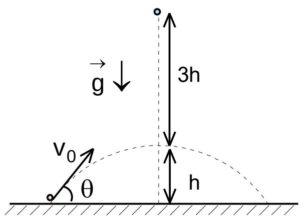
EYLÜL KAMPI SINAVI-2001 II. GRUP

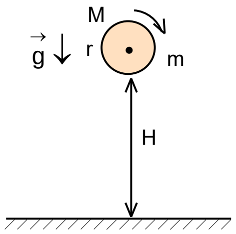


1. Noktasal bir cisim v_0 hızıyla ve yerle θ açısı yapacak şekilde atılıyor. Aynı anda başka bir cisim, yerden atılan cismin ulaşabileceği maksimum h yüksekliğinden 3h daha yüksekte bulunan bir noktadan serbest bırakılıyor.

Bu iki cismin hareketi sırasında aralarındaki minimum uzaklık nedir?

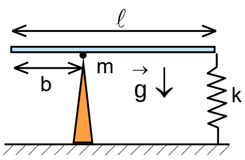
2. Silindirik bir bardağın yarıçapı r=6 cm, yüksekliği H=20 cm, toplam kütlesi m=200 g dır. Bardağın tabanının kütlesi toplam kütlesinin dörtte biri kadardır. Bu bardağın içine su konulmakta ve hareket halindeki bir arabada servis masası üzerinde durmaktadır.

Arabanın ivmelenmesi sırasında bardağın devrilmesi olasılığının en az olması için bardağa konulacak suyun yüksekliği ne kadar olmalıdır? (Hızlanma sürecinde sıvının şeklin bozulması ihmal ediliyor.)



3. H yükseklikte bulunan, kütlesi m ve yarıçapı r<<H olan bir diske şekildeki gibi sabit M momenti uygulanmaya başladığında disk serbest bırakılıyor. Disk yolun çeyreği kadar düştüğünde M momenti sıfırlanıyor.

Disk yere düşene kadar yaptığı devir sayısı nedir?



4. Uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan bir çubuğun bir ucuna yay sabitli k olan bir yay bağlanmakta ve çubuk bir destek üzerine şekildeki gibi konulmaktadır. Sistem dengede iken çubuk yatay konumundadır.

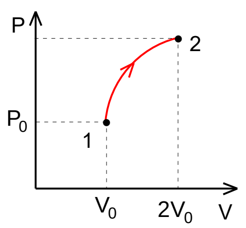
Destekten çubuğun diğer ucuna olan b uzunluğu çubuğun toplam boyunun kaçta kaçı olmalı ki çubuğun titreşim periyodu maksimum olsun?

5. Aynı doğrultu üzerinde olmayan P_1, P_2 ve P_3 noktalarında kütleleri m_1, m_2 ve m_3 cisimleri bulunmaktadır. Bu kütleler birbiriyle sadece gravitasyonel olarak etkileşmekte olup, başka hiçbir cisimle etkileşmemektedirler. Bu sistem kütle merkezinden geçen ve $P_1P_2P_3$ üçgenine dik olan eksene göre dönebilmektedir.

Kütleler arasındaki uzaklık $P_1P_2=a_{12}$, $P_2P_3=a_{23}$, $P_1P_3=a_{13}$ ve sistemin kütle merkezine göre açısal hızı ne kadar olmalıdırlar ki sistemin oluşturduğu üçgen şekli hareket sırasında değişmesin? Başka bir değişle hangi koşullar sağlanırsa sistem kütle merkezinden geçen eksen etrafında bir katı cisim gibi döner?

6. Kütleleri eşit iki tane aynı uzay aracı bir halatla birbirine bağlanmış olup T_0 periyoduyla Dünya etrafında dönmektedir.

Bu sistemin denge konumlarını ve bu denge durumun etrafında yaptıkları titreşimin periyodu nedir?

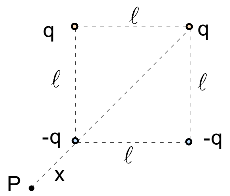


7. Bir mol iki atomlu ideal gazın P-V diyagramı şekildeki gibi olup sürecin analitik ifadesi;

$$\left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)^2 - \frac{V-V_0}{V_0} = 0$$

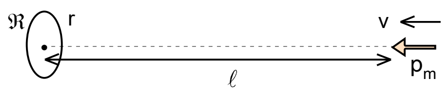
olarak veriliyor.

Gazın bu süreç boyunca yaptığı iş, aldığı ısı ve entropideki değişimi nedir?



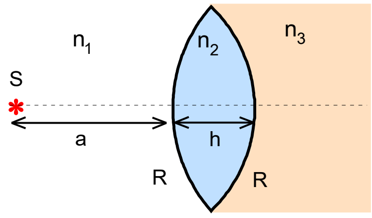
8. Kenarı ℓ olan karenin köşelerinde q, q, -q ve –q yükleri yerleştirilmiştir.

Köşegen boyunca yüklerin P noktasında oluşturduğu elektrik alanın büyüklüğünü ve yönünü x=0,5 ve x>>ℓ durumlarda nedir?



9. Yarıçapı r ve direnci $\Re$ olan bir halkaya, halkanın ekseni boyunca manyetik dipol momenti p_m olan bir manyetik dipol v hızıyla yaklaşmaktadır.

Dipol ile halka arasındaki uzaklık ℓ>>r olduğu bir anda halkada açışa çıkan ısı gücü ve halkaya etki eden kuvvet nedir?



10. Şekilde gösterilen h=2 cm kalınlığındaki merceğin iki yüzü de dışbükey ve eğrilik yarıçapı R=1 cm'dir. Merceğin solundaki n_1=1 olan ortamda mercekten 10 cm uzaktaki S noktasına noktasal bir cisim bulunmaktadır. Merceğin kırıcılık indisi n_2=1,5, merceğin sağındaki ortamınki ise n_3=2 dir.

Merceğin sağ tarafına nasıl bir ayna ve cisimden ne kadar uzağa konulursa bu optik sistemin verdiği son görüntü cisimle aynı noktada oluşur?

EYLÜL KAMPI SINAVI CEVAPLARI-2001 II. GRUP

1. $4h\sin\theta.\sqrt{1-\frac{v_0^2\cos^2\theta}{gh}}$

2. 3,73 cm

3. $\frac{3MH}{4\pi mgr^2}$

4. $\frac{\ell}{3}$

5. $\ell_{12}=\ell_{13}=\ell_{23}=\ell;\ \omega^2=\frac{\gamma\left(m_1+m_2+m_3\right)}{\ell^3}$

6. $\frac{\sqrt{3}T_0}{3}$

7. $\frac{5P_0V_0}{3}$; $\frac{55P_0V_0}{6}$; 6Rln2

8. $\frac{3{,}76q}{4\pi\varepsilon_0\ell^2}$; $\frac{\sqrt{10}q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$

9. $\frac{9\mu_0^2 p_m^2 r^4 v^2}{4\ell^8\Re^2}$; $\frac{9\mu_0^2 p_m^2 r^4 v}{4\ell^8\Re}$

10. 5,6 cm

EYLÜL KAMPI SINAVI-2001 I. GRUBUN SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. Yerden fırlatılan cismin ilk hızın bileşenleri için;

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \,;\; v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

cismin hareket yasaları için;

$$x = v_{0x}t \,;\; y_1 = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2} \,;\; y_2 = 4h - \frac{gt^2}{2}$$

eğik atılan cismin tepe noktasının yüksekliği ve eğik atılan cismin tepe noktasına gelene kadar geçen süre için;

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \,;\; t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

tepe noktasına kadar olan yatay uzaklık için;

$$\frac{\ell}{2} = v_0 \cos\theta . \frac{v_0 \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$$

yazabiliriz. İki cisim arasındaki uzaklık;

$$L = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g} - v_0 t\cos\theta\right)^2 + (4h - v_0 t\sin\theta)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4 \sin\theta^2 \cos^2\theta}{g^2} - \frac{2v_0^3 t\sin\theta\cos^2\theta}{g} + v_0^2 t^2 \cos^2\theta + 16h^2 - 8hv_0 t\sin + v_0^2 t^2 \sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4 \sin\theta^2 \cos^2\theta}{g^2} - \frac{2v_0^3 t\sin\theta\cos^2\theta}{g} + v_0^2 t^2 + 16h^2 - 8hv_0 t\sin\theta}$$

olur. Bu ifadenin türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_0^4 \sin\theta^2 \cos^2\theta}{g^2} - \frac{2v_0^3 t\sin\theta\cos^2\theta}{g} + v_0^2 t^2 + 16h^2 - 8hv_0 t\sin\theta\right) = -\frac{2v_0^3 \sin\theta\cos^2\theta}{g} + 2v_0^2 t - 8hv_0 t\sin\theta = 0$$

$$t = \frac{v_0 \sin\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{4h\sin\theta}{v_0}$$

Buradan aranan minimum uzaklık;

$$v_0^2\left(\frac{v_0 \sin\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{4h\sin\theta}{v_0}\right)^2 + 16h^2 - 8hv_0\left(\frac{v_0 \sin\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{4h\sin\theta}{v_0}\right)\sin\theta =$$

$$v_0^2\left(\frac{v_0^2 \sin^2\theta\cos^4\theta}{g^2} + \frac{8h\sin^2\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{16h^2\sin^2\theta}{v_0^2}\right) + 16h^2 - \frac{8hv_0^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{g} - 32h^2\sin^2\theta =$$

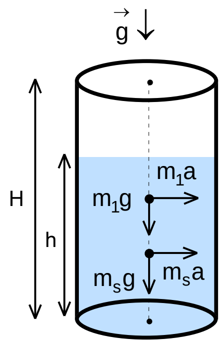
$$= \frac{v_0^4 \sin^2\theta\cos^4\theta}{g^2} + 162h^2\sin^2\theta$$

$$L = \sqrt{\frac{v_0^4 \sin\theta^2 \cos^2\theta}{g^2} - \frac{2v_0^3 \sin\theta\cos^2\theta}{g}\left(\frac{v_0 \sin\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{4h\sin\theta}{v_0}\right) + \frac{v_0^4 \sin^2\theta\cos^4\theta}{g^2} + 16h^2\sin^2\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{v_0^4 \sin\theta^2 \cos^2\theta}{g^2} - \frac{2v_0^4 \sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2} - \frac{8hv_0^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{g} + \frac{v_0^4 \sin^2\theta\cos^4\theta}{g^2} + 16h^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{16h^2\sin^2\theta - \frac{8hv_0^2 \sin^2\theta\cos^2\theta}{g}} = 4h\sin\theta . \sqrt{1 - \frac{v_0^2 \cos^2\theta}{gh}}$$

olarak bulunur.



2. Bardağın dikey kısmının kütlesi $m_1=\frac{3m}{4}$, tabanın kütlesi $m_2=\frac{m}{4}$, dökülen suyun kütlesi;

$$m_s=\rho\pi r^2 h$$

olsun. Araba a ivmesi ile hareket ederse devrilme şartı;

$$(m+m_s)g.r=m_1 a.\frac{H}{2}+m_s a.\frac{h}{2}$$

olarak yazabiliriz. Buradan ivme;

$$a=\frac{\left(m+\rho\pi r^2 h\right)gr}{\frac{3mH}{8}+\frac{\rho\pi r^2 h^2}{2}}=\frac{\left(0,2+1000.3.0,06^2.h\right).10.0,06}{\frac{3.0,2.0,2}{8}+\frac{1000.3.0,06^2.h^2}{2}}=\frac{0,12+6,48h}{0,015+5,4h^2}$$

olarak bulunur. Bu ivmenin h göre türevi sıfır ise bardağın devrilmesi olasılığı en küçük olur. Buradan h;

$$\frac{da}{dh}=0;\ 6,48(0,015+5,4h^2)-2.5,4h(0,12+6,48h)=0;\ 34,992h^2+1,296h-0,0972=0;\ h=0,0373\ m=3,73\ cm$$

olarak bulunur.

3. Sabit M momenti ile disk dönmeye başlıyor. Diskin döndüğü açısal ivme;

$$M=J\alpha,\ J=\frac{mr^2}{2};\ \alpha=\frac{2M}{mr^2}$$

olarak bulunur. Disk yolun çeyreğini aldığı süre ve diskin döndüğü açı;

$$\frac{H}{4}=\frac{gt_1^2}{2};\ t_1=\sqrt{\frac{H}{2g}};\ \varphi_1=\frac{\alpha t^2}{2}=\frac{MH}{2mgr^2}$$

kazandığı açısal hız $\omega=\alpha t$ olarak bulunur. Disk tüm yolu;

$$H=\frac{gt^2}{2};\ t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

sürede alır. Momentin sıfırlamasından sonra disk düşene kadar geçen süre;

$$t_2=t-t_1=\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

olur. Bu sürede diskin döndüğü açı;

$$\varphi_2=\omega t_2=\alpha t_1 t_2=\frac{MH}{mgr^2}$$

olarak bulunur. Disk tüm yolu boyunca döndüğü devir sayısı;

$$N=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2\pi}=\frac{3MH}{4\pi mgr^2}$$

olarak bulunur.

4. Çubuğu yatay dengesi için

$$mg\left(\frac{\ell}{2}-b\right)=(k\,x_0).(\ell-b)$$

yazabiliriz. Hareketin başlaması ile çubuğa etki eden moment için

$$J\alpha=(mg\cos\theta).\left(\frac{\ell}{2}-b\right)-k(x_0+x).(\ell-b);\ J=J_0+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2;\ J_0=\frac{m\ell^2}{12};\ x\approx(\ell-b)\theta;\ \cos\theta\approx1$$

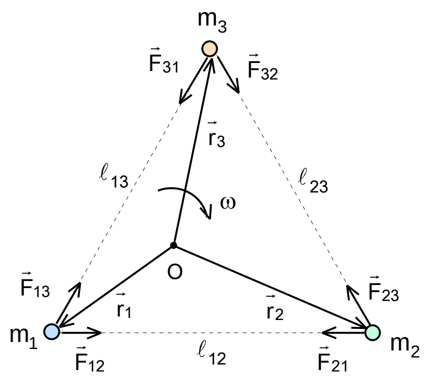
yazabiliriz. Buradan titreşim denklemi, titreşimin frekansı ve titreşim periyodu

$$\ddot{\theta}+\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}\theta=0;\ \omega=\sqrt{\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}};\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}{k(\ell-b)^2}}$$

olarak bulunur. Titreşim periyodun minimum olması için şart

$$\frac{d}{db}\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}=0;\ b=\frac{\ell}{3}$$

olarak bulunur.



5. Bazı durumlarda vektörlerle çalışırsak çözüm daha sade ve anlaşılır oluyor. Örneğin kütleleri m_1, m_2, m_3, ... m_N olan noktasal cisimlerden oluşan sistemde, cisimlerin belli noktaya olan uzaklıkları $\vec r_1$, $\vec r_2$, $\vec r_3$, ... $\vec r_N$ ise sistemin bu noktaya olan kütle merkezinin uzaklığı;

$$\vec r_{merkez} = \frac{m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + m_3\vec r_3 + ... + m_N\vec r_N}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_N}$$

ile verilir. m_1, m_2 ve m_3 kütleli cisimler sistemin kütle merkezi etrafında ω açısal hızı ile dönerse kütle merkezinde yerleştirilen bir koordinat sistemin başlangıç noktasına göre;

$$m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + m_3\vec r_3 = 0$$

yazabiliriz. Buradan kütle merkezinden cisimlerden birisinin, mesela m_2 kütleli cisminin olan konum vektörü;

$$\vec r_2 = -\frac{m_1\vec r_1 + m_3\vec r_3}{m_2}$$

olarak verilir. Her hangi bir yıldızın hareketini inceleyebiliriz. Mesela m_1 kütleli cisim için;

$$\vec F_{12} + \vec F_{13} = -m_1\omega^2\,\vec r_1;\ \vec F_{12} = \frac{\gamma m_1 m_2\left(\vec r_2 - \vec r_1\right)}{\ell_{12}^{\,3}};\ \vec F_{13} = \frac{\gamma m_1 m_2\left(\vec r_3 - \vec r_1\right)}{\ell_{13}^{\,3}}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{\gamma m_1 m_2\left(\vec r_2 - \vec r_1\right)}{\ell_{12}^{\,3}} + \frac{\gamma m_1 m_2\left(\vec r_3 - \vec r_1\right)}{\ell_{13}^{\,3}} = -m_1\omega^2\,\vec r_1;\ \frac{\gamma m_1 m_2}{\ell_{12}^{\,3}}\left(-\frac{m_1\vec r_1 + m_3\vec r_3}{m_2} - \vec r_1\right)\frac{\gamma m_1 m_2\left(\vec r_3 - \vec r_1\right)}{\ell_{13}^{\,3}} = -m_1\omega^2\,\vec r_1$$

$$\vec r_1\left(m_1\omega^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{\ell_{12}^{\,3}} - \frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{13}^{\,3}} - \frac{\gamma m_1^2}{\ell_{12}^{\,3}}\right) + \vec r_3\left(\frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{12}^{\,3}} - \frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{23}^{\,3}}\right) = 0$$

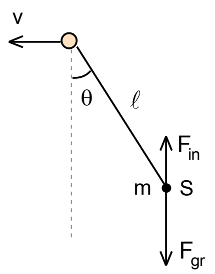
olarak yazılabilir. Bu ifadenin sıfır verebilmesi için katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan;

$$\ell_{12} = \ell_{13}$$

elde edilir. Başka bir cisim içim benzer işlem yapılırsa;

$$\ell_{12} = \ell_{13} = \ell_{23} = \ell;\ \omega^2 = \frac{\gamma\left(m_1 + m_2 + m_3\right)}{\ell^3}$$

olarak bulunur.



6. İki uzay aracın kütle merkezi Dünyanın etrafında hareket ederken açısal hız ve kuvvet için;

$$\omega_0 =_0 \frac{2\pi}{T_0};\ m\omega_0^2 r =_0 \frac{\gamma m m_D}{r^2} = F_{gr}$$

yazabiliriz. Burada m bir uzay aracın kütlesidir. İki uzay aracı birleştiren halatın uzunluğu 2ℓ olsun. Her araç ana yörüngeden $\ell\cos\theta$ kadar uzakta uydu için;

$$J\alpha = m\ell^2\,\ddot\theta = -\left[\frac{\gamma m m_D}{\left(r - \ell\cos\theta\right)^2} - m\omega_0^2\left(r - \ell\cos\theta\right)\right]\sin\theta.\ell =$$

$$= -\left[\frac{\gamma m m_D}{r^2\left(1 - \frac{\ell\cos\theta}{r}\right)^2} - m\omega_0^2\left(r - \ell\cos\theta\right)\right]\sin\theta.\ell \approx -\left[\frac{\gamma m m_D}{r^2\left(1 - \frac{2\ell\cos\theta}{r}\right)} - m\omega_0^2\left(r - \ell\cos\theta\right)\right]\sin\theta.\ell =$$

$$= -\left[\frac{\gamma m m_D}{r^2}\left(1 + \frac{2\ell\cos\theta}{r}\right) - m\omega_0^2\left(r - \ell\cos\theta\right)\right]\sin\theta.\ell;\ \ell\,\ddot\theta = -\left[\omega_0^2 r\left(1 + \frac{2\ell\cos\theta}{r}\right) - \omega_0^2 r\left(1 - \frac{\ell\cos\theta}{r}\right)\right]\sin\theta$$

$$\ddot\theta + 3\omega_0^2\cos\theta\sin\theta = 0;\ \ddot\theta + 3\omega_0^2\,\theta = 0$$

yazabiliriz. Küçük titreşimler için denkleminde $\cos\theta=1$; $\sin\theta=\theta$ olarak alınılabilir. Titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu;

$$\omega = \sqrt{3}\,\omega_0;\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\sqrt{3}T_0}{3}$$

olarak bulunur.

7. Basıncın hacme göre ifadesi;

$$P=P_0\left(1+\sqrt{\frac{V}{V_0}-1}\right)$$

olarak yazılabilir. Genleşme sürecinde yapılan iş;

$$\mathcal{W}=\int_{V_0}^{2V_{10}} PdV=P_0\int_{V_0}^{2V_0}\left(1+\sqrt{\frac{V}{V_0}-1}\right)dV=P_0\;V\Big|_{V_0}^{2V_0}+\frac{2P_0V_0}{3}\left(\frac{V}{V_0}-1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{V_0}^{2V_0}=\frac{5P_0V_0}{3}$$

olarak bulunur. Her durum için ideal gaz hal denkleminden;

$$P_1V_1=P_0V_0=RT_0\,;\;P_2V_2=RT_2\,;\;P_0\left(1+\sqrt{\frac{2V_0}{V_0}-1}\right).2V_0=4P_0V_0=4RT_0\,;\;T_2=4T_0$$

olarak bulunur. Gazın iç enerji değişimi;

$$U_{12}=nc_V(T_2-T_1)=\frac{5R}{2}(4T_0-T_0)=\frac{15RT_0}{2}=\frac{15P_0V_0}{2}$$

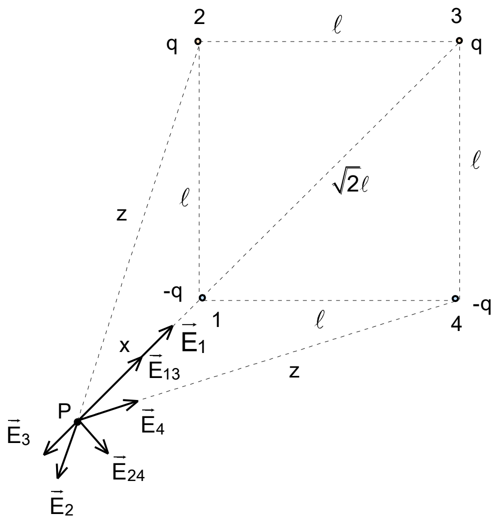
gaza verilen ısı;

$$Q=\mathcal{W}+U=\frac{5P_0V_0}{3}+\frac{15P_0V_0}{2}=\frac{55P_0V_0}{6}$$

olarak bulunur. Proseste entropi değişimi;

$$\Delta\Sigma=\int\frac{\delta Q}{T}=\int\frac{PdV+c_VdT}{T}=\int_{V_0}^{2V_0}\frac{RdV}{V}+\int_{T_0}^{4T_0}\frac{5RdT}{2T}=R\ln 2+\frac{5R}{2}\ln 4=6R\ln 2$$

olarak bulunur.



8. P noktasındaki elektrik alan dört yükün elektrik alanların bileşkesidir.

$$z=\sqrt{\ell^2+(0{,}5\ell)^2+2\ell.0{,}5\ell\cos 45^\circ}=1{,}4\ell$$

dersek;

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(0{,}5\ell)^2}=4E;\ E_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{2}\ell+0{,}5\ell\right)^2}=0{,}27E$$

$$E_2=E_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}=0{,}5E$$

olarak yazabiliriz. Köşegen boyunca bileşke elektrik alan;

$$E_{13}=E_1-E_3=3{,}73E$$

köşegene dik olan bileşke elektrik alan;

$$E_{24}=2E_2\cos\theta;\ \cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}\ell}{2}}{z}=0{,}5$$

ve toplam bileşke elektrik alanı;

$$E_P=\sqrt{E_{13}^2+E_{24}^2}=3{,}76E=\frac{3{,}76q}{4\pi\varepsilon_0\ell^2}$$

olarak bulunur.

b) P noktasındaki elektrik alan iki dipolden meydana geldiğini kabul edebiliriz. Köşegen boyunca bileşke elektrik alan;

$$E_{13}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(x+\sqrt{2}\,\ell\right)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2\left(1+\frac{2\sqrt{2}\ell}{x}+\frac{2\ell^2}{x^2}\right)}\approx$$

$$\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(1-\frac{2\sqrt{2}\ell}{x}\right)}\approx\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1+\frac{2\sqrt{2}\ell}{x}\right)=\frac{2\sqrt{2}\,q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

köşegene dik olan bileşke elektrik alan;

$$E_{24}=2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2\right]}\cos\theta\approx\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2}}\approx\frac{\sqrt{2}\ell}{2x};\ E_{24}=\frac{\sqrt{2}q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

toplam bileşke elektrik alan;

$$E_P=\sqrt{E_{13}^2+E_{24}^2}=\frac{\sqrt{10}q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

olarak bulunur. x>>ℓ olduğu durumda ikinci bir çözüm de yapabiliriz. Köşeleri birleştiren köşegenleri uzunlukları $\sqrt{2}\,\ell$ ve dipol momentleri;

$$p=q\sqrt{2}\,\ell$$

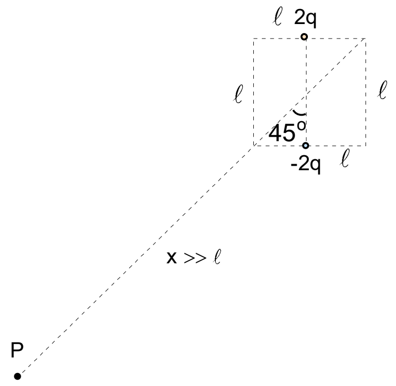
iki elektrik dipol ele alalım. Bu elektrik dipollerin elektrik alanları;

$$E_1=\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3};\ E_2=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

olup P noktasında birbirine diktir. Bileşke elektrik alan;

$$E_P=\sqrt{E_1^2+E_2^2}=\frac{\sqrt{10}q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

olarak bulunur.



Diğer taraftan P noktasındaki elektrik alan yükleri 2q ve -2q ve aralarındaki uzaklık ℓ olan bir dipolden kaynaklandığını kabul edebiliriz. Bu durumda elektrik alan;

$$E=\frac{(2q\ell)\sqrt{1+3\cos^2 45^o}}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

olarak yazılabilir. Buradan aynı

$$E=\frac{\sqrt{10}q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

sonuç çıkar.

9. Manyetik dipol momentin oluşturduğu manyetik indüksiyon alanı;

$$B=\frac{2\mu_0 p_m}{4\pi\ell^3}$$

olur. Halkada oluşan indüksiyon e.m.k.;

$$\mathcal{E}_{in}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{dB}{dt}S=-\frac{dB}{d\ell}\frac{d\ell}{dt}S=-\frac{6\mu_0 p_m \pi r^2 v}{4\pi\ell^4}$$

halkanın direnci $\mathfrak{R}$ ise halkada akan akım;

$$I=\frac{\mathcal{E}_{in}}{\mathfrak{R}}=\frac{6\mu_0 p_m \pi r^2 v}{4\pi\ell^4\mathfrak{R}}$$

halkada açığa çıkan ısı gücü;

$$P=I^2\mathfrak{R}=\frac{9\mu_0^2 p_m^2 r^4 v^2}{4\ell^8\mathfrak{R}^2}$$

olarak bulunur. Halkada akan akım manyetik dipol momenti;

$$p_{mh}=IS=\frac{6\mu_0 p_m \pi^2 r^4 v}{4\pi\ell^4\mathfrak{R}}$$

bu dipolün oluşturduğu manyetik alan;

$$B_h=\frac{2\mu_0 p_{mh}}{4\pi\ell^3}=\frac{3\mu_0^2 p_m r^4 v}{4\ell^7\mathfrak{R}}$$

ile verilir. Gradienti olan manyetik indüksiyon alanlarda dipole etki eden manyetik kuvvet;

$$F_m=p_{mh}\frac{\partial B}{\partial \ell}=-\frac{6\mu_0 p_m \pi^2 r^4 v}{4\pi\ell^4\mathfrak{R}}\frac{6\mu_0 p_m}{4\pi\ell^4}=-\frac{9\mu_0^2 p_m^2 r^4 v}{4\ell^8\mathfrak{R}}$$

olarak bulunur.

10. Birinci kırılma yüzeyi için;

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{b_1}=\frac{n_2-n_1}{R}\ ;\ \frac{1}{10}+\frac{1{,}5}{b_1}=\frac{1{,}5-1}{1}\ ;\ b_1=3{,}75\text{ cm}$$

yazabiliriz. (+) işareti görüntünün sol yüzeyin sağ tarafında olduğunu göstermektedir. Bu görüntü sağ yüzeye göre cisim gibi davranmaktadır. Sağ yüzeye kadar bu cismin uzaklığı;

$$a_2=b_1-2R=3{,}75-2=1{,}75\text{ cm}$$

olur. Bu cisim sağ yüzeyin sağ tarafında bulunduğundan dolayı ikinci kırılma yüzeyi için;

$$\frac{n_2}{(-a_2)}+\frac{n_3}{b_2}=\frac{n_3-n_2}{-R}\ ;\ \frac{1{,}5}{-1{,}75}+\frac{2}{b_2}=\frac{2-1{,}5}{-1}\ ;\ b_2=5{,}6\text{ cm}$$

yazabiliriz. Bu noktada düz bir ayna, tepe noktası bir çukur ya da tümsek ayna veya merkezi olan bir çukur ayna yerleştirirsek son görüntü cisim ile aynı noktada oluşur.