturduğunu hesaba katmalıyız. Akan akım;

$$dI_r=\frac{dq}{T}=\frac{\sigma 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}}=\sigma\omega r dr$$

bu akımın diskin merkezinde oluşturduğu manyetik indüksiyon alanı ve tüm manyetik alanı;

$$dB=\frac{\mu_0 dI_r}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega dr}{2};\ B=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega dr}{2}=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}=\frac{\mu_0 q\omega}{2\pi R}$$

olarak bulunur.

b) Seçilen yüzeyin dairesel akımının çerçevelediği alandan oluşan manyetik dipol momenti ve oluşan tüm manyetik dipol manyetik moment;

$$dp_m=dI_r\pi r^2=\sigma\omega\pi r^3 dr;\ p_m=\int_0^R\sigma\omega\pi r^3 dr=\frac{\sigma\omega\pi R^4}{4}=\frac{q\omega R^2}{4}$$

diskin eylemsizlik momenti;

$$J=\frac{mR^2}{2}$$

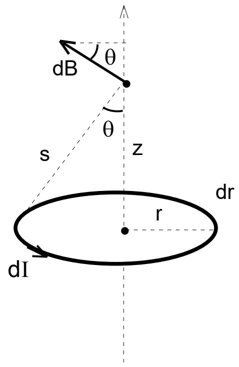
diskin açısal momentumu;

$$L=J\omega=\frac{mR^2\omega}{2}$$

jiromanyetik oranı;

$$\frac{p_m}{L}=\frac{q}{2m}$$

olarak bulunur.



c) Disk üzerinde yarıçapı r ve genişliği dr olan ince bir halkanın z ekseni üzerindeki manyetik alanı;

$$dB_z=\int_\ell\frac{\mu_0 dI_r d\ell\sin 90^\circ}{4\pi s^2}\sin\theta=\frac{\mu_0\omega\sigma r dr.2\pi r}{4\pi\left(r^2+z^2\right)}\frac{r}{\sqrt{\left(r^2+z^2\right)}}=\frac{\mu_0\omega\sigma r^3 dr}{2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada çemberde seçilen $d\ell$ uzunluktaki küçük tel parçası ile nokta arasındaki uzaklık;

$$s=\sqrt{r^2+z^2}$$

olur. Toplam manyetik alan;

$$B_z=\int_0^R\frac{\mu_0\omega\sigma r^3 dr}{2\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ile bulunur. Burada;

$$r=z\tan\alpha$$

dönüşümü kullanabiliriz. Buradan;

$$dz=\frac{z d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

elde edilir. İntegralin sınırları da değişir.

$$0=z\tan\alpha;\ \alpha_1=0;\ \cos\alpha_1=1$$

$$R=z\tan\alpha;\ \alpha_2=\arctan\frac{R}{z};\ \cos\alpha_2=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

olur. Buradan;

$$B_z=\int_0^{\alpha_2}\frac{\mu_0\omega\sigma z^3\tan^3\alpha.\frac{z d\alpha}{\cos^2\alpha}}{2\left(z^2\tan^2\alpha+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\alpha_2}\frac{\mu_0\omega\sigma z^4\sin^3\alpha d\alpha}{2\cos^5\alpha\left(\frac{z^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\alpha_2}\frac{\mu_0\omega\sigma z^4\sin^3\alpha d\alpha}{2\cos^5\alpha.\frac{z^3}{\cos^3\alpha}}=$$

$$= -\int_0^{\alpha_2} \frac{\mu_0\omega\sigma z\left(1-\cos^2\alpha\right)d\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = -\frac{\mu_0\omega\sigma z}{2}\left(-\frac{1}{\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\Bigg|_0^{\alpha_2} =$$

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma z}{2}\left(\frac{\sqrt{R^2+z^2}}{z}+\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}-2\right) = \frac{\mu_0\omega q}{2\pi R^2}\left(\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}-2z\right)$$

olarak bulunur.

d) $z>>r_1$; r_2 için diskin ekseni üzerindeki manyetik alanı;

$$B=\frac{2\mu_0 p_m}{4\pi z^3} = \frac{\mu_0\sigma\omega R^4}{8z^3}$$

ikinci özdeş bir disk z uzaklıkta bulunursa iki disk arasındaki kuvvet;

$$F=p_m\frac{dB}{dz} = -\frac{\sigma\omega\pi R^4}{4}\cdot\frac{3\mu_0\sigma\omega R^4}{8z^4} = -\frac{3\pi\mu_0\sigma^2\omega^2R^8}{32z^4}$$

olarak bulunur. Manyetik indüksiyon alanı için bulduğumuz ifadede yaklaşım kullanarak;

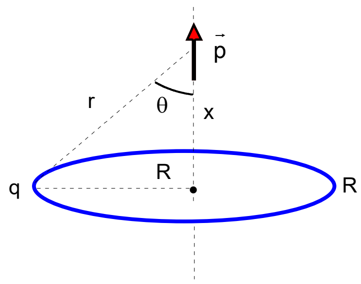
$$(1+x)^n = 1+x+\frac{n(n-1)x^2}{2}$$

$$\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}}-2z=\frac{R^2+2z^2}{z\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}-2z=\frac{R^2+2z^2}{z}\left(1-\frac{R^2}{2z^2}+\frac{3R^4}{8z^4}\right)-2z=\frac{R^2}{z}+2z-\frac{R^4}{2z^3}-\frac{R^2}{z}+\frac{3R^4}{8z^5}+\frac{3R^4}{4z^3}-2z\approx\frac{R^4}{4z^3}$$

elde edilir. Buradan manyetik alan;

$$B=\frac{\mu_0\omega q}{2\pi R^2}\frac{R^4}{4z^3}=\frac{\mu_0\omega q R^2}{8\pi z^3}$$

olarak bulunur. Yani manyetik dipolün z>>R uzaklıkta oluşturduğu manyetik alanı ile aynı ifade elde edilmektedir.



5. a) Halkanın merkezinden x uzaklıkta elektrik alan;

$$E_x = E\cos\theta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{x}{r} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+R^2\right)^3}}$$

olarak yazılabilir. Denge durumunda;

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{\left(x^2+R^2\right)^3} - x.\frac{3}{2}\sqrt{x^2+R^2}.2x}{\left(x^2+R^2\right)^3} = 0$$

$$x^2+R^2-3x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}R}{2} \Rightarrow \tan\theta_0 = \sqrt{2}$$

olmalıdır. Buradan;

$$\sin\theta_0 = \frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\ ;\ \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

yazabiliriz. x_0 uzaktaki elektrik alan;

$$E_{0x} =_0 \frac{\sqrt{3}q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$

bu uzakta dipolün elektrik potansiyel enerjisi kazanılan kinetik enerjiye eşit olur. Buradan dipolün kazandığı hız;

$$\mathcal{E}_{p0x} = pE_{0x} = \frac{\sqrt{3}qp}{18\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{mv^2}{2}\ ;\ v_{mak} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}qp}{9\pi\varepsilon_0 m R^2}}$$

olarak bulunur.

b) x_0 uzaklıkta elektrik alanın gradyanı işaret değiştirmektedir. Bu sebeple bu noktaya kadar dipol hızlanır, bu noktadan sonra yavaşlar, yani titreşim hareketi yapmaktadır. Dipol denge durumundan saparsa dipole etki eden kuvvet;

$$F = p\left(\frac{dE_x}{dx}\right) = \frac{pq\left(R^2-2x^2\right)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+R^2\right)^5}}\ ;\ x = x_0 + \Delta x$$

uzaklıkta;

$$F = \frac{pq\left[R^2-2\left(x_0+\Delta x\right)^2\right]}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left[\left(x_0+\Delta x\right)^2+R^2\right]^5}} = \frac{pq\left(R^2-2x_0^{\,2}\right)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x_0^{\,2}+R^2\right)^5}} - \frac{4pqx_0\Delta x}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x_0^{\,2}+R^2\right)^5}} = -\frac{4pq\Delta x}{\sqrt{3^5}\pi\varepsilon_0 R^4}$$

olarak bulunur. Bu kuvvetin etkisi ile dipol a ivme kazanır.

$$ma = -\frac{4pq\Delta x}{\sqrt{3^5}\pi\varepsilon_0 R^4}$$

Titreşimin hareketinin titreşim frekansı ve titreşim periyodu;

$$\omega = \sqrt{\frac{4pq}{\sqrt{3^5}\pi m\varepsilon_0 R^4}}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi R^2\sqrt{\frac{\sqrt{3^5}\pi m\varepsilon_0}{pq}}$$

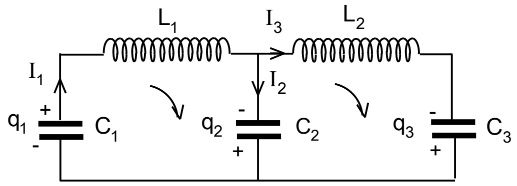
olarak bulunur.

6. C_1 kondansatörün deşarj olması ile akım akmaya başlar. Birinci Kirchoff yasasından;

$$I_1 = I_2 + I_3$$

yazabiliriz. Birinci ve ikinci hücre için ikinci Kirchoff yasası

$$-L_1 \frac{dI_1}{dt} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} \; ; \; -L_2 \frac{dI_3}{dt} = -\frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$



şeklinde yazabiliriz. Bu denklemleri türevleyip;

$$-L_1 \frac{d^2I_1}{dt^2} = \frac{I_1}{C_1} + \frac{I_2}{C_2} \; ; \; -L_2 \frac{d^2I_3}{dt^2} = -\frac{I_2}{C_2} + \frac{I_3}{C_3}$$

denklemleri elde ederiz. Birinci Kirchoff yasasından;

$$I_2 = I_1 - I_3$$

yazarsak;

$$\ddot{I}_1 - \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) I_1 + \frac{1}{L_1C_2} I_3 = 0$$

$$\ddot{I}_3 + \frac{1}{L_2C_2} I_1 - \frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) I_3 = 0$$

denklemleri elde ederiz. Akan akımların çözümleri;

$$I_1 = I_{01}\, e^{i\omega t} \; ; \; \ddot{I}_1 = -\omega^2 I_{01\,1}\, e^{i\omega t} \; ; \; I_3 = I_{03}\, e^{i\omega t} \; ; \; \ddot{I}_3 = -\omega^2 I_{03}\, e^{i\omega t}$$

şeklinde arayabiliriz.

$$-\left[\omega^2 + \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right] I_{01} + \frac{1}{L_1C_2} I_{03} = 0$$

$$\frac{1}{L_2C_2} I_{01} - \left[\omega^2 + \frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\right] I_{03} = 0$$

olur. Bu sistemin çözümü ya $I_{01} = I_{03} = 0$ ya da terimlerden oluşan determinant sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\left[\omega^2 + \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right] & \frac{1}{L_1C_2} \\ \frac{1}{L_1C_2} & -\left[\omega^2 + \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)\right] \end{vmatrix} = 0$$

Buradan titreşim açısal frekansları

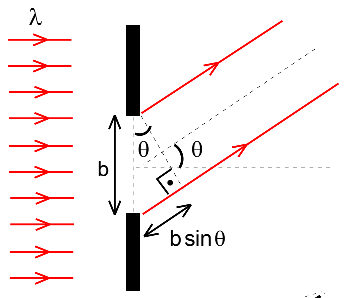
$$\omega^4 + \left[\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + \frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)\right]\omega^2 - \frac{4}{L_1L_2C_1C_2} = 0$$

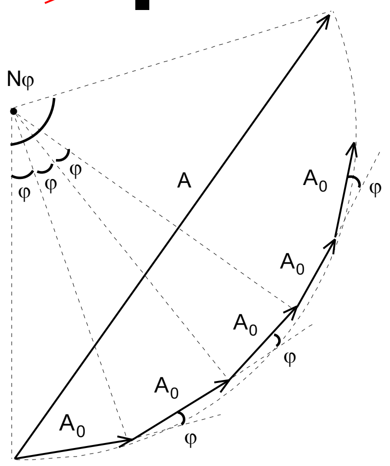
$$\omega^4 + \frac{2}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\omega^2 - \frac{4}{L_1L_2C^2} = 0$$

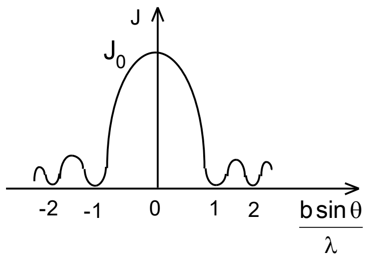
denklemin kökleri gibi bulunur.

$$\omega = \frac{1}{C}\sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^2 + \frac{4}{L_1L_2}} \; - - \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\right]}$$

olarak bulunur.







7. a) Tek yarığın uçlarından çıkan ışınların arasındaki faz farkı φ olsun. Faz farkı hem açı hem de mesafe ve dalga boyu cinsinden yazılabilir.

$$\frac{\varphi_b}{2\pi}=\frac{b\sin\theta}{\lambda}\ ;\ \varphi_b=kb\sin\theta;\ k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

Yarığın içinde N çok büyük sayı olmak koşulu ile N tane kaynak olduğunu varsayalım. Her artarda yerleştirilen iki kaynak arasında;

$$\varphi=\frac{\varphi_b}{N}$$

faz farkı meydana gelmektedir. Bu kaynaklardan yayılan dalgaların genliklerinin vektörel toplamı;

$$A=2R\sin\frac{N\varphi}{2}\ ;\ R=2A_0\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$A=A_0\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}=A_0\frac{\sin\frac{\varphi_b}{2}}{\frac{\varphi_b}{2N}}=NA_0\frac{\sin\frac{\varphi_b}{2}}{\frac{\varphi_b}{2}}=NA_0\frac{\sin\beta}{\beta}$$

$\theta=0°$ ise N tane birbirine paralel olan titreşimi toplanır. Bu durumda $A=NA_0$ olur.

Işık şiddeti $J\sim A^2$ olduğu için merkezdeki ışık şiddeti $J_0\sim N^2A_0^2$ olarak yazılabilir. $\theta\neq0°$ ise;

$$J=J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\ ;\ \beta=\frac{\varphi_b}{2}$$

olarak bulunur. Yarık genişliği iki katına çıkarsa yeni şiddet dağılımı;

$$J'=J_0\frac{\sin^2(2\beta)}{(2\beta)^2}=\frac{J_0}{4}\frac{(2\sin\beta\cos\beta)^2}{\beta^2}=J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\beta=J\cos^2\beta$$

olur. Yeni şiddet dağlımı merkezde aynı değerde, merkezden uzaklaştıkça azalmaktadır.

b) Yarık aralığı b ile yarıklar arası d uzaklığının eşit olduğu (b=d) çift yarıklı düzenekte hem her yarıkta hem de iki yarık arasında;

$$\varphi_d=kd\sin\theta=\varphi_b$$

faz farkı meydana gelir. Her yarıktan meydana gelen titreşimin toplam genliği;

$$A_1=A_2=A_0\frac{\sin\beta}{\beta}$$

olarak yazalım. İki yarıktan meydana gelen titreşimin genliği;

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi_d}=A_1\sqrt{2(1+\cos\varphi_d)}=2A_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\frac{\varphi_b}{2}=2A_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta$$

ışık şiddeti;

$$J=4J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\beta$$

olarak bulunur.

8. a) Hidrojen atomdaki elektronun enerjisi için;

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Belirsizlik prensibine göre;

$\Delta p.\Delta r=\hbar$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için;

$\Delta p\approx p$; $\Delta r\approx r$; $pr=\hbar$

yazılabilir. Buradan enerji için;

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan yarıçap;

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 0;\ r = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

enerji;

$$\mathcal{E} = -\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -R_y = -13{,}6\ \text{eV}$$

olarak bulunur. Helyum atomlarındaki elektronların bağlanma enerjisi için;

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = 2\frac{mv^2}{2} - 2\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r} = \frac{p^2}{m} - \frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Belirsizlik prensibine göre;

$p.r=\hbar$

olarak yazılabilir. Buradan enerji için;

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan yarıçap;

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr} = -\frac{2\hbar^2}{mr^3} + \frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = 0;\ r = \frac{16\pi\varepsilon_0\hbar^2}{7me^2}$$

enerji;

$$\mathcal{E} = -\frac{49me^4}{256\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} = -\frac{49R_y}{8} = -84\ \text{eV}$$

olarak bulunur. Gerçek değer –79 eV olduğuna göre bulunan sonuç oldukça iyi sayılabilir.

b) Gümüş atomları yarıktan geçerken belirsizlik ilkesi gereği hareketin dik yönünde Δv_y hız kazanmaktadır. ℓ uzaklıkta bulunan ekran üzerindeki oluşacak gümüş kaplı bölgenin çapı;

$D_E = D + 2\Delta v_y t$

olarak yazılabilir. Burada D yarığın çapıdır. Atomların ekrana kadar ulaşma süresi;

$$t = \frac{\ell}{v};\ v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

olur. Belirsizlik prensibine göre;

$\Delta p_y \Delta y = \hbar$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için;

$$\Delta p_y = m\Delta v_y;\ \Delta y \approx D;\ \Delta v_y = \frac{\hbar}{mD}$$

yazılabilir. Buradan çap için;

$$D_E = D + \frac{2\hbar\ell}{mDv} = D + \frac{2\hbar\ell}{D\sqrt{3kmT}}$$

yazılabilir. Çapın minimum olması için bu ifadenin D çapına göre türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{dD_E}{dD} = 1 - \frac{2\hbar\ell}{D^2\sqrt{3kmT}} = 0$$

Bu şarttan minimum çapı gerçekleştirmek için yarığın çapı ve ekran üzerindeki minimum çap;

$$D = \sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}};\ D_E = 2D = 2\sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}}$$

olarak bulunur.

c) Nötron yıldızın nötron sayısı ifadesinden bir nötrona düşen hacminin boyutu bulunulabilir.

$$N=\frac{M}{m}=\frac{V_{yıldız}}{V_{nötron}}=\frac{R^3}{r^3}\ ;\ r=R\sqrt[3]{\frac{m}{M}}$$

Belirsizlik prensibine göre;

$$\Delta p\Delta r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için;

$$\Delta p\approx p;\ \Delta r\approx r;\ p.r=\hbar$$

yazılabilir. Buradan momentum;

$$p=\frac{\hbar}{r}$$

yıldızı oluşturan nötronların kinetik enerjileri;

$$\mathcal{E}_k=N\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2mR^2}\sqrt[3]{\frac{M^5}{m^5}}\sim 10^{46}\ \text{J}$$

olarak bulunur.

d) Beta ışıması sonucu helyumun içine giren elektronların ve oluşturdukları boşluk bölgenin toplam enerjisi;

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_k+\mathcal{E}_p=\frac{mv^2}{2}+4\pi\sigma r^2=\frac{p^2}{2m}+4\pi\sigma r^2$$

olur. Burada $4\pi\sigma r^2$ oluşturulan boşluğun yüzey geriliminden kaynaklanan yüzey gerilimi enerjisi. Belirsizlik prensibine göre;

$$\Delta p.\Delta r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için;

$$\Delta p\approx p;\ \Delta r\approx r;\ pr=\hbar$$

yazılabilir. Buradan enerji için;

$$\mathcal{E}=\frac{\hbar^2}{2mr^2}+4\pi\sigma r^2$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan yarıçap;

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+8\pi\sigma r=0;\ r=\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}}$$

olarak bulunur. Sıvı helyumun molar kütlesi μ, öz kütlesi ρ ise bir atoma düşen hacmin boyutu ℓ bulunulabilir.

$$\rho=\frac{\mu}{V_\mu}=\frac{\mu}{N_A\ell^3}\ ;\ \ell=\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$$

Oluşturulan boşluktan dışlanan helyum atom sayısı;

$$N=\frac{4\pi r^3}{3\ell^3}=\frac{4\pi\rho N_A}{3\mu}\sqrt[4]{\left(\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}\right)^3}$$

olarak bulunur. Soruyu basınçlardan yola giderek de çözebiliriz. Elektronun oluşturduğu basınç;

$$P_e=\frac{2n_0\mathcal{E}_{k1}}{3}\ ;\ n_0=\frac{N}{V}=\frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{3}{4\pi r^3}$$

elektronun kinetik enerjisi;

$$\mathcal{E}_{k1}=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

Laplass basıncı;

$$P_L=\frac{2\sigma}{r}$$

olarak yazılabilir. İki basıncın eşit olması gerekir. Buradan;

$$\frac{2\sigma}{r}=\frac{2}{3}\frac{3}{4\pi r^3}\frac{\hbar^2}{2mr^2}\ ;\ r=\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}}$$

olarak bulunur. Elektronun basıncı başka yoldan da bulunulabilir. Boşluğun hacminin dV kadar arttırmak için yapılan iş kinetik enerjinin değişimine eşittir.

$$P_e dV=P_e 4\pi r^2 dr=-d\mathcal{E}_{k1}=\frac{\hbar^2 dr}{mr^3}\ ;\ P_e=\frac{\hbar^2}{4\pi mr^5}$$

olarak bulunur.

e) Metalin molar kütlesi μ, öz kütlesi ρ ise bir elektrona düşen hacmin boyutu ℓ bulunulabilir.

$$\rho=\frac{\mu}{V_\mu}=\frac{\mu}{N_A\ell^3}\ ;\ \ell=\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$$

Elektronun oluşturduğu basınç;

$$P_e=\frac{2n_0\mathcal{E}_{k1}}{3}\ ;\ n_0=\frac{N_A}{V_\mu}=\frac{N_A}{\frac{\mu}{\rho}}=\frac{\rho N_A}{\mu}$$

elektronların metaldeki konsantrasyonudur. Belirsizlik prensibine göre;

$$\Delta p_x.\Delta x=\hbar;\ \Delta p_y.\Delta y=\hbar;\ \Delta p_z.\Delta z=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için;

$$\Delta p_x\approx p;\ \Delta x\approx\ell;\ p\ell=\hbar;\ p=\frac{\hbar}{\ell}$$

yazılabilir. Simetri sonucu ortalama değerler için;

$$<\Delta p_x^2>=<\Delta p_y^2>=<\Delta p_z^2>;\ <\Delta p^2>=<\Delta p_x^2>+<\Delta p_y^2>+<\Delta p_z^2>=3<\Delta p_x^2>$$

$$\Delta p=\sqrt{3}\ \Delta p_x=\frac{\sqrt{3}\hbar}{\ell}$$

yazılabilir. Buradan elektronun kinetik enerjisi;

$$\mathcal{E}_{k1}=\frac{\Delta p^2}{2m}=\frac{3\hbar^2}{2m\ell^2}$$

olarak yazılabilir. Elektronun oluşturduğu basınç;

$$P_e=\frac{2}{3}\frac{\rho N_A}{\mu}\frac{3\hbar^2}{2mr^2}=\frac{\hbar^2}{m}\sqrt[3]{\left(\frac{\rho\ N_A}{\mu}\right)^5}$$

olarak bulunur.

f) Kuantum mekaniksel osilatörün enerjisi;

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_k+\mathcal{E}_p=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Belirsizlik prensibine göre;

$$\Delta p_x.\Delta x=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p_x\approx p;\ \Delta x\approx x;\ px=\hbar$$

yazabiliriz. Buradan enerji için;

$$\mathcal{E}=\frac{\hbar^2}{2mx^2}+\frac{kx^2}{2}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin x yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan x ve enerji;

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr}=-_0\ \frac{\hbar^2}{mx^3}+kx=0;\ x=\sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\ ;\ \mathcal{E}=\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=\hbar\omega$$

olarak bulunur. Aynı çözüme Sommerfeld kuantizasyonu olarak bilenen kuralı;

$$\oint_q p_q dq=2\pi\hbar n$$

kullanarak ulaşabiliriz. Burada q herhangi bir değişkendir. Harmonik osilatörün denklemi enerji türevin-den ya da kuvvet analizinden;

$$ma+kx=0;\ \ddot{x}+\omega^2x=0;\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

bu denklemin çözümü;

$$x=A\cos\omega t$$

şeklinde yazılabilir. Buradan;

$$v=\dot{x}=-\omega A\sin\omega t;\ p=-m\omega A\sin\omega t;\ dx=-\omega A\sin\omega t dt$$

$$\int_0^T(-m\omega A\sin\omega t)(-\omega A\sin\omega t)dt=m\omega^2A^2\int_0^T\sin^2\omega t dt=\frac{m\omega^2A^2}{2}\int_0^T(1-\cos 2\omega t)dt==\frac{m\omega^2A^2}{2}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^T=$$

$$\frac{m\omega^2A^2T}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\frac{2\pi}{\omega}=m\pi\omega A^2=2\pi\hbar n;\ A^2=\frac{2\hbar n}{m\omega}$$

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m\left(-\omega A \sin\omega t\right)^2}{2} + \frac{k\left(A\cos\omega t\right)^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t + A^2\cos^2\omega t}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\frac{2\hbar n}{m\omega} = n\hbar\omega$$

olarak bulunur. n=1 için enerji seviyesi minimum olur. Yapılan çözüm n=0 durumunda enerji için $\mathcal{E}$ =0 verir. Kuantum mekaniğinde çözümde;

$$\mathcal{E}_0 = {}_0\,\frac{\hbar\omega}{2}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla genel çözüm;

$$\mathcal{E}_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

şeklinde yazılabilir.