

УДК 53 (023)  
ББК 22.3я721+74.262.22  
М82

Учебное издание

**Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В.,  
Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А.**

М82

Задачи **Московских** городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.  
Приложение: олимпиады 2006 и 2007: Под ред. М. В. Семёнова,  
А. А. Якуты — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2007. —  
**696** с.: ил. — ISBN 978-5-94057-320-3.

В сборнике содержится 475 задач, предлагавшихся с 1986 г. по 2005 г. на теоретических турах Московских городских олимпиад школьников по физике. В книгу вошли наиболее интересные задачи с подробными решениями. В приложение включены задачи олимпиад 2006 и 2007 гг. с решениями (всего 68), а также исторические материалы и задачи первых олимпиад 1939–1948 годов.

Для школьников 8-х – 11-х классов, абитуриентов, студентов младших курсов вузов, школьных учителей, руководителей школьных физических кружков, преподавателей заочных и вечерних физических школ и подготовительных курсов. Книга может быть полезна преподавателям вузов, занимающимся организацией различных физических олимпиад для школьников и студентов.

ББК 22.3я721+74.262.22

- © Московский центр непрерывного математического образования, 2005–2007, оригинал-макет.  
© Варламов С. Д., Зинковский В. И., Семёнов М. В., Старокуров Ю. В., Шведов О. Ю., Якута А. А., 2005–2007, тексты решений задач.

ISBN 978-5-94057-320-3

---

*Варламов Сергей Дмитриевич, Зинковский Василий Иванович, Семёнов Михаил Владимирович, Старокуров Юрий Владимирович, Шведов Олег Юрьевич, Якута Алексей Александрович*

**Задачи Московских городских олимпиад по физике. 1986 – 2005.  
Приложение: олимпиады 2006 и 2007**

Технический редактор Кулыгин А. К.

Корректоры Ботова С. А., Вельтищев Д. Н., Кулыгин А. К., Щербаков Д. Е.

Подготовка иллюстраций:

Старокуров Ю. В., Виноградов М. П., Селиверстов А. В., Вельтищев М. Н.

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано к печати 30.10.2007.

Формат 70×100 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печать офсетная. Объём 43,5 печатных листов.

Заказ . Тираж 3000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский переулок, дом 11.

Тел. (495)241-05-00, (495)241-12-37. <http://www.mccme.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».

121099, Москва, Шубинский переулок, дом 6.

С. Д. ВАРЛАМОВ  
В. И. ЗИНКОВСКИЙ  
М. В. СЕМЁНОВ  
Ю. В. СТАРОКУРОВ  
О. Ю. ШВЕДОВ  
А. А. ЯКУТА

# ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ 1986 – 2005

ПРИЛОЖЕНИЕ: ОЛИМПИАДЫ 2006 И 2007

Издание второе,  
исправленное и дополненное

Под редакцией  
М. В. Семёнова, А. А. Якуты

*Рекомендовано УМО по классическому  
университетскому образованию РФ  
в качестве учебного пособия для абитуриентов и  
студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по специальности 010701 – Физика.*

Москва  
Издательство МЦНМО  
2007

## Предисловие

Олимпиада по физике в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова была впервые организована на физическом факультете в 1939 году, и с тех пор её проведение стало традиционным<sup>1</sup>. С 1978 года эта олимпиада была одновременно Московской городской олимпиадой школьников по физике, а в настоящее время она является Московской региональной олимпиадой и предшествует заключительному этапу Всероссийской олимпиады школьников по физике. В 2005 году Московская физическая олимпиада прошла в МГУ в 66-й раз.

До 1989 года Московская городская олимпиада проводилась для учеников трёх старших классов (с 8-го по 10-й), а в некоторые годы предпринимались попытки проведения олимпиады и для учеников 7-го класса (например, в 1987 году). Начиная с 1990 года, в связи с началом перехода на одиннадцатилетнюю систему обучения в средней общеобразовательной школе, произошла перенумерация старших классов (без изменения образовательных программ), и олимпиада стала проводиться для учеников 9-х – 11-х классов. В 1998 году было решено начать регулярное проведение олимпиады для восьмиклассников (7 кл. по старой нумерации); опыт оказался успешным. Начиная с 1999 года, олимпиада проводится также и для учеников 7 класса (6 кл. по старой нумерации).

В настоящее время городская олимпиада включает в себя три этапа: школьный этап, окружной (теоретический) этап и городской этап, состоящий из трёх туров — двух теоретических и одного экспериментального. Последний тур (на него приглашаются московские школьники 9-х – 11-х классов, ставшие победителями и призёрами олимпиады) фактически является отборочным при формировании команды г. Москвы для участия в заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике. Окружной этап проходит в административных округах и вузах г. Москвы, теоретические туры городского этапа проводятся на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова (при участии Московского государственного педагогического университета в проведении олимпиады для 7-го класса), а экспериментальный тур — в Московском институте открытого образования. Экспери-

---

<sup>1</sup>Олимпиада не проводилась только в 1942–1943 годах, во время войны.

ментальный тур проводится с первых лет существования олимпиады. Когда-то его участникам предлагались задачи студенческого практикума физического факультета МГУ (некоторые работы сохранились в практикуме до сих пор), затем жюри стало придумывать специальные экспериментальные задачи. Условия и решения задач экспериментальных туров планируется выпустить в виде отдельной книги.

Московская городская олимпиада школьников по физике богата традициями. В течение многих лет в составе её жюри работали известные учёные и преподаватели физического факультета МГУ — С. Э. Хайкин, Г. С. Ландсберг, С. Г. Калашников, А. Б. Млодзеевский, С. П. Стрелков, В. И. Иверонова, С. Т. Конобеевский, В. С. Фурсов, К. Ф. Теодорчик, И. А. Яковлев, Д. В. Сивухин, Э. И. Адирович, Б. И. Спасский, М. П. Шаскольская, И. А. Эльцин, В. Г. Зубов, В. П. Шальнов, Г. А. Бендриков, Б. Б. Буховцев, В. В. Керженцев, Г. Я. Мякишев, В. И. Григорьев, В. Д. Кривченко, Г. Е. Пустовалов, В. К. Петерсон, В. А. Погожев и другие. В организации первых олимпиад принимали участие также многие студенты и аспиранты МГУ, в частности М. М. Бонгард-Полонский, М. Е. Герценштейн, Н. Н. Константинов, Е. А. Либерман, Дж. М. Мышкис, М. И. Подгорецкий, А. Г. Свешников, А. И. Старобинский, И. М. Тернов, Р. В. Хохлов. Многие из них впоследствии стали известными учёными и преподавателями.

Во времена первых школьных олимпиад в Московском университете (вторая половина тридцатых – сороковые годы XX века)<sup>2</sup> неотъемлемой их частью были лекции, читаемые известными учёными (популярные лекции по физике школьникам читали А. Б. Млодзеевский, Г. С. Ландсберг, С. Э. Хайкин и др., иногда олимпиадные задания целиком посвящались прочитанной ранее лекции), а также школьные кружки, руководили которыми в основном студенты. Физические кружки в 1939–1940-х годах вели А. М. Яглом, М. И. Подгорецкий, А. Д. Сахаров, в послевоенные годы — М. М. Бонгард-Полонский и Е. А. Либерман, позднее — И. И. Иванчик и Н. Н. Константинов.

Неоценимую помощь и поддержку руководителям кружков и организаторам олимпиад оказывал талантливый экспериментатор С. И. Усагин, работавший в Кабинете физических демонстраций физического факультета МГУ.

---

<sup>2</sup>Кружки для гимназистов существовали в Московском университете и в конце XIX – начале XX века. Например, детский кружок математической и естественно-научной направленности в эти годы вёл Б. К. Млодзеевский (отец А. Б. Млодзеевского). К этому же времени относятся и упоминания о конкурсах, проводившихся для гимназистов по различным предметам.

К сожалению, полностью восстановить историю первых олимпиад и список их организаторов невозможно<sup>3</sup>.

Задачи, предлагавшиеся на Московской физической олимпиаде, послужили основой для составления наиболее известных и популярных в настоящее время задачников по физике для поступающих в вузы [1, 2, 3, 4]. Позднее активное участие в работе жюри принимали А. И. Буздин, В. А. Ильин, И. В. Кривченков, С. С. Кротов и Н. А. Свешников, которыми был подготовлен к изданию и выпущен в свет в 1988 году сборник [5]. В него вошли около 250 задач, предлагавшихся на Московских олимпиадах с 1968 по 1985 г.

Настоящий сборник продолжает традиции предыдущих изданий и содержит 475 задач, которые предлагались учащимся 8-х – 11-х классов на теоретических турах городских этапов Московских олимпиад школьников по физике с 1986 г. по 2005 г. Все задачи снабжены подробными решениями. Авторский коллектив, составляя сборник, стремился наиболее полно отразить тематику и уровень сложности задач, характерных для Московской городской физической олимпиады. В книге представлены как достаточно сложные задачи, дававшиеся ученикам 10-го и 11-го классов на втором теоретическом туре, так и весьма простые, рассчитанные на учеников 8-х – 9-х классов. Поэтому решения некоторых задач достаточно длинные и иногда напоминают небольшие статьи; в то же время другие решения занимают всего несколько строк.

Для удобства работы с книгой задачи в ней разбиты на четыре раздела: «Механика», «Молекулярная физика», «Электричество и магнетизм», «Волны. Оптика. Кванты.». Иногда отнесение задачи к тому или иному разделу книги является достаточно условным, так как при решении многих задач требуется знание законов, изучаемых в различных разделах школьного курса физики. Поскольку изучению разных разделов этого курса в школе уделяется разное количество времени, и одни разделы начинают изучаться раньше, чем другие, то и количество задач в разделах неодинаково. Наибольшее число задач содержит

---

<sup>3</sup>Первые московские олимпиады по физике были тесно связаны с математическими олимпиадами, возникшими на несколько лет раньше — в 1935 году. Здесь мы попытались отразить историю первых лет именно физической олимпиады, воспользовавшись информацией из [26, 27], предисловия к книге [1], а также любезно предоставленной непосредственными участниками тех событий (см. стр. 614). К сожалению, многие организаторы первых олимпиад и участвовавшие в них школьники не вернулись с Великой Отечественной войны, а некоторые стали жертвами репрессий. Нынешние жюри считает необходимым по мере возможности восстановить историю Московской физической олимпиады и просит читателей сообщать известные им исторические сведения.

ся в разделе «Механика», на втором месте по числу задач стоит раздел «Электричество и магнетизм», вслед за ним идёт раздел «Молекулярная физика», и наименьшее число задач — в разделе «Волны. Оптика. Кванты.». Такое распределение задач по разделам вполне отражает их соотношение в заданиях Московских городских олимпиад школьников по физике за последние 20 лет.

Внутри каждого раздела задачи распределены по темам в соответствии с примерным порядком изучения данного раздела курса физики в школе. Задачи раздела, относящиеся к одной и той же теме, расположены, как правило, в порядке возрастания их сложности. Для примерной оценки уровня сложности той или иной задачи может служить информация, помещённая после номера каждой задачи. Там в круглых скобках указаны год, в котором данная задача предлагалась на Московской городской олимпиаде по физике, а также класс, для которого она предназначалась в год проведения олимпиады (некоторые задачи предлагались на олимпиаде одновременно в вариантах разных классов, в таких случаях указывается самый младший класс), и номер теоретического тура (1-й или 2-й). В квадратных скобках перед этими сведениями указаны современные номера классов, для которых эта задача может быть рекомендована в настоящее время (в 2006 году). Например, запись [10–11] (1988, 9–2) означает, что данная задача предлагалась в 1988 году для 9 класса на 2-м теоретическом туре, а в настоящее время она рекомендуется ученикам 10-х – 11-х классов (следует учитывать, что, начиная с 1990 года, нумерация классов совпадает с используемой в настоящее время). Для удобства чтения условия задач, сопровождаемые рисунками, отмечены ромбиком — например,  $\diamond$  2.2. [9] (1986, 8–1).

Условия наиболее трудных задач, как это принято в задачниках, обозначены звёздочкой — например, 3.94\*. [11] (1990, 10–1). При решении таких задач следует иметь в виду, что многие из них в своё время были включены в число олимпиадных заданий в расчёте на учеников профильных школ и классов с углублённым изучением физики и математики. Поэтому для решения этих задач может понадобиться владение основами дифференцирования и интегрирования, а также знание некоторых физических законов, изучение которых в настоящее время не предусмотрено программой общеобразовательной школы.

Приведённые в настоящем сборнике условия задач теоретических туров были отредактированы, а решения — написаны или отредактированы авторами данной книги. Многие из помещённых в данный сборник задач в разные годы были опубликованы в журнале «Квант» [21] и в газете «Физика» издательского дома «Первое сентября» [22].

В приложениях к сборнику содержатся условия и подробные решения 68 задач, предлагавшихся на Московских городских олимпиадах по физике в 2006 и 2007 годах. Далее помещена программа заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике, в соответствии с которой составляются задачи, предлагаемые на Московской физической олимпиаде в последние годы. Затем для удобства учителей и преподавателей приведены типовые варианты олимпиадных заданий, которые можно размножать на копировальной технике и использовать при подготовке школьников 8-х – 11-х классов к олимпиадам по физике. Потом воспроизведены условия задач первых московских олимпиад по физике (1939–1948 годы), а также отчёт о самой первой олимпиаде по физике<sup>4</sup>, первый тур которой состоялся на физическом факультете МГУ 6 апреля 1939 года (опубликован в журнале «Физика в школе» № 4 за 1939 г. [27]).

В конце книги предлагаются примерные программы элективных занятий для профильного обучения школьников по различным темам курса физики, разработанные Ю. В. Старокуровым, а также краткий список литературы, включающий задачки и сборники олимпиадных задач разных лет [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] и адреса материалов в интернете [18, 19, 20, 21, 22, 23, 25], которые, по мнению авторов данной книги, также могут быть полезны при подготовке к олимпиадам.

За 20 лет, которые охватывает настоящий сборник, в жюри олимпиады в разное время работали несколько десятков преподавателей, научных сотрудников, аспирантов и студентов физического факультета МГУ и ряда московских вузов. Мы с благодарностью упоминаем здесь сотрудников жюри, активно участвовавших в подготовке Московской городской олимпиады в течение ряда лет. Это А. В. Андрианов, К. С. Бедов, А. И. Буздин, К. С. Ванаг, М. П. Виноградов, Д. Ю. Григорьев, К. В. Дмитриев, А. Р. Зильберман, Р. Ю. Компанец, С. С. Кротов, А. К. Кулыгин, Д. А. Купцов, В. О. Милицын, О. Ю. Овчинников, В. К. Петерсон, В. А. Погожев, И. Ю. Потеряйко, В. В. Птушенко, Г. Е. Пустовалов, С. Б. Рыжиков, А. В. Селиверстов, А. И. Семёнов, Р. А. Сеннов, П. В. Синило,

---

<sup>4</sup>С тех пор прошло более 60 лет. За это время устарели некоторые представления о физических явлениях, обозначения, принятый стиль изложения и даже отдельные слова и правила русского языка. Сейчас эти тексты следует рассматривать в первую очередь не как учебные материалы по физике (хотя многие задачи первых олимпиад очень интересны и даже стали классическими), а скорее как интересный исторический документ.

А. Ю. Смирнов, В. С. Степанюк, А. В. Ткачук, Д. Э. Харабадзе, К. В. Шокикиу, М. М. Цыпин.

Им, наряду с авторами данного сборника, принадлежат идеи многих включённых в него оригинальных задач. Мы признательны и другим сотрудникам жюри Московских городских физических олимпиад последних лет, а также целому ряду учителей физики и школьников, которые ознакомились с этой книгой на стадии её подготовки к печати и высказали ценные замечания, которые были по возможности учтены при окончательном редактировании текста сборника.

Книгу можно рекомендовать ученикам 8-х – 11-х классов, которые желают углубить свои знания в области физики и подготовиться к участию в физических олимпиадах различного уровня сложности — от окружных (районных) до заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике. Она также может быть полезна студентам младших курсов вузов, абитуриентам, школьным учителям, руководителям школьных физических кружков, преподавателям заочных и вечерних физико-математических школ и подготовительных курсов. Ряд полезных сведений из данной книги могут почерпнуть и преподаватели, ведущие занятия на подготовительных отделениях вузов, а также занимающиеся организацией различных физических олимпиад для школьников и студентов.

Во втором издании настоящего сборника исправлены замеченные опечатки, недочёты полиграфического оформления, отредактированы решения нескольких задач, добавлены (в качестве приложения) условия и решения задач Московских городских (региональных) олимпиад по физике 2006 и 2007 годов, а также обнаруженные с момента первого издания материалы, касающиеся истории олимпиады.

Нумерация задач полностью соответствует первому изданию.

Авторы будут признательны за любые конструктивные замечания по содержанию книги, которые можно присылать по электронной почте [fizbook@mcsmc.ru](mailto:fizbook@mcsmc.ru) или обычной почтой по адресу: 119992, г. Москва, ГСП–2, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, кафедра общей физики, КФД.

## Условия задач

### Механика

**1.1\*.** [8–9] (1998, 8–1) Автомобиль в 12 час. 40 мин. находился на пути из Анискино в Борискино где-то между 25-м и 50-м километровыми столбами. Мимо отметки 75 км автомобиль проехал где-то между 13 час. 50 мин. и 14 час. 20 мин. В 15 час. 10 мин. он находился между 125-м и 150-м километровыми столбами. Когда следует ожидать прибытия автомобиля в Борискино, если он движется с постоянной скоростью, а на въезде в Борискино стоит километровый столб с отметкой 180 км?

**1.2.** [8–9] (2000, 8–2) Вдоль железной дороги через каждые 100 м расставлены столбики с номерами 1, 2, ..., 10, 1, 2, ..., 10, .... Через 2 минуты после того, как кабина машиниста равномерно движущегося поезда проехала столбик с цифрой «1», машинист увидел в окне столбик с цифрой «2». Через какое время после проезда этого столбика кабина машиниста может проехать мимо ближайшего столбика с цифрой «3»? Скорость поезда меньше 100 км/ч.

**1.3.** [8–9] (2001, 9–1) Эскалатор метро движется со скоростью  $v$ . Пассажир заходит на эскалатор и начинает идти по его ступеням следующим образом: делает шаг на одну ступеньку вперёд и два шага по ступенькам назад. При этом он добирается до другого конца эскалатора за время  $t$ . Через какое время пассажир добрался бы до конца эскалатора, если бы шёл другим способом: делал два шага вперёд и один шаг назад? Скорость пассажира относительно эскалатора при движении вперёд и назад одинакова и равна  $u$ . Считайте, что размеры ступеньки много меньше длины эскалатора.

**1.4.** [8–9] (2002, 8–2) По шоссе равномерно движется длинная колонна автомобилей. Расстояния между соседними автомобилями в колонне одинаковы. Едущий по шоссе в том же направлении инспектор ГИБДД обнаружил, что если его скорость равна  $v_1 = 36$  км/ч, то через каждые  $t_1 = 10$  с его обгоняет автомобиль из колонны, а при скорости  $v_2 = 90$  км/ч через каждые  $t_2 = 20$  с он обгоняет автомобиль из колонны. Через какой промежуток времени будут проезжать автомобили колонны мимо инспектора, если он остановится?

**1.5.** [8–9] (1999, 8–1) На прямой дороге находятся велосипедист, мотоциклист и пешеход между ними. В начальный момент времени расстояние от пешехода до велосипедиста в 2 раза меньше, чем до мотоциклиста. Велосипедист и мотоциклист начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями 20 км/ч и 60 км/ч соответственно. В какую сторону и с какой скоростью должен идти пешеход, чтобы встретиться с велосипедистом и мотоциклистом в месте их встречи?

**1.6.** [8–9] (1991, 8–1) В межзвёздном пространстве навстречу друг другу движутся два космических корабля: один со скоростью  $v_1 = 2 \cdot 10^7$  м/с, а второй — со скоростью  $v_2 = 3 \cdot 10^7$  м/с. В некоторый момент времени первый корабль посылает короткий радиосигнал, который отражается от второго и принимается первым кораблём через  $t = 2,4$  с после отправления. Радиосигналы распространяются со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, которая не зависит от скорости источника, посылающего сигнал. Какое расстояние было между кораблями в момент: 1) отправки сигнала? 2) приёма сигнала первым кораблём?

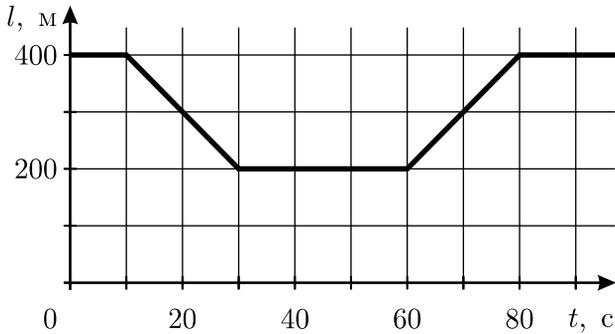
**1.7\*.** [9–10] (2003, 10–1) В автомобиле спидометр и счётчик пройденного пути регистрируют скорость автомобиля и пройденный им путь относительно поверхности, по которой движется автомобиль. Автомобиль последовательно проехал по двум конвейерам (движущимся дорожкам) длиной  $L = 500$  м каждый. Полотна конвейеров движутся в одну сторону с постоянными скоростями  $v_1 = 20$  км/ч и  $v_2 = 30$  км/ч. По первому конвейеру автомобиль ехал с некоторой постоянной скоростью, а по второму конвейеру — с другой постоянной скоростью. Что показывал спидометр во время движения по каждому из конвейеров, если с момента въезда на первый конвейер до съезда со второго прошло время  $t = 72$  с, а счётчик пути показал, что при этом был пройден путь  $L$ . Расстоянием между конвейерами и временем переезда с первого конвейера на второй пренебречь.

**1.8.** [8–9] (2004, 8–2) На длинном шоссе на расстоянии 1 км друг от друга установлены светофоры. Красный сигнал каждого светофора горит в течение 30 секунд, зелёный — в течение следующих 30 секунд. При этом все автомобили, движущиеся со скоростью 40 км/ч, проехав один из светофоров на зелёный свет, проезжают без остановки, то есть тоже на зелёный свет, и все следующие светофоры. С какими другими скоростями могут двигаться автомобили, чтобы, проехав один светофор на зелёный свет, далее нигде не останавливаться?

**1.9\*.** [8–9] (1997, 10–2) Мэр одного городка начал получать жалобы на большую автомобильную пробку перед светофором на главной улице. Скорость машин при движении составляла 6 м/с, а средняя ско-

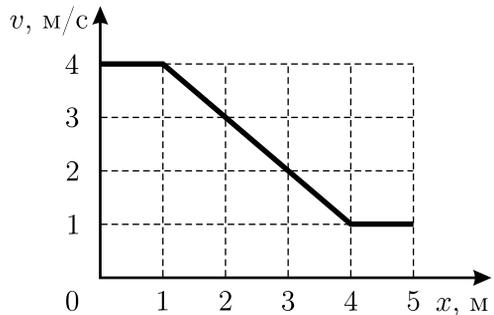
рость продвижения по пробке — всего 1,5 м/с. При этом время свечения светофора зелёным светом было равно времени свечения красным (время свечения жёлтым светом мало). Мэр распорядился увеличить время свечения светофора зелёным светом в два раза, а время свечения красным светом оставить прежним. Чему станет равна средняя скорость продвижения машин по пробке? Считайте, что скорость машин при движении не изменилась. Учтите, что при включении зелёного света автомобили начинают двигаться не одновременно.

◇ 1.10. [8–9] (2005, 8–2) На длинном прямом шоссе автомобили движутся с постоянной скоростью  $V_1$  всюду, за исключением моста, на котором автомобили движутся с другой постоянной скоростью  $V_2$ . На рисунке изображён график зависимости расстояния  $l$  между двумя едущими друг за другом автомобилями от времени  $t$ . Найдите скорости  $V_1$  и  $V_2$ , а также длину моста.



К задаче 1.10.

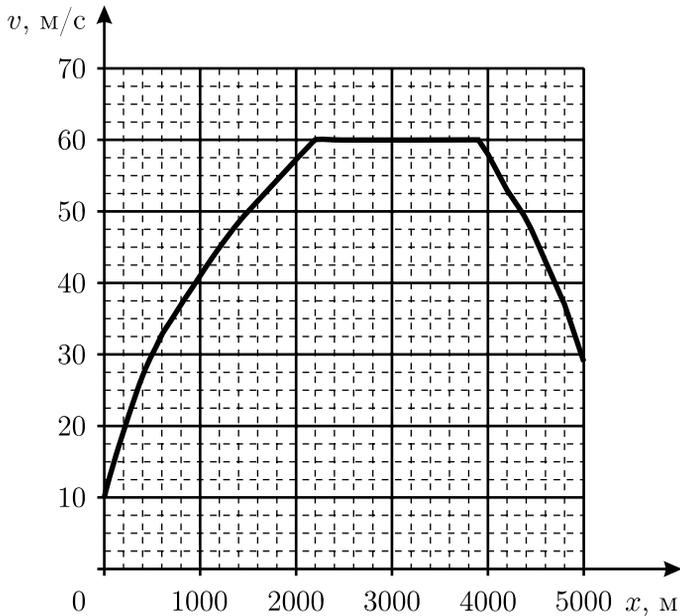
◇ 1.11. [9–10] (1997, 9–1) Тело движется по прямой. График зависимости его скорости  $v$  от координаты  $x$  приведён на рисунке. Найдите ускорение тела в точке с координатой  $x = 3$  м. Найдите также максимальное ускорение тела на отрезке от 0 до 5 м.



К задаче 1.11.

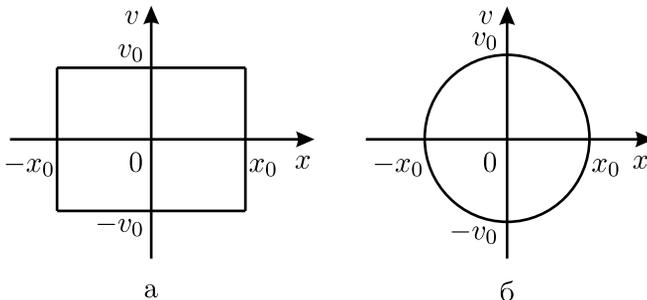
◇ 1.12. [9–10] (2001, 9–1) Автомобиль проехал по пятикилометровому участку дороги. Специальный прибор при этом записывал показания спидометра через каждые 10 метров. В результате получи-

лась зависимость скорости автомобиля  $v$  от пройденного пути  $x$ , показанная на рисунке. Оцените, за какое время  $t$  автомобиль проехал эти пять километров.



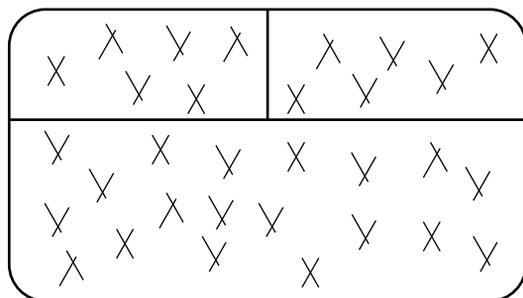
К задаче 1.12.

◇ 1.13. [9–10] (2000, 9–1 и 10–1) Материальная точка движется вдоль прямой. Постройте графики зависимостей скорости и координаты точки от времени, если график зависимости её скорости  $v$  от координаты  $x$  представляет собой: а) прямоугольник; б) окружность (при определённом выборе масштабов осей).



К задаче 1.13.

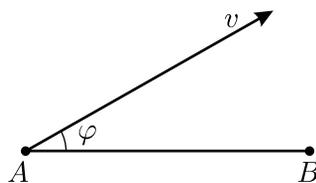
◇ 1.14. [9] (1989, 8–1) Автобус движется с постоянной скоростью  $u = 60$  км/ч, подолгу стоя на остановках. Идёт дождь с ветром. Дождевые капли образовали на боковом стекле автобуса следующую картину (см. рисунок). Скорость и направление ветра не меняются. Какова скорость падения капель дождя  $v$ ? Что можно сказать о скорости ветра  $w$ ? Дорога прямая, автобус не разворачивается.



К задаче 1.14.

1.15. [9] (1988, 8–1) Осколочный снаряд летит со скоростью  $u$  по направлению к плоской стенке. На расстоянии  $l$  от неё снаряд взрывается и распадается на множество осколков, летящих во все стороны и имеющих скорость  $v$  относительно центра масс снаряда. Какая область на поверхности стенки будет поражена осколками? Силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

◇ 1.16. [9–10] (1990, 9–1) Колобок, имеющий форму шара, застигнут дождём в точке  $A$  (см. рисунок). Капли дождя имеют вертикальную скорость, равную  $V$ , а горизонтальную — равную  $v$  и направленную под углом  $\varphi$  к направлению  $AB$  (в точке  $B$  находится дом Колобка). С какой скоростью Колобок должен бежать по линии  $AB$ , чтобы как можно меньше промокнуть?



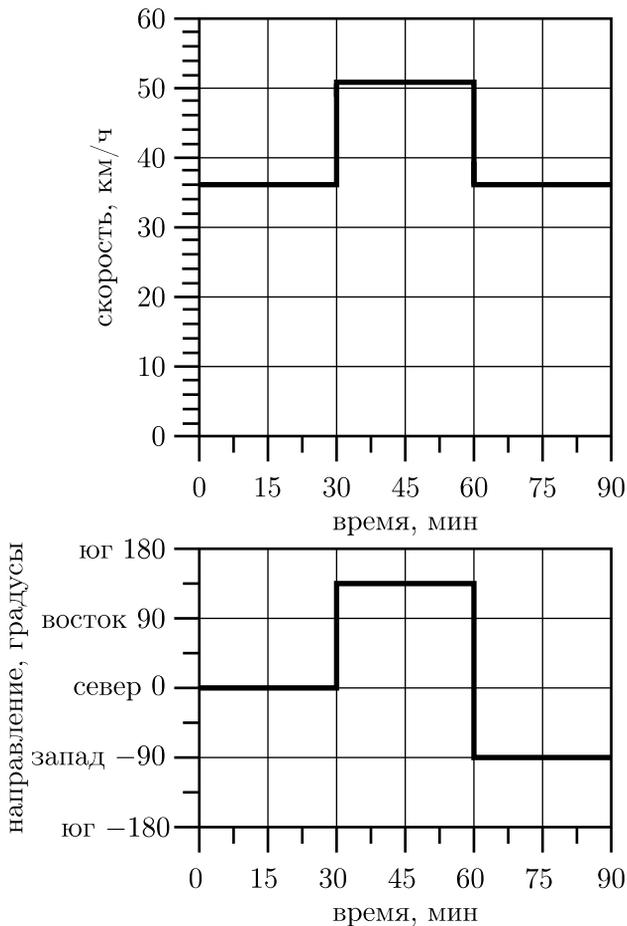
К задаче 1.16.

1.17. [9–10] (1991, 9–1) Во время сильного снегопада лыжник, бегущий по полю со скоростью  $v = 20$  км/ч, заметил, что ему в открытый рот попадает  $N_1 = 50$  снежинок в минуту. Повернув обратно, он обнаружил, что в рот попадает  $N_2 = 30$  снежинок в минуту. Оцените дальность прямой видимости в снегопад, если площадь рта спортсмена  $S = 24$  см<sup>2</sup>, а размер снежинки  $l = 1$  см.

1.18\*. [9–10] (1998, 9–2) Автобус и велосипедист едут по одной прямой дороге в одном направлении с постоянными скоростями 63 км/ч

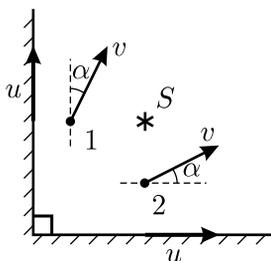
и 33 км/ч. Грузовик едет по другой прямой дороге с постоянной скоростью 52 км/ч. Расстояние от грузовика до автобуса всё время равно расстоянию от грузовика до велосипедиста. Найдите скорость грузовика относительно автобуса.

◇ 1.19. [8–9] (2004, 8–1) На вездеходе установлен курсограф — самописец, записывающий зависимости от времени текущей скорости (верхний график) и направления движения этого вездехода (нижний график). На рисунке показаны такие записи для некоторого маршрута, пройденного вездеходом. Определите с точностью до километра, где (относительно начала пути) вездеход оказался в конце маршрута.

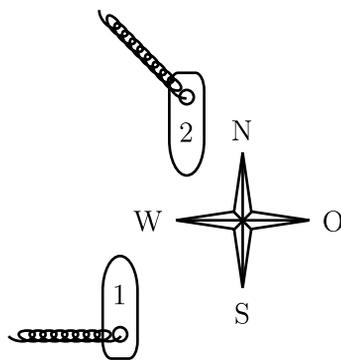


К задаче 1.19.

◇ 1.20\*. [9–10] (2001, 9–1) Две материальные точки 1 и 2 и точечный источник света  $S$  совершают равномерное прямолинейное движение по горизонтальной плоскости. Тени от материальных точек 1 и 2 движутся со скоростями  $u$  вдоль вертикальных стенок, которые перпендикулярны друг другу. Скорости материальных точек равны  $v = 2u/\sqrt{3}$  и направлены под углом  $\alpha = 30^\circ$  к соответствующим стенкам (см. рисунок). Чему равна и куда направлена скорость источника  $S$ ?



К задаче 1.20.



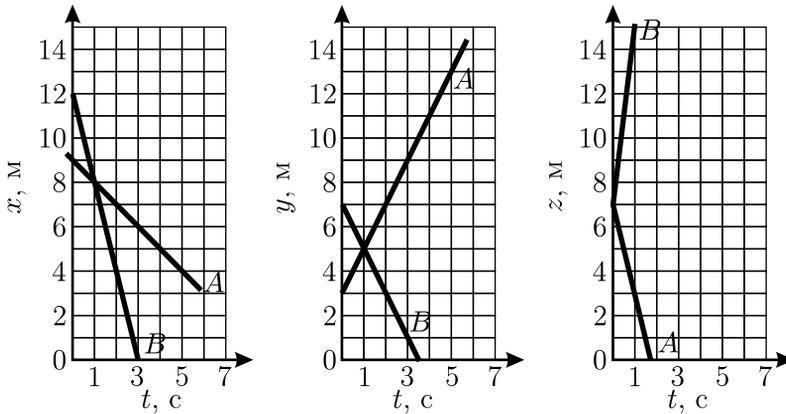
К задаче 1.22.

1.21. [9] (2003, 9–1) Два корабля находятся в море и движутся равномерно и прямолинейно. Первый в полдень был в 40 милях севернее маленького острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на восток. Второй в 8 часов утра этого же дня был в 100 милях восточнее того же острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на юг. На каком минимальном расстоянии друг от друга прошли корабли и в какой момент времени это случилось?

◇ 1.22. [9–10] (2003, 9–2) Один корабль идёт по морю на север с постоянной скоростью 20 узлов, а другой — навстречу ему, на юг, с такой же скоростью. Корабли проходят на очень малом расстоянии друг от друга. Шлейф дыма от первого корабля вытянулся в направлении на запад, а от второго — на северо-запад (см. рисунок). Определите величину и направление скорости ветра. 1 узел = 1 морская миля в час, 1 морская миля = 1852 м.

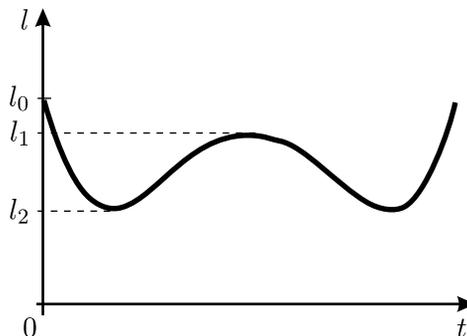
1.23. [10] (1993, 10–2) По двум пересекающимся под углом  $\alpha = 30^\circ$  дорогам движутся к перекрёстку два автомобиля: один со скоростью  $v_1 = 10$  м/с, второй — с  $v_2 = 10\sqrt{3} \approx 17,3$  м/с. Когда расстояние между автомобилями было минимальным, первый из них находился на расстоянии  $S_1 = 200$  м от перекрёстка. На каком расстоянии  $S_2$  от перекрёстка в это время находился второй автомобиль?

◇ 1.24\*. [10–11] (1999, 11–1) Две материальные точки  $A$  и  $B$  движутся в пространстве. На рисунке приведены графики зависимости их декартовых координат от времени. Определите, в какой момент времени материальные точки находились на минимальном расстоянии друг от друга, и найдите это расстояние.



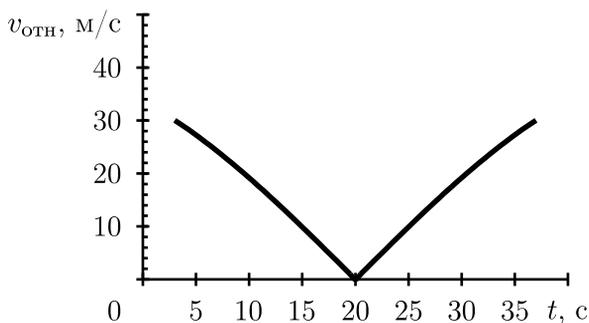
К задаче 1.24.

◇ 1.25. [9–10] (2004, 9–1) Тело бросили вертикально вверх с поверхности земли. Расстояние  $l$  между этим телом и неподвижным наблюдателем изменяется со временем  $t$  по закону, показанному на графике (см. рисунок). На какой высоте над землёй и на каком расстоянии от линии, по которой движется тело, находится наблюдатель? Чему равна начальная скорость тела? Величины  $l_0$ ,  $l_1$  и  $l_2$  считайте известными, ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.25.

◇ 1.26. [9–10] (2001, 9–2) Один автомобиль движется с постоянной скоростью по прямолинейному участку дороги. Другой автомобиль равномерно движется по дуге окружности радиусом  $R = 200$  м. График зависимости модуля относительной скорости автомобилей от времени изображён на рисунке. Найдите величины скоростей автомобилей.



К задаче 1.26.

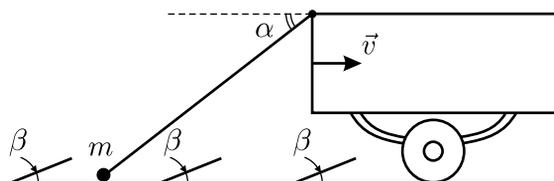
1.27. [9–10] (2004, 10–2) Две одинаковые дощечки плывут вдоль берега по прямому широкому каналу, вода в котором течёт с постоянной скоростью, одинаковой по всей ширине канала. В некоторый момент времени им сообщили скорость относительно воды, равную по величине  $V_0 = 1$  м/с. При этом скорость первой дощечки оказалась перпендикулярной берегу в связанной с ним неподвижной системе отсчёта, а скорость второй дощечки оказалась перпендикулярной берегу в системе отсчёта, связанной с водой. Через достаточно большое время, когда движение дощечек относительно воды прекратилось, расстояние от первой дощечки до берега увеличилось на  $S_1 = 4$  м, а от второй — на  $S_2 = 5$  м. Найдите скорость течения воды в канале.

◇ 1.28\*. [9–10] (1999, 9–2) На рисунке вы видите изображение идущих часов, полученное с помощью компьютерного сканера. Принцип его работы прост. Мощная лампа создаёт на сканируемом объекте узкую освещённую полоску, а отражённый свет попадает на набор фотодатчиков, которые расположены в виде линейки, параллельной этой полоске. И лампа, и линейка датчиков расположены на подвижной каретке. Каретка движется с постоянной скоростью, и датчики через равные интервалы времени передают в компьютер изображение. Таким образом, при перемещении каретки получается много «срезов» объекта, из которых и состоит изображение. Пользуясь данным изображением, определите направление и скорость движения каретки сканера, если длина секундной стрелки (от оси до острия) составляет 15 мм.



К задаче 1.28.

◇ 1.29. [10–11] (1989, 10–2) По гладкой горизонтальной поверхности с постоянной скоростью  $v$  едет автомобиль, к бамперу которого шарнирно прикреплён невесомый стержень с грузом массой  $m$  на конце. Стержень образует с горизонтом угол  $\alpha$ . На поверхности перпендикулярно направлению движения установлены невысокие гладкие стальные стенки, наклонённые под углом  $\beta$  к горизонту (см. рисунок). Груз начинает «подскакивать» на стенках. Считая, что удары груза о все поверхности абсолютно неупругие (груз — «мешок с песком»), найдите скорость, с которой он «отскакивает» от стенок.



К задаче 1.29.

**1.30\***. [10–11] (2000, 10–2) Мальчик, запуская воздушный змей, бежит по горизонтальной поверхности навстречу ветру со скоростью  $u$ . Нить, привязанная к змею, сматывается с катушки, которую мальчик держит в руке. В некоторый момент времени нить, которую можно считать прямолинейной, составляет с горизонтом угол  $\alpha$ , а змей поднимается вертикально вверх со скоростью  $v$ . Какова в этот момент времени скорость узелка на нити, который находится на расстояниях  $L$  от катушки и  $l$  от змея?

**1.31\***. [9–11] (1995, 9–2) Лебедь, рак и щука тянут телегу. Скорость лебедя в два раза больше скорости щуки, скорость рака в два раза меньше скорости щуки. В некоторый момент времени верёвки, связывающие телегу с каждым из животных, лежат в горизонтальной плоскости и направлены так же, как и скорости соответствующих животных, причём угол между скоростями лебедя и щуки равен  $\alpha$ . Как при этом должна быть направлена скорость рака?

**1.32\***. [10–11] (2000, 11–2) Ромб составлен из жёстких стержней длиной  $L$ . Стержни скреплены на концах шарнирами. В начальный момент два противоположных шарнира находятся рядом (очень близко) и имеют нулевые скорости. Один из этих шарниров закреплён. Второй начинают двигать с постоянным ускорением  $a$ . Найдите величину ускорения остальных шарниров ромба в тот момент, когда ромб превратится в квадрат, если все стержни двигаются, оставаясь в одной плоскости.

**1.33\***. [9–11] (2000, 9–1) На одной стороне магнитофонной кассеты от начала до конца без перерывов записано  $N = 45$  коротких песенок с продолжительностью звучания  $\tau = 1$  мин. каждая. Время быстрой перемотки ленты от начала до конца с постоянной угловой скоростью вращения ведущей оси равно  $T_1 = 2$  мин. 45 с. На какую песню мы попадём, если перемотаем ленту с самого начала вперёд в течение  $T_2 = 1$  мин. 50 с? Для данной кассеты радиус оси с намотанной на неё всей лентой равен  $R = 25$  мм, а без ленты  $r = 10$  мм.

**1.34.** [9–11] (1999, 9–2) Какой минимальный путь за время  $t$  может пройти тело, движущееся с постоянным ускорением  $\vec{a}$ ?

**1.35.** [9–10] (1989, 8–2) Муха, пролетая параллельно поверхности стола со скоростью  $v$  на высоте  $H$ , заметила в некоторый момент времени точно под собой каплю мёда. При помощи крыльев муха может развивать в любом направлении ускорение, не превышающее  $a$ . За какое минимальное время муха сможет достигнуть капли мёда? Какое ускорение и в каком направлении она должна для этого развить? Сила тяжести отсутствует (допустим, дело происходит в космосе).

**1.36.** [10–11] (1998, 10–1) Космический корабль движется в открытом космосе со скоростью  $\vec{V}$ . Требуется изменить направление скорости на  $90^\circ$ , оставив величину скорости неизменной. Найдите минимальное время, необходимое для такого манёвра, если двигатель может сообщать кораблю в любом направлении ускорение, не превышающее  $a$ . По какой траектории будет при этом двигаться корабль?

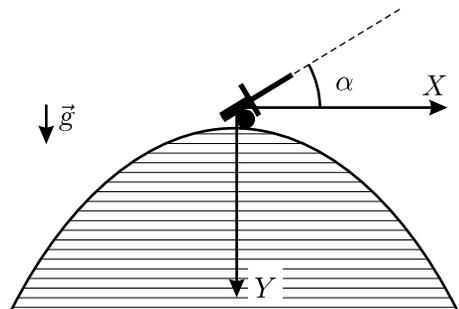
**1.37.** [10–11] (2000, 10–2) Шарик падает с некоторой высоты без начальной скорости на горизонтальную плоскость. Удары шарика о плоскость абсолютно упругие. За первые  $t$  секунд шарик прошёл путь  $S$ . Сколько раз за это время он успел удариться о плоскость? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**1.38\*.** [9–11] (1994, 9–2) Камень, брошенный вертикально вверх с достаточно большой высоты, за первую секунду полёта проходит путь  $S$ . Какой путь пройдёт камень за вторую секунду полёта? Ускорение свободного падения равно  $g = 10 \text{ м/с}^2$ . Сопротивлением воздуха пренебречь.

**1.39.** [9–10] (1992, 10–1) На невесомый жёсткий стержень, шарнирно закреплённый одним концом, надели массивную бусинку, которая может скользить по нему без трения. Вначале стержень покоился в горизонтальном положении, а бусинка находилась на расстоянии  $l$  от закреплённого конца. Затем стержень отпустили. Найдите зависимость угла, который составляет стержень с горизонталью, от времени.

**1.40.** [9–10] (1992, 9–1) Из одной точки горизонтально в противоположных направлениях одновременно вылетают две частицы с начальными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Через какое время угол между скоростями частиц станет равным  $90^\circ$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

◇ **1.41.** [9–10] (1986, 8–1) Пушка стоит на самом вершуге горы, любое вертикальное сечение которой есть парабола  $y = ax^2$  (см. рисунок). При какой минимальной начальной скорости снаряда, выпущенного под углом  $\alpha$  к горизонту, он никогда не упадёт на поверхность горы? Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.41.

**1.42.** [9–10] (1996, 9–1) Небольшая лампочка освещает вертикальную стену. Проходящий вдоль стены хулиган швырнул в лампочку камень под углом  $45^\circ$  к горизонту и попал в неё. Найдите закон движения  $h(t)$  тени от камня

по стене, считая, что лампочка и точка броска находятся на одной и той же высоте  $h = 0$ , а в момент броска хулиган находился на расстоянии  $L$  от лампочки.

**1.43\***. [10–11] (1996, 10–1) Маленький упругий шарик бросают со скоростью  $v = 1$  м/с под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту. Коэффициент восстановления вертикальной составляющей скорости шарика после удара о горизонтальную плоскость, с которой производился бросок,  $R = 0,99$ . На каком расстоянии  $S$  от точки бросания шарик перестанет подпрыгивать, если горизонтальная составляющая его скорости не изменяется? (Коэффициентом восстановления называется отношение скорости после удара к скорости до удара).

◇ **1.44.** [8–9] (2001, 8–2) Художник нарисовал «Зимний пейзаж» (см. рисунок). Как вы думаете, в каком месте на Земле он мог писать с такой натуры?

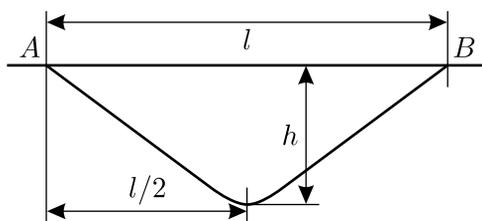


К задаче 1.44.

**1.45.** [9] (1986, 8–2) Ранней весной, шагая по скользкой дорожке, Вы внезапно поскользнулись и начинаете падать на спину. Совершенно машинально Вы взмахиваете руками, и таким образом избегаете падения (или, увы, нет). Опишите, какие движения руками наиболее оптимальны в этой ситуации, и объясните, почему они помогают восстановить равновесие.

**1.46.** [9–10] (1993, 9–1) Лёгкий самолёт может планировать с выключенным мотором с минимальной постоянной горизонтальной скоростью  $150$  км/ч под углом  $5^\circ$  к горизонту (при попытке уменьшить скорость или угол самолёт свалится в штопор). Оцените, какую минимальную силу тяги должен создавать движитель самолёта, чтобы он мог взлететь с полосы. Масса самолёта  $M = 2$  т. Считайте, что корпус самолёта всегда параллелен направлению его скорости.

◇ **1.47.** [9–10] (2002, 9–1) Для организации транспортного сообщения между населёнными пунктами  $A$  и  $B$ , расположенными на одной горизонтали на небольшом расстоянии  $l$  друг от друга, между ними прорывают тоннель, состоящий из двух одинаковых прямых участ-



К задаче 1.47.

ков (см. рисунок). По рельсам внутри тоннеля скользит без трения безмоторная вагонетка. Какова должна быть максимальная глубина тоннеля  $h$ , чтобы время поездки от  $A$  до  $B$  было минимальным? Чему равно это время? Считайте, что движение вагонетки начинается без начальной скорости, а на закруглении в нижней точке тоннеля величина скорости не изменяется.

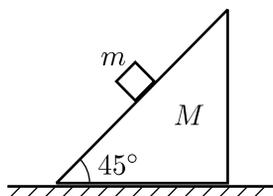
**1.48.** [9–10] (1997, 9–2) Из Анискино ( $A$ ) в Борискино ( $B$ ) можно добраться только на моторной лодке по узкой реке, скорость течения которой всюду одинакова. Лодке с одним подвесным мотором на путь из  $A$  в  $B$  требуется время  $t_1 = 50$  минут, а с двумя моторами — время  $t_2 = t_1/2$ . Сила тяги двух моторов вдвое больше силы тяги одного. За какое минимальное время можно добраться из  $B$  в  $A$  на лодке с одним и с двумя моторами? Известно, что сила сопротивления движению лодки пропорциональна квадрату скорости движения относительно воды.

**1.49\*.** [9–11] (2002, 9–2) Тело массой  $m = 10$  кг подвешено в лифте при помощи трёх одинаковых лёгких верёвок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие — к полу. Когда лифт неподвижен, натяжение каждой из нижних верёвок составляет  $F_0 = 5$  Н. Лифт начинает двигаться с постоянным ускорением, направленным вверх. Найдите установившуюся силу натяжения верхней верёвки при следующих значениях ускорения лифта:  $a_1 = 1$  м/с<sup>2</sup>,  $a_2 = 2$  м/с<sup>2</sup>. Ускорение свободного падения равно  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Считайте, что сила натяжения верёвки пропорциональна её удлинению.

**1.50.** [10–11] (2005, 11–1) Имеются два одинаковых длинных однородных лёгких бруска, которые используют для проведения экспериментов по изучению прочности древесины. В первом эксперименте деревянный брусок положили концами на спинки двух стоящих стульев, а к его середине подвесили сосуд, который начали медленно заполнять водой. Когда масса сосуда с водой достигла величины  $m = 4,8$  кг, брусок сломался. Во втором эксперименте брусок положили на гладкий горизонтальный стол, к его концам прикрепили два груза малых размеров с массами  $m_1 = 6$  кг, а к середине — груз массой  $m_2 = 10$  кг и верёвку, за которую стали тянуть с плавно возрастающей силой  $F$ , перпендикулярной бруску и направленной горизонтально. При какой величине силы  $F$  брусок сломается? Считайте  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

◇ **1.51.** [9–10] (2004, 9–2) На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой  $M$  с углом  $45^\circ$  при основании. По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой  $m$  (см. рисунок). Чему должна быть равна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложенная к клину, чтобы ускорение тела мас-

сой  $m$  было направлено: (а) вертикально; (б) горизонтально; (в) составляло угол  $45^\circ$  с вертикалью? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.51.



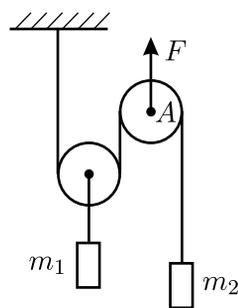
К задаче 1.52.

◇ 1.52. [9–10] (2003, 9–2) В системе, изображённой на рисунке, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нить невесомая и нерастяжимая, не лежащие на блоках участки нити горизонтальны. Массы грузов, лежащих на горизонтальной плоскости, одинаковы и равны  $M$ . Нить тянут за свободный конец в горизонтальном направлении с силой  $F$ . С каким ускорением движется конец нити, к которому приложена эта сила? Трения нет, движение грузов считайте поступательным.

1.53. [10–11] (2003, 10–2) На гладком горизонтальном столе находятся два груза массами 1 кг и 2 кг, скреплённые невесомой и нерастяжимой нитью. К середине нити между грузами прикреплена ещё одна такая же нить, за которую тянут с силой 10 Н. В некоторый момент времени все отрезки нитей натянуты, расположены горизонтально и составляют между собой углы  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $150^\circ$ . Известно, что в этот же момент скорость более лёгкого груза равна 1 м/с, более тяжёлого 2 м/с, а вектор скорости каждого груза направлен перпендикулярно к отрезку нити, который прикреплен к данному грузу. Найдите ускорения грузов в рассматриваемый момент времени, если известно, что они одинаковы по величине.

◇ 1.54. [10–11] (1999, 10–1) В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трение отсутствует. Массы грузов равны  $m_1$  и  $m_2$ . Найдите ускорение оси блока А, к которой приложена в вертикальном направлении сила  $F$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

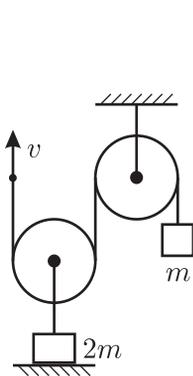
◇ 1.55\*. [9–11] (2001, 9–2) В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз  $m$  висит неподвижно, а груз  $2m$  касается пола. Затем конец нити начинают тянуть



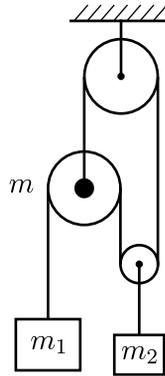
К задаче 1.54.

вверх с постоянной скоростью  $v$ . Как при этом будут двигаться оба груза? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

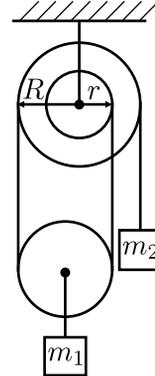
◇ **1.56.** [9–11] (1997, 9–2) В системе, показанной на рисунке, отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Найдите ускорение груза массой  $m_2$ , подвешенного на нити к лёгкой оси подвижного блока. Масса оси другого подвижного блока равна  $m$ , масса первого груза равна  $m_1$ . Трением и массой всех блоков пренебречь. Все нити невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.55.



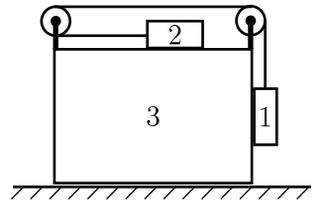
К задаче 1.56.



К задаче 1.57.

◇ **1.57\*.** [10–11] (2004, 10–2) Найдите ускорение груза массой  $m_1$  в системе, изображённой на рисунке. Блоки невесомы, нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по верхнему двухступенчатому блоку с радиусами  $r$  и  $R$ . Один конец нити закреплён на этом блоке, к другому концу прикреплен груз массой  $m_2$ . Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны, трение в осях блоков и о воздух отсутствует. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

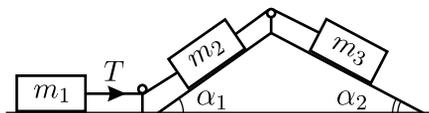
◇ **1.58\*.** [10–11] (2003, 11–2) Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Горизонтальная плоскость гладкая, трения между грузами нет, нить и блоки невесомы, нить нерастяжима, массы всех трёх грузов одинаковы. В начальный момент все тела покоятся. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.58.

◇ **1.59.** [9–10] (1986, 8-1) Два связанных тела массой  $m_2$  и  $m_3$  скользят по двум гладким наклонным поверхностям неподвижного клина (см. рисунок). К телу  $m_2$  прикреплена нить, соединяющая его с телом массой  $m_1$ , лежащим на гладкой горизонтальной поверхности. Найдите

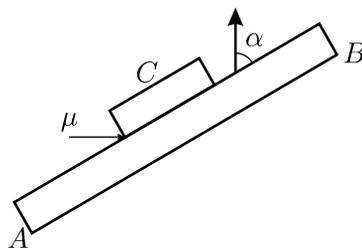
силу натяжения  $T$  этой нити. Трением можно пренебречь, нити считайте невесомыми и нерастяжимыми. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.59.

**1.60\***. [9–11] (1998, 9–1) Телу, находящемуся на горизонтальной шероховатой поверхности, сообщили скорость  $v$  вдоль этой поверхности. За первые  $t$  секунд оно прошло путь  $S$ . Каким может быть коэффициент трения тела о поверхность?

◇ **1.61.** [9–11] (1992, 9–2) На горизонтальном шероховатом столе лежат длинная линейка  $AB$  и ластик  $C$ . Линейку двигают равномерно и поступательно в направлении, показанном стрелкой на рисунке (вид сверху), и перемещают на расстояние  $H$ . Угол между линейкой и этим направлением равен  $\alpha$ . Найдите



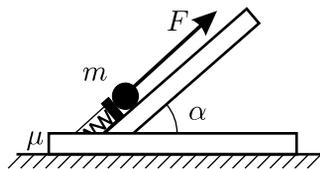
К задаче 1.61.

величину и направление перемещения ластика относительно стола. Коэффициент трения ластика о линейку равен  $\mu$ .

**1.62\***. [9–11] (2000, 9–2) На горизонтальном обледеневшем участке дороги лежит длинная доска массой  $M$ . На эту доску мальчик поставил радиоуправляемую модель автомобиля массой  $m$ , а затем, подав радиосигнал, включил двигатель автомобиля. Зная, что автомобиль движется вдоль доски с постоянной относительно неё скоростью  $v$  и что коэффициент трения доски о лёд равен  $\mu$ , найдите зависимость скорости автомобиля относительно дороги от времени.

**1.63\***. [9–11] (1998, 9–2) На лежащий на горизонтальном столе клин массой  $m$  с углом при основании  $\alpha = 45^\circ$  аккуратно положили гладкий брусок массой  $1000m$ . С какой силой скользящий вдоль клина брусок давит на клин, если коэффициент трения между клином и столом равен  $\mu = 0,2$ ?

◇ **1.64.** [9–11] (1996, 9–1) Катапульта представляет собой платформу с толкателем, который может приложить к грузу массой  $m$  силу  $F \gg mg$  под любым заданным углом  $\alpha$  к горизонту (см. рисунок). Масса самой катапульти много меньше  $m$ , коэф-

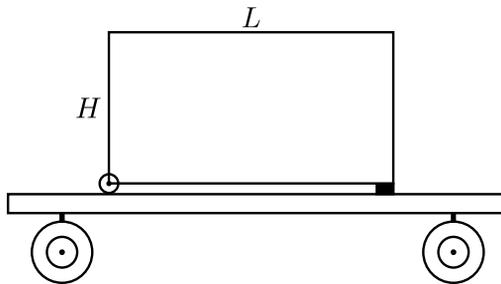


К задаче 1.64.

коэффициент трения между платформой и землёй  $\mu$ . Какое максимальное горизонтальное ускорение может сообщить грузу такая катапульта?

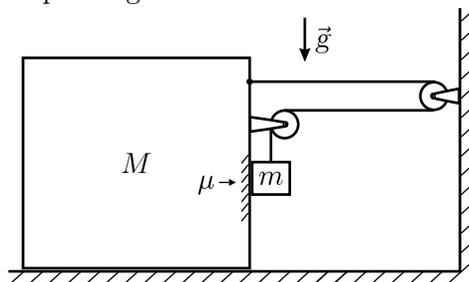
**1.65\***. [10–11] (1995, 10–2) Через вращающийся с постоянной угловой скоростью шероховатый шкив переброшена невесомая нерастяжимая верёвка, к концам которой подвешены два груза. В начальный момент времени скорости грузов равны нулю, а ускорение первого груза направлено вверх и равно  $a_1$ . Если изменить направление вращения шкива, то при нулевой начальной скорости второй груз будет двигаться вверх с ускорением  $a_2$ . Найдите отношение масс грузов.

◇ **1.66.** [9–11] (1989, 8–2) На шероховатой железнодорожной платформе стоит равномерно заполненный контейнер высотой  $H$  и длиной  $L$ , имеющий с одной стороны маленькие колёса (см. рисунок). При разгоне поезда вправо контейнер начинает сползать влево по платформе, если ускорение разгона превышает  $a$ . С каким минимальным ускорением должен затормозить поезд, чтобы контейнер начал сползать вправо? Трением качения пренебречь.



К задаче 1.66.

◇ **1.67\***. [9–11] (1988, 8–2) В системе, изображённой на рисунке, тело массой  $M$  может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между телами  $M$  и  $m$  равен  $\mu$ . Найдите ускорение  $a$  тела  $M$ . Массой блоков и нерастяжимой нити пренебречь. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.67.

**1.68.** [9–11] (1996, 9–2) У двух автомобилей расстояние между осями передних и задних колёс  $L = 3$  метра, а центр масс находится на высоте  $H = 0,7$  м над дорогой на одинаковом расстоянии от каждого из четырёх колёс. Коэффициент трения колёс о дорогу  $\mu = 0,8$ . Масса каждого из автомобилей  $m = 1000$  кг. Один из автомобилей переднеприводный, а другой заднеприводный. Автомобили снабжены моторами с одинаковой мощностью  $N = 100$  кВт. Какой из автомобилей победит в заезде на  $S = 10$  м по прямой при старте с нулевой начальной скоростью? На какое время победитель обгонит отставшего? Водители «выжимают» из своих автомобилей всё возможное. Считайте ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**1.69.** [10–11] (2005, 10–1) Автомобиль с передними ведущими колёсами должен проехать по достаточно длинному прямолинейному участку шоссе, поднимающемуся вверх под углом  $\alpha$  к горизонту. Центр масс автомобиля находится на расстоянии  $H$  от полотна дороги, посередине между осями передних и задних колёс, которые расположены на расстоянии  $2L$  друг от друга. Коэффициент трения колёс о дорогу равен  $\mu$ , радиус колёс  $R$ . Найдите максимальную величину угла  $\alpha$ . Укажите условия, при которых автомобиль массой  $m$  сможет преодолеть этот участок шоссе.

**1.70\*.** [10–11] (1990, 10–1) Цилиндр радиусом  $R$  и массой  $m$  плотно вставлен в жёстко закреплённое кольцо. Ось цилиндра вертикальна. Чтобы его продвинуть, надо приложить в вертикальном направлении силу, не меньшую  $F$  ( $F \gg mg$ ). Цилиндр начинают вращать с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , не прикладывая при этом вертикальной силы. Найдите требующийся для этого момент силы и скорость вертикального перемещения цилиндра. Трение цилиндра о кольцо является сухим.

**1.71.** [9–11] (1994, 9–1) Деревянный шарик, опущенный под воду, всплывает в установившемся режиме со скоростью  $v_1$ , а точно такой же по размеру пластмассовый тонет со скоростью  $v_2$ . Куда и с какой скоростью будут двигаться в воде эти шарики, если их соединить ниткой? Сила сопротивления пропорциональна скорости, гидродинамическим взаимодействием шариков можно пренебречь. Считайте, что на движущийся шарик действует такая же сила Архимеда, как и на покоящийся.

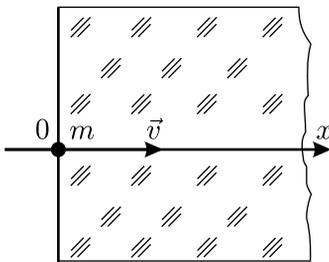
**1.72\*.** [10–11] (1999, 11–2) Школьник заметил, что сферический пузырёк воздуха диаметром  $d_1 = 1$  мм всплывает в жидкости плотностью  $\rho_{\text{ж}} = 1$  г/см<sup>3</sup> со скоростью  $v_1 = 0,5$  см/с. Пузырёк диаметром  $d_2 = 2$  мм всплывает со скоростью  $v_2 = 2$  см/с, а сферическая метал-

лическая дробинка такого же диаметра плотностью  $\rho_d = 5 \text{ г/см}^3$  тонет со скоростью  $v_3 = 8 \text{ см/с}$ . С какой скоростью будет всплывать в этой жидкости пластмассовый шарик плотностью  $\rho = (2/3) \text{ г/см}^3$  и диаметром  $d = 3 \text{ мм}$ ? Считайте, что характер зависимости сил сопротивления движению от скорости и диаметра шарика — степенной, и для всех указанных тел одинаков.

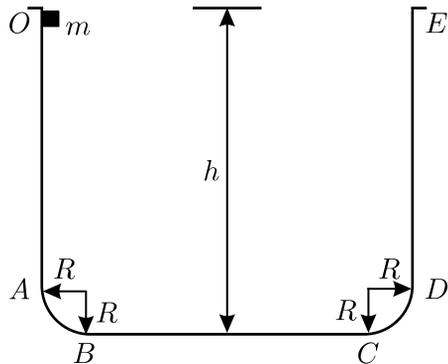
**1.73.** [9–11] (1989, 8–1) Шарик массой  $m$  и объёмом  $V$  под действием силы тяжести падает в жидкости плотностью  $\rho$  с постоянной скоростью  $v$ . Сила сопротивления жидкости движению шарика пропорциональна квадрату скорости. К шарiku прилагается дополнительно горизонтально направленная сила  $f$ . Какой станет вертикальная составляющая скорости шарика  $v_1$ ?

**1.74.** [10–11] (1999, 10–1) Футбольный мяч при движении в воздухе испытывает силу сопротивления, пропорциональную квадрату скорости мяча относительно воздуха. Перед ударом футболиста мяч двигался в воздухе горизонтально со скоростью  $v_1 = 20 \text{ м/с}$  и с ускорением  $a_1 = 13 \text{ м/с}^2$ . После удара мяч полетел вертикально вверх со скоростью  $v_2 = 10 \text{ м/с}$ . Каково ускорение мяча сразу после удара?

◇ **1.75\***. [10–11] (1999, 10–2) В неоднородной вязкой среде (см. рисунок) сила сопротивления, действующая на тело массой  $m$ , пропорциональна квадрату скорости, причём коэффициент пропорциональности  $\alpha$  зависит от координаты тела  $x$  в направлении движения (то есть выражение для силы сопротивления имеет вид  $\vec{f} = -\alpha(x)v\vec{v}$ ). Какой должна быть зависимость  $\alpha(x)$ , чтобы при любой начальной скорости, направленной вдоль оси  $x$ , тело, пущенное из точки  $x = 0$ , двигалось в данной среде равнозамедленно? Силу тяжести не учитывайте.



К задаче 1.75.



К задаче 1.76.

◇ **1.76.** [9–11] (1987, 8–1) Кусок мыла массой  $m$  соскальзывает в ванну, профиль которой изображён на рисунке. Высота ванны  $h$ , радиусы

закруглений  $R$ . Начертите график зависимости силы давления куска мыла на ванну от пройденного мылом пути. Трение между мылом и ванной отсутствует, начальная скорость равнялась нулю.

**1.77\***. [10–11] (1998, 11–1) Шерлок Холмс и доктор Ватсон переходили Бейкер-стрит. В это время профессор Мориарти на своём кабриолете выехал из бокового переулка и, не притормаживая, помчался по Бейкер-стрит, чуть не сбив их.

— Холмс, — воскликнул доктор, — этот маньяк катается по Лондону с бешеной скоростью!

— Неправда, Ватсон. Я заметил, что «зайчик» от бокового стекла его авто, освещённого заходящим солнцем, некоторое время оставался вот на том фонарном столбе, в десяти футах от кабриолета. Он не мог ехать быстрее двадцати миль в час!

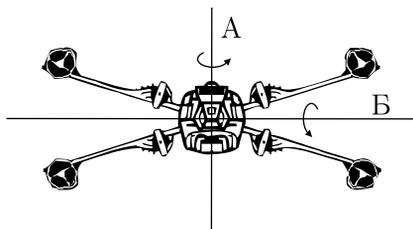
— Но как Вы догадались, Холмс?

— Элементарно, Ватсон!..

Воспроизведите рассуждения великого сыщика. Учтите, что 1 фут  $\approx 0,3$  м, а 1 миля  $\approx 1,6$  км.

**1.78.** [10–11] (1995, 10–1) Тяжёлая нерастяжимая верёвка (прыгалка), концы которой закреплены на одной высоте на некотором расстоянии друг от друга, провисает на величину  $h$ . Увеличится или уменьшится эта величина, если прыгалку раскрутить вокруг оси, проходящей через точки закрепления, со столь большой скоростью, что можно пренебречь силой тяжести? Ответ обоснуйте.

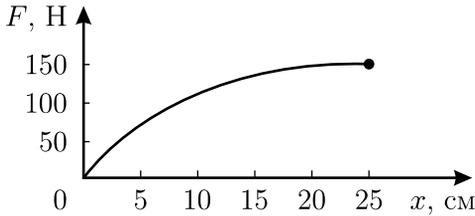
◇ **1.79.** [10–11] (1999, 10–1) Согласно сериалу «Звёздные войны», космические истребители земного флота имеют форму косоугольного креста, где на концах консолей расположены четыре одинаковых ракетных двигателя (вид истребителя спереди изображён на рисунке). Одним из пилотажных манёвров такого истребителя является быстрый разворот на  $180^\circ$ , когда два соседних двигателя работают на «полный вперёд», а два остальных — на «полный назад» с такой же тягой. Вокруг какой оси — А или Б — нужно совершать такой разворот, чтобы он занял меньше времени? Считайте, что практически вся масса истребителя сосредоточена в его двигателях и что сила тяги не зависит от скорости. Манёвр совершается в открытом космосе.



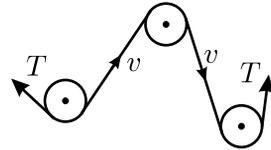
К задаче 1.79.

◇ **1.80\***. [10–11] (1986, 9–2) Зависимость силы натяжения  $F$  от удлинения  $x$  для лёгкого резинового шнура с начальной длиной  $l_0 = 20$  см

показана на рисунке. К одному из концов шнура прикрепляют маленький шарик массой  $m = 500$  г, другой конец прикрепляют к вертикальной оси, и затем весь шнур с шариком на конце помещают в горизонтальную гладкую трубку, прикрепленную к той же оси. Систему начинают медленно раскручивать вокруг этой оси. При каком значении угловой скорости  $\omega_0$  шнур разорвётся?



К задаче 1.80.



К задаче 1.82.

**1.81.** [9–11] (1995, 9–1) Витую пружину с начальной длиной  $l$ , жёсткостью  $k$  и массой  $m$  свернули в кольцо и соединили концы. После этого её раскрутили с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Найдите радиус кольца  $R$  как функцию  $\omega$ . Диаметр витков пружины много меньше её длины.

◇ **1.82.** [9–11] (1987, 8–2) Нерастяжимая, но очень гибкая и длинная цепь движется между блоками по траектории, изображённой на рисунке. При какой скорости  $v$  движения цепи она практически не будет давить на блоки? Сила натяжения цепи  $T$ , масса единицы её длины  $\rho$ ; система находится в невесомости.

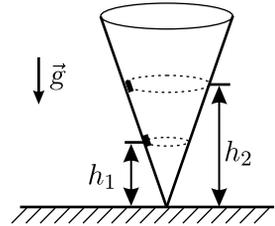
**1.83.** [10–11] (1994, 10–1) К нижнему концу стержня, расположенного вертикально и вращающегося вокруг своей продольной оси, прикреплена нить длиной  $L$ . На нити подвешен шарик, размеры которого малы по сравнению с длиной нити. Постройте график зависимости расстояния  $R$  между шариком и вертикальной линией, на которой расположен стержень, от угловой скорости  $\omega$  вращения стержня. Считайте, что угловая скорость меняется настолько медленно, что при любом её значении движение шарика успевает установиться.

**1.84.** [10–11] (1994, 10–2) Маленькую шайбу массой  $m$  запустили со скоростью  $v_0$  по касательной к внутренней поверхности находящейся в невесомости сферы массой  $M$  и радиусом  $a$ . Найдите величину силы, действующей на шайбу со стороны сферы. Трение отсутствует, сфера вначале покоилась.

**1.85\*.** [10–11] (1995, 11–2) Жёсткий невесомый стержень шарнирно подвешен за один из концов к потолку. К свободному концу и к сере-

дине стержня прикреплены два одинаковых маленьких тяжёлых шарика. Стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, образуя с этой осью угол  $\alpha$ . Найдите угол между вертикалью и силой, с которой верхний шарик действует на стержень.

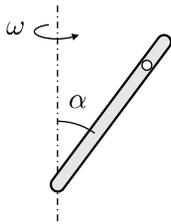
◇ **1.86.** [9–11] (1994, 9–1) По внутренней поверхности гладкой конической воронки, стоящей вертикально, скользят с постоянными по величине скоростями на высотах  $h_1$  и  $h_2$  от вершины конуса две маленькие шайбы (см. рисунок). Запишите для таких шайб аналог третьего закона Кеплера, то есть найдите отношение квадратов их периодов обращения вокруг оси конуса.



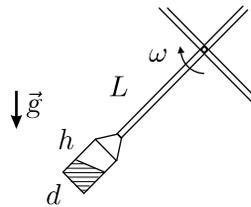
К задаче 1.86.

**1.87.** [11] (1994, 11–1) Маленький шарик подвешен на лёгкой нити длиной  $l$ . Один раз его отклоняют на некоторый угол и сообщают ему такую скорость в горизонтальном направлении, что он начинает вращаться по окружности в горизонтальной плоскости с периодом обращения  $T$ . В другой раз шарик отклоняют на тот же угол и отпускают его без начальной скорости. Найдите максимальное отношение силы натяжения нити в первом случае к силе её натяжения во втором случае.

◇ **1.88.** [9–11] (1996, 9–1) Закрытая трубка длиной  $l$ , полностью заполненная жидкостью, составляет угол  $\alpha$  с вертикальной осью, проходящей через её нижний конец (см. рисунок). В жидкости плавает лёгкая пробка. До какой угловой скорости  $\omega$  нужно раскрутить трубку вокруг оси, чтобы пробка погрузилась до середины трубки?



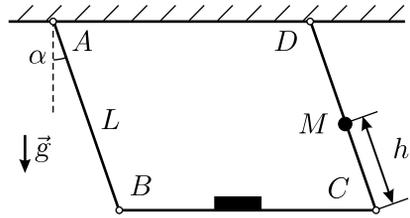
К задаче 1.88.



К задаче 1.89.

◇ **1.89\*.** [9–11] (1987, 8–2) Цилиндрическое ведро, наполовину заполненное водой, жёстко закреплено на краю лопасти ветряной мельницы (см. рисунок). При какой угловой скорости  $\omega$  вращения лопастей вода не будет выливаться из ведра? Длина лопасти  $L$  много больше высоты ведра  $h$  и диаметра его дна  $d$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

◇ **1.90.** [9–11] (1989, 8–1) Лёгкая шероховатая планка  $BC$  шарнирно подвешена на параллельных невесомых стержнях  $AB$  и  $CD$  (см. рисунок). Длина стержней  $L$ . На расстоянии  $h$  от нижнего конца одного из стержней прикреплен груз массой  $M$ . На планке лежит лёгкая шайба. Система свободно колеблется в плоскости рисунка. При каком минимальном угле отклонения стержней от вертикали  $\alpha$  шайба начнёт подпрыгивать на планке? Трением в шарнирах пренебречь.



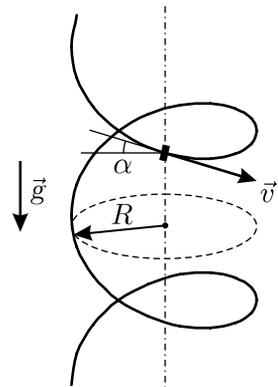
К задаче 1.90.

**1.91\***. [10–11] (1992, 11–2) Велосипедное колесо радиусом  $R = 50$  см немного деформировали — оно осталось плоским, но превратилось в эллипс с разностью полуосей  $\delta = a - b = 1$  см. При какой скорости качения этого колеса по горизонтальной поверхности оно начнёт подпрыгивать?

*Примечание.* Эллипс получается при равномерном растяжении (сжатии) окружности вдоль одной из координат. При этом уравнение окружности  $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$  переходит в уравнение эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**1.92.** [9–11] (1997, 9–2) На гладком горизонтальном столе лежит вытянутая вдоль плоскости стола невесомая и нерастяжимая нить длиной  $L$ , к одному из концов которой прикреплено небольшое тело массой  $m$ . Тело в начальный момент неподвижно. Второй конец нити начинают поднимать вертикально вверх с постоянной скоростью. Тело перестаёт давить на поверхность стола в тот момент, когда нить составляет с вертикалью угол  $\alpha$ . Какова скорость  $v$  подъёма конца нити?

**1.93\***. [10–11] (1999, 11–1) На тонкую вертикальную спицу надели кольцо радиусом  $r$  и, толкнув его, закрутили вокруг спицы. При какой угловой скорости кольцо будет устойчиво вращаться, не падая вниз? Коэффициент трения между спицей и кольцом равен  $\mu$ .



К задаче 1.94.

◇ **1.94\***. [10–11] (2002, 10–2) Маленькая шайба скользит по винтовому желобу с углом наклона  $\alpha$  к горизонту и радиусом  $R$  с постоянной скоростью  $v$  (см. рисунок). Ось желоба вертикальна, ускорение свободного падения равно  $g$ . Чему равен коэффициент трения  $\mu$  между шайбой и желобом?

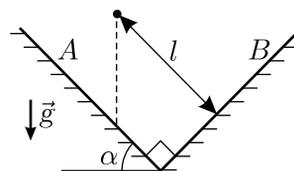
**1.95\***. [10–11] (1995, 10–2) Мальчик, управляя кордовой моделью самолёта массой  $m$ , перемещает конец кордов длиной  $L$  в горизонтальной плоскости по окружности радиусом  $r$ . Самолёт летит по окружности радиусом  $R > r$  на высоте  $h$  над плоскостью движения руки с постоянной скоростью  $v$ . Центры обеих окружностей лежат на одной вертикали. Ось самолёта направлена горизонтально по касательной к его траектории, плоскость крыльев также горизонтальна. Определите подъёмную силу, действующую на модель.

**1.96.** [9–10] (1990, 9–1) Орбитальная станция имеет форму тора, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с. Из клетки вылетели два попугайчика и полетели по коридору в разные стороны. Оказалось, что одному лететь гораздо легче, чем другому. Объясните, какому и почему. Считая, что попугай летает со скоростью  $v = 5$  м/с, оцените радиус станции.

**1.97\***. [10–11] (1987, 9–2) При перелёте с орбитальной станции «Мир» на станцию «Салют-7» наши космонавты затормозили свой корабль, перешли с основной орбиты на более низкую, промежуточную орбиту и за время  $t = 30$  часов нагнали «Салют-7», который летел впереди «Мира» по основной орбите на расстоянии  $L = 3000$  км. После этого они, разогнав корабль, снова поднялись на основную орбиту и состыковались с «Салютом-7». Считая орбиты круговыми, определите, на сколько километров промежуточная орбита ниже основной. Высоты орбит много меньше радиуса Земли.

**1.98\***. [10–11] (1996, 10–2) Спутник массой  $m$ , движущийся со скоростью  $v$  почти по круговой орбите вблизи поверхности Земли, испытывает действие постоянной тормозящей силы  $F$ . Зная ускорение  $g$  свободного падения на поверхности Земли, найдите скорость  $v_c$  снижения спутника, полагая, что изменение радиуса орбиты происходит достаточно медленно.

**1.99\***. [10–11] (2001, 11–1) Снаряд вылетел из ствола орудия под углом  $\alpha = 3^\circ$  к горизонту со скоростью  $v = 10000$  м/с. Оцените, на каком расстоянии  $L$  от орудия он упадёт на Землю. Соппротивлением воздуха и вращением Земли пренебречь.

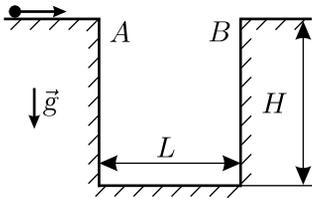


К задаче 1.100.

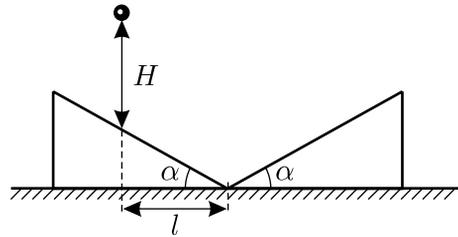
◇ **1.100.** [9–10] (1988, 8–1) Маленький шарик падает без начальной скорости на плоскость  $A$ , составляющую с горизонтом угол  $\alpha$  (см. рис.). Через какое время он ударится о плоскость  $B$ ? Плоскости  $A$  и  $B$  образуют прямой угол, удары о них абсолютно упругие. Расстояние от места начала падения до плоскости  $B$  равно  $l$ , ускорение свободного падения  $g$ .

◇ **1.101.** [10–11] (1994, 10–2) С какой скоростью упругий шарик должен приближаться к краю  $A$  прямоугольной ямы шириной  $L$  и глубиной  $H$ , чтобы точно попасть в её противоположный край  $B$  (см. рисунок)? Стенки и дно ямы абсолютно гладкие, потерь энергии нет.

**1.102.** [9–10] (1993, 9–1) Лестница состоит из одинаковых ступенек, ширина и высота которых равны. Некто с размаху бросает об эту лестницу маленький упругий тяжёлый мяч («суперболл») сверху вниз под углом  $30^\circ$  к горизонту. В каком направлении отскочит мяч? Силой тяжести можно пренебречь, вращение мяча не учитывайте.



К задаче 1.101.

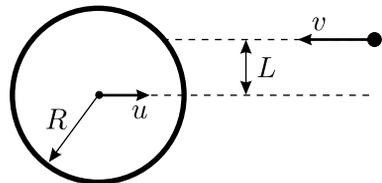


К задаче 1.104.

**1.103.** [9–10] (1992, 9–2) Внутри полого горизонтального цилиндра прыгает шарик, упруго отражаясь от его стенок. Ускорение силы тяжести  $g$ . Известно, что шарик движется по замкнутой траектории, отскакивая от стенок в двух точках, находящихся на одной высоте. Найдите все возможные траектории.

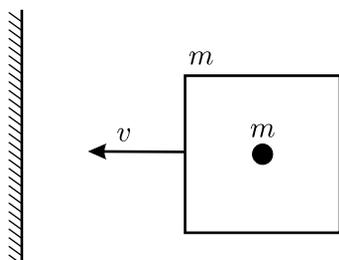
◇ **1.104\*.** [10–11] (1997, 10–2) Маленький шарик падает без начальной скорости с некоторой высоты  $H$  на систему из двух закреплённых клиньев, верхние грани которых образуют углы  $\alpha$  с горизонтом (см. рисунок). Место падения находится на расстоянии  $l$  по горизонтали от линии касания клиньев. Испытав три абсолютно упругих удара о клинья, шарик вновь поднимается на ту же высоту. Укажите возможные виды траекторий движения шарика и рассчитайте высоту  $H$  в наиболее простом случае.

◇ **1.105.** [10–11] (2002, 10–1) На массивный гладкий цилиндр радиусом  $R$ , движущийся поступательно со скоростью  $u$ , налетает маленький шарик, движущийся навстречу цилиндру перпендикулярно его оси со скоростью  $v$  (см. рисунок). Расстояние между линией, вдоль которой движется шарик, и плоскостью, в которой движется ось цилиндра, равно  $L$  ( $L < R$ ). Найдите величину скорости шарика  $v_1$  после абсолютно упругого удара о цилиндр. Сила тяжести отсутствует.

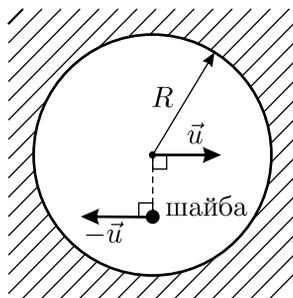


К задаче 1.105.

◇ **1.106.** [9–11] (1996, 9–1) В середине ящика массой  $m$  лежит груз такой же массы  $m$ . Вся эта конструкция движется со скоростью  $v$  по горизонтальной плоскости по направлению к стенке (см. рисунок). Как будет происходить удар этой конструкции о стенку? Какими будут скорости ящика и груза, когда все соударения закончатся? Трения нигде нет, все удары абсолютно упругие. При абсолютно упругих ударах тела равной массы обмениваются скоростями.



К задаче 1.106.



К задаче 1.107.

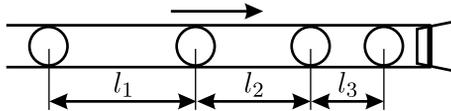
◇ **1.107.** [10–11] (1987, 10–1) В цилиндрической коробке радиусом  $R$ , стоящей на горизонтальном столе, находится маленькая шайба, масса которой совпадает с массой коробки, причём расстояние от центра коробки до шайбы составляет половину радиуса коробки. В некоторый момент времени коробке сообщили скорость  $u$ , направленную вправо, а шайбе — такую же по модулю скорость, направленную влево (см. рисунок — вид сверху). Определите траекторию движения центра коробки по столу. Удары абсолютно упругие, трение отсутствует.

**1.108\*.** [9–11] (2002, 9–2) На гладкой горизонтальной поверхности расположены две одинаковые маленькие шайбы. В начальный момент времени первой шайбе сообщили некоторую скорость вдоль линии, соединяющей центры шайб. Оказалось, что за время  $t$  первая шайба прошла путь  $S_1$ , а вторая — путь  $S_2$ . Чему могут быть равны начальная скорость первой шайбы и начальное расстояние между шайбами? Трение отсутствует, удар шайб друг о друга не обязательно абсолютно упругий.

**1.109\*.** [10–11] (1996, 10–1) Известно, что при абсолютно упругом нелобовом ударе движущегося шара о такой же покоящийся шары разлетаются под углом  $90^\circ$ . Найдите условия, при которых после абсолютно упругого нелобового соударения двух одинаковых движущихся шаров один из них остановится.

**1.110\***. [10–11] (1994, 11–1) Упругая шайба, движущаяся со скоростью  $v_0$  по гладкой горизонтальной плоскости, испытывает два последовательных соударения с такими же первоначально покоившимися упругими шайбами. Найдите величины и направления скоростей шайб после ударов, если известно, что одна из них после соударений продолжает движение со скоростью  $v_0/2$  в том направлении, в котором двигалась первая шайба до ударов.

◇ **1.111**. [9–11] (1988, 8–2) По закреплённой тонкой трубке без трения движутся вправо с одинаковыми скоростями четыре одинаковых маленьких шарика так, что расстояния между ними равны  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  (см. рисунок). Трубка заткнута пробкой. Как будут расположены и как будут двигаться шарики после того, как все соударения прекратятся? Все удары шариков друг о друга и о пробку абсолютно упругие.



К задаче 1.111.

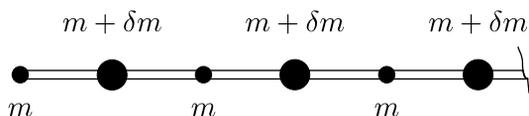
**1.112**. [10–11] (1992, 10–1) Между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями, верхняя из которых расположена на высоте  $H$  над нижней, движется маленький шарик массой  $m$ , упруго отскакивая от них. Скорость шарика после отражения от нижней плоскости равна  $v_0$  и направлена вертикально вверх. Найдите средние силы, действующие на каждую из плоскостей со стороны шарика.

**1.113**. [10–11] (1986, 9–2) Между двумя идеально отражающими стенками, расстояние между которыми равно  $L$ , находятся  $N$  одинаковых упругих шаров радиусом  $R$ . Центры шаров располагаются на одной прямой, перпендикулярной стенкам. В начальный момент времени скорости всех шаров одинаковы и направлены вдоль этой прямой,  $\vec{v}_i = \vec{v}_0$ . Учитывая столкновения между шарами, а также шаров со стенками, найдите среднюю силу давления шаров на одну из стенок. Масса шара равна  $m$ , сила тяжести отсутствует.

**1.114\***. [10–11] (1998, 10–2)  $N$  абсолютно упругих одинаковых шариков лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Одному из них сообщили скорость  $v$  в горизонтальном направлении. Испытав ряд столкновений с другими шариками, этот шарик стал двигаться в противоположном направлении. Какова максимально возможная величина конечной скорости шарика, если в каждом столкновении участвуют только два шарика, а  $N = 101$ ?

**1.115\***. [10–11] (2002, 10–2) В горизонтальном прямом желобе на равных расстояниях  $L = 1$  м друг от друга лежат  $N = 2002$  маленьких шарика. Известно, что шарики разложены в порядке убывания их масс и что массы соседних шариков отличаются друг от друга на  $\alpha = 1\%$ . Самому тяжёлому шарiku в момент времени  $t = 0$  сообщили скорость  $v = 1$  м/с в направлении остальных шариков. Считая все удары абсолютно упругими, найдите, через какое время после этого начнёт двигаться самый лёгкий шарик. Трения нет. Временем соударения пренебречь.

◇ **1.116\***. [10–11] (1996, 10–2) На полубесконечный гладкий стержень нанизано бесконечно много маленьких шариков. Массы шариков с нечётными номерами  $m$ , с чётными  $(m + \delta m)$ , причём  $\delta m \ll m$  (см. рисунок). В начальный момент времени, когда первый шарик запустили по направлению ко второму со скоростью  $v_0$ , расстояние между соседними шариками равнялось  $l_0$ , а все шарики, кроме первого, покоились. Через какое время скорость самого быстрого из шариков станет меньше  $(3/4)v_0$ ? Все удары абсолютно упругие.



К задаче 1.116.

**1.117.** [10–11] (1998, 11–2) Грузовой поезд массой  $m$ , поданный на шахте под загрузку углём, начинает движение под действием постоянной силы тяги локомотива одновременно с началом погрузки. За равные промежутки времени на платформы высыпаются равные массы угля. Скорость поезда изменяется со временем  $t$  по закону:  $v = \frac{v_0 t}{t_0 + t}$ , где  $v_0$  и  $t_0$  — постоянные величины. Найдите силу тяги локомотива.

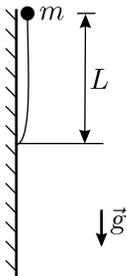
**1.118.** [10–11] (2000, 11–1) На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой  $M$  с насаженной на него маленькой бусинкой массой  $m$ . В начальный момент времени бусинка имеет скорость  $v$ , а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

**1.119\***. [10–11] (2001, 10–2) В результате взрыва снаряда массой  $m$ , летевшего со скоростью  $v$ , образовались два одинаковых осколка. Пренебрегая массой взрывчатого вещества, найдите максимальный угол разлёта осколков, если сразу после взрыва их общая кинетическая энергия увеличилась на величину  $\Delta W$ .

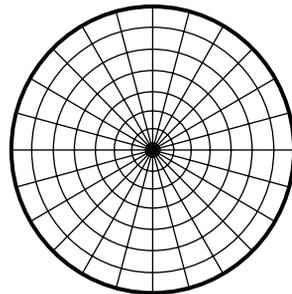
**1.120\***. [10–11] (1997, 11–1) На вбитом в стену гвозде на нити длиной  $L$  висит маленький шарик. Под этим гвоздём на одной вертикали с ним на расстоянии  $l < L$  вбит второй гвоздь. Шарик отводят вдоль стены так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают без толчка. Найдите расстояния  $l$ , при которых шарик перелетит через нижний гвоздь. Нить невесома и нерастяжима, трения нет.

**1.121\***. [10–11] (2002, 11–2) На горизонтальной плоскости лежит полусфера радиусом  $R$  (выпуклой стороной вверх). Из точки, находящейся над центром полусферы, бросают горизонтально маленькое тело, которое падает на плоскость, не касаясь полусферы. Найдите минимально возможную скорость тела в момент его падения на плоскость. Сопротивление воздуха не учитывайте.

◇ **1.122.** [9–11] (1993, 9–1) Альпинистская капроновая верёвка подчиняется закону Гука, пока не разрывается при силе натяжения  $T = 22000$  Н, будучи растянутой на  $\alpha = 25\%$  от своей первоначальной длины. Стандартный способ испытания верёвки такой: один конец верёвки длиной  $L$  закрепляют на стене, и с высоты, равной  $L$ , сбрасывают груз массой  $m$ , привязанный к другому концу (см. рисунок). При каком максимальном грузе  $m$  верёвка обязана выдержать рывок?



К задаче 1.122.

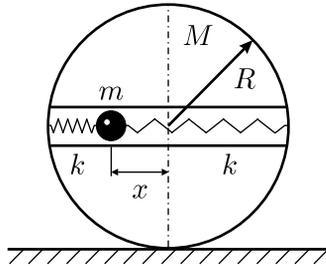


К задаче 1.123.

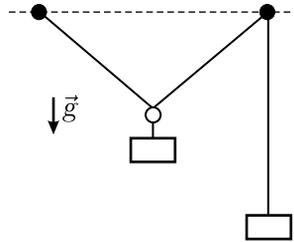
◇ **1.123\***. [10–11] (1999, 10–2) Края симметричной относительно центра невесомай сетки из упругих нитей закреплены на неподвижном горизонтальном обруче (см. рисунок). В горизонтальном положении сетка не натянута. С какой высоты  $H$  гимнаст должен упасть без начальной скорости в центр сетки, чтобы её максимальный прогиб оказался равным  $L$ , если под неподвижно лежащим в центре сетки гимнастом этот прогиб равен  $l$ ? Размеры гимнаста, величины  $L$  и  $l$  много меньше радиуса обруча. Известно, что при  $|\varepsilon| \ll 1$  справедлива формула

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon .$$

◇ 1.124\*. [11] (1988, 10–2) На горизонтальной поверхности покоится однородный тонкий обруч массой  $M$  и радиусом  $R$  (см. рисунок). Горизонтальный диаметр обруча представляет собой лёгкую гладкую трубку, в которую помещён шарик массой  $m$ , прикреплённый к обручу двумя пружинами жёсткостью  $k$  каждая. Удерживая обруч неподвижным, шарик отклонили влево на расстояние  $x$ , после чего предоставили систему самой себе. Найдите ускорение центра обруча в начальный момент времени. Проскальзывание обруча отсутствует.



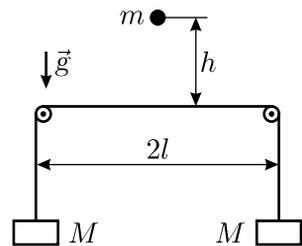
К задаче 1.124.



К задаче 1.125.

◇ 1.125\*. [10–11] (1994, 10–2) В вертикальную стену на одной высоте вбиты два гвоздя. К одному гвоздю прикреплена невесомая нерастяжимая нить. На нить надето маленькое кольцо. Другой конец нити перекинут через второй гвоздь. К кольцу и к свободному концу нити прикреплены два одинаковых груза (см. рисунок). Определите ускорения грузов в момент прохождения ими положения равновесия, если в начальном положении нить между гвоздями была горизонтальна, а начальные скорости грузов были равны нулю. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Трение не учитывайте.

◇ 1.126\*. [10–11] (1990, 10–2) Через два небольших блока перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы массой  $M$  каждый (см. рисунок). В начальный момент грузы уравновешены и покоятся. На нить с высоты  $h$  строго посередине между блоками падает небольшое тело массой  $m$  так, что при падении оно цепляется за нить. Какова будет максимальная скорость грузов в процессе движения, если  $\frac{m}{M} \ll \frac{h}{l} \ll 1$ ?

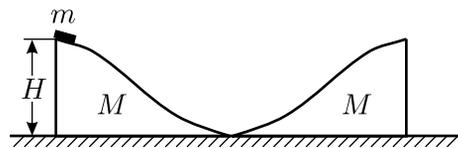
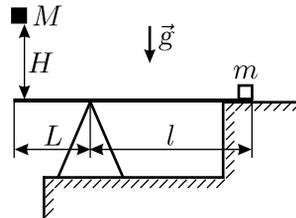
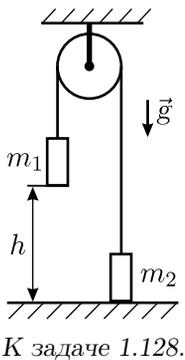


К задаче 1.126.

1.127\*. [10–11] (2004, 10–2) Лёгкая нерастяжимая нить длиной  $L = 2$  м удерживается за концы так, что они находятся на одной высоте рядом друг с другом. На нити висит кусочек проволоки массой  $M = 1$  г,

изогнутый в виде перевёрнутой буквы U. Нить выдерживает максимальную силу натяжения  $F = 5$  Н. Концы нити одновременно начинают перемещать в противоположных горизонтальных направлениях с одинаковыми скоростями  $V = 1$  м/с. В какой-то момент нить не выдерживает и рвётся. На какую максимальную высоту относительно уровня концов нити взлетит кусочек проволоки? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.

◇ 1.128. [10–11] (2003, 10–2) В машине Атвуда (см. рисунок) массы грузов равны  $m_1$  и  $m_2$ , блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжёлый груз  $m_1$  удерживают на высоте  $h$  над горизонтальной плоскостью, а груз  $m_2$  стоит на этой плоскости, причём отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз  $m_1$  после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно  $g$ , блок находится достаточно далеко от грузов.

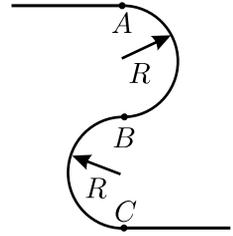


◇ 1.129\*. [10–11] (1987, 9–2) Тело массой  $M$  падает с высоты  $H$  на конец невесомого абсолютно жёсткого горизонтального рычага с плечами длиной  $L$  и  $l$ , на другом конце которого лежит тело массой  $t$  (см. рисунок). На какую высоту  $h$  взлетит тело  $t$  после удара? Тела считайте абсолютно упругими, а их размеры — малыми.

◇ 1.130. [9–11] (1994, 9–1) На гладкой горизонтальной плоскости стоят две одинаковые гладкие горки высотой  $H$  и массой  $M$  каждая. На вершине одной из них находится маленькая шайба массой  $t \ll M$  (см. рисунок). Шайба соскальзывает без начальной скорости в направ-

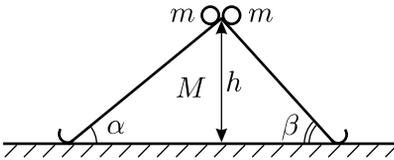
лении второй горки. Найдите скорости горок после завершения процесса всех столкновений.

◇ **1.131\***. [10–11] (1986, 10–2) В тонком гладком трубопроводе скользит гибкий шнурок (см. рисунок). Участки  $AB$  и  $BC$  трубопровода представляют собой полуокружности радиусом  $R$ ; длина шнурка  $L = 2\pi R$ . В некоторый момент времени нижний конец шнурка находится в точке  $C$ , а верхний — в точке  $A$ . Найдите все точки на шнурке, в которых сила его натяжения в этот момент равна нулю.

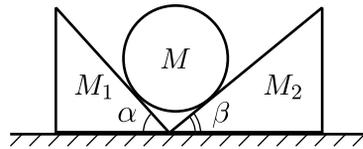


К задаче 1.131.

◇ **1.132.** [9–11] (1996, 9–2) На вершине клина массой  $M$  с высотой  $h$  и углами  $\alpha$  и  $\beta$  при основании удерживаются два небольших тела одинаковой массой  $m$  (см. рисунок). Клин стоит на гладкой горизонтальной плоскости. После освобождения тела соскальзывают с клина в разные стороны и застревают внизу в специальных улавливателях, установленных в конце каждой из наклонных плоскостей клина. На какое расстояние сдвинется клин после соскальзывания тел?



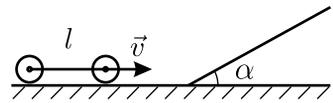
К задаче 1.132.



К задаче 1.133.

◇ **1.133\***. [10–11] (1990, 10–1) На гладкой горизонтальной поверхности лежат два клина с массами  $M_1$  и  $M_2$  и углами при основаниях  $\alpha$  и  $\beta$  (см. рисунок). На клинья опускают без начальной скорости гладкий цилиндр массой  $M$  так, что он касается клиньев своими образующими. Найдите отношение скоростей клиньев после того, как цилиндр коснётся горизонтальной поверхности.

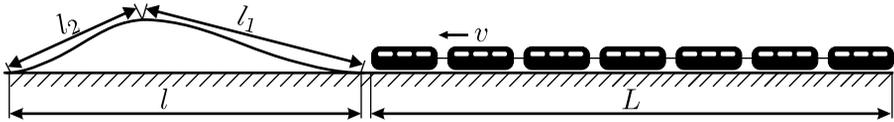
◇ **1.134\***. [10–11] (1991, 10–2) Тележка, состоящая из двух пар колёс, соединённых лёгким и абсолютно жёстким стержнем длиной  $l$ , наезжает со скоростью  $v$  на наклонную плоскость с углом наклона  $\alpha$  (см. рисунок). Определите скорость тележки  $u$  сразу после того, как она полностью въедет на плоскость. Вся масса  $M$  каждой колёсной пары сосредоточена в её оси, удары абсолютно неупругие (то есть шины «мягкие»). Трением пренебречь.



К задаче 1.134.

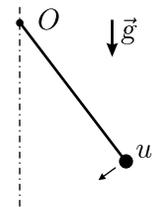
◇ **1.135.** [10–11] (1987, 9–1) Поезд длиной  $L = 500$  м движется по инерции без трения по горизонтальному участку железной дороги, пере-

ходящему в горку (см. рисунок). При какой минимальной скорости  $v$  поезд перекатится через горку? Основание горки имеет длину  $l = 100$  м, длины склонов  $l_1 = 80$  м и  $l_2 = 60$  м. Склоны горки можно считать прямолинейными, участки закруглений — малыми.



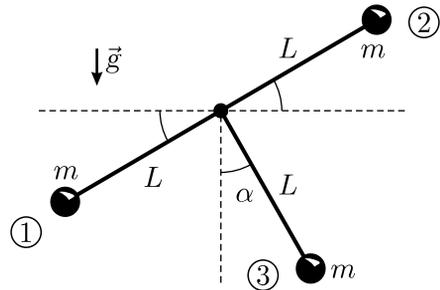
К задаче 1.135.

◇ 1.136. [10–11] (1994, 10–1) На конце жёсткого невесомого стержня длиной  $l$ , закреплённого шарнирно другим своим концом в точке  $O$  и находящегося в поле тяжести  $\vec{g}$ , прикреплён груз массой  $m$  (см. рисунок). В начальный момент времени, когда груз находится в положении устойчивого равновесия, ему сообщают направленную влево скорость  $u$  и далее раскачивают его следующим образом: когда груз останавливается, ему сообщают скорость  $u$  в плоскости рисунка перпендикулярно стержню по направлению к устойчивому положению равновесия. Чему равна полная энергия маятника через достаточно большой промежуток времени? Потенциальная энергия отсчитывается от точки  $O$ , трение отсутствует.



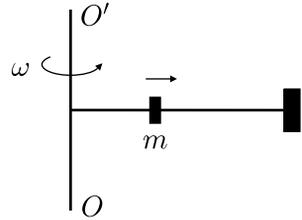
К задаче 1.136.

◇ 1.137\*. [10–11] (2001, 10–2) Т-образный маятник состоит из трёх одинаковых жёстко скреплённых невесомых стержней длиной  $L$ , два из которых являются продолжением друг друга, а третий перпендикулярен им (см. рисунок). К свободным концам стержней, находящихся в одной вертикальной плоскости, прикреплены точечные грузы массой  $m$ . Маятник может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку скрепления стержней и перпендикулярной им. Маятник отклонили от положения равновесия на угол  $\alpha < 90^\circ$  и отпустили без начальной скорости. Найдите величину и направление силы, с которой стержень действует на груз № 3 сразу после отпускания маятника.



К задаче 1.137.

◇ **1.138\***. [9–11] (1994, 9–2) Горизонтальная штанга, жёстко связанная с вертикальной осью  $OO'$ , вращается вокруг неё с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (см. рисунок). Постоянство угловой скорости обеспечивает мотор, связанный с вертикальной осью. На штангу надета небольшая муфта массой  $m$ . Вначале муфта удерживается на расстоянии  $l$  от оси  $OO'$ . В некоторый момент времени муфта освобождается и начинает двигаться вдоль штанги. На другом конце штанги имеется заглушка (утолщение с тонкой мягкой прокладкой), которая не позволяет муфте соскочить со штанги. Удар муфты о заглушку является абсолютно неупругим. Максимальное удаление муфты от оси  $OO'$  равно  $L$ . Какую работу совершает мотор в процессе перемещения муфты по штанге? Трение не учитывать.

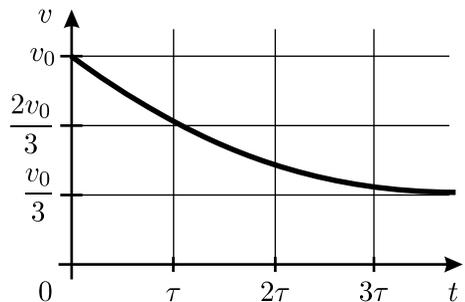


К задаче 1.138.

**1.139.** [10–11] (2001, 10–1) Пренебрегая влиянием воздуха и вращением Земли, определите, как зависит кинетическая энергия  $W$  искусственного спутника массой  $m$ , движущегося по круговой орбите вокруг Земли, от работы  $A$ , которую произвёл над ним ракетonosитель при выводе на эту орбиту. Постройте график зависимости  $W(A)$ . Радиус Земли  $R_3$ , ускорение свободного падения на её поверхности равно  $g$ .

**1.140.** [10–11] (1986, 9–2) Искусственный спутник Земли находится на круговой орбите высотой  $h = 200$  км. Включается двигатель, и скорость спутника за несколько минут возрастает на  $\Delta v = 5$  км/с. В результате он улетает в межпланетное пространство. Найдите скорость спутника  $v_\infty$  вдали от Земли. Радиус Земли  $R_3 = 6370$  км, ускорение свободного падения на её поверхности  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

◇ **1.141.** [10–11] (2003, 10–1) Космический корабль стартовал в вертикальном направлении с поверхности невращающегося сферически симметричного небесного тела, лишённого атмосферы. После выключения двигателя зависимость скорости корабля от времени имеет вид, показанный на рисунке. На каком расстоянии от центра небесного тела был выключен двигатель?

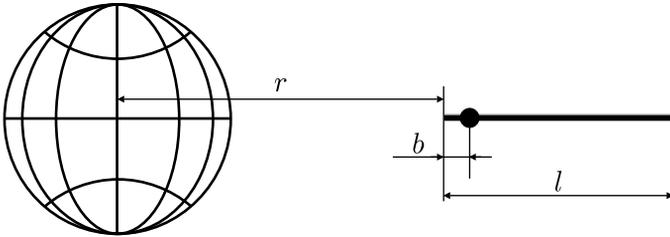


К задаче 1.141.

**1.142.** [10–11] (1996, 10–1) Оценить минимальную массу звезды, при которой свет, исходящий с

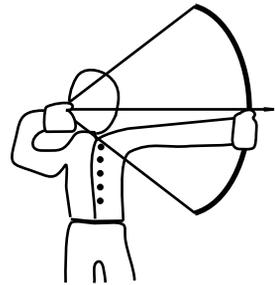
её поверхности, не достигнет внешнего наблюдателя. Радиус звезды  $R$ .

◇ **1.143\***. [9–11] (1993, 9–2) Палочка длиной  $l = 1$  м с надетой на неё бусинкой находится на расстоянии  $r = 100\,000$  км от центра Земли. Палочка направлена на центр Земли, бусинка находится на расстоянии  $b = 1$  см от «нижнего» конца палочки (см. рисунок). Эта конструкция начинает свободно падать без начальной скорости. За какое время бусинка соскользнёт с палочки? Какое расстояние палочка пролетит за это время? Трение отсутствует. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км.



К задаче 1.143.

◇ **1.144.** [9–11] (1993, 9–1) Средневековые лучники натягивали тетиву от вытянутой левой руки «до уха» (правого, см. рисунок), причём это требовало всей физической силы воина, и не каждому это удавалось. Оцените: 1) скорость стрелы, выпущенной таким образом; 2) дальность прицельной стрельбы (можно сравнить с литературой — «Айвенго», «Робин Гуд»). Массу стрелы оценить трудно, но поскольку десятков таких стрел успешно таскали в колчане на боку, считайте её равной 200 граммам.



К задаче 1.144.

**1.145.** [10–11] (1986, 10–1) Полный каток массой  $M = 200$  кг покоится на шероховатом асфальте. Затем к нему прицепляют трактор, который начинает тянуть каток с постоянной силой  $F = 400$  Н. До какой скорости разгонится каток за  $L = 18$  м пройденного пути? Потерями энергии пренебречь.

**1.146\***. [10–11] (1988, 9–1) Некто сконструировал педальный вертолёт с такими параметрами: масса очень мала, диаметр винта  $d = 8$  м. Сможет ли пилот массой  $M = 80$  кг взлететь на такой машине? (Сравните требуемую мощность с мощностью лошади.) Молярная масса воздуха  $\mu = 29$  г/моль.

**1.147\***. [10–11] (1995, 11–1) Оцените частоту писка летящего комара. Длина его туловища равна длине каждого из двух крыльев и составляет  $l = 3$  мм, толщина туловища равна ширине крыла  $d = 0,5$  мм. Плотность воздуха  $\rho_1 = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>, плотность комара  $\rho_2 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

**1.148.** [9–11] (1991, 9–1) Предложен следующий проект ракетного двигателя: луч лазера направляется на кусок льда, помещённого в резервуар с отверстием площадью  $S$ . Мощность лазера  $N$  полностью идёт на испарение льда, в который добавлен чёрный краситель. Удельная теплота испарения льда равна  $\lambda$ , плотность образовавшихся паров  $\rho$ . Найдите силу тяги такого двигателя.

**1.149.** [10–11] (1993, 11–2) Двигатель современного истребителя развивает постоянную силу тяги, равную начальному весу истребителя. За сколько минут полёта в таком режиме истребитель истратит всё топливо — керосин с удельной теплотой сгорания  $q = 4,5 \cdot 10^7$  Дж/кг, если его запас составляет треть массы самолёта, и практически вся энергия топлива переходит в кинетическую энергию реактивной струи?

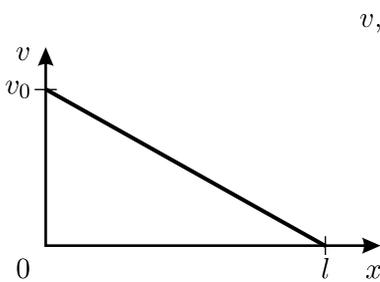
**1.150.** [9–11] (1994, 9–1) Механическая мощность, развиваемая мотором автомобиля, с момента старта линейно возрастает со временем:  $N = \alpha t$ . Как зависит от времени скорость автомобиля? Потерь энергии в трансмиссии нет, сопротивлением воздуха пренебречь. Масса автомобиля  $m$ .

**1.151.** [10–11] (2000, 10–1) Гоночный автомобиль имеет привод на все четыре колеса. Его двигатель выдаёт максимальную мощность  $N = 60$  кВт при любой скорости движения. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислите время разгона этого автомобиля от старта до скорости  $v = 20$  м/с. Масса автомобиля  $m = 1$  т, коэффициент трения между колёсами и дорожным покрытием не зависит от скорости и равен  $\mu = 0,6$ .

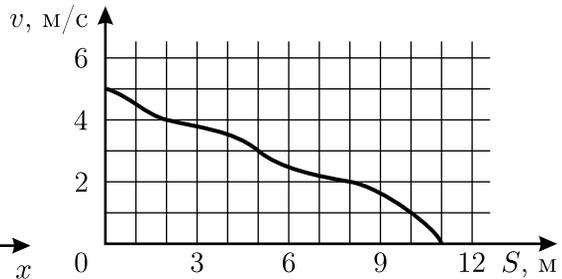
**1.152\***. [10–11] (2001, 11–2) Для подтверждения своей водительской квалификации автомобилист должен выполнить следующее упражнение: за ограниченное время проехать расстояние  $L = 50$  м между точками 1 и 2, начав движение в точке 1 и остановившись в конце пути, в точке 2. Какое наименьшее время  $t$  для этого необходимо, если наибольшая мощность, развиваемая двигателем автомобиля,  $N = 80$  кВт, а тормозной путь автомобиля при скорости  $v = 80$  км/ч составляет  $l_T = 50$  м? Масса автомобиля  $m = 1000$  кг.

◇ **1.153.** [10–11] (2002, 11–1) Телу массой  $m$ , находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили скорость  $v_0$  в направлении оси  $X$ . График зависимости скорости тела  $v$  от его координаты  $x$  изображён

на рисунке. Найдите зависимость величины силы трения, действующей на тело, от координаты  $x$ .



К задаче 1.153.



К задаче 1.154.

◇ **1.154.** [10–11] (2002, 10–1) Маленькую шайбу запустили по шероховатой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0 = 5$  м/с. График зависимости скорости шайбы  $v$  от пройденного ею пути  $S$  изображён на рисунке. Какой путь пройдёт шайба до полной остановки, если её запустить из той же точки в том же направлении со скоростью  $v_1 = 4$  м/с?

**1.155\*.** [10–11] (2003, 10–1) На горизонтальном столе некоторая прямая линия разделяет две области: по одну сторону от этой линии стол гладкий, а по другую — шероховатый. На столе лежит однородная доска длиной  $L = 1$  м. Она расположена перпендикулярно линии и целиком находится на гладкой поверхности. К концу доски прикреплен один конец невесомой пружины, имеющей жёсткость  $k = 4$  Н/м. Другой конец пружины начинают медленно тянуть в горизонтальном направлении вдоль доски так, что она перемещается через линию в сторону шероховатой поверхности. Для того, чтобы полностью перетащить доску на шероховатую поверхность, нужно совершить минимальную работу  $A = 17,5$  Дж. Найдите, какое при этом выделится количество теплоты. Пружина не касается шероховатой поверхности, коэффициент трения доски об эту поверхность — постоянная величина.

◇ **1.156\*.** [10–11] (2003, 10–1) На рисунке 1 приведена зависимость силы упругости  $f$ , возникающей при растяжении резинового стержня, от величины  $\Delta l$  его удлинения. Стержень очень медленно протягивают через щель, имеющую достаточно узкие закруглённые края-щёчки, так, как показано на рисунке 2. Каждая из щёчек прижимается к стержню с постоянной силой  $F = 30$  Н. Коэффициент сухого трения между резиной и материалом щёчек  $\mu = 0,5$ , длина стержня в нерастянутом состоянии  $L = 10$  см. Какую работу совершат силы трения, действующие на стержень, к тому моменту, когда он весь будет протянут через щель?

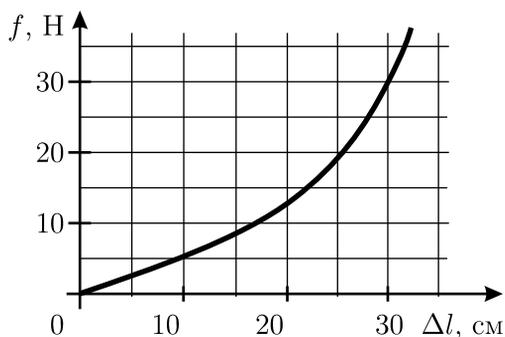


рисунок 1

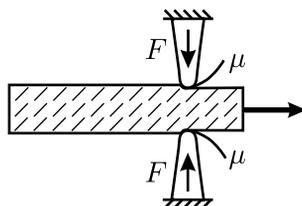
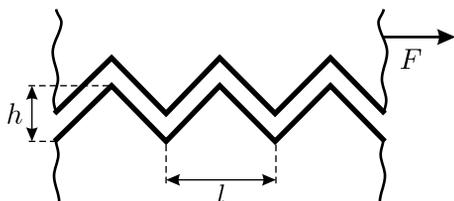


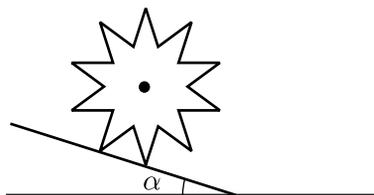
рисунок 2

К задаче 1.156.

◇ 1.157\*. [10–11] (2001, 10–1) Два тела имеют одинаковые ребристые поверхности (см. рисунок). Какую среднюю силу в горизонтальном направлении, перпендикулярном рёбрам, нужно приложить к верхнему телу массой  $m$ , чтобы медленно тащить его по неподвижной горизонтальной поверхности второго тела с постоянной (в среднем) скоростью? Все рёбра одинаковые, симметричные, имеют ширину  $l$  и высоту  $h$ . Поверхности граней рёбер гладкие, их соударения абсолютно неупругие.



К задаче 1.157.



К задаче 1.159.

1.158. [10–11] (1987, 9–1) Строительный вибратор представляет собой металлическую платформу, на которой установлен приводимый в движение электромотором тяжёлый асимметричный маховик, совершающий при включённом моторе  $n = 50$  оборотов в секунду вокруг горизонтальной оси, жёстко закреплённой на этой платформе. Оцените, с какой скоростью вибратор будет перемещаться по очень шероховатому бетонному полу, если его толкать в горизонтальном направлении с силой  $F = 100$  Н? Масса вибратора  $M = 50$  кг.

◇ 1.159\*. [10–11] (1988, 9–2) На тяжёлую ось насажены два лёгких колеса в форме десятиугольных звёздочек. Эта конструкция может скатываться с наклонной плоскости (см. рисунок — вид сбоку).

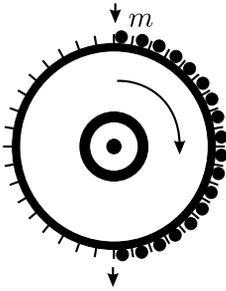
а) Конструкция покоится, мы постепенно увеличиваем угол  $\alpha$ , который эта плоскость образует с горизонтом. При каком значении  $\alpha$

конструкция покатится, если проскальзывания нет?

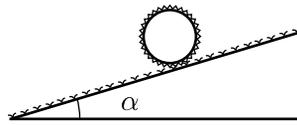
б) При каких значениях  $\alpha$  конструкция, если её подтолкнуть, будет катиться по наклонной плоскости сколь угодно долго, не останавливаясь? Удары углов звёздочек об эту плоскость считайте абсолютно неупругими.

*Примечание:*  $\sin 18^\circ \approx 0,31$ ;  $\cos 18^\circ \approx 0,95$ . В случае б) можно найти приближённый ответ.

◇ **1.160\***. [10–11] (1996, 11–1) Модель водяного колеса устроена следующим образом (см. рисунок): на ободе колеса радиусом  $R = 1$  м равномерно расположены  $N$  ячеек, причём  $N = 201$ . Когда очередная ячейка проходит верхнее положение, в неё сбрасывается (без начальной скорости относительно земли) груз массой  $m = 100$  г. Когда ячейка проходит нижнее положение, груз вываливается из неё без начальной скорости относительно колеса. Масса самого колеса мала, все удары абсолютно неупругие, трения нет. Найдите установившуюся угловую скорость вращения колеса  $\omega$ .



К задаче 1.160.

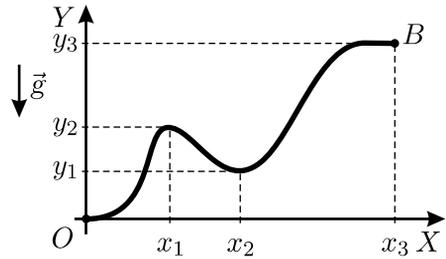


К задаче 1.161.

◇ **1.161.** [10–11] (1995, 10–1) На боковой поверхности длинного цилиндра массой  $M$  и радиусом  $R$  равномерно распределены  $N$  маленьких крючков (как на застёжке-«липучке»). Цилиндр кладут на наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha$  с горизонтом, так, что его ось горизонтальна (см. рисунок). Поверхность плоскости покрыта, как и на «липучке», петлями. Каждый крючок, коснувшийся поверхности, цепляется за петлю, причём работа по его отрыву от петли равна  $A$ . При каком соотношении между  $R$ ,  $M$ ,  $N$  и  $A$  цилиндр будет скатываться с плоскости?

**1.162.** [9–10] (1989, 8–1) С длинной ледяной горки, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, без начальной скорости съезжают санки. Средняя треть длины горки посыпана песком и имеет коэффициент трения  $\mu$ . При каких значениях  $\mu$  санки доедут до конца горки? Чистый лёд считайте абсолютно гладким.

◇ **1.163.** [10–11] (2004, 10–1) Какую работу необходимо совершить, чтобы достаточно медленно переместить небольшой ящик массой  $m$  из точки  $O$  в точку  $B$  по горке, действуя на него силой, направленной по касательной к траектории его движения? Профиль горки показан на рисунке, коэффициент

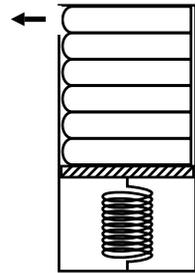


К задаче 1.163.

трения ящика о горку равен  $\mu$ , ускорение свободного падения равно  $g$ . Указанные на рисунке значения координат считайте известными.

**1.164\***. [10–11] (1998, 11–1) На горизонтальной плоскости, плавно переходящей в наклонную плоскость, составляющую угол  $\alpha$  с горизонтом, на расстоянии  $L$  от наклонной плоскости находится маленькая шайба. Коэффициент трения шайбы о плоскости равен  $\mu$ , на участке сопряжения плоскостей трение отсутствует. Шайбе толчком сообщают скорость  $v$  в сторону наклонной плоскости в направлении, перпендикулярном линии сопряжения плоскостей. На каком расстоянии  $l$  от начального положения шайба окончательно остановится, если  $\operatorname{tg} \alpha > \mu$ ,  $v > \sqrt{2\mu g L}$ , участок сопряжения по длине много меньше  $L$ ?

◇ **1.165\***. [10–11] (2003, 10–1) Магази́н пистолета представляет собой металлический пенал, внутри которого имеется лёгкий поршень, подпираемый пружиной. Когда магазин пуст, поршень касается его крышки. Магази́н устроен таким образом, что из него можно вынимать только находящийся у крышки патрон — через небольшое отверстие в боковой стенке. После вынимания патрона поршень под действием пружины перемещается и передвигает все оставшиеся в магазине патроны к крышке.



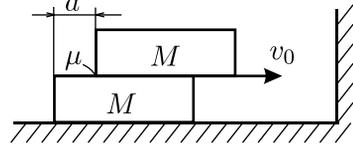
К задаче 1.165.

В магазин вставили  $N$  одинаковых патронов массой  $m$  и длиной  $L$ , после чего вынули по очереди все патроны, держа магазин крышкой вверх (см. рисунок). Коэффициенты трения между патронами, а также между патроном и крышкой и между патроном и поршнем одинаковы и равны  $\mu$ . На сколько работа против сил трения при опустошении магазина будет больше, если при вынимании патронов держать его крышкой вниз? Трением между боковыми стенками магазина и патронами, а также массой пружины пренебречь.

**1.166\***. [9–11] (1990, 9–1) Мяч падает на твёрдый пол со стола высотой  $H = 1$  м. При каждом ударе о пол половина энергии мяча

переходит в тепло. Масса мяча  $m = 0,2$  кг, избыточное давление в нём  $\Delta p = 0,2$  атм, радиус  $R = 10$  см. Сколько раз мяч ударится о пол?

◇ **1.167\***. [9–11] (1998, 9–1) Брусок массой  $M$  положен на другой такой же брусок с небольшим сдвигом  $a$  (см. рисунок). Эта система как целое скользит по гладкому горизонтальному полу со скоростью  $v_0$ . На её пути стоит вертикальная стена, перпендикулярная направлению вектора скорости  $v_0$  и параллельная краям брусков. Удар каждого бруска о стену абсолютно упругий, коэффициент трения между брусками  $\mu$ . Опишите, как будет происходить столкновение системы со стеной, и определите, какие скорости будут иметь бруски, когда этот процесс закончится.



К задаче 1.167.

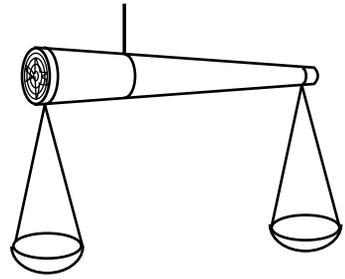
Удар каждого бруска о стену абсолютно упругий, коэффициент трения между брусками  $\mu$ . Опишите, как будет происходить столкновение системы со стеной, и определите, какие скорости будут иметь бруски, когда этот процесс закончится.

**1.168\***. [10–11] (1989, 9–2) Небольшой упругий брусок массой  $m$  может двигаться без трения внутри прямоугольной коробки такой же массы. Коробка находится на столе, покрытом тонким слоем масла. Сила трения коробки о стол зависит только от скорости  $v$  движения коробки по столу и равна  $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ . В начальный момент времени коробка покоится, а брусок находится у её левой стенки и имеет скорость  $v_0$ , направленную вправо. Сколько ударов о коробку совершит брусок, если длина коробки  $L$  много больше размеров бруска?

**1.169\***. [11] (1997, 11–2) На горизонтальной шероховатой поверхности находятся две одинаковые длинные тонкостенные трубы, оси которых параллельны. Одна из труб покоится, а вторая катится по направлению к ней без проскальзывания со скоростью  $v$ . Происходит абсолютно упругий удар. Трением труб друг о друга можно пренебречь. Коэффициент трения скольжения между трубами и поверхностью равен  $\mu$ . На каком максимальном расстоянии друг от друга окажутся трубы после удара?

**1.170.** [8–9] (2001, 8–1) Груз неизвестной массы взвешивают, уравновешивая его гирькой с известной массой  $M$  на концах тяжёлого прямого коромысла; при этом равновесие достигается, когда точка опоры коромысла смещается от его середины на  $x = \frac{1}{4}$  его длины в сторону гирьки. В отсутствие же груза на втором плече коромысло остаётся в равновесии при смещении его точки опоры от середины в сторону гирьки на  $y = \frac{1}{3}$  его длины. Считая коромысло однородным по длине, найдите массу взвешиваемого груза  $m$ .

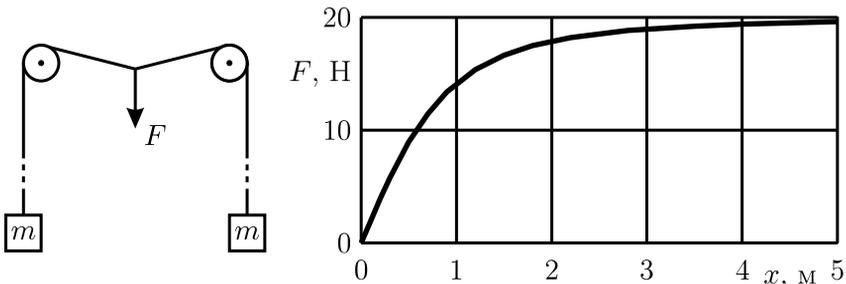
◇ **1.171\***. [8–9] (1997, 9–1) «Хитрый» продавец на рынке торгует рыбой, взвешивая её на весах, сделанных из палки и верёвки (см. рисунок), причём не обманывает покупателей. Покупателю разрешается взвесить рыбу самому, но при условии, что рыба помещается только на левую чашку весов и не снимается до момента расплаты. Продавец разрешает провести максимум два взвешивания, предоставляя покупателю набор гирь. Как определить массу понравившейся вам рыбы? «Коромысло» весов с пустыми чашками занимает горизонтальное положение.



К задаче 1.171.

**1.172.** [8–9] (2004, 8–1) Известно, что при помощи подвижного блока можно получить выигрыш в силе в 2 раза. Школьник Вася изобрёл такую схему из подвижных и неподвижных блоков, которая даёт выигрыш в силе в 7 раз. Придумайте и нарисуйте возможные варианты этой схемы.

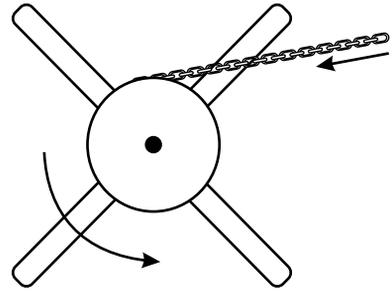
◇ **1.173.** [8–9] (2000, 8–1) Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная лёгкая нить, к концам которой прикреплены два груза одинаковой массы (см. рисунок). Нить начинают медленно оттягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы  $F$ , прикладываемой к нити, от смещения  $x$  этой точки приведён на рисунке. Найдите приблизительно массу  $m$  каждого из грузов. Трения нет.



К задаче 1.173.

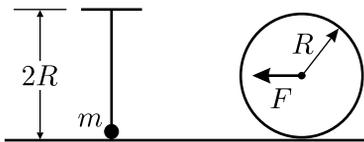
◇ **1.174.** [9–10] (1999, 9–1) На старинных кораблях для подъёма якоря использовался кабестан — ворот, представлявший собой цилиндрическое бревно, к которому прикреплены одинаковые длинные

ручки (см. рисунок). Матросы, отвечавшие за подъём якоря (якорная команда), наваливались на концы ручек, в результате чего ворот вращался, и якорная цепь наматывалась на бревно. Капитан, собираясь в дальнейшее плавание, приказал утяжелить якорь, после чего выяснилось, что прежняя якорная команда с трудом поднимает якорь только до поверхности воды. Чтобы исправить ситуацию, капитан распорядился переделать ворот. Пренебрегая трением и массой цепи, найдите, во сколько раз нужно удлинить ручки кабестана, чтобы прежняя якорная команда могла поднять новый якорь до борта. Плотности воды и материала якоря  $1 \text{ г/см}^3$  и  $8 \text{ г/см}^3$  соответственно.

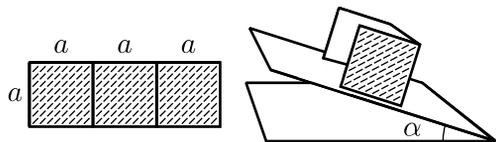


К задаче 1.174.

◇ 1.175. [9–10] (1992, 9–1) На высоте  $2R$  над горизонтальной плоскостью на гибкой невесомой верёвке длиной  $2R$  подвешен маленький груз массой  $m$  (см. рисунок). Какую наименьшую горизонтальную силу  $F$  нужно приложить к цилиндру радиусом  $R$ , чтобы медленно протолкнуть его под этим маятником? Трения нет.



К задаче 1.175.

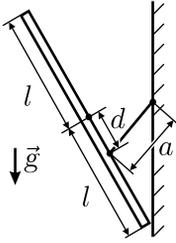


К задаче 1.176.

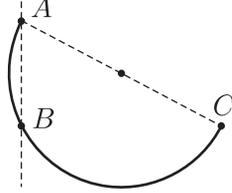
◇ 1.176. [9–10] (1986, 9–1) Картонную полоску, согнутую в форме буквы П, положили на шероховатую наклонную плоскость, как показано на рисунке. При каком угле  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту она перевернётся?

1.177. [9–10] (1999, 9–1) У квадратного стола со стороной  $L = 1 \text{ м}$  и высотой  $H = 1 \text{ м}$  одна ножка на  $a = 3 \text{ см}$  короче остальных, и стол может качаться. Если поставить стол ровно, то он стоит, но достаточно лёгкого толчка, чтобы он накренился на короткую ножку. Для того, чтобы после этого стол вернулся в первоначальное положение, нужно поставить на угол, противоположный короткой ножке, грузик массой  $m = 300 \text{ г}$ . Найдите массу крышки стола, пренебрегая массой ножек. Считайте ножки тонкими и расположенными под углами крышки стола.

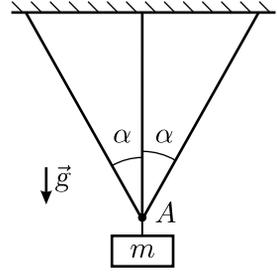
◇ **1.178\***. [9–11] (1992, 9–1) Некто повесил на гвоздь прямоугольную картину, прикрепив верёвку ниже центра тяжести, на расстоянии  $d$  от него (см. рисунок). Длина верёвки  $a$ , высота картины  $2l$ . Под каким углом к стене она будет висеть? При каком соотношении между  $d$ ,  $a$  и  $l$  картина не перевернётся? Трение о стену отсутствует, место прикрепления верёвки находится на оси симметрии картины.



К задаче 1.178.



К задаче 1.179.



К задаче 1.180.

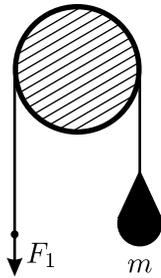
◇ **1.179\***. [9–11] (2003, 9–2) В вертикальную стену вбиты два гвоздя так, что они лежат на одной вертикальной прямой. Кусок однородной проволоки массой  $m$  согнули в дугу в виде половины окружности и шарнирно прикрепили за один из концов к верхнему гвоздю  $A$  (см. рисунок). Дуга при этом опёрлась на нижний гвоздь  $B$ . Найдите величину силы, с которой проволока давит на верхний гвоздь, если известно, что в отсутствие нижнего гвоздя, когда проволока находится в равновесии, диаметр  $AC$  дуги составляет с вертикалью угол  $\alpha_0$ . Расстояние между гвоздями равно радиусу дуги. Трения нет.

◇ **1.180\***. [9–11] (1993, 9–2) Три отрезка троса соединены в точке  $A$  (см. рисунок). Все они лежат в одной плоскости, прямые и не натянуты. Угол между крайними и средним отрезками троса равен  $\alpha$ . К точке  $A$  подвешивают груз массой  $m$ . Найдите силу натяжения  $T$  среднего отрезка троса. Удлинение тросов малó.

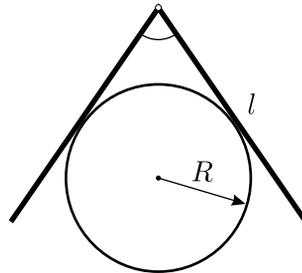
**1.181\***. [10–11] (1999, 10–2) Очень лёгкая жёсткая квадратная пластинка подвешена в горизонтальном положении на четырёх одинаковых вертикальных нитях, прикреплённых к её углам. Найдите и нарисуйте ту область пластинки, куда можно положить точечный груз таким образом, чтобы все четыре нити в положении равновесия оказались натянутыми. Нити считать упругими, но очень слабо растяжимыми.

◇ **1.182**. [9–10] (1986, 8–2) Через неподвижное горизонтально закреплённое бревно переброшена верёвка (см. рисунок). Для того, чтобы удерживать груз массой  $m = 6$  кг, подвешенный на этой

верёвке, необходимо тянуть второй конец верёвки с минимальной силой  $F_1 = 40$  Н. С какой минимальной силой  $F_2$  надо тянуть верёвку, чтобы груз начал подниматься?



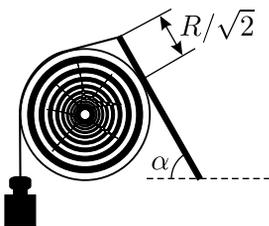
К задаче 1.182.



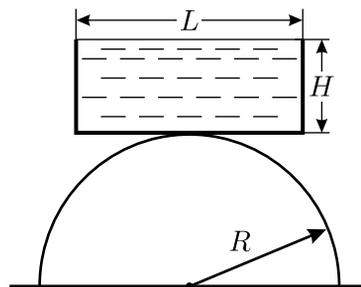
К задаче 1.183.

◇ 1.183. [10–11] (1988, 9–2) На гладкое горизонтальное бревно радиусом  $R = 10$  см кладут сверху «книжку», составленную из двух одинаковых тонких квадратных пластинок со стороной  $l = 40$  см, скреплённых с одного края лишней лентой (см. рисунок). Какой угол составят пластинки при равновесии?

◇ 1.184\*. [9–10] (1996, 9–2) Через скользкое круглое бревно радиусом  $R$ , ось которого горизонтальна, перекинута невесомая верёвка, к концам которой прикреплены груз и тонкий однородный жёсткий стержень (см. рисунок). В положении устойчивого равновесия стержень составляет с горизонтом угол  $\alpha = 30^\circ$ , расстояние от конца стержня, к которому прикреплена верёвка, до точки касания стержня и бревна составляет  $R/\sqrt{2}$ . Найдите отношение масс груза и стержня.



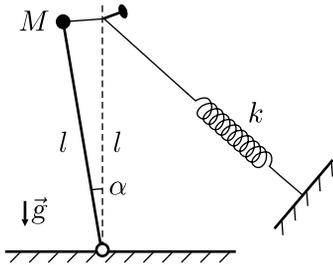
К задаче 1.184.



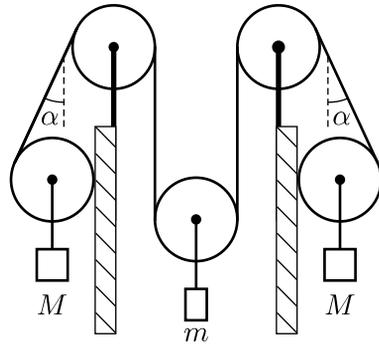
К задаче 1.185.

◇ 1.185\*. [9–11] (1990, 9–2) В лёгкую прямоугольную ёмкость шириной  $L$  и глубиной  $H$  до краёв налита вода. Ёмкость ставят в горизонтальном положении поперёк шероховатого цилиндрического бревна радиусом  $R$  (см. рисунок). При каких  $R$  равновесие будет устойчивым? Поверхностным натяжением пренебречь.

◇ **1.186.** [9–11] (1995, 9–2) Шарнирно закреплённый стержень длиной  $l$  с грузом массой  $M$  на конце удерживается в вертикальном положении невесомой нитью, перекинутой через гвоздь и прикрепленной одним концом к пружине жёсткостью  $k$ , а другим — к грузу. Гвоздь вбит на высоте  $l$  над шарниром. Когда стержень вертикален, пружина не растянута. Какую максимальную массу  $M$  может устойчиво удерживать такая система, не опрокинувшись? Трения нет. «Устойчиво» означает, что если стержень отклонить на небольшой угол  $\alpha$  и отпустить, то он вернётся в начальное положение (см. рисунок).



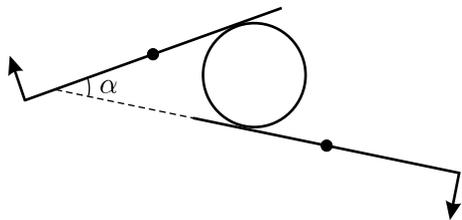
К задаче 1.186.



К задаче 1.187.

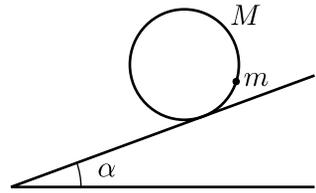
◇ **1.187.** [9–10] (1987, 8–2) В системе, изображённой на рисунке, блоки и нити невесомы. Массы грузов, подвешенных к крайним блокам, одинаковы и равны  $M$ , а наклонные участки нити составляют с вертикалью угол  $\alpha$ . При каких значениях массы  $m$  груза, подвешенного к центральному блоку, и коэффициента трения  $\mu$  между крайними блоками и опорами система будет находиться в равновесии? Будет ли это равновесие устойчивым?

◇ **1.188.** [9–10] (2004, 9–1) Лёгкий цилиндр зажат между двумя одинаковыми рычагами так, что угол между ними равен  $\alpha$  (см. рисунок). Точками показаны неподвижные оси рычагов, а стрелками — силы, приложенные к концам рычагов. При каком минимальном коэффициенте трения между рычагами и цилиндром он может находиться в равновесии в этом положении? Силой тяжести пренебречь.



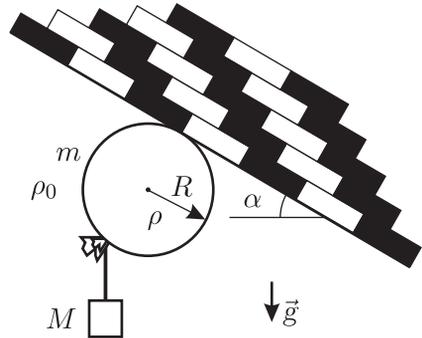
К задаче 1.188.

◇ **1.189.** [9–10] (1995, 9–1) На наклонной плоскости лежит тонкостенная труба массой  $M$ , на внутренней поверхности которой закреплён груз массой  $m$  малых размеров. Угол наклона плоскости постепенно увеличивают (см. рисунок). При каких коэффициентах трения трубы о плоскость труба начнёт скользить по плоскости без вращения?



К задаче 1.189.

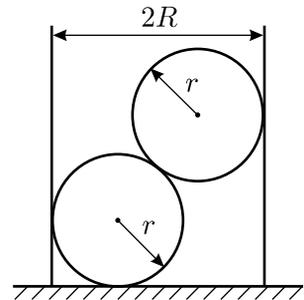
◇ **1.190\*.** [10–11] (1998, 10–1) В дни празднования 850-летия основания Москвы продавалось много «летающих» воздушных шариков. Некоторые наиболее сообразительные школьники с помощью небольшого грузика «подвешивали» их к наклонным потолкам московского метро (см. рисунок). Грузик какой массы  $M$  годится для этой цели? При решении задачи считайте, что шарик имеет форму сферы радиусом  $R$ , и проскальзывает о потолок отсутствует. Масса резиновой оболочки шарика  $m$ , плотность газа внутри шарика  $\rho$ , плотность атмосферы  $\rho_0$ , потолок имеет угол наклона  $\alpha$ .



К задаче 1.190.

**1.191.** [10–11] (1988, 9–2) Автомобиль повышенной проходимости может использовать в качестве ведущих либо передние, либо задние колёса. Водитель хочет буксировать тросом тяжёлый груз. Какую максимальную силу тяги  $T$  (без рывка) сможет развить автомобиль, если коэффициент трения колёс о дорогу  $\mu = 0,4$ , масса автомобиля  $M = 2$  т, расстояние между центрами колёс  $l = 4$  м, радиус колёс  $R = 0,3$  м? Центр масс автомобиля расположен на равном расстоянии от передней и задней оси на уровне осей колёс, трос горизонтален и прикреплен также на уровне осей колёс. Какие колёса должны быть ведущими?

◇ **1.192.** [10–11] (1987, 9–1) Тонкостенная однородная цилиндрическая трубка радиусом  $R$  стоит на горизонтальном столе (см. рисунок). В трубку опускают два одинаковых шара радиусом  $r$ , причём  $R/2 < r < R$ . При каком минимальном



К задаче 1.192.

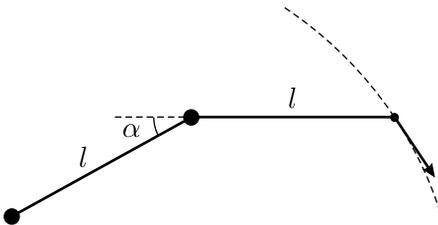
отношении  $m/M$  ( $m$  — масса каждого шара,  $M$  — масса трубки) край трубки оторвётся от стола? Трение отсутствует.

**1.193\***. [9–11] (1989, 8–2) Вертикальная труба радиусом  $R$  заполнена песком на высоту  $H$  ( $H > 100R$ ). Плотность песка  $\rho$ . Найдите силу  $F$  давления песка на дно трубы. Известно, что этот песок образует на горизонтальной поверхности горку с предельным углом при основании  $\gamma_0$ , причём этот угол мал ( $\gamma_0 \sim 0,05$  рад). Коэффициент трения песка о материал трубы равен  $\mu$ .

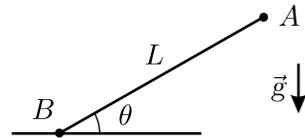
**1.194\***. [9–11] (1997, 9–1) Кусок однородного гибкого каната массой  $M = 10$  кг находится на горизонтальном столе. На один из концов каната действует сила  $F = 50$  Н, при этом  $2/3$  каната неподвижно лежит на столе. Найдите возможные значения коэффициента трения каната о стол. Считайте, что все точки каната находятся в одной вертикальной плоскости.

**1.195\***. [11] (1990, 11–2) При перетягивании каната два человека тянут его в противоположные стороны за концы с большой силой  $F$ . Найдите прогиб каната от горизонтальной линии под действием силы тяжести. Масса каната  $m$ , длина  $L$ , сила  $F \gg mg$ .

◇ **1.196\***. [10–11] (1991, 11–2) Два одинаковых груза соединены нитью длиной  $l$ . К одному из грузов прикреплена вторая нить такой же длины. Система находится на горизонтальной шероховатой поверхности. Свободный конец нити медленно перемещают по дуге окружности. Известно, что при установившемся движении угол между нитями составляет  $\alpha$  (см. рисунок). Найдите радиус окружности, по которой перемещают свободный конец нити.



К задаче 1.196.



К задаче 1.197.

◇ **1.197\***. [9–11] (1994, 9–2) Паук массой  $m$  ползёт по лёгкой упругой паутинке жёсткостью  $k$ , натянутой под углом  $\theta$  к горизонту между точками  $A$  и  $B$ , находящимися на расстоянии  $L$  (см. рисунок). Собственной длиной паутинки можно пренебречь. Найдите траекторию паука, считая, что паутинка подчиняется закону Гука.

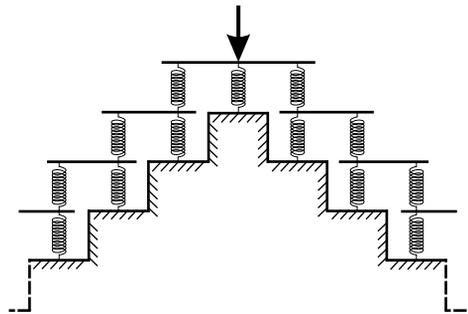
**1.198.** [9–11] (1995, 9–2) На стальной стержень радиусом  $R$  плотно одето тонкое резиновое кольцо. Сила растяжения кольца равна  $T$ .

Какую силу  $F$  нужно приложить, чтобы сдвинуть кольцо вдоль стержня без вращения, если коэффициент трения между сталью и резиной равен  $\mu$ ? Сдвигающая сила равномерно распределена по кольцу.

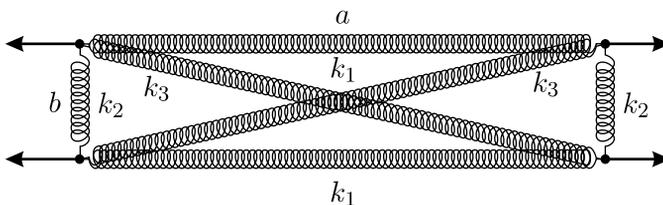
**1.199\***. [10–11] (1997, 10–2) Из тонкой стальной ленты изготовлена трубка диаметром  $d = 10$  мм. Какое внутреннее давление она может выдержать, если при приложении продольного усилия  $F = 20000$  Н трубка рвётся? Считайте, что шов на трубке имеет такую же прочность на разрыв, что и материал трубки.

**1.200\***. [10–11] (1998, 10–2) Известно, что сильный человек может согнуть железную кочергу. Оцените, с какой силой человек должен действовать руками на концы кочерги, если железо имеет предел упругости  $\sigma = 3 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>, длина кочерги равна  $l = 1$  м, её сечение — квадрат со стороной  $a = 1$  см.

◇ **1.201\***. [10–11] (2005, 10–1) Найдите общий коэффициент жёсткости системы пружин, изображённой на рисунке, если внешняя сила прикладывается к верхней платформе в вертикальном направлении. Лестница, на которую опираются пружины, бесконечна. Все платформы при сжатии пружин сохраняют горизонтальное положение и не касаются ступенек лестницы. Каждая из платформ, кроме самой верхней, опирается на две пружины. Коэффициенты жёсткости всех пружин одинаковы и равны  $k$ , оси всех пружин вертикальны. Массой пружин и платформ можно пренебречь.



К задаче 1.201.

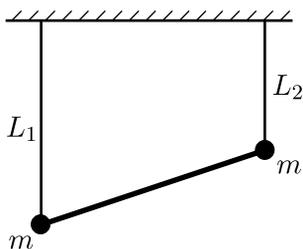


К задаче 1.202.

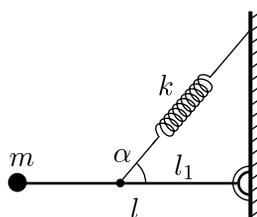
◇ **1.202\***. [11] (2004, 11–1) Прямоугольная рама образована тремя парами пружин с разными коэффициентами жёсткости (см. рисунок). Все пружины не деформированы и в углах рамы шарнирно соединены

друг с другом. Известно, что отношение длинной и короткой сторон рамы  $a/b = 25$ , а отношение коэффициентов жёсткости диагональных и поперечных пружин  $k_3/k_2 = 100$ . Раму растягивают, прикладывая к ней четыре одинаковые силы вдоль длинной стороны, как показано стрелками на рисунке. При этом длина рамы  $a$  увеличивается на  $\Delta a = 0,001a$ . Найдите относительные изменения ширины рамы  $\Delta b/b$  и её площади  $\Delta S/S$  при таком растяжении.

◇ **1.203.** [11] (2001, 11–1) Два груза массой  $m$  подвешены к горизонтальному потолку с помощью двух невесомых нерастяжимых нитей длиной  $L_1$  и  $L_2$  соответственно. Грузы соединены лёгким жёстким стержнем (см. рисунок). В положении равновесия нити вертикальны. Определите период малых колебаний системы в плоскости рисунка.



К задаче 1.203.



К задаче 1.204.

◇ **1.204\*.** [11] (1995, 11–1) На конце невесомого стержня длиной  $l$ , шарнирно прикреплённого к стене, находится груз массой  $m$  (см. рисунок). Стержень удерживается в равновесии в горизонтальном положении пружиной жёсткостью  $k$ , прикреплённой на расстоянии  $l_1$  от шарнира, причём угол между пружиной и стержнем равен  $\alpha$ . Найдите частоту малых колебаний груза относительно положения равновесия.

**1.205.** [11] (1988, 10–1) Грузик массой  $m$  падает с высоты  $h$  на площадку, закреплённую на пружине жёсткостью  $k$ . Пружина и площадка невесомы, всё движение происходит по вертикали. Нарисуйте (со всеми подробностями!) графики зависимости от времени ускорения и скорости грузика.

**1.206\*.** [11] (1997, 11–1) К одному концу пружины с коэффициентом жёсткости  $k$  прикрепили груз массой  $M$ , а другой конец закрепили. Насколько мала должна быть масса пружины  $m$  по сравнению с массой груза  $M$ , чтобы при измерениях периода колебаний с точностью до 1% результат совпадал с периодом, вычисленным в предположении невесомости пружины?

**1.207.** [11] (1988, 10–1) Длинный железнодорожный состав движется по инерции по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на

горку с углом наклона  $\alpha$  к горизонту. Состав полностью остановился, въехав на горку на половину своей длины. Сколько времени прошло от начала подъёма до остановки? Длина состава  $L$ . Трением и длиной переходного участка пути при въезде на горку пренебречь.

**1.208\***. [11] (2005, 11–1) Маленькая шайба, скользившая со скоростью  $v_0$  по гладкому льду поперёк реки, попала на горизонтальный участок берега, на котором при удалении от кромки льда на расстояние  $x$  коэффициент трения возрастает по закону:  $\mu = \mu_0 + kx$ , где  $\mu_0$  и  $k$  — постоянные величины. Найдите, спустя какое время после выхода на берег шайба остановится.

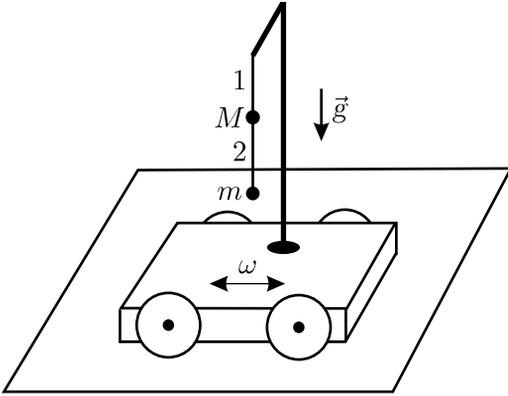
**1.209.** [10–11] (1989, 9–1) Чашка массой  $m$  укреплена на вертикальной пружине жёсткостью  $k$ . Её опускают от положения равновесия на расстояние  $a$ . Затем чашку отпускают, причём в момент прохождения положения равновесия к ней прилипает пластилиновый шарик массой  $M$ , не имеющий начальной скорости. Найдите амплитуду  $a_1$  колебаний системы после удара. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**1.210.** [10–11] (1997, 10–1) Платформа, установленная на вертикальной невесомой пружине, совершает установившиеся колебания. В момент прохождения платформы через положение своего равновесия о неё абсолютно упруго ударяется маленький шарик, падающий с некоторой высоты, причём после соударения скорости платформы и шарика, оставаясь неизменными по модулю, изменяют свои направления на противоположные. Через некоторое время шарик вновь ударяется о платформу в момент её прохождения через положение равновесия, и далее этот процесс повторяется. Считая известными максимальное отклонение  $A$  платформы от положения равновесия и период её свободных колебаний  $T$ , найдите, каким может быть отношение масс шарика и платформы.

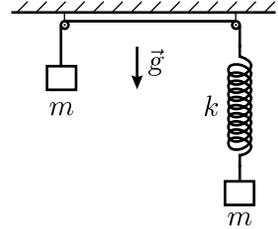
**1.211\***. [11] (1989, 10–1) На горизонтальную пластину насыпано немного мелкого песка. Пластина совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с частотой  $f = 1000$  Гц. При этом песчинки подпрыгивают на высоту  $H = 5$  мм относительно среднего положения пластины. Считая удары песчинок о пластину абсолютно неупругими, найдите амплитуду колебаний пластины.

◇ **1.212\***. [11] (2005, 11–2) К штативу, установленному на тележке, на лёгкой нерастяжимой нити 1 подвешен маленький шарик массой  $M$ , к которому на лёгкой нерастяжимой нити 2 подвешен другой маленький шарик массой  $m$  (см. рисунок). Под действием внешней силы, изменяющейся со временем по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , тележка совершает малые колебания в горизонтальном направлении. При какой

длине  $L$  нити 2 нить 1 будет всё время оставаться строго вертикальной? Влиянием воздуха на движение тел пренебречь.



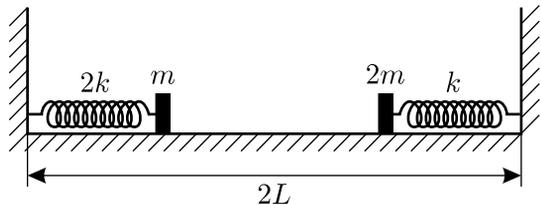
К задаче 1.212.



К задаче 1.213.

◇ **1.213.** [10–11] (1993, 10–2) В системе, изображённой на рисунке, массы грузов равны  $m$ , жёсткость пружины  $k$ . Пружина и нить невесома, трения нет. В начальный момент грузы неподвижны, и система находится в равновесии. Затем, удерживая левый груз, смещают правый вниз на расстояние  $a$ , после чего их отпускают без начальной скорости. Найдите максимальную скорость левого груза в процессе колебаний, считая, что нити всё время остаются натянутыми, а грузы не ударяются об остальные тела системы.

◇ **1.214\*.** [11] (2002, 11–2) В системе, изображённой на рисунке, прикреплённые к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстояниях  $L/2$  от стенок, к которым прикреплены концы пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны  $L$ . Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найдите максимальную скорость, которую будут иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар при столкновении является центральным. Жёсткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.

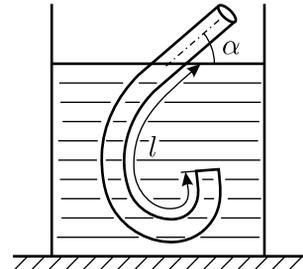


К задаче 1.214.

◇ **1.215.** [11] (1990, 11–1) Один из концов шланга погружен в воду на длину  $l$ . С поверхностью воды шланг образует угол  $\alpha$  (см. рисунок).

Найдите период малых колебаний воды в шланге. Считайте затухание малым.

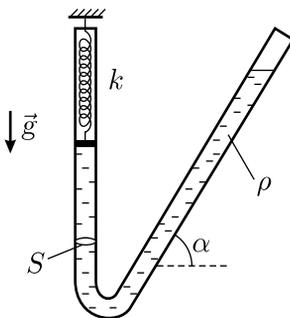
**1.216.** [11] (2000, 11–2) Трубка длиной  $L$  с постоянным внутренним сечением в форме круга радиусом  $R$  ( $R \ll L$ ) свёрнута в кольцо. Кольцо неподвижно, а его ось горизонтальна. В трубку залили невязкую жидкость, объём которой  $V < \pi R^2 L$ . Каков период малых колебаний жидкости вблизи положения равновесия?



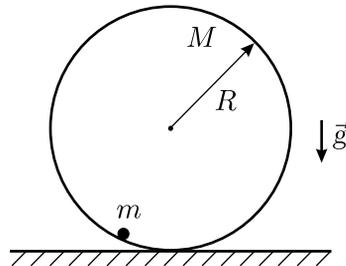
К задаче 1.215.

**1.217\*.** [11] (1998, 11–2) Вертикальная U-образная трубка постоянного поперечного сечения жёстко закреплена, и в неё налита ртуть. Период малых колебаний ртути в трубке равен  $T_1$ . В правое колено трубки наливают столько воды, что период малых колебаний системы становится равным  $T_2$ . Потом в левое колено наливают спирт в таком количестве, что период малых колебаний становится равным  $T_3$ . Каково соотношение масс ртути, воды и спирта? Плотности веществ равны  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и  $\rho_3$  соответственно. Считайте, что ни вода, ни спирт не перетекают в соседние колена трубки.

◇ **1.218.** [11] (2001, 11–2) Одно колено гладкой U-образной трубки с круглым внутренним сечением площадью  $S$  вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом  $\alpha$ . В трубку налили жидкость плотностью  $\rho$  и массой  $M$  так, что её уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто лёгким поршнем, соединённым с вертикальной пружиной жёсткостью  $k$  (см. рисунок). Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.218.

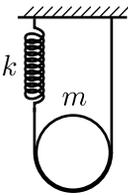


К задаче 1.219.

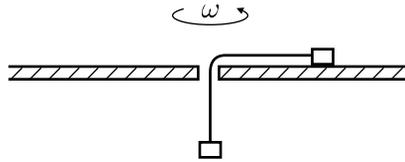
◇ **1.219.** [11] (1994, 11–1) К внутренней поверхности тонкостенного обруча прикреплен небольшой шарик (см. рисунок). Масса обруча

равна  $M$ , масса шарика  $m$  ( $m$  и  $M$  одного порядка), радиус обруча  $R$ . Обруч может без проскальзывания кататься по горизонтальной поверхности. Чему равен период колебаний обруча около положения равновесия в случае малых амплитуд? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

◇ 1.220. [11] (1996, 11–1) На обруч намотана нерастяжимая невесомая нить, один конец которой прикреплен к потолку непосредственно, а другой через невесомую пружину (см. рисунок). Масса обруча равна  $m$ , жёсткость пружины  $k$ . Если обруч немного сместить из положения равновесия вниз и отпустить, то возникнут колебания, при которых обруч будет двигаться вертикально и при этом вращаться. Найдите частоту этих колебаний.



К задаче 1.220.

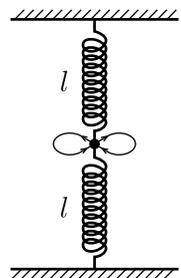


К задаче 1.222.

1.221\*. [11] (1995, 11–2) На невесомую нерастяжимую нить длиной  $2l$ , концы которой закреплены на одной высоте, надета гайка. Под тяжестью гайки нить провисает на величину  $h$ . Найдите период  $T$  малых колебаний гайки вдоль нити. Трение гайки о нить отсутствует.

◇ 1.222\*. [11] (1993, 11–2) Два кубика одинаковой массы прикреплены к концам нерастяжимой невесомой нити, продетой через отверстие в горизонтальной плоскости. Верхний кубик скользит по плоскости по круговой траектории с угловой скоростью  $\omega$  так, что нижний кубик неподвижен (см. рисунок). Трения нет. Если слегка дернуть за нижний кубик в вертикальном направлении, то возникнут малые колебания. Найдите их частоту  $\Omega$ .

◇ 1.223\*. [11] (1987, 10–2) Маленький шарик закреплен на двух одинаковых пружинах, имеющих в растянутом состоянии длину  $l$ . Шарик толкнули, и он начал совершать периодическое движение малой амплитуды по траектории в форме «восьмёрки» (см. рисунок). При какой длине нерастянутой пружины  $l_0$  такое движение возможно? Система находится в невесомости.



К задаче 1.223.

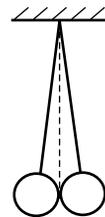
1.224\*. [11] (1987, 10–2) Верхний конец жёсткого вертикального металлического стержня длиной  $l$  колеблется с малой амплитудой  $a$  и большой частотой  $\omega$ , в то время как

нижний его конец шарнирно закреплён. На стержень надето и припаяно на равных расстояниях друг от друга большое количество маленьких колец. В некоторый момент времени стержень сильно нагревают, припой расплавляется, и кольца получают возможность свободно двигаться вдоль стержня. Какая часть колец останется на стержне через большой промежуток времени?

◇ **1.225.** [11] (2000, 11–1) Шар массой  $m = 1$  кг, прикрепленный к идеальной пружине жёсткостью  $k = 50$  Н/м, колеблется в вязкой среде. На рисунках (стр. 65) представлены графики зависимостей скорости  $v$  от координаты  $x$  и ускорения  $a$  от скорости, соответствующие движению шара (начало координат выбрано в положении его равновесия). Начертите график зависимости силы вязкого трения, действующей на шар, от его скорости.

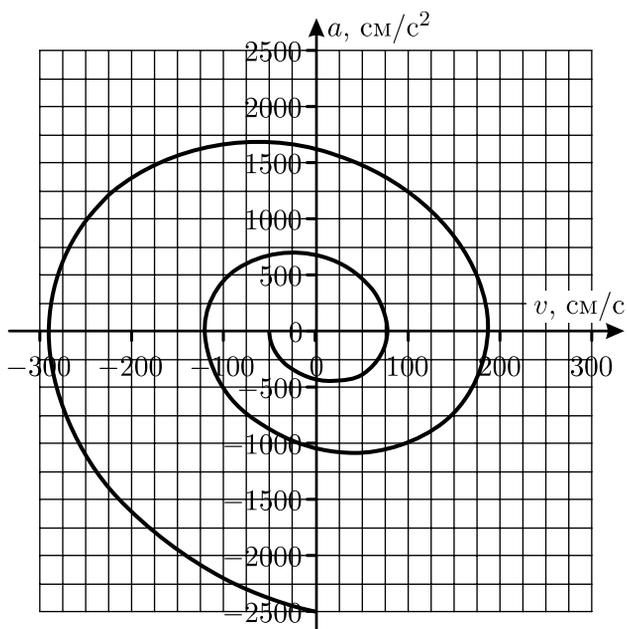
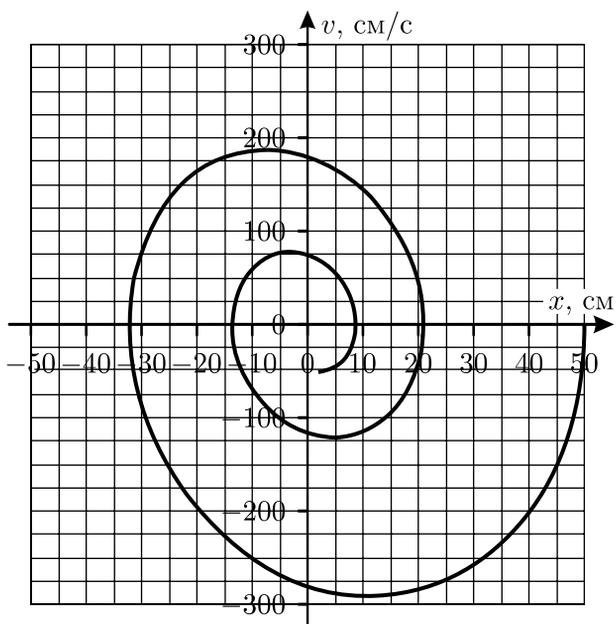
**1.226\*.** [11] (2003, 11–2) На горизонтальной поверхности лежит грузик массой  $m$ , соединённый с неподвижной вертикальной стенкой горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью  $k$ . Коэффициент трения между грузом и поверхностью  $\mu \ll 1$ . Известно, что после начального отклонения от положения равновесия вдоль оси пружины отпущенный без начальной скорости грузик совершил много колебаний и прошёл до остановки путь  $S$ . Оцените время, которое занял процесс колебаний от начала движения грузика до полной его остановки, а также погрешность полученного результата. Считайте силу трения скольжения не зависящей от скорости и равной максимальной силе трения покоя.

◇ **1.227\*.** [11] (1994, 11–2) Два одинаковых билиардных шара подвешены на одной высоте на длинных нитях, закреплённых в одной точке (см. рисунок). Шары разводятся симметрично на расстояние, малое по сравнению с их радиусами, и отпускают без начальной скорости, после чего наблюдают их соударения. Вначале удары происходят через время  $\Delta T_0$ , но поскольку при каждом ударе теряется энергия, частота соударений растёт с течением времени. Найдите закон этого роста, считая, что коэффициент восстановления скорости шаров при ударе (постоянная величина, равная отношению скоростей каждого шара после и до удара) равен  $k$ , и пренебрегая временем удара. Известно, что  $1 - k \ll 1$ .



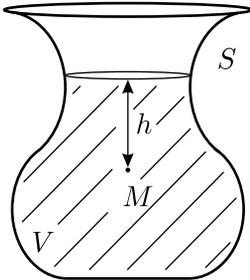
К задаче 1.227.

◇ **1.228.** [9–11] (1990, 9–2) Объём жидкости, налитой в показанный на рисунке сосуд сложной формы, равняется  $V$ , а площадь её свободной поверхности составляет  $S$ . Точка  $M$  закреплена в данном сосуде на глубине  $h$  под поверхностью жидкости. Из-за повышения температуры

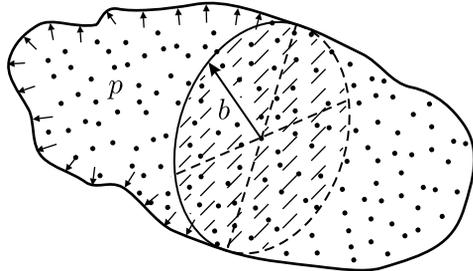


К задаче 1.225.

жидкость равномерно расширяется так, что её объём увеличивается на 1%. При каком условии давление в точке  $M$  окажется неизменным? Расширением сосуда пренебречь.



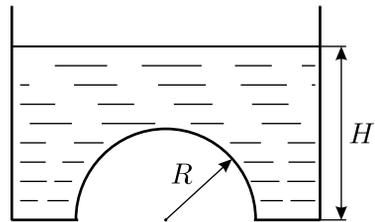
К задаче 1.228.



К задаче 1.229.

◇ **1.229.** [9–11] (1990, 10–1) Сосуд сложной формы (см. рисунок) наполнен газом под давлением  $p$ . Одно из сечений этого сосуда имеет форму круга радиусом  $b$ . Рассмотрим левую часть сосуда, ограниченную этим сечением. Чему равна и куда направлена сила, действующая со стороны газа на эту часть сосуда?

◇ **1.230.** [9–10] (1992, 9–2) Отверстие в горизонтальном дне сосуда закрыто лёгким полусферическим колпачком радиусом  $R$  (см. рисунок). Сосуд наполнен жидкостью плотностью  $\rho$ . Дно находится на глубине  $H$ . Найдите силу, с которой колпачок давит на дно сосуда. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Объём шара радиусом  $R$  равен  $4\pi R^3/3$ .

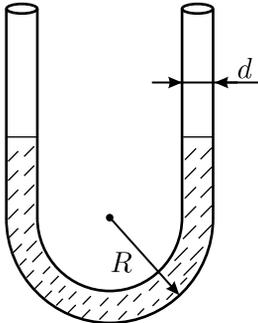


К задаче 1.230.

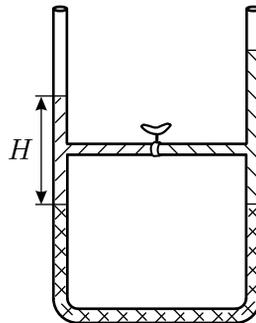
**1.231.** [8–10] (1999, 8–2) В боковой стенке бутылки проделано маленькое отверстие, в которое вставлена затычка. В бутылку наливают воду и закрывают её горлышко пробкой, через которую пропущена трубка. Длина трубки подобрана таким образом, что её нижний конец находится выше отверстия в стенке бутылки, но ниже поверхности воды, а верхний конец сообщается с атмосферой. Затычку из отверстия в боковой стенке вынимают, и из него начинает вытекать вода. Через некоторое время поток воды из отверстия устанавливается, и вода вытекает с постоянной скоростью. Найдите давление воздуха  $p$ , находящегося в бутылке, в тот момент, когда нижний конец трубки находится на глубине  $h = 5$  см от поверхности воды. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, атмосферное давление  $p_0 = 100\,000$  Па, ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

**1.232.** [8–9] (1999, 8–1) Система из двух сообщающихся вертикальных цилиндров, заполненных жидкостью плотностью  $\rho$ , закрыта поршнями массами  $M_1$  и  $M_2$ . В положении равновесия поршни находятся на одной высоте. Если на поршень массой  $M_1$  положить груз массой  $m$ , то поршень массой  $M_2$  поднимется после установления равновесия на высоту  $h$  относительно начального положения. На какую высоту относительно начального положения равновесия поднимется поршень массой  $M_1$ , если груз массой  $m$  положить на поршень массой  $M_2$ ? Трения нет.

◇ **1.233.** [9–10] (1990, 10–2) В очень высокой U-образной трубке с внутренним диаметром  $d = 1$  см и радиусом закругления нижней части  $R = 3$  см находится  $V_0 = 50$  см<sup>3</sup> ртути плотностью  $\rho = 13,6$  г/см<sup>3</sup> (см. рисунок). В левое колено трубки наливают  $V_1 = 2$  л воды. На какое расстояние ртуть переместится вдоль трубки?



К задаче 1.233.

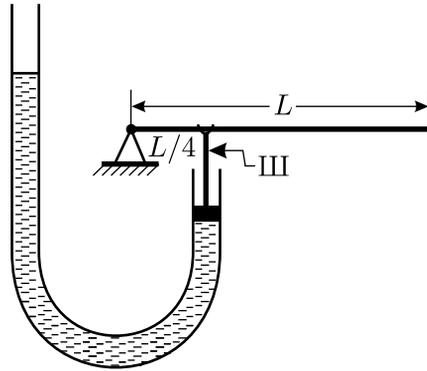


К задаче 1.234.

◇ **1.234\*.** [9–11] (1990, 9–2) В U-образной трубке постоянного сечения находятся вода, ртуть и масло. Уровень ртути в левом и правом коленах одинаков, а высота столба воды равна  $H$  (см. рисунок). В некоторый момент открывается кран в тонкой горизонтальной трубке, соединяющей колена на высоте  $H/2$  над уровнем ртути. Как изменится уровень масла в правом колене? Плотности ртути, воды и масла равны  $\rho_p$ ,  $\rho_v$  и  $\rho_m$ , причём  $\rho_v > \rho_m$ . Считайте, что вода в правое колено не попадает, и что в обоих коленах всегда остаются вертикальные участки трубки, заполненные ртутью.

◇ **1.235\*.** [9–10] (2002, 9–1) Однородный тяжёлый рычаг длиной  $L$ , один из концов которого шарнирно закреплён, находится в горизонтальном положении, опираясь на верхний конец жёсткого штока III, по которому он может скользить (см. рисунок). Второй конец штока прикреплён к поршню, плотно вставленному в одно из колен вертикальной неподвижной U-образной трубки с площадью поперечного сечения  $S$ ,

в которую налита жидкость плотностью  $\rho$ . После того, как в открытое колено трубки долили объём  $V$  той же самой жидкости, которая была в ней, рычаг после установления равновесия повернулся вокруг оси шарнира на угол  $\alpha$ , а шток при этом сохранил вертикальное положение. Пренебрегая массами поршня, штока и трением, найдите массу рычага  $m$ , если в исходном положении расстояние от верхнего конца штока до оси шарнира было равно  $L/4$ .



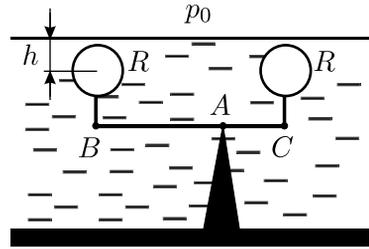
К задаче 1.235.

**1.236\*.** [9–11] (1996, 9–2) Планета, состоящая из несжимаемой жидкости, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью  $\omega$ . Средний радиус планеты  $R$ , масса планеты  $M$ . Оцените несферичность  $\delta$  планеты, связанную с вращением, считая  $\delta$  малой величиной (несферичностью называется величина  $\delta = (R_2 - R_1)/R_1$ , где  $R_2$  и  $R_1$  — расстояния от центра планеты до экватора и до полюса соответственно).

**1.237.** [8–9] (2001, 8–1) Два одинаковых сообщающихся сосуда наполнены жидкостью плотностью  $\rho_0$  и установлены на горизонтальном столе. В один из сосудов кладут маленький груз массой  $m$  и плотностью  $\rho$ . На сколько будут после этого отличаться силы давления сосудов на стол? Массой гибкой соединительной трубки с жидкостью можно пренебречь.

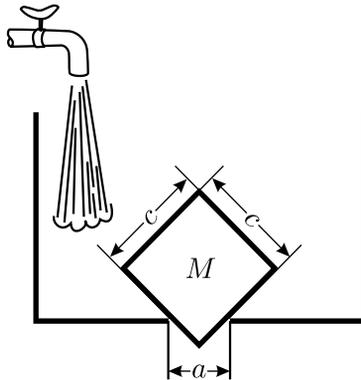
**1.238.** [8–9] (2002, 8–1) Школьник прочитал в газете «Советы домохозяйке» следующую заметку. «Для того, чтобы рассортировать куриные яйца по степени свежести, возьмите четыре стеклянные банки, налейте в каждую пол-литра воды и растворите в первой банке 50 г соли, во второй — 45 г, в третьей — 30 г и в четвёртой — 15 г. После этого поочерёдно опускайте яйца в каждую банку. В первой банке будут тонуть только что снесённые яйца, во второй — снесённые не более двух недель назад, в третьей — снесённые не более пяти недель назад, в четвёртой — снесённые не более восьми недель назад.» Школьник сделал растворы, строго следуя рецепту, рассортировал имевшиеся в холодильнике яйца, а затем слил содержимое из всех четырёх банок в одну большую ёмкость. Сколько недель назад снесены яйца, которые тонут в получившемся растворе?

◇ 1.239. [8–9] (1998, 8–1) К рычагу, закреплённому на дне водоёма, прикреплены на нитях два сферических поплавка радиусом  $R$  (см. рисунок). В случае, если рычаг удерживать в горизонтальном положении, центры поплавков расположены на глубине  $h > R$ . На каких глубинах будут расположены центры поплавков, если отпустить рычаг и дождаться установления равновесия? Массами поплавков и рычага пренебречь. Концы рычага в положении равновесия не касаются дна, а  $AB : AC = 2 : 1$ . Считать, что  $AC > h$ .



К задаче 1.239.

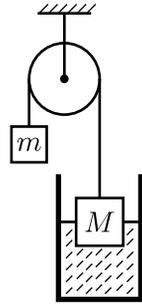
1.240. [8–9] (1998, 8–2) В широкий сосуд налит слой жидкости толщиной  $h_2$  и плотностью  $\rho_2$ , поверх него — слой другой жидкости, не смешивающейся с первой, толщиной  $h_1$  и плотностью  $\rho_1 < \rho_2$ . На поверхность жидкости положили плоскую шайбу толщиной  $h$  и плотностью  $\rho$ . Найдите зависимость установившейся глубины погружения  $H$  нижней плоскости шайбы от  $\rho$  и постройте график этой зависимости. Считайте  $h < h_1, h_2$ . Силами поверхностного натяжения пренебречь. Шайба всегда сохраняет горизонтальное положение.



К задаче 1.241.

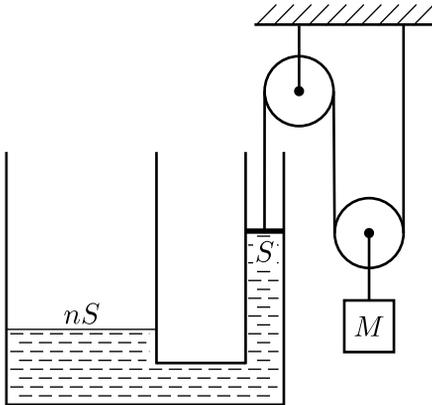
◇ 1.241\*. [9–11] (2000, 9–2) В горизонтальном дне сосуда имеется прямоугольное отверстие с размерами  $a \times b$ . Его закрыли прямоугольным параллелепипедом со сторонами  $b \times c \times c$  так, что одна из диагоналей грани  $c \times c$  вертикальна (вид сбоку показан на рисунке). В сосуд медленно наливают жидкость плотностью  $\rho$ . Какова должна быть масса параллелепипеда  $M$ , чтобы он не всплывал при любом уровне воды? Силами трения и поверхностного натяжения пренебречь.

◇ 1.242. [8–9] (2000, 8–1) К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешен груз массой  $M$ , изготовленный из материала плотностью  $\rho_1$ . Груз погружен в сосуд с жидкостью плотностью  $\rho_2$ . К другому концу нити подвешен груз массой  $m$  (см. рисунок). При каких значениях  $m$  груз массой  $M$  в положении равновесия может плавать в жидкости? Трения нет.



К задаче 1.242.

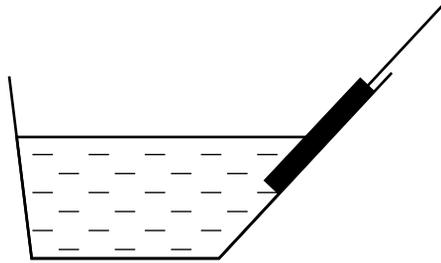
1.243. [8–9] (2001, 8–2) Цилиндрический оловянный брусок массой  $M = 1$  кг и высотой  $H = 10$  см, подвешенный к одному концу коромысла равноплечих весов так, что ось цилиндра вертикальна, погружен на  $h = 2$  см в воду, находящуюся в стакане с площадью сечения  $S = 25$  см<sup>2</sup>, и удерживается в этом положении при помощи противовеса, подвешенного к другому концу коромысла. На сколько изменится уровень воды в стакане, если изменить массу противовеса на  $\Delta m = 80$  г? Плотность олова  $\rho_0 = 7,2$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды  $\rho_в = 1$  г/см<sup>3</sup>. Считайте, что брусок не касается дна стакана, а вода из стакана не выливается.



К задаче 1.244.

◇ 1.244\*. [8–9] (2004, 8–2) U-образная трубка заполнена водой плотностью  $\rho$  (см. рисунок). Узкое колено этой трубки с площадью сечения  $S$  закрыто невесомым поршнем, к которому привязана нить, перекинутая через неподвижный и подвижный блоки. Широкое колено трубки, площадь сечения которого в  $n = 2$  раза больше, чем у узкого, открыто. К оси подвижного блока подвешен груз массой  $M$ , и система находится в равновесии. На какое расстояние сдвинется груз, если в открытое колено трубки долить воду массой  $t$ , а к грузу массой  $M$  прикрепить дополнительный груз массой  $t$ ? Считайте, что поршень всё время касается поверхности воды, трения нет, нить и блоки невесомы.

◇ **1.245.** [8–9] (2000, 8–2) Ванна, одна из стенок которой представляет собой наклонную плоскость, заполнена водой с плотностью  $\rho_{\text{в}}$ . В ванну медленно погружают длинный тонкий круглый карандаш, удерживая его нитью за верхний конец, который перемещают вниз вдоль наклонной стенки (см. рисунок). Какая часть карандаша должна погрузиться в воду, чтобы нижний конец перестал касаться стенки? Плотность карандаша  $\rho_{\text{к}} = (3/4)\rho_{\text{в}}$ .



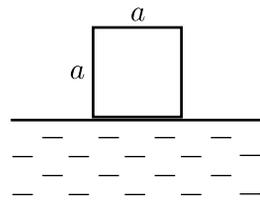
К задаче 1.245.

**1.246.** [9–10] (1995, 9–1) На дне бассейна лежит тонкий стержень длиной  $L = 1$  м, состоящий из двух половин с одинаковыми площадями поперечного сечения и плотностями  $\rho_1 = 0,5$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_2 = 2,0$  г/см<sup>3</sup>. В бассейн медленно наливают воду плотностью  $\rho_0 = 1,0$  г/см<sup>3</sup>. При какой глубине  $h$  воды в бассейне стержень будет составлять с поверхностью воды угол  $\alpha = 45^\circ$ ?

**1.247\*.** [11] (1992, 11–2) Плавающая на поверхности воды прямоугольная льдина, продольные размеры которой много больше её толщины, выдерживает груз массой  $M$ , помещённый в центре. Какой груз можно разместить на краю льдины (в середине её ребра), чтобы он не коснулся воды? Плотность льда считайте равной  $0,9$  г/см<sup>3</sup>, плотность воды —  $1,0$  г/см<sup>3</sup>.

**1.248\*.** [10–11] (1997, 11–2) Три одинаковых длинных бруса квадратного сечения плавают в воде параллельно друг другу. При наведении переправы поперёк них положили жёсткую однородную балку массой  $m$  и длиной  $L$  так, что она концами опирается на середины крайних брусьев, а расстояние от конца балки до среднего бруса, нагруженно также посередине, равно  $l$ . Найдите силы давления балки на брусья, считая, что их поперечные размеры много меньше  $L$ , и что балка лежит почти горизонтально, не касаясь воды.

◇ **1.249.** [9–10] (1991, 9–1) Однородное бревно квадратного сечения размером  $a \times a$  и длиной  $L \gg a$  в исходном состоянии держат параллельно поверхности воды так, что оно касается воды своей длинной гранью (см. рисунок). Плотность бревна  $\rho$  равна плотности воды. Бревно отпускают. Найдите количество теплоты, которое выделится, пока система не придёт в равновесие.



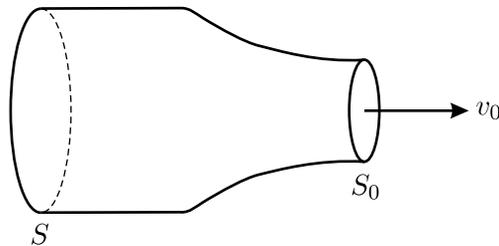
К задаче 1.249.

**1.250.** [9–10] (2005, 9–2) Из неиссякаемого источника через круглую трубу с внутренним диаметром  $D = 5$  см вертикально вниз вытекает струя воды. Вёдра ёмкостью  $V = 10$  л подставляют под струю так, что верх ведра находится на  $H = 1,5$  м ниже конца трубы. На уровне верха ведра диаметр струи равен  $d = 4$  см. Каков расход воды у источника? Ответ выразите в «вёдрах в час».

**1.251\*.** [10–11] (2000, 10–1) В центре днища прямоугольной баржи длиной  $a = 80$  м, шириной  $b = 10$  м и высотой  $c = 5$  м образовалось отверстие диаметром  $d = 1$  см. Оцените время, за которое баржа затонет, если не откачивать воду. Баржа открыта сверху, груза на ней нет, начальная высота бортов над уровнем воды  $h = 3,75$  м.

**1.252.** [10–11] (1989, 9–1) Цилиндрическое ведро диаметром  $D = 30$  см и высотой  $H = 35$  см имеет в дне дырку площадью  $S = 4$  см<sup>2</sup>. Ведро ставят под кран, из которого за секунду выливается  $V = 1$  л воды. Сколько литров воды будет в ведре через  $t = 1$  час?

◇ **1.253\*.** [10–11] (1992, 11–1) Из горизонтальной трубы со скоростью  $v_0$  вытекает вода, содержащая небольшое количество пузырьков воздуха (см. рисунок). Площадь поперечного сечения трубы  $S$ , а выходного отверстия  $S_0 < S$ . Найдите отношение радиусов пузырьков воздуха у выходного отверстия и внутри трубы. Плотность воды  $\rho$ , температура её постоянна, атмосферное давление  $p_0$ . Вязкостью воды можно пренебречь, поверхностное натяжение не учитывайте.



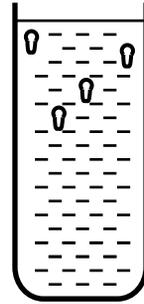
К задаче 1.253.

**1.254.** [10–11] (1997, 10–1) Оцените отношение силы сопротивления воздуха к силе тяжести для пули, вылетевшей из ствола пистолета. Скорость пули  $u = 500$  м/с, её диаметр  $d = 7$  мм, масса пули  $m = 9$  г. Плотность воздуха  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>.

## Молекулярная физика

**2.1.** [9] (1986, 8–1) Известно, что в тропиках на больших высотах (больше 10–15 км) дуют постоянные ветры от экватора по направлению к полюсам. Почему?

◇ **2.2.** [9] (1986, 8–1) Один из простейших термоскопов (эти приборы использовались до изобретения термометра) состоял из открытой стеклянной трубки, заполненной водой почти полностью (см. рисунок). В воде находились несколько крошечных грушевидных сосудов с оттянутыми вниз открытыми горлышками. Внутри сосудов находился воздух в таком количестве, чтобы при определённой температуре (около 15 °С) сосуды плавали внутри трубки. При более высокой температуре сосуды всплывают на поверхность воды, когда же температура ниже 15 °С, они опускаются на дно. Если же стеклянная трубка термоскопа заполнена водой полностью и запаяна сверху, то прибор начинает работать наоборот: при нагревании сосуды опускаются, а при охлаждении — всплывают. Объясните, какие физические явления лежат в основе конструкции двух типов описанного выше прибора.



К задаче 2.2.

**2.3.** [8–9] (2001, 8–1) Почему, когда человек стоит у костра даже в безветренную погоду, дым обычно лезет в глаза?

**2.4.** [9] (1999, 9–1) Сплошной шарик из алюминия диаметром  $d = 1$  см бросили в 50%-ный раствор азотной кислоты. В данных условиях с одного квадратного сантиметра поверхности растворяется  $10^{-4}$  г алюминия в час. Через какое время шарик полностью растворится в кислоте? Плотность алюминия  $\rho = 2,7$  г/см<sup>3</sup>.

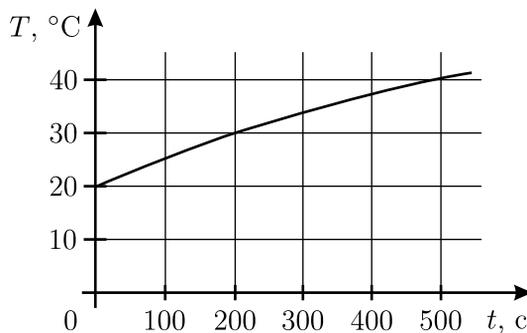
**2.5\*.** [9–11] (2005, 9–1) При достижении температуры +910 °С в железе происходит полиморфное превращение: элементарная ячейка его кристаллической решётки из кубической объёмноцентрированной превращается в кубическую гранецентрированную — железо из  $\alpha$ -фазы переходит в  $\gamma$ -фазу. При этом плотность железа уменьшается на  $\epsilon \approx 2\%$ . Найдите отношение постоянных решёток железа в  $\alpha$ - и  $\gamma$ -фазах.

*Примечание.* Постоянной  $a$  кубических решёток называют длину ребра куба элементарной ячейки. В объёмноцентрированной решётке ионы железа находятся в вершинах и в центре куба, а в гранецентрированной — в вершинах куба и в центрах каждой из его граней.

**2.6.** [8–9] (1998, 8–2) В двух калориметрах налито по 200 г воды — при температурах  $+30\text{ }^\circ\text{C}$  и  $+40\text{ }^\circ\text{C}$ . Из «горячего» калориметра зачерпывают 50 г воды, переливают в «холодный» и перемешивают. Затем из «холодного» калориметра переливают 50 г воды в «горячий» и снова перемешивают. Сколько раз нужно перелить такую же порцию воды туда-обратно, чтобы разность температур воды в калориметрах стала меньше  $1\text{ }^\circ\text{C}$ ? Потерями тепла в процессе переливаний и теплоёмкостью калориметров пренебречь.

**2.7.** [8–9] (1999, 8–1) В фарфоровую чашку массой  $m_{\text{ф}} = 100\text{ г}$ , находящуюся при комнатной температуре  $T_{\text{к}} = +20\text{ }^\circ\text{C}$ , наливают  $m_1 = 150\text{ г}$  горячего кофе при температуре  $T_1 = +90\text{ }^\circ\text{C}$ . Затем достают из холодильника брикет мороженого, имеющий температуру  $T_2 = -12\text{ }^\circ\text{C}$ , и серебряной ложкой (масса ложки  $m_{\text{лож}} = 15\text{ г}$ ) кладут понемногу мороженое в кофе, каждый раз размешивая его. Так поступают до тех пор, пока не установится температура  $T_3 = +45\text{ }^\circ\text{C}$ , когда кофе приятно пить. Оцените, сколько граммов мороженого надо положить для этого в кофе? Потерями тепла пренебречь. Считать известными удельные теплоёмкости воды  $C_{\text{в}} = 4,2\text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , льда  $C_{\text{л}} = 2,1\text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , серебра  $C_{\text{с}} = 0,23\text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , фарфора  $C_{\text{ф}} = 0,8\text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$  и удельную теплоту плавления льда  $\lambda = 340\text{ Дж}/\text{г}$ .

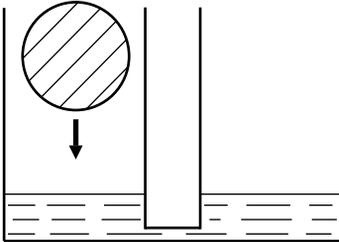
◇ **2.8.** [9] (2003, 9–1) В калориметр, в котором находилось  $m_0 = 100\text{ г}$  воды при температуре  $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$ , по каплям с постоянной скоростью начинают наливать горячую воду постоянной температуры. График зависимости температуры  $T$  воды в калориметре от времени  $t$  изображён на рисунке. Найдите температуру горячей воды, считая, что между падением капель в калориметре каждый раз успевает установиться тепловое равновесие. Потерями тепла пренебречь.



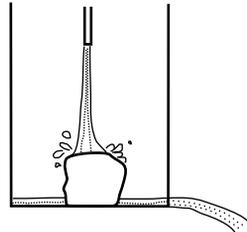
К задаче 2.8.

**2.9.** [8–10] (1989, 9–1) На горизонтальную поверхность льда при температуре  $T_1 = 0^\circ\text{C}$  кладут однокопеечную монету, нагретую до температуры  $T_2 = 50^\circ\text{C}$ . Монета проплавляет лёд и опускается в образовавшуюся лунку. На какую часть своей толщины она погрузится в лёд? Удельная теплоёмкость материала монеты  $C = 380 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , плотность его  $\rho = 8,9 \text{ г}/\text{см}^3$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж}/\text{кг}$ , плотность льда  $\rho_0 = 0,9 \text{ г}/\text{см}^3$ .

◇ **2.10.** [9] (2003, 9–1) В два одинаковых сообщающихся сосуда налита вода (см. рисунок). В один из них кладут ледяной шарик объёмом  $V = 100 \text{ см}^3$ , который через небольшое время, после установления уровня воды в сосудах, оказался погруженным в воду ровно наполовину. Какая масса воды перетекла при этом во второй сосуд и какая перетечёт потом, в процессе таяния льда? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг}/\text{м}^3$ .



К задаче 2.10.



К задаче 2.11.

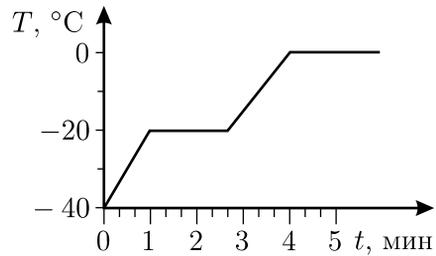
◇ **2.11.** [8–9] (1990, 8–1) Имеется сосуд с небольшим отверстием у дна (см. рисунок). В сосуд помещён большой кусок кристаллического льда при температуре  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ . Сверху на лёд падает струя воды, её температура  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ , а расход  $q = 1 \text{ г}/\text{с}$ . Найдите расход воды, вытекающей из сосуда, если её температура  $T = 3^\circ\text{C}$ . Теплообменом с окружающим воздухом и с сосудом можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4,2 \text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340 \text{ Дж}/\text{г}$ . Вода в сосуде не накапливается.

**2.12.** [8–9] (2003, 8–2) К свинцовому грузу, имеющему температуру  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , привязали кусок льда массой  $M = 1 \text{ кг}$  и температурой  $t = -30^\circ\text{C}$ , после чего опустили их в большую бочку с водой температуры  $0^\circ\text{C}$ . При этом лёд и груз сначала утонули, а через некоторое время — всплыли. В каких пределах может находиться масса груза  $m$ ? Плотность свинца  $\rho_{\text{с}} = 11 \text{ г}/\text{см}^3$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1 \text{ г}/\text{см}^3$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9 \text{ г}/\text{см}^3$ , удельная теплоёмкость льда  $C_{\text{л}} = 2,1 \text{ кДж}/(\text{г} \cdot ^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340 \text{ Дж}/\text{г}$ .

**2.13.** [10] (1999, 10–1) В тонкостенной пластиковой бутылке находится  $m_0 = 1$  кг переохлаждённой жидкой воды. В бутылку бросили сосульку массой  $m_1 = 100$  г, имеющую ту же температуру, что и вода в бутылке. После установления теплового равновесия в бутылке осталось  $m_2 = 900$  г жидкости. Какую температуру имела переохлаждённая вода? Удельные теплоёмкости воды и льда равны  $C_1 = 4200$  Дж/(кг·°C) и  $C_2 = 2100$  Дж/(кг·°C) соответственно, удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг. Теплоёмкостью бутылки и потерями тепла пренебречь.

**2.14.** [9–10] (1997, 9–1) В калориметре плавает в воде кусок льда. В калориметр опускают нагреватель постоянной мощности  $N = 50$  Вт и начинают каждую минуту измерять температуру воды. В течение первой и второй минут температура воды не изменяется, к концу третьей минуты увеличивается на  $\Delta T_1 = 2$  °C, а к концу четвёртой ещё на  $\Delta T_2 = 5$  °C. Сколько граммов воды и сколько граммов льда было изначально в калориметре? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г, удельная теплоёмкость воды  $C = 4,2$  кДж/(г·°C).

◇ **2.15.** [9] (1988, 8–1) 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при  $-40$  °C помещены в теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри. На нагреватель подали постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на графике. Удельная теплоёмкость льда  $C_{\text{л}} = 2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C), а легкоплавкого вещества в твёрдом состоянии  $C = 10^3$  Дж/(кг·°C). Найдите удельную теплоту плавления вещества  $\lambda$  и его удельную теплоёмкость в расплавленном состоянии  $C_1$ .



К задаче 2.15.

**2.16.** [8–9] (2001, 8–1) В открытый сверху сосуд кубической формы ёмкостью  $V = 3$  л залили  $m = 1$  кг воды и положили  $m = 1$  кг льда. Начальная температура смеси  $T_1 = 0$  °C. Под сосудом сожгли  $m_1 = 50$  г бензина, причём доля  $\alpha = 80\%$  выделившегося при этом тепла пошла на нагревание содержимого сосуда. Считая сосуд тонкостенным и пренебрегая его теплоёмкостью и тепловым расширением, найдите уровень воды в сосуде после нагрева. Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота испарения воды  $L = 2,3 \cdot 10^6$  Дж/кг, удельная теплоёмкость воды  $C = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·°C), плотность воды при 0 °C равна

$\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ , при  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  равна  $\rho = 960 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплота сгорания бензина  $q = 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}$ . Считайте, что дно сосуда горизонтально.

**2.17.** [8–9] (2002, 8–2) Сухие дрова плотностью  $\rho_1 = 600 \text{ кг/м}^3$ , привезённые со склада, свалили под открытым небом и ничем не укрыли. Дрова промокли, и их плотность стала равной  $\rho_2 = 700 \text{ кг/м}^3$ . Для того, чтобы в холодную, но не морозную погоду (при температуре  $T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ ) протопить дом до комнатной температуры, нужно сжечь в печи  $M_1 = 20 \text{ кг}$  сухих дров. Оцените, сколько нужно сжечь мокрых дров, чтобы протопить дом до той же комнатной температуры? Удельная теплота парообразования воды  $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплоёмкость воды  $C = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$ , удельная теплота сгорания сухих дров  $q = 10^7 \text{ Дж/кг}$ .

**2.18.** [8–9] (1998, 8–1) Физик хочет изготовить немного льда из дистиллированной воды. Для этого он наливает в открытый сосуд  $M = 1 \text{ кг}$  воды при температуре  $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  и начинает понемногу подливать в сосуд кипящий жидкий азот (которого в лаборатории много), имеющий температуру  $T_2 = -196 \text{ }^\circ\text{C}$ . При этом смесь воды и жидкого азота всё время энергично перемешивается. Когда весь азот из сосуда испаряется, его доливают ещё, и так много раз, до получения желаемого количества смеси воды со льдом. Какая масса  $m$  жидкого азота уйдёт на то, чтобы превратить в лёд половину массы воды? Теплоёмкостью сосуда и его теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплота парообразования азота  $L = 2,0 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ .

**2.19.** [8–9] (2005, 8–1) Любители чая считают, что кипятком, налитый в чашку, может заметно остыть даже за несколько секунд, что испортит качество получившегося чая. Проверим, правы ли они.

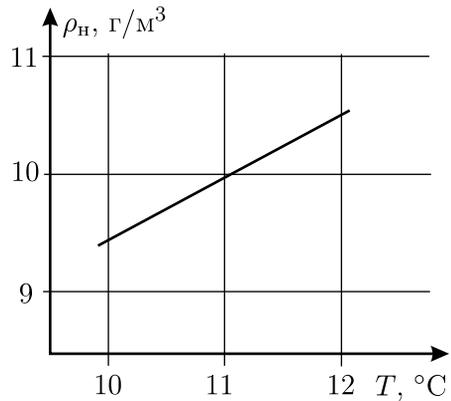
Над чашкой очень горячей воды поднимается пар. Скорость подъёма пара, оцениваемая на глаз, равна  $V = 0,1 \text{ м/с}$ . Считая, что весь поднимающийся над чашкой пар имеет температуру  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ , оцените скорость остывания чашки с очень горячей водой за счёт испарения воды (эта скорость измеряется в градусах за секунду). Масса воды в чашке  $m = 200 \text{ г}$ , площадь поверхности воды  $S = 30 \text{ см}^2$ , удельная теплота парообразования воды  $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ , удельная теплоёмкость воды  $C = 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$ , плотность водяного пара при  $100 \text{ }^\circ\text{C}$  равна  $\rho = 0,58 \text{ кг/м}^3$ .

**2.20.** [10] (1987, 9–2) В кастрюле объёмом  $V = 1,5 \text{ л}$  налито  $m = 200 \text{ г}$  молока. Хорошо известно, что при кипячении молока на

его поверхности появляется плотная пенка. Кастрюля стоит на плите и нагревается от  $+98\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $+99\text{ }^{\circ}\text{C}$  за 0,5 мин. Через какое время после этого молоко убежит? Для оценки молоко считайте водой, удельная теплоёмкость которой  $C = 4,2 \cdot 10^3\text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ , а удельная теплота парообразования  $L = 2,3 \cdot 10^6\text{ Дж}/\text{кг}$ . Теплоёмкостью кастрюли пренебречь.

**2.21\***. [9–11] (1995, 9–2) В скороварке с закрытым клапаном находится 3 литра воды при температуре  $120\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Скороварку сняли с плиты и открыли клапан. Сколько воды останется в скороварке после того, как вода перестанет кипеть? Удельные теплота парообразования и теплоёмкость воды соответственно равны  $L = 2,2\text{ МДж}/\text{кг}$  и  $C = 4,2\text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ . Теплоёмкостью стенок скороварки и потерями тепла через них пренебречь.

◇ **2.22\***. [10–11] (1988, 9–2) В высокочувствительном герметичном калориметре измеряют теплоёмкость  $C$  неизвестной массы  $m$  воды, повышая температуру. При  $T_1 = 10,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  теплоёмкость скачком упала с  $C_1$  до  $C_2$ . Объём сосуда калориметра  $V = 1\text{ л}$ . Пользуясь графиком зависимости плотности насыщенных паров воды  $\rho_n$  от температуры (см. рисунок), найдите  $m$ ,  $C_1$  и  $C_2$ . При температуре  $T_1$  удельная теплота испарения воды равна  $L = 2,5 \cdot 10^6\text{ Дж}/\text{кг}$ . Теплоёмкость при постоянном объёме одного моля водяного пара  $C_V = 3R = 24,9\text{ Дж}/(\text{моль} \cdot ^{\circ}\text{C})$ .



К задаче 2.22.

**2.23.** [9–10] (1995, 9–1) В металлический чайник наливают  $V = 1\text{ л}$  холодной воды, ставят на массивную конфорку электроплиты и включают её. Когда вода через  $t_1 = 15$  минут закипела, в чайник долили ещё 1 литр воды. После повторного закипания воды в чайнике, которое произошло спустя время  $t_2 = 10$  минут после долива, конфорку выключают, а вода в чайнике продолжает кипеть. Оцените массу воды, которая испарится из чайника после выключения конфорки до того, как она остынет. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200\text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C})$ , удельная теплота парообразования  $L = 2,3 \cdot 10^6\text{ Дж}/\text{кг}$ . Потерями тепла в окружающую среду пренебречь.

**2.24.** [10] (2001, 10–1) В городах, когда выпадает снег, дороги посыпают солью. После этого погода обычно становится «промоглой»,

и люди в городах на улице мёрзнут гораздо сильнее, чем за городом, где лежит снег, а температура такая же. Почему это происходит? Ответ обоснуйте.

**2.25\***. [10–11] (1989, 9–2) На столе стоят два одинаковых стакана, в один из которых налит горячий чай, имеющий температуру  $T_0$ . Его можно охладить до требуемой конечной температуры  $T_k$  двумя способами:

1) сразу перелить во второй стакан и ждать, пока он остынет до температуры  $T_k$ ;

2) ожидать, пока он остынет до некоторой температуры  $T'$  такой, чтобы после переливания во второй стакан температура сразу оказалась равной  $T_k$ .

Какой способ быстрее? Известно, что теплоотдача стакана с чаем пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды, а теплообмен между чаем и стаканом происходит очень быстро. Теплоёмкость стакана  $C_0$ , чая  $C$ .

**2.26.** [8–9] (1998, 8–2) Школьник утром вскипятил чайник и стал его остужать, чтобы успеть попить чай до ухода в школу. Он обнаружил, что температура чайника понизилась со  $100\text{ }^\circ\text{C}$  до  $95\text{ }^\circ\text{C}$  за 5 минут, пока чайник стоял на столе на кухне, где температура воздуха была  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Школьник решил ускорить остывание чайника, для чего засунул его в холодильник, где температура составляла  $0\text{ }^\circ\text{C}$ . При этом температура чайника понизилась от  $95\text{ }^\circ\text{C}$  до  $90\text{ }^\circ\text{C}$  за 4 мин 12 сек. Решив ещё ускорить остывание, школьник выставил чайник за окно, на улицу, где температура была равна  $-20\text{ }^\circ\text{C}$ . За сколько времени чайник остынет на улице от  $90\text{ }^\circ\text{C}$  до  $85\text{ }^\circ\text{C}$ ?

**2.27.** [8–9] (2000, 8–2) Горячий суп, налитый доверху в большую тарелку, охлаждается до температуры, при которой его можно есть без риска обжечься, за время  $t = 20$  мин. Через какое время можно будет есть суп с той же начальной температурой, если разлить его по маленьким тарелкам, которые также заполнены доверху и подобны большой? Известно, что суп из большой тарелки помещается в  $n = 8$  маленьких, и что количество тепла, отдаваемое в единицу времени с единицы поверхности каждой тарелки, пропорционально разности температур супа и окружающей среды.

**2.28.** [8–9] (1991, 9–2) В ванну за одну секунду вливается  $m = 0,01$  кг воды, нагретой до  $T_1 = 50\text{ }^\circ\text{C}$ . Известно, что теплоотдача от ванны составляет  $Q = k(T - T_0)$ , где  $k = 100\text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ ,  $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$  — температура окружающего воздуха. Определите установившуюся температуру воды в ванне, если уровень воды под-

держивается постоянным за счёт вытекания её из ванны. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · °С). Считайте, что втекающая вода успевает полностью перемешаться с водой, которая была в ванне.

**2.29.** [8–9] (2002, 9–2) Холодильник поддерживает в морозильной камере постоянную температуру  $T_0 = -12$  °С. Кастрюля с водой охлаждается в этой камере от температуры  $T_1 = +29$  °С до  $T_2 = +25$  °С за  $t_1 = 6$  мин, а от  $T_3 = +2$  °С до  $T_4 = 0$  °С — за  $t_2 = 9$  мин. За сколько времени вода в кастрюле замёрзнет (при 0 °С)? Теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  кДж/кг.

**2.30.** [8–9] (2001, 8–2) На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от  $T_1 = 0$  °С до  $T_2 = 10$  °С самая маленькая сосулька длиной  $l = 10$  см растаяла за время  $t = 2$  часа. За какое время растает большая сосулька длиной  $L = 30$  см, если внешние условия не изменятся?

**2.31\*.** [10–11] (1989, 9–2) На поверхность термостата одновременно ставят рядом два однородных куба, сделанных из одинакового материала и находящихся при одинаковой температуре  $T_0$ , отличной от температуры термостата  $T_1$ . Длина ребра у одного из кубов в два раза больше, чем у другого. Через время  $t$  температура в центре малого куба стала равной  $T_2$ . Через какое время (от начального момента) такая же температура будет в центре большого куба? Потерями тепла пренебречь.

**2.32\*.** [10–11] (1994, 10–2) После тёплых дней резко ударил мороз, и поверхность озера покрылась льдом. Через сутки после похолодания толщина льда составила  $d_1 = 3$  см. Строителям требуется переправить груз на противоположный берег озера, но для безопасности требуется лёд толщиной не менее  $d_2 = 10$  см. Через сколько дней после установления морозов можно осуществить перевозку груза, если погода не изменится, а меры по искусственному ускорению процесса наращивания льда не предпринимаются?

**2.33.** [10–11] (1992, 10–1) Кубический сосуд объёмом  $V = 1$  л заполнен воздухом. Одна из стенок (1) поддерживается при температуре  $T_1$ , противоположная ей (2) — при температуре  $T_2$ , остальные стенки теплоизолированы. Найдите отношение средних частот соударений молекул со стенками (1) и (2). Рассмотрите два случая: а) давление в сосуде равно атмосферному  $p_0 = 1$  атм; б) сосуд откачан до давления  $p = 10^{-9}$  атм. *Примечание:* при нормальных условиях средняя длина свободного пробега молекул в воздухе составляет  $\sim 10^{-5}$  см.

**2.34.** [10–11] (1995, 10–2) Оцените скорость роста толщины слоя серебра при напылении, если атомы серебра оказывают при падении на подложку давление  $p = 0,1$  Па. Средняя энергия атома серебра  $E = 10^{-19}$  Дж, плотность серебра  $\rho = 10,5$  г/см<sup>3</sup>, молярная масса  $\mu = 108$  г/моль.

**2.35\*.** [10–11] (1994, 10–2) Стандартный манометрический прибор для измерения давления разреженных газов (порядка  $10^{-5}$  от атмосферного давления) представляет собой трубку сантиметрового диаметра, заполняемую исследуемым газом. Внутри трубки проходит проволока, нагреваемая электрическим током постоянной мощности. Оказывается, что по температуре проволоки  $T$  можно определить давление газа  $p$ , используя заранее составленную для данного газа градуировочную таблицу  $p(T)$ . В одной из лабораторий понадобилось измерить таким манометром давление неона. Однако имевшаяся градуировочная таблица была составлена для гелия, атомы которого в 5 раз легче атомов неона. Какие поправки нужно внести в эту таблицу?

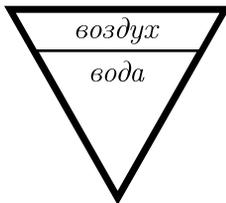
**2.36\*.** [11] (2000, 11–2) Газ с молярной массой  $\mu = 60$  г/моль находится в герметичном сосуде с жёсткими стенками и поддерживается при постоянной температуре  $T = 0$  °С. Площадь поперечного сечения  $S$  молекул, которые можно рассматривать как твёрдые шарики, равна  $10^{-19}$  м<sup>2</sup>. Давление газа в начале эксперимента равно  $p_0 = 100$  Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы, поглотившие квант света, переходят в возбуждённое состояние. Среднее время жизни молекулы в возбуждённом состоянии  $\tau = 10^{-3}$  с. При столкновении двух возбуждённых молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой из них образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается  $N = 10^{12}$  молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на  $\varepsilon = 1\%$  от первоначального.

**2.37.** [10–11] (1998, 10–1) В вертикальном закрытом цилиндре высотой  $H$  и площадью основания  $S$ , заполненном воздухом при давлении  $p_0$ , на дне лежит лёгкая тонкостенная плоская коробочка высотой  $h$  и площадью основания  $s$ . В дне коробочки имеется отверстие. В цилиндр через кран, расположенный вблизи дна, начинают медленно нагнетать жидкость плотностью  $\rho$ , много большей плотности воздуха. При каком давлении воздуха в цилиндре коробочка упрётся в верхнюю крышку цилиндра? Процесс проходит при постоянной температуре, коробочка всплывает так, что её верхняя плоскость остаётся горизонтальной.

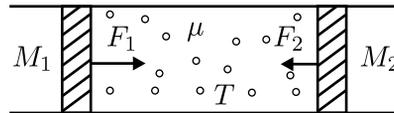
**2.38.** [10–11] (1989, 9–1) Спортсмен-ныряльщик массой  $m = 80$  кг прыгает в воду, набрав полные лёгкие ( $v = 5$  литров) воздуха. При этом

объём его тела составляет  $V = 82$  л. С какой максимальной глубины  $H$  он сможет всплыть, не совершая никаких движений?

◇ **2.39.** [10–11] (1996, 10–1) В закрытом сосуде с жёсткими стенками ёмкостью  $V = 1$  литр находятся  $V_1 = 0,8$  л воды и сухой воздух при атмосферном давлении  $p_0$  и температуре  $T_1 = +30$  °С. Сосуд представляет собой перевернутый основанием вверх конус (см. рисунок). Поверх воды налит тонкий слой машинного масла, отделяющий воду от воздуха. Сосуд охлаждают до температуры  $T_2 = -30$  °С, при этом вся вода замерзает. Плотность воды  $\rho_1 = 1$  г/см<sup>3</sup>, плотность льда  $\rho_2 = 0,9$  г/см<sup>3</sup>. Определите давление воздуха надо льдом.



К задаче 2.39.



К задаче 2.42.

**2.40.** [10–11] (1997, 11–1) Пластиковая бутылка из-под газированной воды ёмкостью 1 л имеет прочные нерастяжимые, но гибкие стенки. Стекланный сосуд ёмкостью 4 л имеет прочные недеформируемые стенки. В бутылку накачали воздух до давления  $+1$  атм при температуре  $-50$  °С, а в стеклянном сосуде создали разрежение  $-0,6$  атм при той же температуре  $-50$  °С. Затем сосуды соединили тонким шлангом и после выравнивания давлений стали медленно поднимать температуру от  $-50$  °С до  $+50$  °С. Постройте график зависимости давления внутри сообщающихся сосудов от температуры. Внешнее давление равно атмосферному.

**2.41.** [10–11] (1991, 10–2) Прочный теплоизолированный сосуд объёмом  $V = 10$  л, содержащий  $m = 4$  г гелия, разделяют тонкой жёсткой мембраной, которая выдерживает разность давлений до  $\Delta p = 1000$  Па. В левой части сосуда, составляющей  $1/3$  всего объёма, включают нагреватель. Благодаря теплопроводности мембраны тепло передаётся в правую часть сосуда. Известно, что при разности температур  $\Delta T = 1$  К за одну секунду мембрана пропускает количество тепла  $W = 0,2$  Дж. При какой максимальной мощности нагревателя мембрана останется целой в течение длительного времени нагревания? Считайте, что температуры газа в каждой части сосуда равномерно распределены по соответствующему объёму.

◇ **2.42.** [10–11] (1991, 10–1) В длинной горизонтальной трубке сечением  $S$  находятся поршни массой  $M_1$  и  $M_2$ , способные перемещаться практически без трения (см. рисунок). Между поршнями находится 1 моль идеального газа, масса которого  $\mu \ll M_1, M_2$ . Каким будет установившееся расстояние между поршнями, если к ним приложить силы  $F_1$  и  $F_2$ , направленные вдоль оси трубки противоположно друг другу? Температура газа постоянна и равна  $T$ , трубка находится в вакууме.

**2.43.** [10–11] (2002, 10–2) В вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд с гладкими стенками, закрытый лёгким теплоизолирующим поршнем площадью  $S$ , поместили воду при температуре  $T_0 = 273$  К и  $\nu$  молей гелия при температуре  $T < T_0$ . Через большое время после этого внутри сосуда установилась температура  $T_0$ . Пренебрегая давлением водяных паров, теплоёмкостью сосуда и поршня, а также растворением гелия в воде, найдите, на какое расстояние сместился поршень при установлении теплового равновесия. Удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}}$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{л}}$ . Давление над поршнем постоянно и равно нормальному атмосферному давлению  $p_0$ .

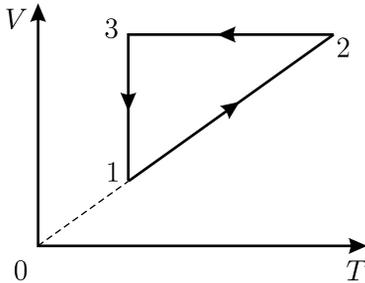
**2.44.** [10–11] (1990, 10–2) Закрытый горизонтальный теплоизолированный цилиндр разделён на две части лёгким хорошо проводящим тепло поршнем, который может перемещаться вдоль цилиндра без трения. Теплоёмкость при постоянном объёме у идеального газа, находящегося слева от поршня, составляет  $C_{V_1}$ , а у идеального газа справа от поршня  $C_{V_2}$ . В начальный момент времени поршень находится в равновесии, а температуры и объёмы газов равны, соответственно,  $T_1, V_1$  и  $T_2, V_2$ . Во сколько раз изменится давление в цилиндре через большой промежуток времени, когда температуры газов выровняются?

**2.45.** [10–11] (2005, 10–1) Горизонтальный закрытый теплоизолированный цилиндр разделён на две части тонким теплопроводящим поршнем, который прикреплён пружиной к одной из торцевых стенок цилиндра. Слева и справа от поршня находятся по  $\nu$  молей идеального одноатомного газа. Начальная температура системы  $T$ , длина цилиндра  $2l$ , собственная длина пружины  $l/2$ , удлинение пружины в состоянии равновесия равно  $x$ . В поршне проделали отверстие. На сколько изменится температура этой системы после установления нового состояния равновесия? Теплоёмкостями цилиндра, поршня и пружины пренебречь, трения нет.

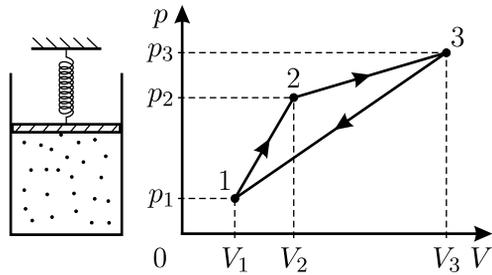
**2.46\*.** [11] (2005, 11–1) Теплоизолированный закрытый вертикальный цилиндр разделён на две равные части тонким массивным теплопроводящим поршнем. Сверху и снизу от поршня, закреплённого

вначале посередине цилиндра, находятся одинаковые количества идеального одноатомного газа при температуре  $T$  и давлении  $p$ . После освобождения поршня он сместился вниз на некоторое расстояние и остановился в новом положении равновесия, при котором разность давлений в нижней и верхней частях цилиндра равняется  $\Delta p$ . Найдите, на какую величину  $\Delta T$  изменилась при этом температура газа. Теплоёмкостью поршня и стенок цилиндра пренебречь.

◇ 2.47. [10–11] (1995, 10–2) Над идеальным газом совершается циклический процесс 1–2–3–1 (см. рисунок). Изобразите этот процесс на диаграмме «плотность — давление» ( $\rho - p$ ).



К задаче 2.47.



К задаче 2.48.

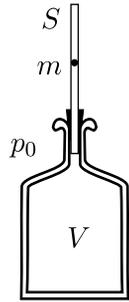
◇ 2.48. [10–11] (2004, 10–1) Идеальный газ находится в цилиндре с площадью основания  $S$  под невесомым поршнем, который удерживается в равновесии пружиной, другой конец которой неподвижно закреплён (см. рисунок). Снаружи цилиндра — вакуум. Над этим газом требуется провести циклический процесс 1–2–3–1, показанный на  $pV$ -диаграмме. Для этого разрешается медленно нагревать и охлаждать газ, а также при переходе к каждому следующему участку процесса заменять пружину. Найдите жёсткости, начальные и конечные удлинения пружин, необходимых для реализации данного процесса. Значения давлений и объёмов газа в состояниях 1, 2 и 3 считайте известными.

2.49\*. [10–11] (1997, 10–2) Зависимость приведённой температуры  $T/T_0$  гелия от приведённого давления  $p/p_0$  имеет вид окружности, центр которой находится в точке  $(1; 1)$ , причём минимальная приведённая температура гелия в этом процессе равна  $\tau_{\min}$ . Найдите отношение минимальной и максимальной концентраций атомов гелия при таком процессе.

2.50. [10–11] (1986, 9–1) В массивном металлическом цилиндре высотой  $H = 1$  м, закрытом сверху подвижным поршнем, находится идеальный газ. Сверху на поршень аккуратно поставили гирию, отчего

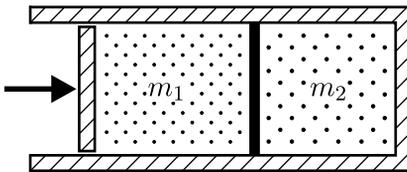
поршень сразу же опустился на  $\Delta x_1 = 2,5$  см. Через продолжительное время оказалось, что поршень опустился ещё на  $\Delta x_2 = 1$  см. Определите молярную теплоёмкость газа при постоянном объёме  $C_V$ . Температура помещения постоянна, утечка газа отсутствует.

◇ **2.51\***. [11] (1996, 11–2) Если в трубку с площадью поперечного сечения  $S$ , вставленную через пробку в горлышко бутылки объёмом  $V$  ( $V \gg Sl$ ,  $l$  — длина трубки), бросить шарик массы  $m$ , плотно (с очень маленьким зазором) входящий в трубку, то он начинает колебаться вверх-вниз, сжимая газ в бутылке, как пружину (см. рисунок). Найдите период этих колебаний, считая, что в бутылке находится идеальный одноатомный газ. Атмосферное давление снаружи равно  $p_0$ , трением и утечкой газа из бутылки при колебаниях шарика можно пренебречь.

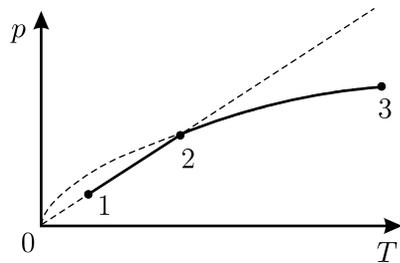


К задаче 2.51.

◇ **2.52**. [11] (2003, 11–1) Идеальный одноатомный газ находится в закреплённом теплоизолированном цилиндре, разделённом на две части неподвижной теплопроводящей перегородкой и закрытом слева подвижным поршнем, не проводящим тепло (см. рисунок). Масса газа в левой части цилиндра равна  $m_1$ , а в правой  $m_2$ . Давление на поршень медленно увеличивают, начиная с некоторого начального значения. Найдите молярную теплоёмкость газа в левой части цилиндра в данном процессе.



К задаче 2.52.

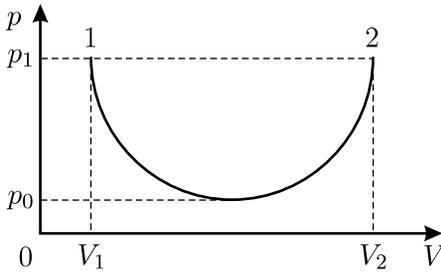


К задаче 2.53.

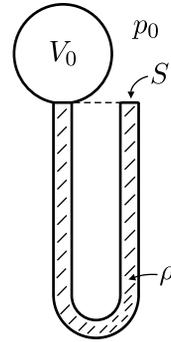
◇ **2.53**. [10–11] (1987, 9–1) Один моль идеального одноатомного газа последовательно участвует в двух процессах: 1–2 и 2–3 (см. рисунок). В первом из них давление  $p$  пропорционально температуре  $T$ , во втором  $p$  пропорционально  $\sqrt{T}$ . Определите теплоёмкость газа в каждом из двух процессов.

◇ **2.54**. [10–11] (1995, 10–1) Идеальный одноатомный газ совершает работу в квазистатическом процессе 1–2, который изображается на  $pV$ -диаграмме полуокружностью (см. рисунок). Найдите суммарное

количество теплоты, полученное и отданное газом в ходе этого процесса. Значения  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $p_0$ ,  $p_1$  считайте известными.



К задаче 2.54.



К задаче 2.55.

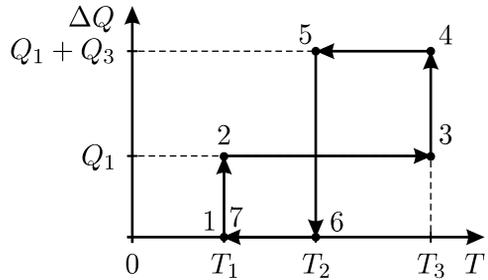
◇ **2.55.** [10–11] (2003, 10–2) В установленной вертикально U-образной трубке площадью  $S$  с внутренним объёмом  $V_0$  находится жидкость плотностью  $\rho$ . Колена трубки одинаковы по высоте, одно из них открыто в атмосферу, а второе герметично соединено с сосудом объёмом  $V_0$ , внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Жидкость заполняет всю U-образную трубку (см. рисунок). Найдите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу в сосуде для того, чтобы медленно вытеснить из трубки половину жидкости. Атмосферное давление постоянно и равно  $p_0$ . Давлением паров жидкости, поверхностным натяжением и потерями тепла пренебречь. Радиус полукруглого участка трубки, соединяющего её колена, считайте много меньшим высоты трубки.

**2.56\***. [11] (1999, 11–2) Требуется перевести идеальный газ из состояния 1 с температурой  $T_1$  в состояние 2 с температурой  $T_2 > T_1$  таким образом, чтобы температура в течение всего обратимого процесса 1–2 не убывала, а тепло не отводилось от газа. Минимальное количество теплоты, которое передаётся газу в таком процессе, равно  $Q_1$ . Какое максимальное количество теплоты можно сообщить газу при данных условиях проведения процесса?

◇ **2.57\***. [11] (2005, 11–2) Над идеальным одноатомным газом совершается равновесный процесс 1–2–3–4–5–6–7. На рисунке изображён график зависимости количества теплоты  $\Delta Q$ , сообщённой газу в данном процессе (отсчитывая от его начала), от абсолютной температуры газа  $T$ . Все параметры, заданные на осях графика, известны. Найдите, при каких соотношениях между этими параметрами объём газа в результате данного процесса:

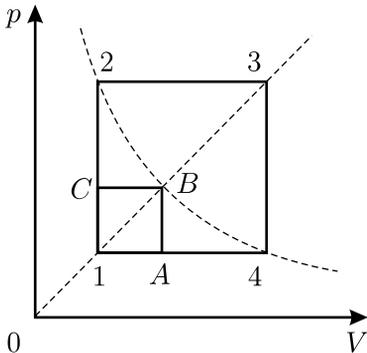
- а) увеличивается;
- б) уменьшается;
- в) остаётся неизменным.

**2.58\***. [11] (1996, 11–2) КПД двигательной установки катера, состоящей из двигателя внутреннего сгорания и водомётного движителя, равен  $\eta$ . Оцените нижнюю границу максимальной температуры  $T_1$  в цилиндрах двигателя катера при его движении с постоянной скоростью, зная, что температура выхлопных газов равна  $T_2$ , площадь сечения водозаборной трубы водомётного движителя  $S_1$ , площадь сечения выбрасываемой из движителя струи воды  $S_2$ , и в водозаборную трубу вода поступает со скоростью, равной скорости движения катера относительно воды.

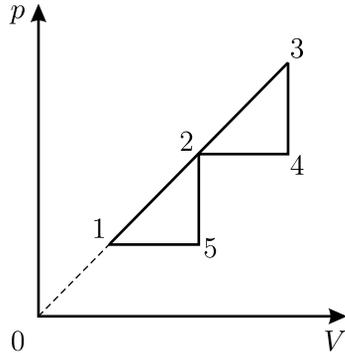


К задаче 2.57.

◇ **2.59\***. [10–11] (1997, 10–1) Над одним молем идеального одноатомного газа совершают процесс 1–2–3–4–1 (см. рисунок), причём газ получает от нагревателя за один цикл количество теплоты  $Q$ . Какое количество теплоты будет получать газ за один цикл, если совершать над ним процесс 2–3–4–A–B–C–2? Известно, что  $T_3 = 16T_1$ ,  $T_2 = T_4$ , B — точка пересечения изотермы  $T = T_2$  с прямой 1–3, проходящей через начало координат  $pV$ -диаграммы. Ответ выразить через  $Q$ .



К задаче 2.59.

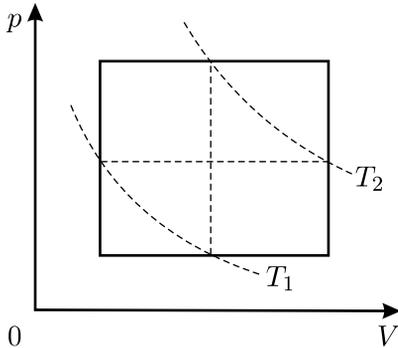


К задаче 2.60.

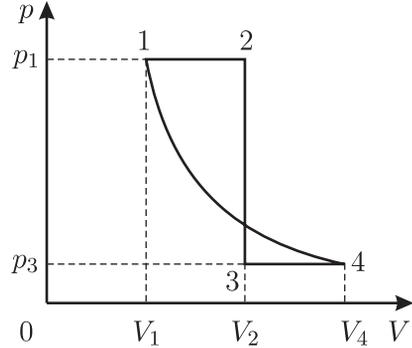
◇ **2.60\***. [11] (2003, 11–2) Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает работу в цикле 1–2–3–4–2–5–1, показанном на  $pV$ -диаграмме (см. рисунок). Точки 1, 2 и 3 лежат на прямой, проходящей через начало координат диаграммы.

мы, а точка 2 является серединой отрезка 1–3. Найдите КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если максимальная температура газа в данном цикле больше минимальной температуры в  $n$  раз. Вычислите значение КПД при  $n = 4$ .

◇ **2.61.** [10–11] (2000, 10–2) Найдите КПД тепловой машины, цикл которой состоит из двух изохор и двух изобар (см. рисунок), а рабочим телом является идеальный одноатомный газ. Середины нижней изобары и левой изохоры лежат на изотерме, соответствующей температуре  $T_1$ , а середины верхней изобары и правой изохоры — на изотерме, соответствующей температуре  $T_2$ .



К задаче 2.61.



К задаче 2.62.

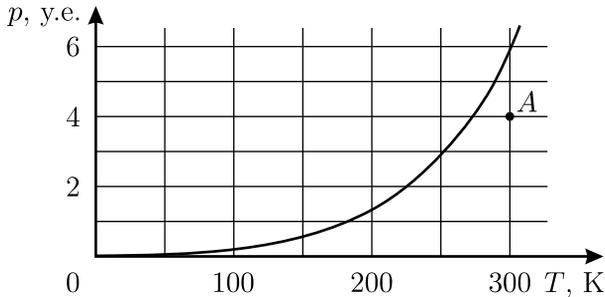
◇ **2.62.** [10–11] (2002, 11–2) Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает работу в цикле 1–2–3–4–1, состоящем из двух изобар, изохоры и адиабаты (см. рисунок). Найдите КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если  $V_1 = 5$  л,  $V_2 = 10$  л,  $V_4 = 15$  л,  $p_1 = 3,17 \cdot 10^5$  Па,  $p_3 = 0,51 \cdot 10^5$  Па.

**2.63\*.** [10–11] (1998, 11–2) Над идеальным одноатомным газом совершается цикл, имеющий в  $pV$ -координатах вид прямоугольника, стороны которого параллельны осям  $p$  и  $V$ . Найдите максимальный КПД такого цикла.

**2.64\*.** [10–11] (1996, 10–2) В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью  $S = 10$  см<sup>2</sup> находится  $m = 1$  г воды в жидком состоянии при температуре  $T = 100$  °С. На поршень действует нормальное атмосферное давление. Поршень медленно нагружают массой  $M = 1$  кг, затем сообщают системе теплоту до полного испарения воды, медленно снимают груз и отбирают теплоту до полной конденсации пара, возвращаясь, таким образом, в исходное состояние. Найдите разность температур воды при её испарении и конденсации в этом процессе. Удельная теплота испарения воды при этих условиях  $Q = 2250$  Дж/г,

удельный объём пара  $v_{\text{п}} = 1700 \text{ см}^3/\text{г}$ . Считайте, что нагружение поршня и снятие груза происходят в адиабатических условиях.

◇ **2.65.** [10–11] (2002, 10–1) На рисунке приведён график зависимости давления насыщенного пара некоторого вещества от температуры. Определённое количество этого вещества находится в закрытом сосуде постоянного объёма в равновесном состоянии, соответствующем точке  $A$  на рисунке. До какой температуры следует охладить эту систему, чтобы половина имеющегося в сосуде вещества сконденсировалась?



К задаче 2.65.

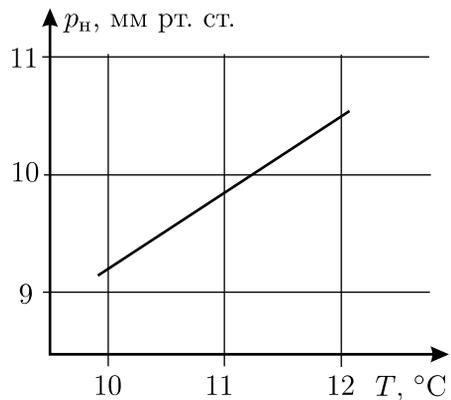
Объёмом сконденсировавшегося вещества можно пренебречь по сравнению с объёмом сосуда.

**2.66.** [10–11] (1989, 9–1) В герметичном цилиндре длиной  $l = 1 \text{ м}$  и сечением  $S = 10 \text{ см}^2$  находится тонкий поршень массой  $M = 200 \text{ г}$ , который может перемещаться вдоль цилиндра без трения. Первоначально ось цилиндра горизонтальна, а поршень находится посередине цилиндра. По обе стороны от поршня находятся одинаковые количества  $m = 0,4 \text{ г}$  воды и её паров при атмосферном давлении. Затем цилиндр переводят в вертикальное положение.

а) На сколько при этом смещается поршень, если во всём цилиндре поддерживается температура  $T = 100 \text{ °C}$ ?

б) Как изменится ответ а), если  $m = 0,8 \text{ г}$ ?

◇ **2.67.** [10–11] (1988, 9–1) Горизонтальный цилиндр с поршнем заполнен воздухом, содержащим пары воды. В исходном состоянии



К задаче 2.67.

его объём  $V_0 = 1$  л, давление  $p_0 = 10^5$  Па, температура  $T_0 = 30$  °С. Если закрепить поршень и охлаждать цилиндр при постоянном объёме, то при  $T_1 = 10,5$  °С в нём выпадает роса. Можно поступить по другому: оставить поршень свободным и охлаждать воздух из исходного состояния при постоянном давлении  $p_0$ . При какой температуре  $T_2$  выпадет роса в этом случае? Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры показана на графике.

**2.68.** [10–11] (1986, 9–1) В сосуд, заполненный эфиром, погружают перевёрнутую пробирку  $A$ . Из неё сразу же начинают выходить пузырьки. Если собирать эти пузырьки в первоначально полностью заполненную эфиром пробирку  $B$  такого же сечения, но вдвое более длинную, чем  $A$ , то из неё окажется вытесненной доля  $x = 2/3$  объёма эфира. Объясните это явление и определите давление насыщенных паров эфира. Атмосферное давление  $p_0 = 760$  мм рт. ст.

**2.69.** [10–11] (2002, 11–1) Два закрытых сосуда ёмкостью  $V_1 = 10$  литров и  $V_2 = 20$  литров имеют жёсткие стенки и поддерживаются при одинаковой постоянной температуре  $0$  °С. Сосуды соединены короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В первом сосуде находится воздух под давлением  $p_1 = 2$  атм при относительной влажности  $r_1 = 20\%$ . Во втором сосуде находится воздух под давлением  $p_2 = 1$  атм при относительной влажности  $r_2 = 40\%$ . Кран постепенно открывают так, что процесс выравнивания давлений в сосудах можно считать изотермическим. Найдите минимальную и максимальную относительную влажность воздуха в сосуде ёмкостью 10 литров.

**2.70.** [10–11] (2001, 10–2) Раствор этилового спирта в воде, имеющий концентрацию  $n = 40\%$  по объёму, находится в герметично закрытой бутылке, занимая  $90\%$  её объёма. Известно, что раствор заливали в бутылку и закрывали её при температуре  $T_1 = 0$  °С и атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па. Чистый этиловый спирт кипит при этом давлении при температуре  $T_2 = 77$  °С. Давление насыщенных паров воды при температуре  $T_2$  равно  $p = 4,18 \cdot 10^4$  Па. Какое давление установится над жидкостью в этой бутылке при температуре  $T_2$ ? Давлением насыщенных паров спирта и воды при  $T_1 = 0$  °С, а также растворением воздуха в растворе можно пренебречь.

**2.71.** [10–11] (2001, 11–2) В покоящемся сосуде объёмом  $V = 31$  л с очень жёсткими и совершенно не проводящими тепло стенками находится воздух при нормальных условиях и вода в количестве  $m = 9$  г. Сосуд практически мгновенно приобретает скорость  $u$  и движется поступательно. После установления теплового равновесия воздух в сосуде имеет влажность  $r = 50\%$ . Найдите скорость  $u$ . Удельная тепло-

та парообразования воды  $L = 2,5$  МДж/кг, удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях  $p = 600$  Па, удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме  $c_V = 720$  Дж/(кг · К), средняя молярная масса воздуха  $\mu = 0,029$  кг/моль.

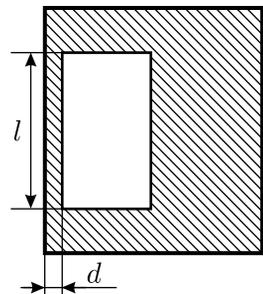
**2.72.** [10–11] (1990, 11–2) Капля жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  находится в невесомости между двумя гладкими параллельными пластинами, жёстко скреплёнными друг с другом. Жидкость смачивает пластины таким образом, что капля представляет собой цилиндр диаметром  $D$  с прямыми углами при основании. Определите силу, действующую на каждую из пластин со стороны капли.

**2.73\*.** [10–11] (1993, 10–2) На холодном потолке ванной комнаты, наполненной влажным воздухом, конденсируется вода. Спустя некоторое время она начинает капать с потолка. Оцените массу капли  $m$ , если краевой угол смачивания потолка водой равен  $\theta$ . Выпуклую поверхность капли можно считать сферической. Коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 0,07$  Н/м. Угол  $\theta$  определяется материалом потолка и может быть любым.

**2.74.** [10–11] (2005, 10–2) Капля ртути на чистой горизонтальной поверхности стекла и капля воды на ворсистой поверхности травинки подобны друг другу по форме. Оцените отношение масс этих капель. Плотности ртути и воды равны  $\rho_p = 13,6$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_v = 1$  г/см<sup>3</sup> соответственно, а их коэффициенты поверхностного натяжения  $\sigma_p = 0,46$  Н/м и  $\sigma_v = 0,07$  Н/м.

**2.75.** [11] (1995, 11–1) Оцените частоту собственных колебаний капли воды радиусом  $r = 2$  мм, находящейся в невесомости. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,07$  Н/м.

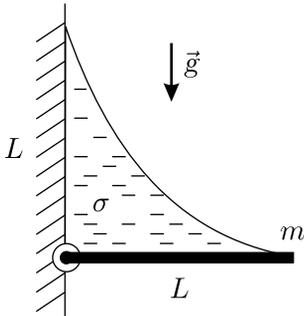
◇ **2.76\*.** [10–11] (1994, 10–1) В кювете с вертикальными стенками в воде свободно плавает прямоугольный брусок, одна из боковых граней которого расположена параллельно стенке кюветы на малом расстоянии  $d$  от неё. Длина грани  $l \gg d$  (см. рисунок: вид сверху). Найдите величину и направление силы, действующей на брусок в горизонтальном направлении, если в данный момент он неподвижен. Смачивание стенки и бруска считайте полным. Коэффициент поверхностного натяжения воды равен  $\sigma$ .



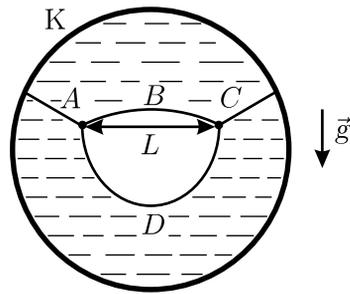
К задаче 2.76.

**2.77\***. [11] (1994, 11–2) Найдите высоту подъёма жидкости у вертикальной стенки, зная краевой угол  $\theta$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  и плотность жидкости  $\rho$ .

◇ **2.78\***. [10–11] (1996, 10–2) На вертикальной стене шарнирно закреплён однородный тонкий стержень массой  $m$  и длиной  $L$ . На высоте  $L$  вертикально над местом закрепления стержня к стене прикреплена тонкая невесомая нерастяжимая нить, второй конец которой прикреплен к свободному концу стержня (см. рисунок). Между стеной, стержнем и нитью натянута тонкая невесомая плёнка жидкости, коэффициент поверхностного натяжения которой равен  $\sigma$ . Стержень находится в состоянии равновесия и расположен горизонтально. Найдите длину нити  $l$ , считая, что она меньше  $\pi L/2$ .



К задаче 2.78.

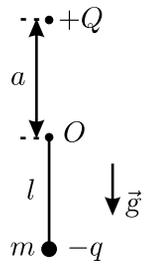


К задаче 2.79.

◇ **2.79\***. [10–11] (2003, 11–1) К проволочному каркасу К, имеющему вид окружности, прикрепили нить, которая связана из четырёх кусков  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  с длинами, относящимися друг к другу, как  $1 : 2 : 1 : 3$ . Каркас окунули в мыльный раствор, вынули и, удерживая каркас в вертикальной плоскости, проткнули образовавшуюся мыльную плёнку между кусками нити  $B$  и  $D$  с длинами, относящимися как  $2 : 3$ . Нить приняла форму, показанную на рисунке. Углы, образованные касательными к кускам нити вблизи узелков, все одинаковы и равны  $120^\circ$ , а куски нити, прикрепленные к каркасу, вблизи узелков наклонены под углами  $30^\circ$  к горизонту. Расстояние между узелками  $L = 4$  см, коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $\sigma = 0,04$  Н/м. Мыльная плёнка настолько тонкая, что её массой можно пренебречь. Какова масса  $M$  всей мокрой нити?

### Электричество и магнетизм

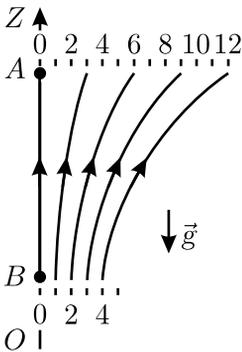
◇ **3.1.** [10–11] (1994, 11–1) Маятник, состоящий из жёсткого невесомого стержня длиной  $l$  и закреплённого на его конце груза массой  $m$  с зарядом  $-q$ , подвешен в точке  $O$  (см. рисунок). Над точкой  $O$  на расстоянии  $a$  от неё находится заряд  $+Q$ . В каком случае состояние равновесия, при котором груз массой  $m$  находится в нижнем положении, является устойчивым? Ускорение свободного падения равно  $g$ .



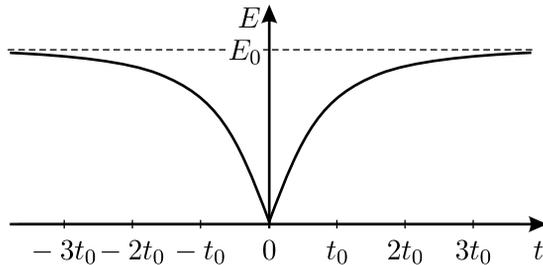
К задаче 3.1.

**3.2.** [10–11] (2000, 10–2) Точечный заряд, находящийся на расстоянии  $a$  от каждой из четырёх вершин одной из граней сплошного незаряженного проводящего куба с длиной ребра  $a$ , притягивается к кубу с силой  $F$ . С какой силой этот же заряд будет притягиваться к сплошному проводящему кубу с длиной ребра  $b$ , если его разместить на расстоянии  $b$  от каждой из вершин одной из граней куба?

◇ **3.3.** [10–11] (1992, 11–1) Шарик массой  $m$  с зарядом  $+q$  находится в однородном гравитационном поле ( $\vec{g}$  направлено вниз) и неоднородном электростатическом поле, симметричном относительно поворота вокруг вертикальной оси  $OZ$ . Силовые линии поля в одной из плоскостей показаны на рисунке. В начальный момент шарик покоился в точке  $A$ . Когда заряд шарика изменился, он опустился в точку  $B$ . Используя рисунок, оцените, во сколько раз изменился заряд шарика.



К задаче 3.3.



К задаче 3.4.

◇ **3.4.** [10–11] (2002, 10–2) При измерении зависимости величины напряжённости электрического поля от времени в некоторой точке пространства был получен график, изображённый на рисунке. Электрическое поле создаётся двумя одинаковыми точечными зарядами, один из которых неподвижен и находится на расстоянии  $d$  от точки наблюдения,

а другой движется с постоянной скоростью. Найдите величины зарядов, минимальное расстояние от движущегося заряда до точки наблюдения и скорость движущегося заряда.

**3.5.** [10–11] (1998, 10–1) Две одинаковые бусинки с одинаковыми одноимёнными зарядами нанизаны на гладкую горизонтальную непроводящую спицу. Известно, что если эти бусинки расположить на расстоянии  $r_0$  друг от друга и отпустить без начальной скорости, то расстояние между ними удвоится через время  $t_0$ . Через какое время  $t_1$  расстояние между бусинками удвоится, если начальное расстояние между ними увеличить в  $k$  раз?

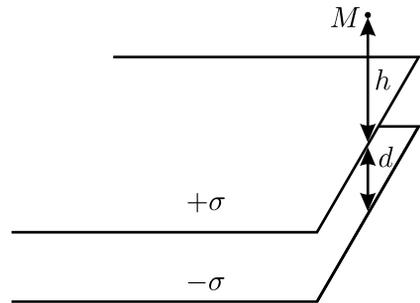
**3.6\*.** [10–11] (1998, 10–2) На гладкую непроводящую нить длиной  $l$  надеты три бусинки с положительными зарядами  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ . Концы нити соединены. Найдите силу натяжения нити  $T$ , когда система находится в равновесии.

**3.7\*.** [11] (1990, 11–2) Предположим, что закон взаимодействия двух зарядов несколько отличается от кулоновского и имеет вид

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^{2-\alpha}},$$

где  $|\alpha| \ll 1$ , а  $k > 0$  — размерный коэффициент. Рассмотрим сферу радиусом  $R$ , по поверхности которой равномерно распределён заряд  $Q$ . Найдите период малых колебаний частицы массой  $m$  с зарядом  $q$  вблизи центра этой сферы. *Указание:* при  $|x| \ll 1$  справедлива приближённая формула  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , где  $n$  — любое, не обязательно целое число.

◇ **3.8\*.** [10–11] (1989, 9–2) Две параллельные полуплоскости равномерно заряжены с плотностью заряда  $+\sigma$  на верхней и  $-\sigma$  на нижней полуплоскости. Найдите величину и направление напряжённости электрического поля  $E$  в точке  $M$ , которая находится на высоте  $h$  над краем полуплоскостей (см. рисунок). Расстояние между полуплоскостями  $d$  мало по сравнению с  $h$ .



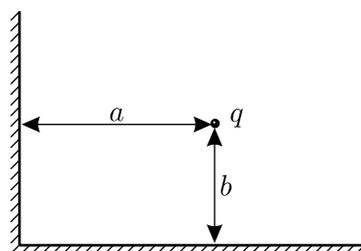
К задаче 3.8.

**3.9\*.** [10–11] (2005, 10–2) Две очень длинные цилиндрические трубы имеют одинаковую длину и радиусы  $R$  и  $R-r$ , причём  $r \ll R$ . Труба меньшего радиуса вставлена в большую так, что их оси и торцы совпадают. Трубы заряжены равномерно по площади электрическими зарядами: внутренняя — с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$ , а внеш-

няя — с поверхностной плотностью  $-\sigma$ . На оси этой системы вблизи от одного из торцов цилиндров измеряют напряжённость электростатического поля  $E$ . Найдите, как зависит  $E$  от расстояния  $x$  до этого торца.

**3.10.** [11] (2004, 11–1) Маленький заряженный шарик массой  $m$  шарнирно подвешен на невесомом непроводящем стержне длиной  $l$ . На расстоянии  $1,5l$  слева от шарнира находится вертикальная заземлённая металлическая пластина больших размеров. Стержень отклоняют от вертикали вправо на угол  $\alpha$  и отпускают без начальной скорости. В ходе начавшихся колебаний стержень достигает горизонтального положения, после чего движется обратно, и процесс повторяется. Найдите заряд шарика. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

◇ **3.11.** [10–11] (1991, 11–2) Две проводящие полуплоскости образуют прямой двугранный угол. Точечный заряд  $q$  находится на расстояниях  $a$  и  $b$  от граней этого угла (см. рис.). Найдите полную энергию взаимодействия зарядов в этой системе.



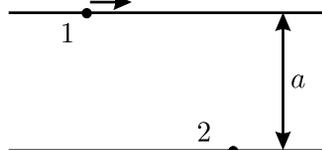
К задаче 3.11.

**3.12.** [10–11] (1990, 11–1) На длинную непроводящую струну, продетую по диаметру металлического шара через два небольших отверстия в нём, надета маленькая заряженная бусинка.

Шар и бусинка имеют заряды одного знака (по величине заряд бусинки много меньше). Бусинке сообщили скорость, достаточную для того, чтобы «пролететь» через шар. Нарисуйте график зависимости ускорения бусинки от расстояния до центра шара.

**3.13.** [11] (1997, 11–2) Тонкое проводящее кольцо радиусом  $R$  и металлическая сфера меньшего радиуса  $r$  размещены так, что их центры совпадают. Сфера заземлена тонким длинным проводником. Найдите потенциал точки, находящейся на оси кольца на расстоянии  $x$  от его плоскости, если заряд кольца равен  $Q$ .

◇ **3.14.** [10–11] (1994, 10–1) На два гладких длинных стержня, расположенных параллельно друг другу на расстоянии  $a$ , нанизаны две одноимённо заряженные бусинки, которые могут двигаться по стержням без трения (см. рисунок).

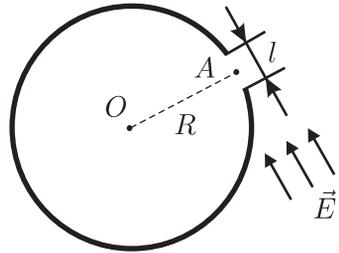


К задаче 3.14.

В начальный момент времени вторая бусинка покоится, а первую пустили издалека по направлению ко второй бусинке. При каких начальных скоростях первой бусинки она обгонит вторую в процессе своего движения? Массы бусинок  $m$ , заряды  $q$ .

**3.15.** [11] (1996, 11–2) Два маленьких абсолютно упругих шарика имеют равные массы  $m$ , радиусы  $r$  и заряды  $q_1$  и  $q_2$  разных знаков, находящиеся строго в их центрах. В начальный момент шарики покоятся в космосе далеко от других тел так, что их центры расположены друг от друга на расстоянии  $l > 2r$ . Какими будут конечные скорости шариков после удара, если в момент соударения за счёт пробоя их заряды выровнялись? Гравитационное взаимодействие шариков не учитывайте.

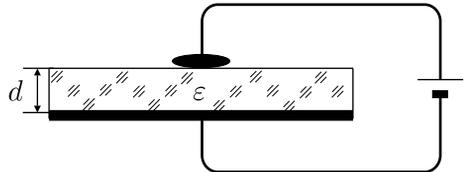
◇ **3.16.** [10–11] (1992, 10–1) Тонкое жёсткое диэлектрическое кольцо массой  $m$  и радиусом  $R$  может свободно вращаться вокруг фиксированной вертикальной оси  $O$ , перпендикулярной плоскости кольца (см. рисунок). Кольцо равномерно заряжено по длине, его заряд равен  $Q$ . Небольшой кусок кольца в области точки  $A$  вырезан так, что получился зазор длиной  $l \ll R$ . В начальный момент кольцо покоилось, после чего было включено однородное электрическое поле  $\vec{E}$ , перпендикулярное оси кольца и прямой  $OA$ . Найдите максимальную угловую скорость кольца.



К задаче 3.16.

**3.17\*.** [10–11] (1997, 11–1) Четыре бесконечные плоскости, равномерно заряженные с поверхностной плотностью заряда  $-\sigma$ , пересекаются, образуя правильную пирамиду со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $b$ . В точку, лежащую на высоте этой пирамиды на расстоянии  $h$  от основания, помещают маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $+q$ . Определите, с какой скоростью этот шарик ударится о пирамиду, если его отпустить без начальной скорости. Считайте, что заряды по плоскостям не перемещаются.

◇ **3.18.** [10–11] (1992, 10–1) На нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины толщиной  $d$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  нанесено проводящее покрытие. На верхнюю поверхность помещена маленькая капля ртути, которая не смачивает пластину. Капля и проводящее покрытие образуют конденсатор (см. рисунок). При каком напряжении батареи капля начнёт растекаться по поверхности пластины? Коэффициент поверхностного натяжения ртути равен  $\sigma$ .

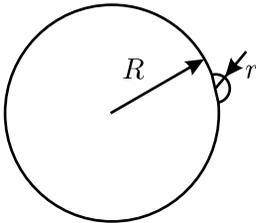


К задаче 3.18.

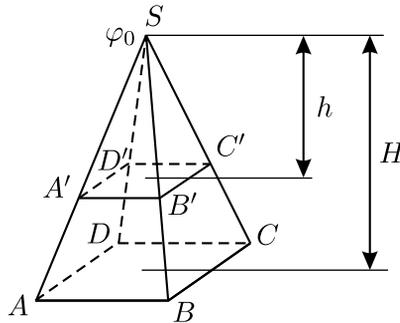
**3.19\***. [10–11] (1987, 9–2) Непроводящая сфера радиусом  $R$  состоит из двух скреплённых полусфер, которые равномерно покрыты зарядами с поверхностными плотностями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно. Сферу окружают проводящей заземлённой оболочкой, радиус которой близок к радиусу сферы. Найдите суммарную силу, действующую на сферу со стороны электростатического поля. Краевыми эффектами вблизи линии соединения полусфер пренебречь. Изменится ли эта сила, если оболочка будет не заземлённой, а изолированной?

**3.20.** [10–11] (2000, 10–1) Маленький проводящий шарик радиусом  $R$  висит на непроводящей нити над бесконечной проводящей плоскостью. Расстояние от центра шарика до плоскости равно  $L$  ( $L \gg R$ ). Найдите электроёмкость этой системы.

◇ **3.21\***. [10–11] (1990, 10–2) Проводящая сфера радиусом  $R$  имеет дефект поверхности в виде полусферического бугорка радиусом  $r \ll R$  (см. рисунок). Оцените изменение электрической ёмкости сферы, обусловленное этим бугорком.



К задаче 3.21.



К задаче 3.22.

◇ **3.22.** [10–11] (1996, 10–2) Пирамида  $SABCD$  высотой  $H$  (см. рисунок) равномерно заряжена по объёму. Потенциал в точке  $S$  равен  $\varphi_0$ . От этой пирамиды плоскостью, параллельной основанию, отрезают пирамиду  $SA'B'C'D'$  высотой  $h$  и удаляют её на бесконечность. Найдите потенциал  $\varphi$  в той точке, где находилась вершина  $S$  исходной пирамиды.

**3.23.** [10–11] (1995, 10–1) Проводящий шар радиусом  $R = 1$  м заряжен до потенциала  $\varphi_1 = 1000$  В. Шара касаются, прикладывая плашмя к его поверхности тонкий незаряженный проводящий диск радиусом  $r = 1$  см, укрепленный на изолирующей рукоятке. Затем диск уносят на большое расстояние и разряжают. Сколько раз нужно таким образом коснуться шара, чтобы его потенциал стал равен  $\varphi_2 = 999$  В?

**3.24.** [10–11] (2001, 10–2) Имеются батарейка с ЭДС  $\mathcal{E} = 1$  В и два незаряженных конденсатора с ёмкостями  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 3$  мкФ.

Какую максимальную разность потенциалов можно получить с помощью этого оборудования и как это сделать?

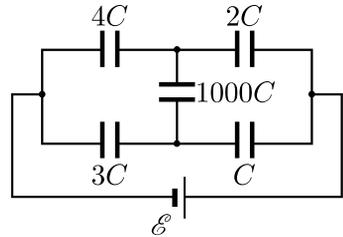
**3.25\***. [11] (1998, 11–1) Имеются большой конденсатор ёмкостью  $C = 1$  мкФ, заряженный зарядом  $Q = 100$  мкКл, и  $N = 1000$  маленьких незаряженных конденсаторов ёмкостью  $C_1 = 1$  нФ каждый. Требуется изготовить из маленьких конденсаторов батарею, которая одновременно имела бы максимально возможную ёмкость и максимально возможный заряд. Найдите этот заряд  $q$  и опишите процедуру изготовления батареи. Маленькие конденсаторы можно только соединять друг с другом и с большим конденсатором.

◇ **3.26**. [10–11] (2000, 11–2) Оцените установившийся заряд на конденсаторе  $1000C$  в схеме, изображённой на рисунке.

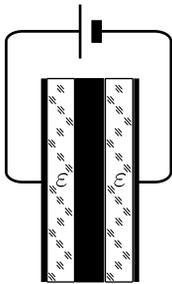
◇ **3.27**. [10–11] (1995, 11–1) Обкладки плоского конденсатора подключены к источнику постоянного напряжения. При этом они притягиваются с силой  $F_0$ . С какой силой будут притягиваться эти обкладки, если в конденсатор ввести две диэлектрические и одну металлическую пластины (см. рисунок)? Толщина каждой из пластин чуть меньше  $1/3$  расстояния между пластинами конденсатора. Относительная диэлектрическая проницаемость крайних пластин равна  $\varepsilon$ .

С какой силой будут притягиваться эти обкладки, если в конденсатор ввести две диэлектрические и одну металлическую пластины (см. рисунок)? Толщина каждой из пластин чуть меньше  $1/3$  расстояния между пластинами конденсатора. Относительная диэлектрическая проницаемость крайних пластин равна  $\varepsilon$ .

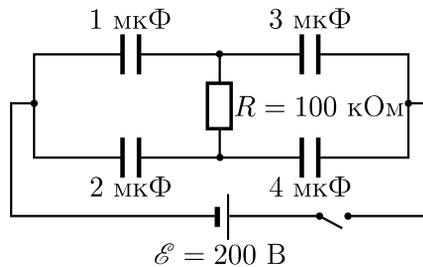
**3.28**. [10–11] (2002, 10–2) Плоский воздушный конденсатор ёмкостью  $C$  состоит из двух больших пластин, расположенных близко друг к другу. Вначале одна из пластин была не заряжена, а на другой имелся заряд  $Q$ . Затем пластины соединили проводником, имеющим большое сопротивление  $R$ . Оцените количество тепла, которое выделится в этом проводнике за большое время.



К задаче 3.26.



К задаче 3.27.



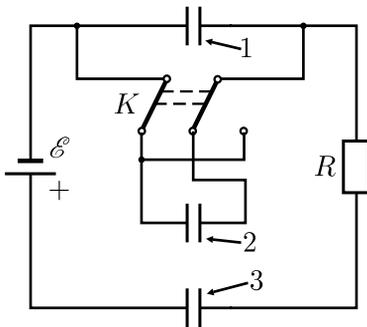
К задаче 3.29.

◇ **3.29**. [10–11] (1986, 9–2) Какая энергия будет запасена в системе, изображённой на рисунке, через 10 секунд после замыкания ключа?

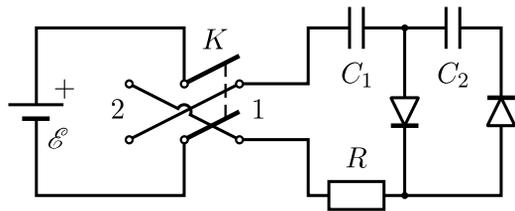
Какое количество тепла выделится на резисторе  $R$ ? Внутреннее сопротивление источника не превышает нескольких Ом, конденсаторы вначале не были заряжены.

**3.30.** [10–11] (1991, 11–1) В плоском конденсаторе ёмкостью  $C$  расстояние между пластинами много меньше размеров пластин. Конденсатор не заряжен. Одну из пластин подсоединили через резистор  $R_1$  и разомкнутый вначале ключ к проводящему шару радиусом  $r$ . Заряд шара равен  $Q$ . Шар находится на большом расстоянии от конденсатора, а конденсатор — на большом расстоянии от земли. Другую пластину конденсатора заземлили через резистор  $R_2$ . Какие количества теплоты выделятся на  $R_1$  и  $R_2$  при замыкании ключа?

◇ **3.31\***. [10–11] (1991, 10–2) Какое количество теплоты выделится в схеме, изображённой на рисунке, при переключении ключа из левого положения в правое? Суммарный заряд на правых обкладках конденсаторов 1, 2 и 3 вначале равнялся нулю. Ёмкости всех конденсаторов равны  $C$ .



К задаче 3.31.

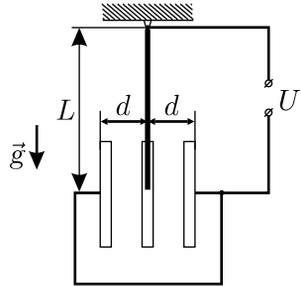


К задаче 3.32.

◇ **3.32\***. [11] (2001, 11–2) В схеме, изображённой на рисунке, конденсаторы ёмкостью  $C_1 = C_2 = C$  первоначально не заряжены, а диоды идеальные. Ключ  $K$  начинают циклически переключать, замыкая его вначале в положение 1, а потом — в положение 2. Затем цикл переключений 1–2 повторяется, и так далее. Каждое из переключений производится после того, как токи в цепи прекращаются. Какое количество  $n$  таких циклов переключений 1–2 надо произвести, чтобы заряд на конденсаторе  $C_2$  отличался от своего установившегося (при  $n \rightarrow \infty$ ) значения не более, чем на 0,1%?

◇ **3.33.** [10–11] (1992, 10–2) Плоский конденсатор состоит из трёх одинаковых пластин площадью  $S$  каждая (см. рисунок, вид сбоку). Крайние пластины неподвижны и соединены друг с другом. Средняя пластина массой  $m$  прикреплена к лёгкому стержню длиной  $L$ .

Верхний конец стержня закреплён шарнирно. Расстояние между крайними пластинами равно  $2d$  ( $d$  много меньше размеров пластины,  $L$  — много больше). При каком напряжении  $U$  произойдёт пробой такого конденсатора? Воздух считайте идеальным изолятором.



К задаче 3.33.

**3.34\***. [11] (2002, 11–1) Одна из пластин плоского конденсатора в форме квадрата со стороной  $a$  закреплена горизонтально, на неё помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить вторая пластина конденсатора массой  $m$ , имеющая такие же размеры и форму, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды  $+Q$  и  $-Q$ , и система приведена в равновесие. Верхнюю пластину сдвигают по горизонтали на расстояние  $x \ll a$  параллельно одной из сторон квадрата и отпускают без начальной скорости. Найдите период колебаний этой пластины. Толщина диэлектрика  $d$  существенно меньше смещения верхней пластины  $x$ . Электрическое сопротивление у пластин отсутствует.

**3.35.** [9–11] (1987, 8–1) Определите среднюю скорость движения электронов в медном проводе сечением  $S = 1 \text{ мм}^2$ , когда по нему течёт ток  $I = 1 \text{ А}$ . Плотность меди  $\rho = 8,9 \text{ г/см}^3$ , молярная масса  $\mu = 64 \text{ г/моль}$ . Известно, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, заряд которого  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ . Число Авогадро (количество молекул в одном моле вещества)  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

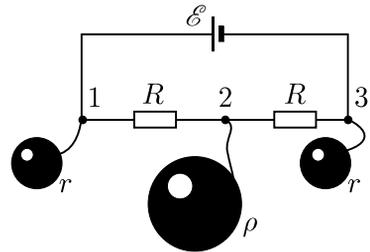
**3.36\***. [11] (1989, 10–2) При электрическом разряде в разреженном неоне (Ne) при комнатной температуре очень небольшая часть атомов неона распадается на электроны и ионы (масса атома неона  $M$  в  $4 \cdot 10^4$  раз больше массы электрона  $m_e$ ). Длина свободного пробега электронов (то есть среднее расстояние, которое электрон проходит без соударений)  $l = 0,1 \text{ мм}$ . Газ находится в электрическом поле напряжённостью  $E = 10 \text{ В/см}$ . Оцените «температуру» электронов  $T_e$ , соответствующую их средней кинетической энергии. Постоянная Больцмана  $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ , заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ .

**3.37.** [10–11] (1988, 9–1) Если облучать медную пластину пучком однозарядных ионов  $\text{Ag}^+$ , ускоренных разностью потенциалов  $U = 1000 \text{ В}$ , то происходит интенсивное распыление меди с поверхности пластины. Однако пучок электронов, ускоренных той же разностью потенциалов, никакого распыления не вызывает. Почему так происходит? Ответ обоснуйте количественно. Масса электрона  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ ,

масса протона  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-24}$  г, заряд электрона  $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, атомные массы аргона и меди равны, соответственно,  $\mu_{\text{Ar}} = 40$  г/моль,  $\mu_{\text{Cu}} = 64$  г/моль. Чтобы выбить атом меди из кристаллической решётки, ему надо придать энергию не менее  $E_0 = 3,5$  эВ. Один электрон-вольт равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

**3.38.** [10–11] (1988, 9–1) Космический корабль, имеющий вид металлического шара радиусом  $R = 1$  м, находится в далёком космосе. В некоторый момент на его борту включается «электронная пушка», испускающая в пространство пучок электронов с энергией  $W = 9 \cdot 10^4$  эВ. Сила тока в пучке  $I = 1$  мкА. Найдите напряжённость  $E$  электрического поля у поверхности корабля через  $\tau = 1$  мин после включения пушки. В начальный момент времени  $E = 0$ .

◇ **3.39.** [10–11] (1997, 10–2) К точкам 1, 2, 3 электрической цепи, изображённой на рисунке, длинными тонкими проводниками подсоединили изначально незаряженные металлические шары с радиусами  $r$ ,  $\rho$  и  $r$  соответственно. Найдите заряды, установившиеся на каждом из шаров. Считайте, что расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и на соединительных проводниках пренебрежимо мал, а внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.



К задаче 3.39.

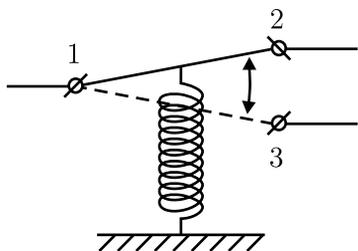
**3.40.** [8–9] (2000, 8–1) В люстре 6 одинаковых лампочек. Она управляется двумя выключателями, имеющими два положения — «включено» и «выключено». От коробки с выключателями к люстре идут три провода. Лампочки в люстре либо:

- все не горят;
- все горят не в полный накал;
- три лампочки не горят, а три горят в полный накал.

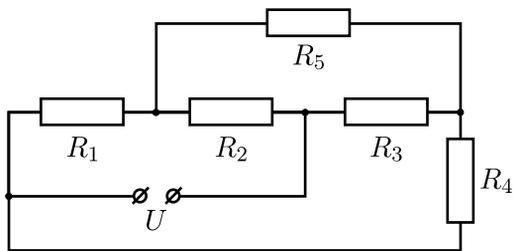
Нарисуйте возможные схемы электрической цепи.

◇ **3.41.** [8–9] (2003, 8–2) Школьник спаял схему, состоящую из двух лампочек, батарейки и двух кнопочных переключателей. Переключатель устроен так (см. рисунок), что при нажатии на кнопку контакт 1 соединяется перемычкой с контактом 3, а при отпускании кнопки пружина возвращает перемычку, и замыкаются контакты 1 и 2. Если обе кнопки в схеме не нажаты, то обе лампочки не горят. Если нажата только первая кнопка, то загорается одна лампочка, если нажата только вторая кнопка, то загорается другая лампочка. Если же нажаты

сразу две кнопки, то обе лампочки не горят. Нарисуйте возможные схемы соединения этих элементов. Учтите, что контакты батарейки при работе схемы никогда не должны замыкаться накоротко.



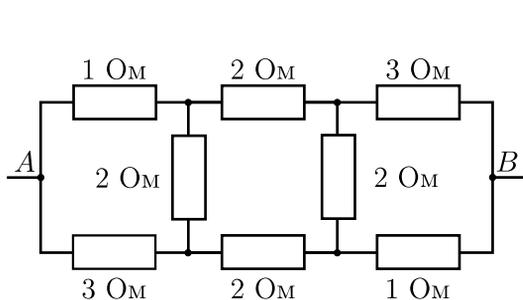
К задаче 3.41.



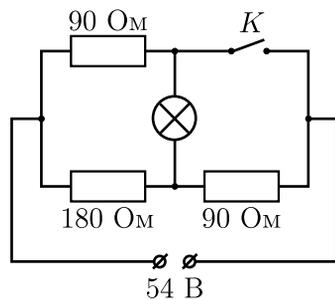
К задаче 3.42.

◇ 3.42. [8–9] (1991, 8–1) Найдите силу тока, текущего через сопротивление  $R_5$  (см. рисунок), если  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$  Ом,  $R_5 = 3$  Ом,  $U = 12$  В. Найдите также общее сопротивление цепи.

◇ 3.43. [9–10] (1986, 8–2) Определите общее сопротивление между точками  $A$  и  $B$  цепи, изображённой на рисунке.



К задаче 3.43.



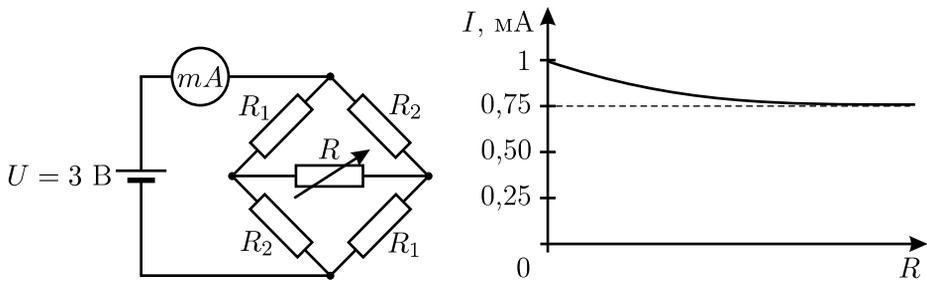
К задаче 3.44.

◇ 3.44. [9–10] (1987, 8–2) В собранной схеме (см. рисунок) лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе  $K$ . Найдите напряжение на лампочке.

3.45\*. [9–10] (2000, 9–1) Напряжение электрической сети в квартире составляет 220 В. Школьник решил сделать ёлочную гирлянду. В своих запасах он отыскал одну лампочку (36 В/40 Вт), 220 лампочек (3,5 В/0,28 А) и много соединительных проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Какую цепь, включающую лампочку на 36 В и минимальное количество лампочек на 3,5 В, он должен собрать, чтобы все лампы в его гирлянде горели нормальным накалом? Считается, что лампа горит нормальным накалом, если падение напряжения на ней отличается от напряжения, на которое она рассчитана, не более, чем на 1%.

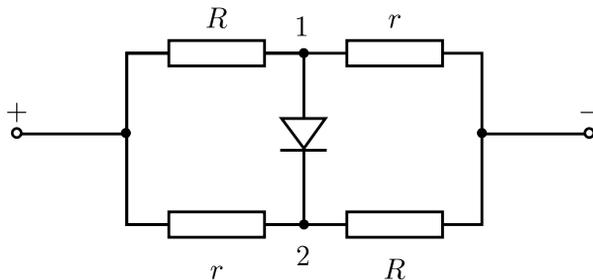
**3.46.** [10–11] (2001, 10–1) При подключении к батарее резистора  $R$  через неё течёт ток  $I$ . При подключении к этой же батарее резистора  $R$ , соединённого последовательно с неизвестным резистором, через неё течёт ток  $3I/4$ . Если же резистор  $R$  соединить с тем же неизвестным резистором параллельно и подключить к этой же батарее, то через неё будет течь ток  $6I/5$ . Найдите сопротивление неизвестного резистора.

◇ **3.47.** [9–10] (2003, 9–2) Электрическая цепь, изображённая на левом рисунке, состоит из источника постоянного напряжения  $U = 3$  В, миллиамперметра с очень маленьким внутренним сопротивлением, четырёх постоянных резисторов и одного переменного. На правом рисунке приведён график зависимости показаний миллиамперметра от величины сопротивления переменного резистора  $R$ . Найдите величины сопротивлений постоянных резисторов  $R_1$  и  $R_2$ .



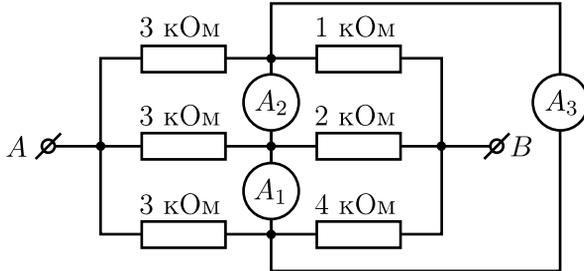
К задаче 3.47.

◇ **3.48.** [10–11] (1998, 10–2) Постройте график зависимости сопротивления цепи, изображённой на рисунке, от сопротивления резисторов  $r$ . Сопротивление резисторов  $R$  неизменно. Считайте, что сопротивление диода в прямом направлении очень мало, а в обратном — очень велико.



К задаче 3.48.

◇ **3.49\***. [10–11] (2003, 10–2) Что покажет каждый из трёх одинаковых амперметров  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  в схеме, изображённой на рисунке, при подключении клемм  $A$  и  $B$  к источнику с напряжением  $U = 3,3$  В? Сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов.



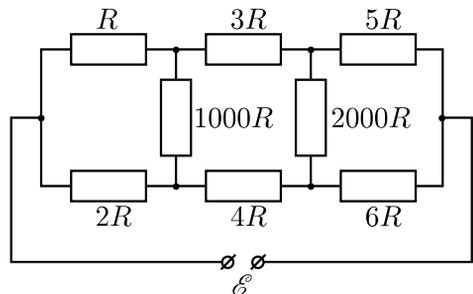
К задаче 3.49.

◇ **3.50\***. [10–11] (2000, 10–2) Оцените с точностью не хуже 1% силу тока, текущего через резистор  $1000R$  в электрической цепи, изображённой на рисунке.

**3.51.** [10–11] (2000, 10–1) Резисторы  $R$ ,  $2R$ ,  $3R$ , ...,  $100R$  соединены последовательно.

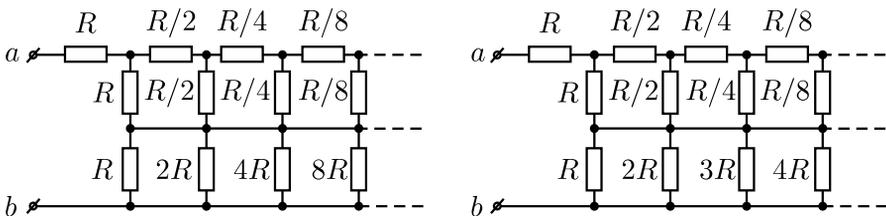
Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов,

идущих от батарейки с ЭДС  $\mathcal{E}$  и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами  $nR$  и  $(n+1)R$  нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?



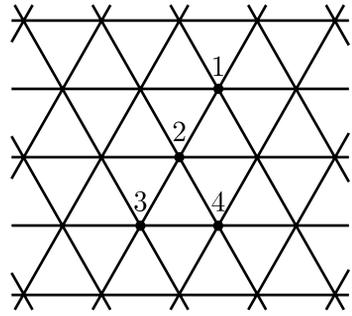
К задаче 3.50.

◇ **3.52.** [10–11] (1996, 10–1, 11–1) Найдите полное сопротивление  $R_{ab}$  для каждой из цепей, изображённых на рисунке.



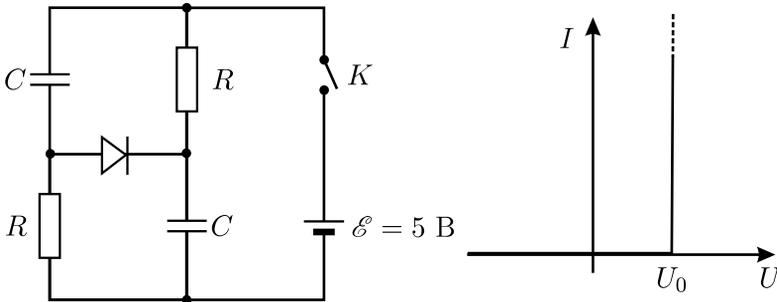
К задаче 3.52.

◇ **3.53\***. [10–11] (2005, 10–2) Имеется бесконечная сетка, составленная из одинаковых проволочек (см. рисунок). Известно, что сопротивление, измеренное между точками 1 и 2 этой сетки, равно  $R$ , а между точками 1 и 3 равно  $r$  (на самом деле эти сопротивления связаны определённым образом, но не будем усложнять себе задачу!). Найдите сопротивление между точками 1 и 4, выразив его через  $R$  и  $r$ .



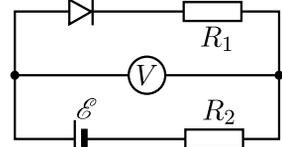
К задаче 3.53.

◇ **3.54.** [11] (1987, 10–2) В исходном состоянии схемы, приведённой на рисунке, конденсаторы не заряжены. В момент  $t = 0$  ключ  $K$  замыкают. Найдите заряд, протёкший через диод, если  $R = 10$  кОм,  $C = 10$  мкФ, а внутреннее сопротивление батареи  $r = 10$  Ом. Вольт-амперная характеристика диода приведена на графике, причём  $U_0 = 0,7$  В.



К задаче 3.54.

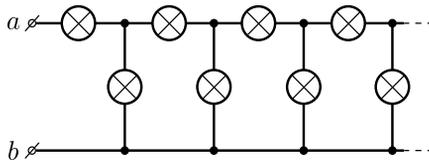
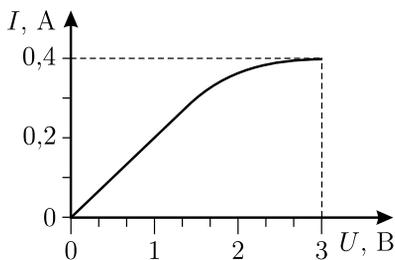
◇ **3.55.** [10–11] (2005, 10–1) В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, вольтметр и батарейка идеальные. Диод при включении в обратном направлении не пропускает ток, а при включении в прямом направлении открывается при напряжении  $U_0$  (вольт-амперная характеристика диода приведена на графике в условии [предыдущей задачи](#)). Что показывает вольтметр в этой цепи? Что он будет показывать, если изменить полярность включения диода?



К задаче 3.55.

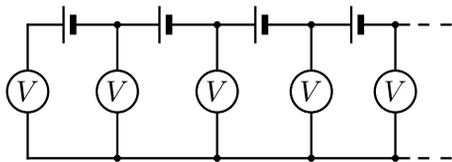
◇ **3.56\***. [10–11] (1990, 9–2) На рисунке изображена вольт-амперная характеристика некоторой лампочки накаливания. Из таких лампочек

собирают бесконечную цепь (см. рисунок). Какое максимальное напряжение можно приложить к клеммам, чтобы ни одна лампочка не перегорела?

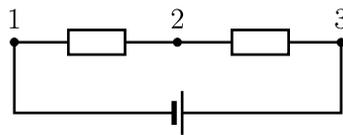


К задаче 3.56.

◇ 3.57. [10–11] (2005, 11–1) Бесконечная электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из одинаковых батареек и одинаковых вольтметров. Показание самого левого вольтметра равно  $U$ , а показание каждого из следующих вольтметров в  $n$  раз меньше, чем у соседнего с ним слева ( $n > 1$ ). Найдите ЭДС батареек.



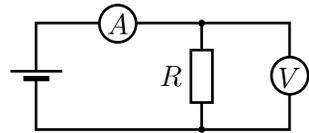
К задаче 3.57.



К задаче 3.58.

◇ 3.58. [9–10] (2003, 9–1) Школьницы Алиса и Василиса решили изготовить самодельные вольтметры из имеющихся в школьной лаборатории миллиамперметров. Алиса соединила миллиамперметр последовательно с резистором сопротивлением  $R_1 = 1$  кОм и приклеила на прибор шкалу напряжений, показывающую произведение текущего через миллиамперметр тока  $I$  на  $R_1$ . Василиса собрала ту же схему, используя другой резистор с сопротивлением  $R_2 = 2$  кОм, и приклеила шкалу, показывающую произведение  $IR_2$ . Школьницы решили испытать свои приборы, подключив их к схеме, изображённой на рисунке, с неизвестным напряжением батарейки и неизвестными сопротивлениями резисторов. Прибор Алисы при подключении к контактам 1 и 2 показал напряжение  $U_{12} = 1,8$  В, к контактам 2 и 3 — напряжение  $U_{23} = 1,8$  В, к контактам 1 и 3 — напряжение  $U_{13} = 4,5$  В. Что покажет прибор Василисы при подключении к тем же парам контактов? Внутренним сопротивлением батарейки и миллиамперметров пренебречь.

◇ **3.59.** [9–10] (2002, 9–2) Для измерения сопротивления резистора  $R$  собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра (см. рисунок). Вольтметр подключён параллельно резистору и показывает  $U_1 = 1$  В, амперметр подключён к ним последовательно и показывает  $I_1 = 1$  А. После того, как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать  $U_2 = 2$  В, а амперметр  $I_2 = 0,5$  А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивления резистора, амперметра и вольтметра.



К задаче 3.59.

**3.60.** [10] (2004, 10–2) Два школьника на уроке физики собрали самодельные приборы для измерения сопротивлений — омметры, состоящие из последовательно соединённых батарейки, резистора и амперметра, причём эти элементы у каждого школьника были разные. Потом они откалибровали свои приборы, подключая к ним резисторы с известными сопротивлениями, и нанесли на шкалы амперметров эти значения сопротивлений. Далее школьники решили вместе измерить неизвестное сопротивление  $R_x$  резистора, одновременно подключив параллельно к нему оба своих прибора с соблюдением одинаковой полярности батареек. При этом один прибор показал значение сопротивления, равное  $R_1$ , а второй —  $R_2$ . Каково истинное значение  $R_x$ ?

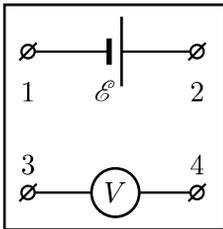
**3.61.** [10] (1998, 10–1) Мы хотим измерить ЭДС батарейки для наручных часов. У нас есть два посредственных, но исправных вольтметра разных моделей. Подключив первый вольтметр к батарейке, мы получили значение напряжения  $U_1 = 0,9$  В. Подключив второй вольтметр —  $U_2 = 0,6$  В. Недоумевая, мы подключили к батарейке оба вольтметра одновременно (параллельно друг другу). Они показали одно и то же напряжение  $U_0 = 0,45$  В. Объясните происходящее и найдите ЭДС батарейки  $\mathcal{E}_0$ .

**3.62.** [9–10] (1993, 10–1) Многопредельный амперметр представляет собой миллиамперметр с набором сменных шунтов. Им измеряют ток в некоторой цепи. На пределе «1 мА» прибор показал  $I_1 = 1$  мА; когда его переключили на предел «3 мА» —  $I_2 = 1,5$  мА. Тем не менее прибор оказался исправным — он точно показывает величину протекающего через него тока. Каков истинный ток  $I_0$  в цепи без амперметра?

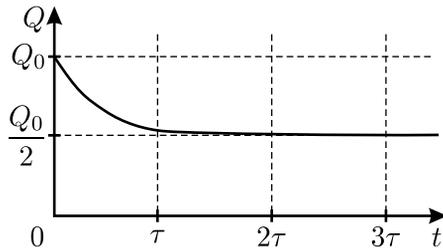
**3.63.** [8–9] (1990, 8–1) У «чёрного ящика» есть три клеммы. Если на клеммы  $A$  и  $B$  подают напряжение 20 В, то с клемм  $B$  и  $C$  снимают напряжение 8 В. Если на клеммы  $B$  и  $C$  подают напряжение 20 В, то с клемм  $A$  и  $C$  снимают напряжение 15 В. Изобразите схему «чёрного ящика», считая, что внутри него находятся только резисторы.

**3.64.** [9–10] (1999, 9–2) В «чёрном ящике» с тремя контактами находится схема, составленная из батарейки с известной ЭДС  $\mathcal{E}$ , двух неизвестных сопротивлений и соединительных проводов. Амперметр, подключённый к контактам 1 и 2, показывает значение тока  $I$ , к контактам 1 и 3 — ток  $2I$ , а к контактам 2 и 3 — отсутствие тока. Чему могут быть равны величины сопротивлений? Сопротивлением батарейки, амперметра и соединительных проводов пренебречь.

◇ **3.65.** [10–11] (2004, 10–1) Внутри «чёрного ящика» между клеммами включена схема, состоящая из нескольких одинаковых резисторов. Между клеммами 1 и 2 включена батарейка с ЭДС  $\mathcal{E}$  и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а между клеммами 3 и 4 — идеальный вольтметр с нулевым делением посередине шкалы (см. рисунок). Если включить такой же резистор, как те, что находятся внутри ящика, между клеммами 1 и 3 или между клеммами 2 и 4, то вольтметр покажет напряжение  $+U$ , а если включить этот резистор между клеммами 1 и 4 или между клеммами 2 и 3, то вольтметр покажет напряжение  $-U$ . Если резистор не включать, то вольтметр показывает нулевое напряжение. Нарисуйте схему возможных соединений внутри ящика, содержащую минимальное число резисторов, и определите  $U$ .



К задаче 3.65.



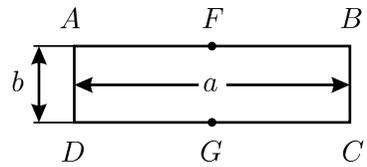
К задаче 3.66.

◇ **3.66.** [10–11] (2002, 10–1) В «чёрном ящике» с двумя контактами находится схема, состоящая из незаряженного конденсатора и резистора. К контактам в момент времени  $t = 0$  подсоединили конденсатор ёмкостью  $C$ , имеющий заряд  $Q_0$ . График зависимости заряда на этом конденсаторе от времени изображён на рисунке. Найдите сопротивление резистора и ёмкость конденсатора, находящихся в «чёрном ящике».

**3.67\*.** [10–11] (1994, 11–2) В однородную среду с большим удельным сопротивлением погружены два одинаковых металлических шара. Радиус каждого шара мал по сравнению с глубиной его погружения в среду и с расстоянием между шарами. Шары с помощью тонких изолированных проводников подключены к источнику постоянного напряжения. При этом через источник течёт ток  $I$ . Какой ток будет идти

через источник, если один из этих шаров заменить другим, у которого радиус в два раза меньше? Сопротивлением проводников и источника пренебречь.

◇ **3.68\***. [11] (2003, 11–2) Монокристаллы галлия, как и ряда других проводников, обладают анизотропией сопротивления: удельное сопротивление  $\rho_x$  галлия вдоль главной оси симметрии монокристалла (оси  $X$ ) максимально, а вдоль любой другой оси, перпендикулярной оси  $X$ , минимально и равно  $\rho$ . Из кристалла галлия вырезали тонкую прямоугольную пластинку (см. рисунок) длиной  $a = 3$  см и шириной  $b = 3$  мм так, что ось  $X$  параллельна грани  $ABCD$  пластинки и образует с ребром  $AB$  угол  $\alpha = 60^\circ$ . Если между гранями пластинки, перпендикулярными  $AB$ , создать постоянную разность потенциалов  $V = 100$  мВ, то через пластинку потечёт ток, и в её середине между точками  $F$  и  $G$  поперечного сечения будет существовать разность потенциалов  $U = 6,14$  мВ. Найдите отношение  $\rho_x/\rho$ .



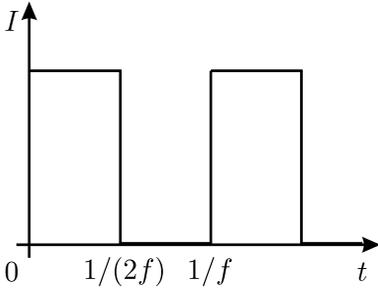
К задаче 3.68.

**3.69.** [9–10] (1989, 8–1) Лампочка, присоединённая к батарейке, горит три часа, после чего батарейка полностью разряжается. Сделали точную копию этой батарейки вдвое большего размера из тех же материалов. Сколько времени будет гореть та же лампочка, подключённая к такой копии? Внутреннее сопротивление батарейки намного меньше сопротивления лампочки.

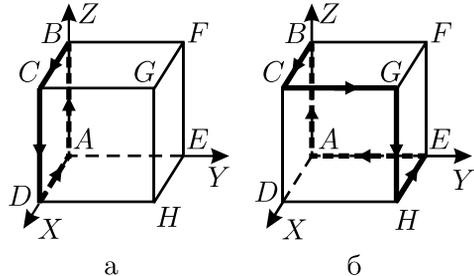
**3.70.** [10–11] (1999, 10–2) В настоящее время для проведения небольших сварочных работ иногда используют смесь водорода с кислородом, получаемую при электролизе воды. Оцените КПД устройства для электролиза воды, если напряжение между электродами одной его ячейки равно  $U = 2$  В. Известно, что при сгорании  $m = 2$  г водорода в кислороде выделяется  $Q = 0,29$  МДж тепла.

◇ **3.71.** [10–11] (1995, 10–2) В стеклянную кювету, две противоположные стенки которой покрыты слоем меди, налит водный раствор медного купороса ( $\text{CuSO}_4$ ) с удельным сопротивлением  $\rho$ . Высота слоя электролита равна  $h$ . Ширина проводящих стенок кюветы равна  $b$ , расстояние между ними  $L$ . Кювету подключают к источнику тока частотой  $f$ . Закон изменения тока показан на рисунке. Найдите изменение температуры электролита за время  $t \gg \frac{1}{f}$  после подключения, если масса катода кюветы за это время увеличилась на  $m$ . Теплоёмкость электролита равна  $C$ , атомная масса меди  $A$ . Считайте, что всё джоу-

лево тепло идёт на нагревание электролита, поляризацией электродов пренебречь.



К задаче 3.71.

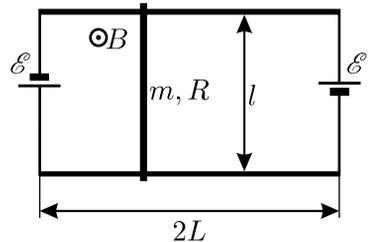


К задаче 3.72.

◇ 3.72\*. [11] (1986, 10–1) Ток  $I$ , текущий по контуру  $ABCD$ , образованному четырьмя рёбрами куба (рис. а), создаёт в центре куба магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Найдите величину и направление вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого в центре куба током  $I$ , текущим по контуру из шести рёбер  $ABCGHEA$  (рис. б).

3.73\*. [11] (1999, 11–1) Нагрузка подключена к источнику с выходным напряжением  $U = 2$  кВ с помощью длинной двухполосковой линии. Полоски линии имеют ширину  $a = 4$  см и расположены на расстоянии  $b = 4$  мм параллельно одна над другой. При некотором сопротивлении нагрузки, много большем сопротивления проводников линии, сила их взаимодействия равна нулю. Какой по величине и куда направленной будет указанная сила в расчёте на единицу длины линии, если сопротивление нагрузки увеличить в  $n = 5$  раз?

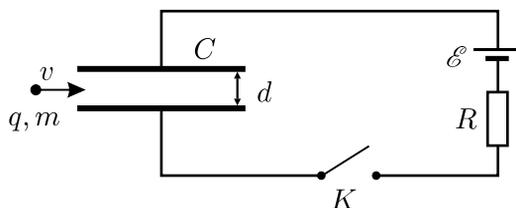
◇ 3.74. [11] (1999, 11–2) Параллельные рельсы длиной  $2L$  закреплены на горизонтальной плоскости на расстоянии  $l$  друг от друга. К их концам подсоединены две одинаковые батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  (см. рисунок). На рельсах лежит перемычка массой  $m$ , которая может поступательно скользить вдоль них. Вся система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B$ . Считая, что сопротивление перемычки равно  $R$ , а сопротивление единицы длины каждого из рельсов равно  $\rho$ , найдите период малых колебаний, возникающих при смещении перемычки от положения равновесия, пренебрегая затуханием, внутренним сопротивлением источников, сопротивлением контактов, а также индуктивностью цепи.



К задаче 3.74.

**3.75\***. [11] (1997, 11–2) Электромотор, статор которого изготовлен из постоянного магнита, включён в сеть постоянного тока с напряжением  $U$  и при заданной нагрузке на валу развивает мощность, в  $n$  раз меньшую максимальной. Пренебрегая трением, найдите ЭДС, которую создавал бы этот мотор при использовании его в качестве генератора при том же числе оборотов, с которым он вращается при работе в качестве двигателя.

◇ **3.76.** [10–11] (1997, 10–1) Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  влетает со скоростью  $v$  в плоский незаряженный конденсатор ёмкостью  $C$  параллельно его пластинам посередине между ними. В этот момент в схеме, изображённой на рисунке, замыкают ключ  $K$ . Как зависит ускорение частицы  $a$  от времени? Считайте, что время пролёта частицы через конденсатор много меньше  $RC$ , и что заряд распределяется по пластинам равномерно. Расстояние между пластинами конденсатора равно  $d$ , краевыми эффектами можно пренебречь.



К задаче 3.76.

**3.77.** [10–11] (2002, 10–1) Маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $q$ , брошенный со скоростью  $v$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, пролетев вдоль поверхности земли расстояние  $L$ , попадает в область пространства, в которой, кроме поля силы тяжести, имеется ещё и однородное постоянное горизонтальное электрическое поле. Граница этой области вертикальна. Через некоторое время после этого шарик падает в точку, откуда был произведён бросок. Найдите напряжённость электрического поля  $E$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ , влиянием воздуха пренебречь.

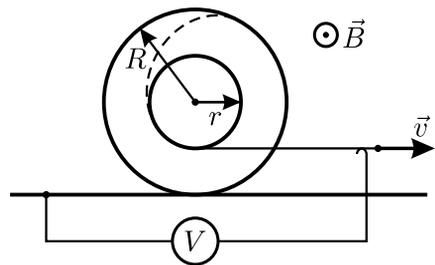
**3.78\***. [10–11] (1988, 9–2) Полый цилиндр радиусом  $R$  и высотой  $H$  заполнен электронами с концентрацией  $n$  шт/м<sup>3</sup>. Параллельно оси цилиндра приложено постоянное магнитное поле с индукцией  $B$ . Предполагая, что все электроны имеют одинаковые по величине скорости  $v$ , лежащие в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, а удары электронов о стенки цилиндра абсолютно упругие, оцените,

чему равно и как зависит от магнитного поля давление  $p$  на боковые стенки цилиндра, которое создаёт такой «электронный газ» (величину давления можно найти с точностью до постоянного коэффициента, не зависящего от магнитного поля). Заряд электрона  $-e$ , масса  $m$ . Считайте, что  $\frac{mv}{eB} \ll R$  («сильное» поле  $B$ ). Взаимодействием электронов друг с другом пренебречь.

**3.79.** [11] (2003, 11–1) Маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $q$  падал в вязкой среде вдоль вертикальной прямой с постоянной скоростью  $v$ . В некоторый момент включили постоянное однородное горизонтальное магнитное поле, и через достаточно большое время после этого шарик стал двигаться с другой постоянной скоростью таким образом, что количество теплоты, выделяющейся в вязкой среде в единицу времени, уменьшилось в  $n$  раз по сравнению с движением в отсутствие магнитного поля. Найдите, при какой максимальной величине индукции  $B$  магнитного поля такое движение возможно. Вид зависимости силы вязкого трения от скорости неизвестен.

**3.80.** [11] (2002, 11–1) Заряженная частица двигалась в некоторой области пространства, где имеются взаимно перпендикулярные однородные поля: электрическое — с напряжённостью  $E$ , магнитное — с индукцией  $B$  и поле силы тяжести  $g$ . Вектор скорости частицы при этом был постоянным и перпендикулярным магнитному полю. После того, как частица покинула эту область пространства и начала движение в другой области, где имеется только поле силы тяжести  $g$ , её скорость начала уменьшаться. Через какое время после вылета частицы из первой области её скорость достигнет минимального значения?

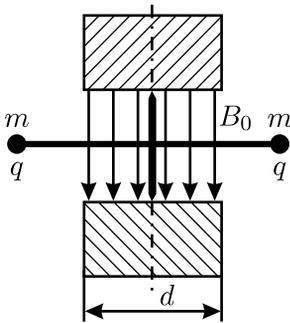
◇ **3.81\***. [11] (2002, 11–2) Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом  $r$  и двух крайних цилиндров радиусами  $R > r$ . Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещённый в однородное постоянное магнитное поле  $B$ , линии индукции которого параллельны оси катушки. К первому концу провода, лежащему на столе, подсоединяют иде-



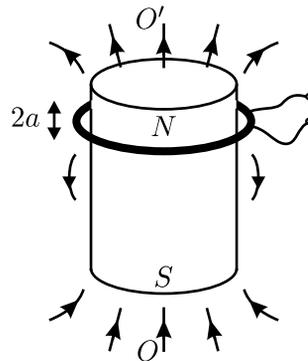
К задаче 3.81.

альный вольтметр, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединённого с вольтметром, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном оси катушки (см. рисунок). Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найдите показания вольтметра.

◇ **3.82\***. [11] (1999, 11–2) Тонкий невесомый диэлектрический стержень длиной  $L$  может свободно вращаться в горизонтальном положении вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. На концах стержня закреплены два маленьких шарика, имеющих массу  $m$  и заряд  $q$ . Вся эта система помещена между цилиндрическими полюсами электромагнита, создающего однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B_0$ . Диаметр полюсов равен  $d < L$ , а их ось совпадает с осью вращения стержня (см. рисунок; обмотки электромагнита и его ферромагнитный сердечник, замыкающий полюса, не показаны). Магнитное поле равномерно уменьшают до нулевого значения. Найдите угловую скорость, которую приобретёт стержень после выключения магнитного поля. Считайте, что поле было только между полюсами магнита.



К задаче 3.82.



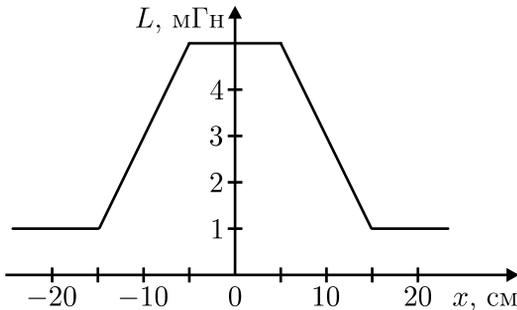
К задаче 3.83.

◇ **3.83\***. [11] (1988, 10–2) На цилиндрический постоянный магнит вблизи одного из его полюсов надета катушка (см. рисунок), имеющая вид узкого кольца; вся система симметрична относительно оси  $OO'$ . Если трясти катушку вдоль оси  $OO'$  так, чтобы она совершала гармонические колебания с амплитудой  $a = 1$  мм, много меньшей размеров магнита и катушки, и частотой  $f = 1000$  Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой  $\mathcal{E}_0 = 5$  В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток  $I = 200$  мА?

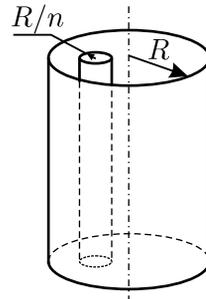
**3.84.** [11] (1988, 10–1) Известно, что сверхпроводники выталкивают из себя не очень сильное магнитное поле; при этом внутри сверхпроводника магнитное поле равно нулю. Благодаря этому эффекту кусок сверхпроводника может парить в подвешенном состоянии в магнитном поле (такая демонстрация называется «гроб Магомета»).

Положим на сверхпроводящий образец, парящий в магнитном поле, немагнитный грузик такой же массы. Во сколько раз нужно увеличить индукцию магнитного поля, чтобы образец с грузом парил на том же расстоянии от магнита, что и раньше?

◇ **3.85.** [11] (1987, 10–1) Короткозамкнутая цилиндрическая сверхпроводящая катушка имеет железный сердечник, который может перемещаться вдоль её оси. Зависимость индуктивности  $L$  катушки от смещения  $x$  центра сердечника вдоль этой оси относительно центра катушки показана на рисунке. В начальном состоянии  $x = 0$  (сердечник вставлен в катушку), ток в катушке  $I_n = 1$  А. Затем сердечник вынимают. Чему будет равен ток в катушке после этого?



К задаче 3.85.

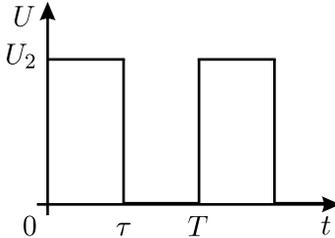


К задаче 3.86.

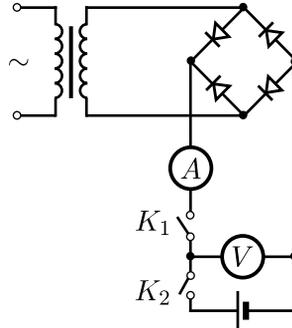
◇ **3.86\*.** [11] (1991, 11–1) Длинная сверхпроводящая цилиндрическая катушка индуктивностью  $L$  и радиусом  $R$ , по которой течёт ток  $I$ , замкнута накоротко (см. рисунок). Витки катушки намотаны густо, так что можно считать, что поле внутри катушки однородно, а вне её равно нулю. Какую работу нужно совершить, чтобы внести в катушку из бесконечности сверхпроводящий цилиндрический образец, радиус которого равен  $R/n$ , а длина равна длине катушки? Оси катушки и образца параллельны.

◇ **3.87.** [10–11] (1995, 10–1) Цепь, состоящая из двух последовательно соединённых резисторов с сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , первый из которых зашунтирован конденсатором  $C$ , подключена к источнику периодического напряжения. Определите среднее значение напряжения на конденсаторе  $U_C$ , если известно, что изменение напряжения на конден-

саторе много меньше  $U_C$ , а напряжение на втором резисторе  $U_2$  изменяется с периодом  $T$  по закону, изображённому на графике.



К задаче 3.87.



К задаче 3.88.

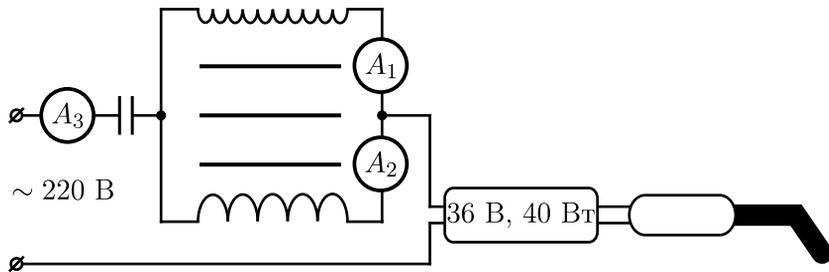
◇ **3.88\***. [11] (1992, 11–2) Аккумулятор заряжают от двухполупериодного выпрямителя, питаемого синусоидальным напряжением (см. рисунок). Диоды идеальные, амперметр и вольтметр тоже идеальные и показывают средние по времени значения. В режиме холостого хода при замкнутом ключе  $K_1$  вольтметр показывает  $U_1 = 12$  В, а ток при этом отсутствует, то есть  $I_1 = 0$ . Если замкнут только ключ  $K_2$ , то вольтметр показывает напряжение на аккумуляторе  $U_0 = 12,3$  В. Во время зарядки, при замкнутых  $K_1$  и  $K_2$ , вольтметр показывает  $U_2 = 12,8$  В, а амперметр  $I_2 = 5$  А. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора.

**3.89.** [11] (1998, 11–1) Школьник, используя вольтметр, предназначенный для измерения как постоянного, так и переменного напряжений ( $\cong$ ), обнаружил, что при подключении к розетке с обозначением « $\sim 220$ » вольтметр показывает напряжение  $U_1 = 220$  В, а при подключении к большому аккумулятору — напряжение  $U_2 = 100$  В. Какое напряжение покажет вольтметр, если соединить оба этих источника последовательно, то есть если соединить одну из клемм аккумулятора с одним из выводов розетки, а к другой клемме и второму выводу розетки подключить вольтметр?

**3.90\***. [11] (1989, 9–1) Оцените массу спирали электрической лампочки мощностью  $N = 100$  Вт, включённой в сеть переменного тока частотой  $f = 50$  Гц, если известно, что температура спирали колеблется от  $T_1 = 2500$  К до  $T_2 = 2800$  К с частотой 100 Гц. Теплоёмкость вольфрама  $C = 132$  Дж/(кг · К).

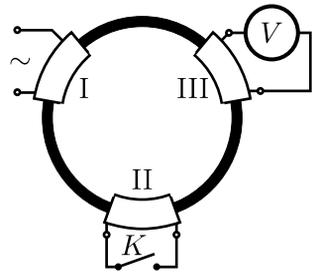
◇ **3.91.** [11] (1995, 11–1) Начинаящий радиолобитель приобрёл паяльник, на котором было написано: «36 В, 40 Вт». Посоветовавшись по телефону с приятелями, он выяснил, что в сеть 220 В, 50 Гц

этот паяльник можно включить либо через трансформатор 220/36 В, либо через подходящий конденсатор. Рассчитав ёмкость конденсатора, он приобрёл на всякий случай и нужный конденсатор, и трансформатор. Затем он собрал схему, приведённую на рисунке, и обнаружил, что паяльник работает нормально. Для контроля за работой схемы он установил три амперметра, показывающих эффективное значение тока. Каковы показания этих амперметров?



К задаче 3.91.

◇ **3.92\***. [11] (1991, 11–2) На тороидальном сердечнике трансформатора симметрично расположены три одинаковые обмотки. Одну из обмоток подключили к источнику переменного напряжения, вторую оставили разомкнутой, а к третьей подключили вольтметр (см. рисунок). Оказалось, что вольтметр показывает половину напряжения источника. Что он покажет, если вторую обмотку замкнуть накоротко? Считайте сопротивления обмоток пренебрежимо малы, вольтметр и источник — идеальными, магнитную проницаемость сердечника — не зависящей от величины магнитной индукции.

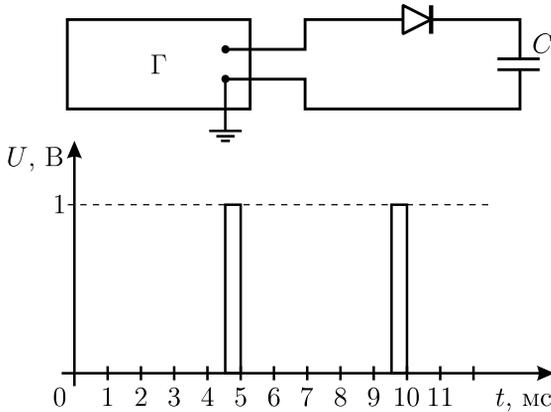


К задаче 3.92.

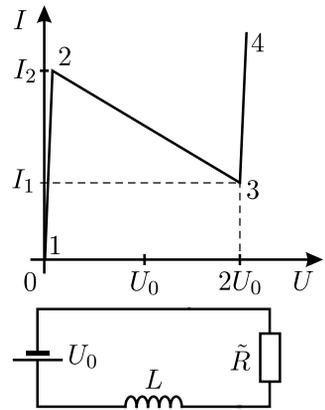
**3.93.** [11] (2000, 11–1) В вашем распоряжении имеются источник синусоидального напряжения с амплитудой  $U$ , соединительные провода и идеальный трансформатор с двумя отдельными обмотками, отношение чисел витков в которых равно 1 : 3. Найдите амплитуды напряжений, которые можно получить с помощью этого оборудования.

◇ **3.94\***. [11] (1990, 10–1) Ток через диод в диапазоне напряжений  $U$  от  $-5$  В до  $+0,1$  В хорошо описывается формулой  $I(U) = I_0(2^{U/W} - 1)$ , где  $I_0 = 10$  мкА и  $W = 0,01$  В. Этот диод последовательно с конденсатором ёмкостью  $C = 100$  мкФ подключают к генератору прямоугольных

импульсов (см. рисунок). Зависимость напряжения на клеммах генератора от времени показана на рисунке. Найдите зависимость напряжения на конденсаторе от времени в установившемся режиме.



К задаче 3.94.



К задаче 3.95.

◇ **3.95\***. [11] (1989, 10–2) Имеется нелинейный электронный прибор  $\tilde{R}$ . На графике для него изображена зависимость тока  $I$  от напряжения  $U$  (на участках 1–2 и 3–4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из  $\tilde{R}$ , индуктивности  $L$  и идеальной батарейки с ЭДС, равной  $U_0$ , причём прибор  $\tilde{R}$  включён с «правильной» полярностью, соответствующей графику. Постройте график зависимости силы тока в цепи от времени и найдите период колебаний тока.

**3.96.** [11] (2003, 11–1) Колебательный контур состоит из разнесённых в пространстве катушки индуктивности  $L$  с малым сопротивлением и плоского воздушного конденсатора ёмкостью  $C$ , расстояние между пластинами которого равно  $d$ . Пластины конденсатора не заряжены, и ток в контуре не течёт. За время  $\tau \ll \sqrt{LC}$  в области пространства, где находится конденсатор, создали однородное электрическое поле  $E$ , направленное перпендикулярно пластинам. Катушка при этом осталась вне электрического поля. Каким будет в дальнейшем максимальный ток в контуре?

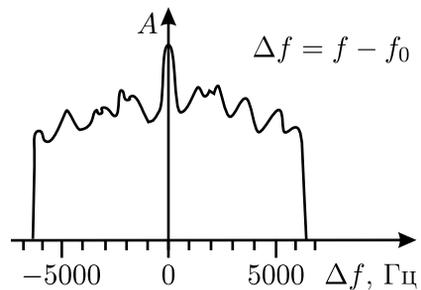
## Волны. Оптика. Кванты

**4.1\*.** [9–11] (2001, 9–2) Два тонких стержня помещены в воду так, что они параллельны и расстояние между ними равно  $a$ . По одному из стержней резко ударяют. Через какое время звук от удара дойдёт до точки на втором стержне, удалённой от места удара на расстояние  $\sqrt{a^2 + l^2}$ , если скорости звука в воде и в стержне равны  $c$  и  $v$  соответственно?

**4.2\*.** [10–11] (1996, 11–2) В океане на расстоянии  $L = 3$  км друг от друга находятся два корабля. Глубина под ними  $H = 1$  км. На одном из кораблей произведён выстрел из орудия. Через какое время после выстрела гидроакустик второго корабля зафиксирует приход первого, второго и третьего звуковых сигналов? Скорость звука в воде  $v_1 = 1,5$  км/с. Дно океана ровное и состоит из скальных пород, в которых скорость распространения звука  $v_2 = 4,5$  км/с. Скорость звука в воздухе во время стрельбы  $v_3 = 333$  м/с. Волнение на поверхности океана отсутствует.

**4.3.** [11] (1997, 11–1) На вращающейся карусели, имеющей радиус  $R = 5$  метров, катается гармонист. При какой максимальной угловой скорости  $\omega$  вращения карусели музыка, исполняемая гармонистом, не звучит фальшиво для слушателей, находящихся на земле, если хороший слух позволяет различить высоту звуков в четверть тона? Два звука отличаются на четверть тона, когда отношение их частот равно  $\sqrt[24]{2} \approx 1,0293$ . Скорость звука в воздухе в условиях опыта считать равной  $c = 346$  м/с.

◇ **4.4.** [11] (1988, 10–2) Определить скорость ветра в смерче обычными метеорологическими приборами трудно (поскольку смерч невелик по размеру и движется) и небезопасно. Предложено измерять её издали с помощью портативного радара, так как внутри смерча много пыли и мелких предметов, отражающих радиоволны. Радар излучает радиоволны на частоте  $f_0 = 10^{10}$  Гц. Спектр отражённого от смерча сигнала приведён на рисунке. Найдите максимальную скорость ветра в смерче.



К задаче 4.4.

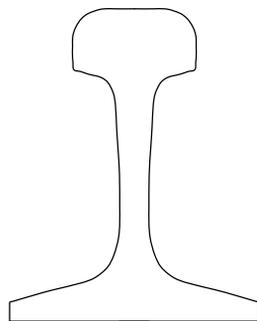
**4.5.** [11] (1988, 10–2) Недавние исследования показали, что в океане свойства воды сильно изменяются с глубиной. Например,

в северных широтах скорость звука возрастает с глубиной по закону  $c(z) = c_0(1 + az)$ , где  $c_0$  — скорость звука у поверхности воды,  $z$  — глубина,  $a$  — постоянная величина. На какую максимальную глубину проникнет в такой среде звук, излученный направленным излучателем вблизи поверхности воды под углом  $\alpha$  к вертикали? Закон преломления звуковых волн полностью аналогичен закону преломления света.

**4.6.** [9–11] (2002, 9–1) Не дождавшись автобуса, пешеход пошёл пешком к следующей автобусной остановке, павильон которой был виден вдаль. Через некоторое время он обнаружил, что кажущаяся высота этого павильона в  $k = 1,5$  раза меньше кажущейся высоты павильона, от которого он отошёл. Пройдя ещё  $L = 100$  метров, пешеход заметил, что, наоборот, павильон впереди кажется ему в  $k = 1,5$  раза выше павильона позади. Найдите расстояние между остановками. Считайте, что кажущийся размер предмета обратно пропорционален расстоянию до него. Остановочные павильоны одинаковы, пешеход идёт по соединяющей их прямой.

**4.7.** [9–11] (1999, 9–1) Пассажир автобуса, едущего вдоль прямого канала с водой, наблюдает за световым бликом, который отбрасывается спокойной поверхностью воды от фонаря, стоящего на противоположном берегу канала. Найдите скорость движения блика по поверхности воды относительно берегов канала, если высота фонаря над поверхностью воды  $H$ , высота глаз пассажира над поверхностью воды  $h$ , скорость автобуса  $v$ .

◇ **4.8\*.** [11] (1999, 11–1) На каком расстоянии от въезда на станцию метро находится поезд, когда пассажир, стоящий на краю платформы около конца тоннеля, начинает видеть блик от света фар на рельсах? Перед въездом на станцию расположен достаточно длинный поворот с радиусом закругления  $R$ . Считайте, что тоннель горизонтален, а его сечение — прямоугольник шириной  $l \ll R$ , расстояние между рельсами  $h \ll R$ , фары поезда расположены точно над рельсами, профиль рельса изображён на рисунке.



К задаче 4.8.

**4.9.** [9–11] (1994, 11–1) Если внимательно присмотреться к своему отражению, видимому в плоском стеклянном зеркале с посеребрённой задней поверхностью, то помимо основного изображения можно увидеть ещё два дополнительных изображения меньшей яркости. Как они будут располагаться относительно основного изображения? Толщина стекла равна  $d$ , показатель преломления  $n$ .

**4.10\***. [11] (1989, 10–2) Если посмотреть на снег в солнечный зимний день, то можно увидеть, что снег «искрится». Считая, что поверхность снега состоит из хаотически расположенных плоских кристалликов со средним размером грани  $d = 1$  мм, оцените среднее расстояние  $D$  между соседними блёстками. Как изменится  $D$ , если смотреть, закрыв один глаз? Угловой диаметр Солнца  $\varphi = 0,5^\circ$ .

**4.11.** [11] (1989, 10–1) Вы смотрите с расстояния  $L = 2$  м на своё отражение в ёлочном шарике диаметром  $D = 10$  см. На каком расстоянии от вас должен стоять ваш двойник, чтобы вы видели его таким же маленьким, как ваше изображение в шарике?

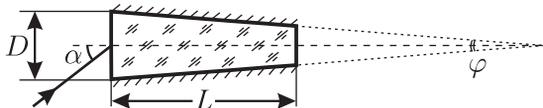
**4.12\***. [11] (1986, 10–2) Два плоских зеркала образуют двугранный угол  $80^\circ$ , в котором находится точечный источник света. Сколько всего различных изображений источника можно увидеть?

**4.13\***. [11] (2001, 10–2) Два плоских зеркала образуют двугранный угол. Точечный источник света находится внутри этого угла и равноудалён от зеркал. При каких значениях угла  $\alpha$  между зеркалами у источника будет ровно  $N = 100$  различных изображений?

**4.14.** [10–11] (2005, 10–1) На горизонтальном столе стоит прозрачный цилиндр с радиусом основания  $R$  и высотой  $H_1$ , изготовленный из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . На высоте  $H_2$  над верхним основанием цилиндра на его оси расположен точечный источник света. Найти площадь тени, отбрасываемой цилиндром на поверхность стола.

**4.15.** [11] (2000, 11–1) Наблюдатель, находящийся в помещении на расстоянии  $L = 3$  м от окна, покрытого снаружи множеством мелких водяных капель, видит на нём светлое пятно радиусом  $r = 10$  см от очень далёкого фонаря, расположенного на одном уровне с наблюдателем. Определите, какой максимальный угол составляет поверхность капель с поверхностью стекла. Показатель преломления воды  $n = 4/3$ . Дифракцию света на каплях не учитывайте.

◇ **4.16\***. [11] (2000, 11–2) Стеклопластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (см. рисунок). Основание трапеции равно  $D$ , высота  $L$ , а угол между боковыми сторонами  $\varphi \ll 1$ . Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла равен  $n$ . При каких углах падения  $\alpha$  луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?

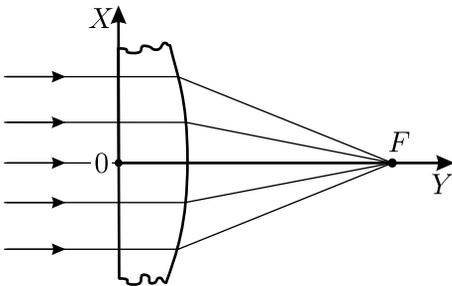


К задаче 4.16.

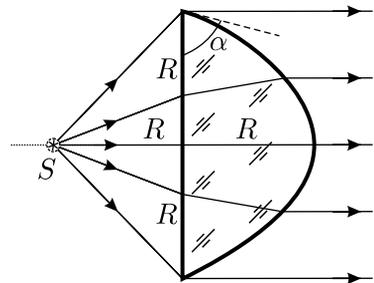
**4.17\***. [11] (2001, 11–2) Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объём смеси равен суммарному объёму компонентов до смешивания. Показатель преломления света  $n$  смеси зависит от концентраций молекул ацетона  $N_A$  и бензола  $N_B$  следующим образом:  $n^2 = 1 + K_A N_A + K_B N_B$ , где  $K_A$  и  $K_B$  — некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится  $V = 200$  мл смеси ацетона и бензола при температуре  $T_1 = 50$  °С. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны  $\lambda = 546$  нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Какое количество и какой жидкости — ацетона или бензола — нужно долить в колбу после её охлаждения до температуры  $T_2 = 20$  °С, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Показатели преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре  $T_2$  равны  $n_A = 1,36$  и  $n_B = 1,50$  соответственно, а у стекла  $n_C = 1,47$ . Коэффициенты объёмного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от  $T_2$  до  $T_1$  одинаковы и равны  $\mu = 0,00124$  К<sup>-1</sup>. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.

**4.18\***. [11] (1997, 11–2) В веществе, показатель преломления которого монотонно зависит от одной из декартовых координат, луч света может распространяться по дуге окружности. Найдите вид зависимости показателя преломления от этой координаты.

◇ **4.19\***. [11] (1987, 10–2) Широкий параллельный пучок света перпендикулярно падает на плоскую поверхность стеклянной пластины с показателем преломления  $n$ . Найдите, какому условию должна удовлетворять функция  $y = y(x)$  (см. рисунок), определяющая форму правой поверхности пластины, для того, чтобы все лучи, пройдя через пластину, собирались бы в точке  $F$ , и покажите, что для малых отклонений  $x$  от оси симметрии правая поверхность представляет собой сферу.



К задаче 4.19.



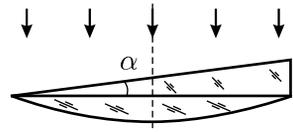
К задаче 4.20.

◇ **4.20\***. [11] (2001, 11–1) Имеется толстая плоско-выпуклая одно-

родная осесимметричная линза (см. рисунок). Радиус  $R$  её плоского основания равен её толщине. Угол  $\alpha$  между ограничивающими её поверхностями в месте их пересечения меньше  $90^\circ$ . На её оси симметрии со стороны плоского основания помещают точечный источник света. Расстояние от него до линзы равно  $R$ . Выпуклая поверхность линзы гладкая, а её форма такова, что все лучи, прошедшие через линзу без отражений, образуют строго параллельный пучок с плоским фронтом, диаметр которого равен диаметру линзы. Определите угол  $\alpha$ .

**4.21.** [11] (1994, 11–2) Между объективом фотоаппарата с фокусным расстоянием  $F = 16$  мм и плёнкой установлен жёлтый светофильтр из стекла толщиной  $d = 1$  мм с показателем преломления  $n = 1,5$ . Фотоаппарат фокусируют на бесконечность, производят съёмку, после чего светофильтр, не меняя положения объектива, убирают. На какое расстояние будет теперь сфокусирован аппарат?

◇ **4.22.** [11] (1992, 11–1) Некто изготовил странную плосковыпуклую линзу. Радиус сферической поверхности  $R$ , угол  $\alpha$  мал. Толщина линзы в любом месте много меньше её радиуса  $r$ . Что сделает линза с параллельным пучком



К задаче 4.22.

света, падающим на неё, как показано на рисунке? Будет ли у неё фокус, и если да, то где? Показатель преломления стекла линзы равен  $n$ .

**4.23.** [11] (1986, 10–1) Точечный источник света находится на расстоянии  $L$  от экрана. Тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F > L/4$ , параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будет минимальным?

**4.24.** [11] (1993, 11–1) Киноаппаратом со скоростью  $f = 24$  кадра в секунду снимают колебания математического маятника. Одно полное колебание занимает  $N = 48$  кадров. Длина маятника на плёнке  $l = 10$  мм, фокусное расстояние объектива  $F = 70$  мм. С какого расстояния  $L$  снимали маятник?

**4.25.** [11] (2002, 11–1) В случае помутнения хрусталика людям делают операцию по замене естественного хрусталика на искусственный. Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет владельцу без очков чётко видеть далёкие предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах — это называется аккомодацией), искусственный хрусталик жёсткий и «перестраиваться» не может. Оцените оптическую силу очков, дающих возможность без труда читать книгу, находящуюся на расстоянии  $d = 0,3$  м от глаза.

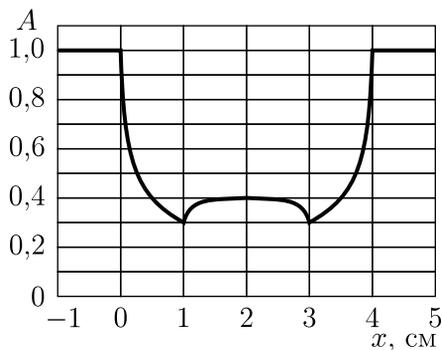
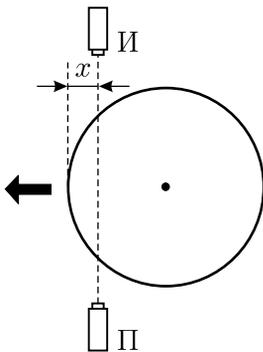
**4.26\***. [11] (1990, 11–1) Сильно близорукий человек, носящий очки с оптической силой  $D = -10$  дптр, чётко видит удалённые предметы, если очки надеты нормально. До какого максимального расстояния он сможет видеть чётко, если очки у него сползут на нос и окажутся от глаз на  $l = 1$  см дальше, чем обычно?

**4.27\***. [11] (2002, 11–2) На расстоянии  $a = 20$  см от тонкой собирающей линзы вдоль её главной оптической оси расположена тонкая короткая палочка. Длина её действительного изображения, даваемого линзой, в  $k = 9$  раз больше длины палочки. Во сколько раз изменится длина изображения, если сдвинуть палочку вдоль оси на  $\Delta a = 5$  см дальше от линзы?

*Примечание:* при  $|x| \ll 1$  справедлива формула  $1/(1+x) \approx 1-x$ .

**4.28\***. [11] (1989, 10–2) Известно, что когда луч света падает на плоскую стеклянную пластинку перпендикулярно её поверхности, 8% световой энергии отражается, а 92% проходит. Иначе говоря, коэффициент отражения  $R = 0,08$ , коэффициент пропускания  $T = 0,92$  (здесь уже учтено отражение от обеих поверхностей пластинки). Найдите коэффициент пропускания стопки из  $n$  пластинок.

**4.29\***. [11] (1998, 11–2) Найдите коэффициент отражения, то есть долю энергии, которая отражается от системы, состоящей из толстой плоскопараллельной стеклянной пластины и расположенного за ней зеркала. Свет падает перпендикулярно поверхности пластины. Зеркало расположено параллельно пластине и отражает весь падающий на него свет. Коэффициенты отражения, поглощения и пропускания стеклянной пластины равны  $R$ ,  $A$  и  $T$  соответственно, причём  $R + A + T = 1$ . Рассеянием и поглощением света в воздухе пренебречь.

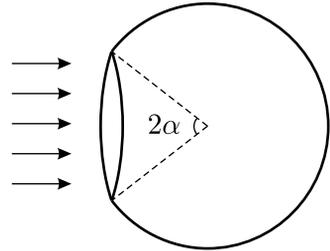


К задаче 4.30.

◇ **4.30.** [10–11] (1997, 10–1) Рентгеновский аппарат состоит из точечных источника «И» и приёмника «П», жёстко закреплённых на станине.

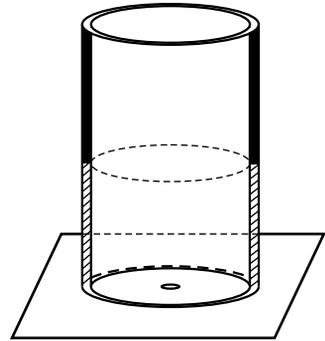
Между источником и приёмником перемещают цилиндрический толсто-стенный баллон (см. рисунок). При этом интенсивность  $A$  рентгеновского излучения, регистрируемого приёмником, зависит от координаты  $x$  так, как показано на рисунке. Есть ли внутри баллона содержимое, поглощающее рентгеновские лучи?

◇ **4.31\***. [9–11] (1988, 8–2) Посеребрённая изнутри (зеркальная) стеклянная сфера имеет круглое отверстие с углом раствора  $2\alpha$ , в которое падает однородный параллельный пучок лучей, перпендикулярный плоскости отверстия (см. рисунок). Часть лучей, претерпев одно отражение, выйдет из сферы обратно через отверстие. Какую долю мощности вошедшего пучка они составляют? Угол  $\alpha$  — произвольный.



К задаче 4.31.

◇ **4.32\***. [11] (1990, 11–2) Внутренняя поверхность трубы, длина которой много больше диаметра, на половину длины зеркальна, а оставшаяся половина зачернена (см. рисунок). Трубу ставят на чёрный стол зеркальной половиной вниз так, что расположенный на столе фотозащитный элемент находится на оси трубы. При этом освещённость фотозащитного элемента равна  $E_0$ . Какой она станет, если трубу перевернуть? Стол с трубой освещается равномерно рассеянным (изотропным) светом.



К задаче 4.32.

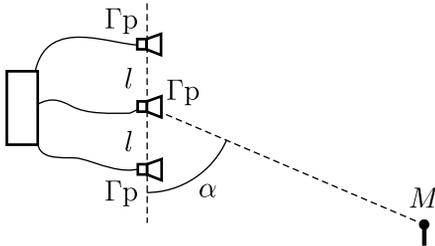
**4.33\***. [11] (2004, 11–1) В вертикальный цилиндрический стакан налита вязкая жидкость с коэффициентом преломления  $n = 1,5$ . Сверху в стакан вертикально падает параллельный пучок света постоянной интенсивности. Стакан с жидкостью раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega = 1$  рад/с, и при этом высота столба жидкости на оси стакана стала равной  $h = 30$  см. На сколько процентов изменилась после раскручивания интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, поглощением света в жидкости и отражением его внутри стакана пренебречь.

**4.34\***. [11] (2003, 11–2) Путнику, возвращавшемуся тёмной ночью домой, в свою деревню, по дороге, идущей прямо к его дому, с расстояния  $r = 5$  км стал виден огонёк свечи в одном из окон. Внутри дома вблизи соседнего окна стоит наряженная к Новому году ёлка с зеркаль-

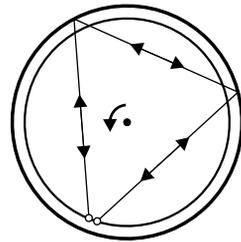
ными шарами. Оцените, на каком расстоянии от дома путнику станет видно отражение свечи в ёлочном шаре диаметром  $D = 10$  см, если он идеально отражает свет и находится на расстоянии  $a = 1,8$  м от свечи на линии, перпендикулярной дороге? Окна одинаковые, свеча горит ровно.

**4.35\***. [11] (1991, 11–1) Вы смотрите на запылённый вертикальный экран портативного телевизора, стоящего на большом столе. Прямо над вашей головой на высоте  $H$  над столом висит мощная лампа, излучающая свет равномерно во все стороны. На каком расстоянии  $l$  от вас стоит на столе телевизор, если паразитная засветка его экрана от лампы максимальна? Отражение света лампы от стола не учитывайте.

◇ **4.36**. [11] (1994, 11–2) Три небольших громкоговорителя  $\Gamma p$  расположены на одной линии, расстояние между соседними громкоговорителями равно  $l$ . Громкоговорители подключены к одному генератору звуковых колебаний и излучают звуковые волны с длиной волны  $\lambda = 0,75$  м. При каком минимальном расстоянии  $l$  между громкоговорителями чувствительный микрофон  $M$  не регистрирует звука от громкоговорителей? Угол между линией, соединяющей громкоговорители, и направлением на микрофон  $\alpha = 60^\circ$  (см. рисунок). Расстояние от громкоговорителей до микрофона достаточно велико.



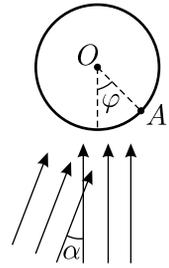
К задаче 4.36.



К задаче 4.37.

◇ **4.37\***. [11] (1990, 11–2) Цилиндр радиусом  $R$  с зеркальной внутренней поверхностью закреплён на столе в вертикальном положении. Внутри цилиндра находится поворотный столик, на котором вблизи поверхности цилиндра расположены маленький источник монохроматического света частотой  $f$  и рядом с ним — приёмник света. Источник испускает два узких луча, которые попадают в приёмник после двух отражений от стенок цилиндра, причём один идёт по часовой стрелке, а другой навстречу ему (см. рисунок). При этом оба луча приходят к приёмнику в одной фазе. Пусть теперь столик приходит во вращение с угловой скоростью  $\Omega$ . Найдите сдвиг фаз  $\Delta\varphi$  между первым и вторым лучами.

◇ 4.38. [11] (1999, 11–2) Две плоские когерентные волны с одинаковой интенсивностью и длиной волны  $\lambda$  падают на цилиндрический экран. Угол между направлениями распространения волн равен  $\alpha$  (см. рисунок). Найдите расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи точки  $A$ , считая, что оно много меньше радиуса цилиндра. Угол между направлением  $AO$  и направлением одной из плоских волн равен  $\varphi$ .



К задаче 4.38.

4.39. [11] (1996, 11–1) Стандартный компакт-диск представляет собой залитую прозрачным пластиком тонкую металлическую пластинку, на которую штамповкой нанесено множество микроскопических углублений, в каждом из которых закодирован один бит информации. Оцените максимальное значение длины волны лазера, используемого для считывания информации в дисковом деде для компакт-дисков, если известно, что полезная ёмкость одного диска составляет  $W = 640$  Мбайт, а его диаметр равен  $D = 12$  см. Сколько информации можно было бы записать на такой диск при использовании лазера на нитриде галлия, излучающего свет с длиной волны  $\lambda = 0,36$  мкм? Компакт-диски имеют только одну рабочую сторону.

4.40. [11] (1986, 10–2) Известно, что расстояние до Солнца  $d = 150$  млн. км, его видимый угловой диаметр  $\alpha \approx 0,5^\circ$ , температура на поверхности  $T_\odot = 5800$  К, плотность потока энергии солнечного света на Земле составляет  $w \approx 1,4$  кВт/м<sup>2</sup>. Исходя из этого, оцените вклад теплового излучения в процесс остывания стакана воды. Оцените, сколько времени он остывал бы от  $100^\circ\text{C}$  до  $80^\circ\text{C}$ , если бы тепло терялось только за счёт излучения.

4.41. [11] (1988, 10–1) Нагретое до температуры  $T$  чёрное тело излучает с квадратного метра поверхности мощность  $W = \sigma T^4$ ;  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>). Оцените температуру поверхности быстро вращающегося астероида, если угловой диаметр Солнца, видимого с него, равен  $\alpha = 1,5^\circ$ . Температура поверхности Солнца  $T_0 \approx 6 \cdot 10^3$  К. Внутренних источников тепла у астероида нет.

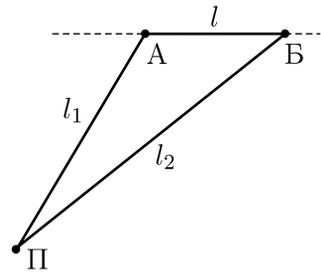
4.42\*. [11] (1991, 11–2) Чёрный шарик радиусом  $r = 1$  мм подвешен на тонкой нити длиной  $l = 1$  м. Вся система помещена в вакуумированную стеклянную трубку с аргоном при давлении  $p_0 = 0,1$  Па. Шарик освещают горизонтальным пучком света, плотность потока энергии в котором равна  $w_0 = 100$  Дж/(м<sup>2</sup> · с). Оцените величину отклонения шарика от положения равновесия под действием света. Теплопроводностью шарика пренебречь. Учтите, что абсолютно чёрное тело, нагретое до абсолютной температуры  $T$ , излучает с единицы поверхности за

единицу времени энергию, равную  $\sigma T^4$ , где  $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>). Температура газа в трубке постоянна и равна  $T_0 = 293$  К. Молярная масса аргона  $\mu = 0,04$  кг/моль, плотность шарика  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>.

**4.43.** [10–11] (1994, 10–1) «Фотонная ракета». Оцените, какой мощности лампочку нужно вернуть в рефлектор настольной лампы массой  $m = 1$  кг, чтобы она взлетела со стола под действием сил светового давления. Скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

**4.44\*.** [11] (1996, 11–1) В цилиндре с зеркальным дном и зеркальным поршнем находится один фотон, импульс которого направлен перпендикулярно поверхности поршня, а частота равна  $\omega_0$ . Поршень начинают медленно передвигать и останавливают, когда объём сосуда уменьшается в  $k$  раз. Чему будет равна частота фотона? Считайте, что длина волны фотона много меньше размеров сосуда, а импульс фотона много меньше импульса поршня.

◇ **4.45.** [11] (1987, 10–2) Быстрая космическая частица, движущаяся с околосветовой скоростью, попадает в резервуар экспериментальной установки, заполненной жидкостью с показателем преломления  $n = 1,6$ . Прохождение частицы через жидкость сопровождается световым излучением. После попадания в установку частицы был включён находящийся в том же резервуаре прибор П, который одновременно зарегистрировал две светящиеся точки А и Б. Схема опыта в определённом масштабе приведена на рисунке. Объясните наблюдавшееся явление и, используя чертёж, найдите скорость частицы. Торможением частицы в жидкости можно пренебречь.



К задаче 4.45.

**4.46.** [11] (2000, 11–1) Природный уран состоит на  $n_1 = 0,7\%$  из изотопа  $^{235}\text{U}$  и на  $n_2 = 99,3\%$  — из  $^{238}\text{U}$ . По современным представлениям, все элементы тяжелее железа образовались при взрывах сверхновых звёзд, а после этого из получившихся газопылевых облаков возникли звёзды следующего «поколения», в частности, Солнце и планеты Солнечной системы. По-видимому, в этих выбросах всех изотопов урана было примерно поровну. Оцените, сколько лет назад произошёл тот выброс вещества, из которого сформировалась наша Земля. Период полураспада, то есть время, в течение которого число атомов данного изотопа уменьшается в 2 раза, для  $^{235}\text{U}$  равно  $T_1 = 7 \cdot 10^8$  лет, а для  $^{238}\text{U}$  —  $T_2 = 4,5 \cdot 10^9$  лет.

# Решения задач

## Механика

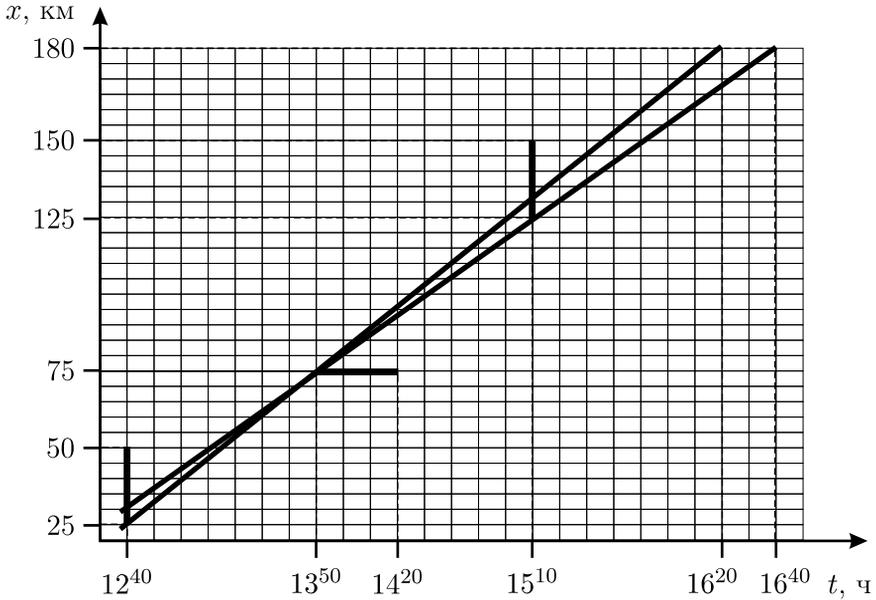


Рис. 1.1.

**1.1\*.** Эту задачу проще всего решать при помощи графического построения. Нарисуем прямоугольную систему координат «положение автомобиля — время» (« $x-t$ ») и отметим на этом чертеже последовательные положения автомобиля настолько точно, насколько нам это позволяет условие задачи. Мы знаем, что в 12 час. 40 мин. координата автомобиля  $x$  удовлетворяла неравенству  $25 \text{ км} < x < 50 \text{ км}$ , то есть положение автомобиля в указанный момент времени изображается на чертеже вертикальным отрезком. Аналогично — отрезками — изображаются и два других положения автомобиля, о которых идёт речь в условии. Известно, что при равномерном движении зависимость координаты от времени описывается формулой  $x = vt$ . При графическом изображении движения эта формула даёт нам зависимость в виде прямой линии. Значит, для того, чтобы получить ответ, нужно провести

две прямые линии, так, чтобы они обе проходили через нарисованные на чертеже отрезки, но при этом одна из прямых должна иметь максимально возможный наклон, а вторая — минимально возможный наклон. Эти прямые отсекут на горизонтальной линии, соответствующей координате  $x = 180$  км, отрезок, который и даст нам интервал времени, в течение которого можно ожидать прибытия машины в Борискино. Соответствующее построение приведено на рисунке 1.1. Из него видно, что прибытия автомобиля можно ожидать примерно с 16 час. 20 мин. до 16 час. 40 мин.

**1.2.** В условии сказано, что через 2 минуты поезд оказался около столбика с цифрой «2». Это означает, что за данное время поезд мог проехать 100 м, 1100 м, 2100 м, 3100 м, 4100 м, и т. д. Так как скорость поезда меньше 100 км/ч или  $\frac{100}{60}$  км/мин, то поезд не может проехать за 2 мин расстояние большее, чем  $\frac{2 \text{ мин} \cdot 100 \text{ км}}{60 \text{ мин}} \approx 3,3$  км. Значит, возможны только следующие значения расстояния: 100 м, 1100 м, 2100 м, 3100 м. Им соответствуют следующие значения скорости: 50 м/мин, 550 м/мин, 1050 м/мин, 1550 м/мин. Поскольку по условию расстояние от кабины машиниста до ближайшего столбика с цифрой «3» составляет 100 м, то возможные значения времени прохождения этого расстояния

$$t_1 = \frac{100 \text{ м}}{50 \text{ м/мин}} = 2 \text{ мин} = 120 \text{ с},$$

$$t_2 = \frac{100 \text{ м}}{550 \text{ м/мин}} = 0,1818 \text{ мин} = 10,9 \text{ с},$$

$$t_3 = \frac{100 \text{ м}}{1050 \text{ м/мин}} = 0,0952 \text{ мин} = 5,7 \text{ с},$$

$$t_4 = \frac{100 \text{ м}}{1550 \text{ м/мин}} = 0,0645 \text{ мин} = 3,9 \text{ с}.$$

**1.3.** Пусть один шаг занимает время  $\tau$ . Тогда при варианте движения «один шаг вперёд и два шага назад» за время  $3\tau$  пассажир смещается относительно земли на  $S_1 = 3\tau v - u\tau$ . Средняя скорость движения пассажира  $v_{\text{сп1}} = \frac{S_1}{3\tau} = \frac{L}{t}$ , где  $L$  — длина эскалатора. Отсюда  $L = \frac{3v - u}{3}t$ . Из этой формулы видно, что при  $u \geq 3v$  пассажир не сможет достичь противоположного конца эскалатора. При варианте движения «два шага вперёд и один шаг назад» за время  $3\tau$  пассажир смеща-

ется относительно земли на  $S_2 = 3\tau v + u\tau$ . Аналогично предыдущему случаю,  $v_{\text{ср}2} = \frac{S_2}{3\tau} = \frac{L}{t_1}$ , где  $t_1$  — искомое время. С учётом выражения для  $L$  получаем:

$$t_1 = \frac{3v - u}{3v + u}t.$$

**1.4.** Пусть  $u$  — скорость колонны автомобилей,  $l$  — расстояние между автомобилями в колонне. Тогда

$$t_1 = l/(u - v_1), \quad t_2 = l/(v_2 - u).$$

Здесь  $u - v_1$  и  $v_2 - u$  — относительные скорости движения инспектора и колонны в первом и во втором случаях. Отсюда

$$(u - v_1)t_1 = l; \quad (v_2 - u)t_2 = l.$$

Вычитая из первого выражения второе, находим:

$$u = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Умножая первое выражение на  $t_2$ , а второе — на  $t_1$  и складывая их, найдём  $l$ :

$$l = \frac{(v_2 - v_1)t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Отсюда промежуток времени, через который мимо неподвижного инспектора будут проезжать автомобили, равен:

$$t = \frac{l}{u} = \frac{(v_2 - v_1)t_1 t_2}{v_1 t_1 + v_2 t_2} = \frac{\left(25 \frac{\text{М}}{\text{с}} - 10 \frac{\text{М}}{\text{с}}\right) \cdot 10 \text{ с} \cdot 20 \text{ с}}{10 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot 10 \text{ с} + 25 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot 20 \text{ с}} = 5 \text{ с}.$$

**1.5.** Обозначим расстояние между велосипедистом и мотоциклистом  $S$ , а скорость пешехода  $v$ . Дальше задачу можно решать двумя способами — с помощью составления системы уравнений и графически. Рассмотрим оба способа.

1. Составим систему уравнений. Пусть велосипедист, мотоциклист и пешеход встретятся через время  $t$ . Предположим, что пешеход идёт по направлению к велосипедисту. До момента встречи мотоциклист проедет путь  $60t$ , а велосипедист — путь  $20t$ . Так как вначале расстояние между ними было равно  $S$ , то получаем уравнение:

$$60t + 20t = S.$$

Второе уравнение можно получить, рассмотрев встречу пешехода с велосипедистом или с мотоциклистом. В начальный момент времени расстояние между мотоциклистом и пешеходом было равно  $2S/3$ , а между велосипедистом и пешеходом  $S/3$ . Так как встреча произошла через время  $t$ , то справедливы соотношения:

$$\frac{2S}{3} + vt = 60t, \quad \frac{S}{3} - vt = 20t.$$

Легко видеть, что полученная система трёх уравнений не позволяет найти время  $t$  и начальное расстояние  $S$ . Однако, скорость пешехода  $v$  из неё найти можно, причём для нахождения  $v$  достаточно решить только два любых уравнения из числа имеющихся. Это связано с тем, что велосипедист, мотоциклист и пешеход встречаются в одной точке. Выражая из любого уравнения величину  $S$  и подставляя её в два оставшихся уравнения, находим скорость пешехода:

$$v = \frac{20}{3} \approx 6,7 \text{ км/ч.}$$

Скорость получилась положительной. Это означает, что мы вначале правильно решили, что пешеход идёт по направлению к велосипедисту. Если бы мы ошиблись, и предположили, что пешеход идёт в обратную сторону, то два последних уравнения изменились бы, и в результате мы бы получили величину скорости  $v \approx -6,7$  м/с. Знак «минус» показывал бы, что на самом деле пешеход идёт в обратную сторону.

2. Графический способ решения задачи более нагляден. Начертим графики зависимости положения мотоциклиста, велосипедиста и пешехода от времени в одной системе координат ( $X-t$ ) и обозначим их начальные положения буквами  $M$ ,  $V$  и  $P$  соответственно (см. рис. 1.5). За начало координат выберем положение мотоциклиста, а за момент начала отсчёта времени — начало движения. Так как движение происходит с постоянной скоростью, то графики будут представлять собой прямые линии, пересекающиеся в некоторой точке  $A$  (точка встречи). Перпендикуляр, опущенный из точки  $A$  на ось  $X$ , пересечёт её в точке  $B$  (эта точка соответствует расстоянию от начального положения мотоциклиста до места встречи). Из условия задачи вытекает следующая пропорция:

$$\frac{MP}{PV} = \frac{2}{1}.$$

Кроме того, длины отрезков  $MB$  и  $BV$  относятся так же, как скорости мотоциклиста и велосипедиста:

$$\frac{MB}{BV} = \frac{60 \text{ км/ч}}{20 \text{ км/ч}} = \frac{3}{1}.$$

Из этих пропорций вытекают следующие соотношения:

$$\frac{MV}{BV} = \frac{MB + BV}{BV} = \frac{4}{1},$$

$$\frac{MV}{PV} = \frac{MP + PV}{PV} = \frac{3}{1}.$$

Деля два последних отношения друг на друга, получаем:

$$\frac{PV}{BV} = \frac{4}{3}.$$

Наконец, используя последнее выражение, находим:

$$\frac{PB}{BV} = \frac{PV - BV}{BV} = \frac{1}{3}.$$

Но отношение длин отрезков  $PB$  и  $BV$  равно отношению скоростей пешехода и велосипедиста. Значит, скорость пешехода должна быть равна  $v = \frac{20 \text{ км/ч}}{3} \approx 6,7 \text{ км/ч}$ .

Кроме того, из чертежа видно, что пешеход должен двигаться в сторону велосипедиста.

**1.6.** Будем решать задачу в системе отсчёта, в которой скорости кораблей равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Обозначим расстояние между кораблями в момент подачи радиосигнала ( $t = 0$ ) через  $L$ . Тогда встреча радиосигнала и второго корабля состоится в момент времени  $t_1 = \frac{L}{v_2 + c}$ . В этот момент расстояние между кораблями равно

$$S = L - (v_1 + v_2)t_1 = L \left( 1 - \frac{v_1 + v_2}{v_2 + c} \right) = L \cdot \frac{c - v_1}{v_2 + c}.$$

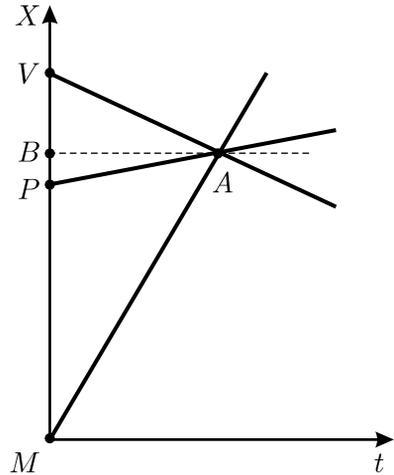


Рис. 1.5.

После отражения от второго корабля радиосигнал движется навстречу первому кораблю. До их встречи пройдёт время  $t_2 = \frac{S}{v_1 + c}$ . Общее время равно:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_2 + c} + \frac{L \left( \frac{c - v_1}{v_2 + c} \right)}{v_1 + c}.$$

Отсюда  $L = \frac{(v_1 + c)(v_2 + c)}{2c} \cdot t = 4,224 \cdot 10^8$  м. В момент приёма отражённого сигнала первым кораблём расстояние между кораблями равно:

$$L_1 = L - (v_1 + v_2)t = \frac{(c - v_1)(c - v_2)}{2c} \cdot t = 3,024 \cdot 10^8 \text{ м.}$$

*Замечание.* Относительная скорость кораблей равна  $5 \cdot 10^7$  м/с. Эта скорость в 6 раз меньше скорости света, поэтому релятивистские поправки будут не слишком велики. Они определяются множителем типа  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} \approx 0,986$ . Поэтому можно было бы решать нашу задачу в системе отсчёта, связанной, например, с первым кораблём, и использовать нерелятивистскую формулу сложения скоростей. Результат, полученный таким образом, будет отличаться от точного результата, приведённого выше, не более чем на 1,4%.

**1.7\*.** Обозначим через  $u_1$  скорость автомобиля относительно первого конвейера, а через  $u_2$  — скорость автомобиля относительно второго конвейера. Тогда время, прошедшее с момента въезда автомобиля на первый конвейер до съезда со второго, равно  $t = \frac{L}{v_1 + u_1} + \frac{L}{v_2 + u_2}$ , а счётчик пройденного автомобилем пути к моменту съезда со второго конвейера показал величину  $L = \frac{L}{v_1 + u_1} u_1 + \frac{L}{v_2 + u_2} u_2$ .

Выразим из второго уравнения скорость  $u_1 = \frac{v_1 v_2}{u_2}$  и подставим её в первое уравнение:

$$\frac{t}{L} = \frac{1}{v_1 + \frac{v_1 v_2}{u_2}} + \frac{1}{v_2 + u_2} = \frac{u_2}{v_1 u_2 + v_1 v_2} + \frac{1}{v_2 + u_2} = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{v_1 + u_2}{v_2 + u_2}.$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{v_2 t - L}{L - v_1 t} \cdot v_1 = 20 \text{ км/ч} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{v_1 v_2}{u_2} = \frac{L - v_1 t}{v_2 t - L} \cdot v_2 = 30 \text{ км/ч.}$$

**1.8.** Нарисуем график движения автомобиля (см. рис. 1.8). По горизонтальной оси будем откладывать время  $t$  в секундах, по вертикальной — пройденный путь  $S$  в километрах. Изобразим на этом графике запрещающие сигналы каждого из светофоров — красные — в виде тёмных полосок, а разрешающие — зелёные — в виде светлых промежутков между ними. Тогда график движения любого автомобиля, движущегося без остановок, должен проходить только через светлые промежутки.

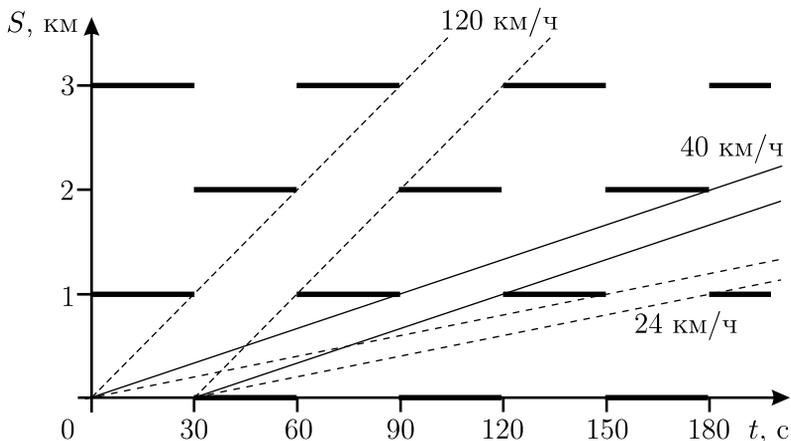


Рис. 1.8.

Заметим, что расстояние 1 км между соседними светофорами автомобиль, движущийся со скоростью 40 км/ч, проедет за  $1/40$  часа = 90 секунд. Таким образом, он сможет проехать следующий светофор без остановки, только если разрешающие и запрещающие сигналы светофоров будут распределены так, как показано на рисунке. Из графика видно, что автомобиль будет двигаться без остановок на светофорах в том случае, если он будет преодолевать 1 км за 30 с, 90 с, 150 с, ...,  $(30 + 60n)$  с, ..., где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Следовательно, скорость автомобиля, требующаяся для движения по шоссе без остановок на светофорах, может быть равна

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1 \text{ км}}{(30 + 60n) \text{ с}} = \frac{1 \text{ км} \cdot 3600}{(30 + 60n) \text{ час}} = \\ &= \frac{120}{2n + 1} \text{ км/ч} = 120 \text{ км/ч}, 40 \text{ км/ч}, 24 \text{ км/ч}, \dots \end{aligned}$$

**1.9\*.** После включения светофора машины начинают двигаться не одновременно: сначала начинают двигаться машины, стоявшие непо-

средственно рядом со светофором, затем следующие за ними, и так далее. Таким образом, после включения зелёного света вдоль пробки начинает распространяться «волна», причём реально скорость её распространения сравнима со скоростью движения машин.

Пусть за время  $T_3$ , пока горит зелёный свет, мимо светофора проезжает часть пробки длиной  $L$ . Величина  $T_3$  складывается из двух промежутков времени: времени, необходимого для того, чтобы волна прошла расстояние  $L$ , и времени, необходимого для того, чтобы машина успела это расстояние проехать. Если  $v$  — скорость машины,  $u$  — скорость распространения волны, то  $T_3 = \frac{L}{v} + \frac{L}{u}$ . Если за  $T_k$  обозначить время свечения светофора красным светом, то среднюю скорость продвижения по пробке можно вычислить по формуле  $V_{\text{cp}} = \frac{L}{T_k + T_3}$ .

Из написанных формул получаем:

$$V_{\text{cp}} = \frac{T_3}{T_k + T_3} \cdot \frac{1}{(1/v) + (1/u)}.$$

Отсюда при  $T_3 = T_k$  находим  $u = \frac{2vV_{\text{cp}}}{v - 2V_{\text{cp}}} = 6$  м/с. При увеличении времени  $T_3$  в два раза средняя скорость продвижения машин по пробке будет равна:

$$V'_{\text{cp}} = \frac{2T_3}{T_k + 2T_3} \cdot \frac{1}{(1/v) + (1/u)} = \frac{2(T_k + T_3)}{T_k + 2T_3} V_{\text{cp}} = \frac{4}{3} V_{\text{cp}} = 2 \text{ м/с}.$$

**1.10.** Пока оба автомобиля движутся по шоссе или по мосту, расстояние между ними остаётся постоянным:  $l_1 = 400$  м или  $l_2 = 200$  м. Расстояние  $l$  начинает уменьшаться, когда первый автомобиль въезжает на мост. Поэтому ясно, что второй автомобиль в этот момент ( $t_1 = 10$  с на графике) находится на расстоянии  $l_1 = 400$  м от въезда на мост. При движении первого автомобиля по мосту расстояние между ним и вторым автомобилем, движущимся по шоссе, как видно из графика, сокращается до момента времени  $t_2 = 30$  с на  $l_1 - l_2 = 200$  м за время  $t_2 - t_1 = 20$  с, то есть они сближаются со скоростью  $V_1 - V_2 = \frac{l_1 - l_2}{t_2 - t_1} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Таким образом, скорость  $V_1 > 10$  м/с, и время, за которое второй автомобиль доедет до моста, не может быть больше  $\frac{400 \text{ м}}{10 \text{ м/с}} = 40$  секунд.

В момент  $t_2 = 30$  с расстояние между автомобилями перестаёт меняться. Это означает, что они снова движутся с одинаковыми скоростями — либо первый автомобиль съехал с моста, либо второй въехал на мост. В первом случае въезд второго автомобиля на мост будет соответствовать моменту времени  $t_3 = 60$  с, когда расстояние между автомобилями начинает вновь расти (см. график). Поскольку это произошло только через  $t_3 - t_1 = 50$  с после въезда первого автомобиля на мост, первый случай невозможен, и в данных условиях реализуется вторая возможность, когда в момент  $t_3 = 60$  с первый автомобиль съезжает с моста.

Значит, второй автомобиль проехал по шоссе  $l_1 = 400$  м за время  $t_2 - t_1 = 20$  с, и его скорость была равна  $V_1 = \frac{l_1}{t_2 - t_1} = \frac{400 \text{ м}}{20 \text{ с}} = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Скорость автомобилей на мосту, очевидно, равна  $V_2 = V_1 - \frac{l_1 - l_2}{t_2 - t_1} = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}} - 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Первый автомобиль преодолел мост с этой скоростью  $V_2 = 10$  м/с за время  $t_3 - t_1 = 50$  с, так что длина моста равна  $L = V_2 \cdot (t_3 - t_1) = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 50 \text{ с} = 500$  м.

**1.11.** Из графика следует, что при  $x < 1$  м и  $x > 4$  м скорость тела постоянна, а значит, его ускорение равно нулю. В интервале от  $x = 1$  м до  $x = 4$  м связь между численными значениями скорости  $v$  и координаты  $x$ , выраженными в СИ, даётся формулой

$$v = 5 - kx,$$

где  $k$  — размерный коэффициент,  $k = 1 \text{ с}^{-1}$ . Пусть за малое время  $\Delta t$  скорость тела изменилась на величину  $\Delta v$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(t + \Delta t) - v(t) = (5 - kx(t + \Delta t)) - (5 - kx(t)) = \\ &= -k(x(t + \Delta t) - x(t)) = -k\Delta x. \end{aligned}$$

Разделив правую и левую часть на  $\Delta t$ , получаем:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -k \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{или} \quad a = -kv.$$

Ещё раз отметим, что в последней формуле множитель  $k$  перед скоростью равен единице и имеет размерность  $\text{с}^{-1}$ . Таким образом, в точке с координатой  $x = 3$  м тело имеет скорость  $v = 5 - 3 = 2$  м/с и ускорение  $a = -2 \text{ м/с}^2$ .

Максимальное по модулю ускорение тело имеет в той точке интервала  $1 \text{ м} < x < 4 \text{ м}$ , где максимальна по модулю его скорость, то есть в точке, где его координата минимальна. Это точка с координатой  $x = 1 \text{ м}$ . Скорость тела в этой точке равна  $v = 5 - 1 = 4 \text{ м/с}$ , а искомое максимальное ускорение равно  $a = -4 \text{ м/с}^2$ .

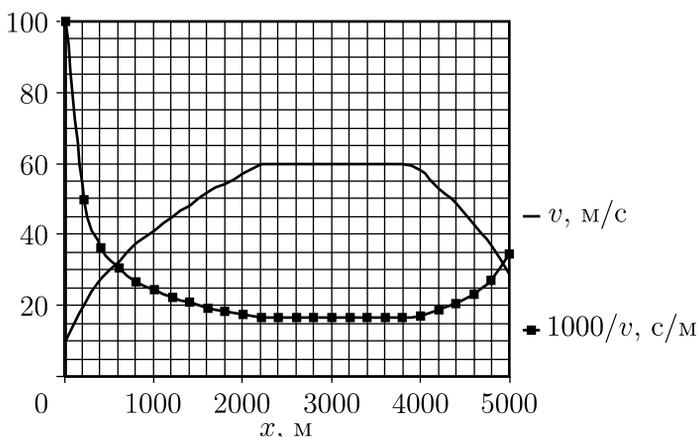


Рис. 1.12.

**1.12.** Разобьём данный пятикилометровый отрезок дороги на много одинаковых маленьких участков длиной  $\Delta x$  каждый. Тогда скорость автомобиля на каждом из участков можно считать приблизительно постоянной. На прохождение  $i$ -го участка дороги автомобилю требуется время  $\Delta t_i = \frac{\Delta x}{v_i}$ , где  $v_i$  — скорость автомобиля на  $i$ -ом участке. Значит, полное время, за которое автомобиль проехал участок, равно

$$t = \sum_i \Delta t_i = \sum_i \frac{1}{v_i} \Delta x.$$

Это время может быть найдено графически. Для этого нужно построить график зависимости обратной скорости  $1/v$  от пройденного пути  $x$ , после чего вычислить площадь под ним. Построение удобно выполнить прямо на рисунке, приведённом в условии задачи. Для удобства можно достроить имеющуюся там сетку до 100 единиц по вертикальной оси и отложить величину  $1000/v$  (см. рис. 1.12). Тогда подсчёт площади легко провести по клеткам под графиком этой величины, и в результате получается

$$t \approx 120 \pm 10 \text{ с.}$$

**1.13.** а) Пусть в начальный момент времени координата материальной точки равна 0, а её скорость  $v = v_0$  (точка  $A$  на зависимости  $v(x)$ , рис. 1.13.1). Тогда через маленький промежуток времени  $\Delta t$  координата  $x$  материальной точки станет равной  $v_0\Delta t > 0$ . Это соответствует тому, что точка на нашем графике  $v(x)$  будет смещаться вправо. Так будет продолжаться до момента времени  $\Delta t_1 = x_0/v_0$ , после которого знак скорости изменится: вместо  $v = v_0$  станет  $v = -v_0$ . Таким образом, в течение времени  $\Delta t_1$  материальная точка будет двигаться с постоянной скоростью  $v_0$ .

Затем в течение времени  $\Delta t_2 = 2x_0/v_0$  материальная точка будет двигаться с постоянной скоростью  $-v_0$ , после чего знак скорости вновь изменится — она станет равной  $v_0$ . Далее материальная точка будет двигаться с этой скоростью в течение времени  $\Delta t_3 = x_0/v_0$ , после чего вернётся в исходное положение, и цикл движения повторится. График зависимости скорости от времени  $v(t)$ , соответствующий описанному движению, приведён на рис. 1.13.2.

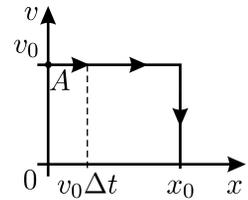


Рис. 1.13.1.

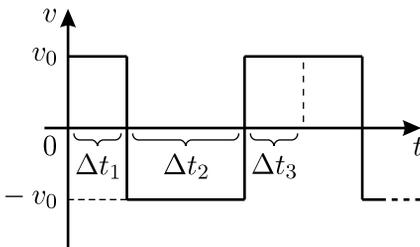


Рис. 1.13.2.

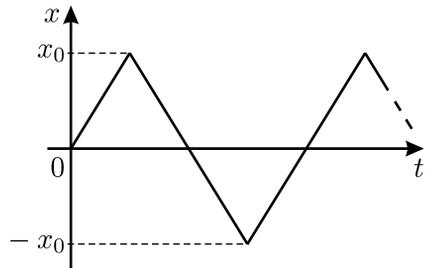


Рис. 1.13.3.

По полученному графику  $v(t)$  легко построить график зависимости координаты от времени  $x(t)$ . Действительно, «ступеньки» графика  $v(t)$  соответствуют движениям с постоянными скоростями  $v_0$  или  $-v_0$ . При движении с постоянной скоростью зависимость координаты от времени даётся формулой  $x = x(0) + vt$ . В начале движения  $x(0) = 0$ , и  $x = v_0t$ . Через время  $\Delta t_1$  координата материальной точки станет равной  $x_0$ , а скорость примет значение  $-v_0$ , то есть зависимость  $x(t)$  будет даваться формулой  $x = 2x_0 - v_0t$ . Такая зависимость будет справедлива в течение промежутка времени  $\Delta t_2$ , после чего координата станет равна  $-x_0$ , а скорость примет значение  $v_0$ . В результате зависимость  $x(t)$  приобретёт вид  $x = -x_0 + v_0t$ . График зависимости  $x(t)$  приведён

на рис. 1.13.3. Это периодическое движение с периодом

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{4x_0}{v_0}.$$

В заключение остановимся на вопросе о практической реализации такого движения. Понятно, что в реальности оно существовать не может, так как мгновенная смена знака скорости при  $x = x_0$  и  $x = -x_0$  означает, что в данные моменты времени материальная точка имеет бесконечно большое ускорение. Однако, можно представить себе движение, близкое к тому, о котором идёт речь в условии. Это может быть, например, движение маленького шарика, который в отсутствие сил тяжести и трения летает по прямой между двумя параллельными стенками, испытывая с ними абсолютно упругие соударения.

б) Обозначим на графике  $v(x)$  начало координат точкой  $O$  (см. рис. 1.13.4), а радиус окружности через  $R$ . Тогда, очевидно, можно записать:

$$R = k_1 x_0 = k_2 v_0,$$

где  $k_1$  и  $k_2$  — положительные размерные масштабные коэффициенты.

Пусть в некоторый момент времени скорость и координата материальной точки таковы, что они соответствуют на графике  $v(x)$  точке  $A$  с координатами  $(k_1 x_A, k_2 v_A)$ . Обозначим угол, который составляет радиус  $OA$  с осью  $Ov$ , через  $\alpha$ . Так как в рассматриваемый момент времени скорость материальной точки положительна, то за малое время  $\Delta t$  она сместится на положительное расстояние  $\Delta x$ , что соответствует на графике точке  $A'$ . Это означает, что радиус  $OA$  повернётся по часовой стрелке, и угол, который он составляет с осью  $Ov$ , изменится на величину  $\Delta\alpha$ . При этом координаты точки  $A$  изменятся на величины  $k_1 \Delta x$  и  $k_2 \Delta v$ . Так как промежуток времени  $\Delta t$  мал, то дугу окружности  $AA' = R\Delta\alpha$  можно приближённо заменить на хорду  $AA'$ . Тогда из прямоугольного треугольника  $ACA'$  получаем:  $k_1 \Delta x \approx R\Delta\alpha \cos \alpha = k_1 x_0 \Delta\alpha \cos \alpha$ , откуда  $\Delta x = x_0 \Delta\alpha \cos \alpha = v_A \Delta t$ . Но, с другой стороны, как видно из чертежа,  $k_2 v_A = R \cos \alpha = k_2 v_0 \cos \alpha$ , откуда  $v_A = v_0 \cos \alpha$ .

Подставляя  $v_A$  в выражение для  $\Delta x$ , получаем

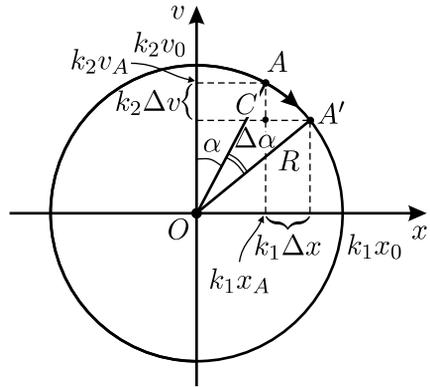


Рис. 1.13.4.

$x_0 \Delta \alpha \cos \alpha = v_0 \cos \alpha \cdot \Delta t$ , откуда  $\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v_0}{x_0} = \omega = \text{const}$ , то есть радиус  $OA$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega = v_0/x_0$ .

Следовательно, угол  $\alpha$  возрастает со временем по линейному закону:  $\alpha = \alpha_0 + \omega t$ , где постоянная величина  $\alpha_0$  соответствует начальному положению точки  $A$  на окружности. С учётом этого получаем  $k_1 x_A = R \sin \alpha = k_1 x_0 \sin \alpha$ , откуда

$$x_A = x_0 \sin \alpha = x_0 \sin(\alpha_0 + \omega t) = x_0 \sin \left( \alpha_0 + \frac{v_0}{x_0} t \right),$$

и аналогично

$$v_A = v_0 \cos \alpha = v_0 \cos(\alpha_0 + \omega t) = v_0 \cos \left( \alpha_0 + \frac{v_0}{x_0} t \right).$$

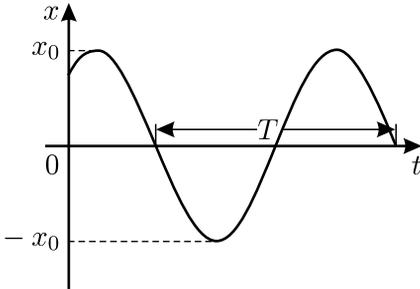


Рис. 1.13.5.

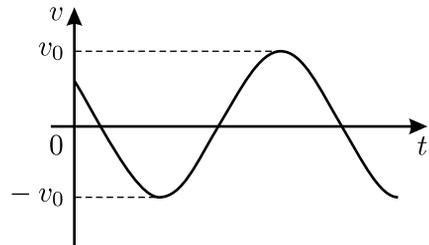


Рис. 1.13.6.

Из полученных зависимостей следует, что материальная точка совершает гармоническое колебание с амплитудой  $x_0$  и периодом  $T = 2\pi/\omega = 2\pi x_0/v_0$ . Графики зависимостей  $x(t)$  и  $v(t)$ , соответствующие данному движению, приведены на рисунках 1.13.5 и 1.13.6.

**1.14.** Картина, образованная дождевыми каплями на стекле, симметрична относительно вертикали. Из этого можно сделать вывод, что ветер сносит капли в направлении движения автобуса, причём составляющая скорости ветра, параллельная этому направлению, в два раза меньше скорости движения автобуса:

$$w_{\text{пар}} = u/2 = 30 \text{ км/ч.}$$

Как видно из рисунка 1.14, на остановках струи дождя образуют с вертикалью угол  $\alpha \approx 30^\circ$ ; следовательно, скорость падения капель

$$v = w_{\text{пар}} \text{ctg } \alpha \approx 52 \text{ км/ч.}$$

О составляющей скорости ветра, перпендикулярной направлению движения, ничего сказать нельзя.

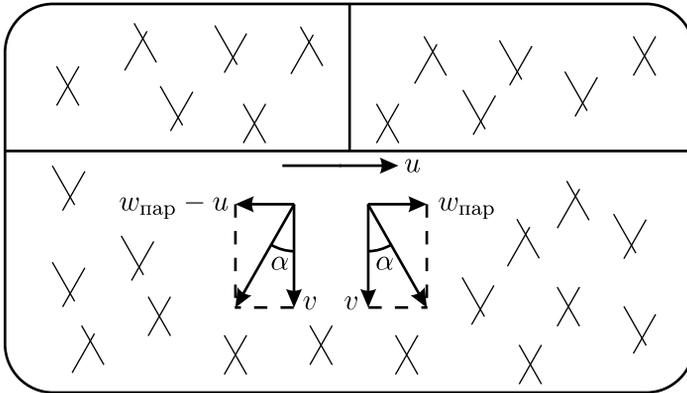


Рис. 1.14.

**1.15.** При скорости снаряда  $u$ , меньшей скорости разлёта осколков  $v$ , очевидно, будет поражена вся поверхность стенки, потому что из точки разрыва снаряда осколки полетят во всех направлениях. Если же  $u > v$ , что, видимо, более правдоподобно, то в неподвижной системе отсчёта вектор суммарной скорости осколков относительно земли  $\vec{v}_3 = \vec{u} + \vec{v}$ , очевидно, может отклоняться от вектора  $\vec{u}$  не более, чем на угол  $\alpha$  такой, что  $\sin \alpha = v/u$ . Таким образом, из точки разрыва осколки полетят внутри конуса с углом раствора  $2\alpha$ , и область поражения на стенке будет иметь вид круга с радиусом  $R = l \operatorname{tg} \alpha = lv/\sqrt{u^2 - v^2}$ .

**1.16.** Масса воды  $m$ , попавшей на Колобка, зависит от скорости  $v_{\text{отн}}$  каплеь дождя относительно него и времени движения  $t$  от  $A$  до  $B$ :  $m \sim v_{\text{отн}} t = v_{\text{отн}} \frac{|AB|}{u}$ , где  $u$  — скорость Колобка. В соответствии с правилом сложения скоростей,  $v_{\text{отн}} = \sqrt{V^2 + v^2 + u^2 - 2uv \cos \varphi}$ , поэтому

$$\begin{aligned}
 m &\sim \sqrt{\frac{V^2 + v^2 + u^2 - 2uv \cos \varphi}{u^2}} \sim \\
 &\sim \sqrt{\frac{V^2 + v^2}{u^2} - \frac{2v \cos \varphi}{u} + \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{V^2 + v^2} + 1 - \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{V^2 + v^2}} \sim \\
 &\sim \sqrt{(V^2 + v^2) \left( \frac{1}{u} - \frac{v \cos \varphi}{V^2 + v^2} \right)^2 + 1 - \frac{v^2 \cos^2 \varphi}{V^2 + v^2}}.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при  $|\varphi| < \pi/2$  искомая скорость, при которой Колобок меньше всего промокнет, равна  $u = \frac{V^2 + v^2}{v \cos \varphi}$ .

При  $|\varphi| > \pi/2$  величина  $\cos \varphi < 0$ , минимума у функции  $m(u)$  при  $u > 0$  нет, и Колобку выгодно бежать как можно быстрее.

**1.17.** Пусть в  $1 \text{ м}^3$  содержится  $n$  снежинок. Тогда

$$N_1 = nS(v + v_x), \quad N_2 = nS(v - v_x),$$

где  $v_x$  — горизонтальная проекция скорости снежинок вдоль лыжни. Отсюда  $n = \frac{N_1 + N_2}{2vS} = 50 \frac{\text{снежинок}}{\text{м}^3}$ . Дальность прямой видимости  $L$  может быть оценена по среднему расстоянию, на котором снежинка перекрывает луч зрения. Площадь снежинки  $S_{\text{снеж}} \approx l^2$ . Условием перекрытия является попадание в объём  $S_{\text{снеж}}L$  хотя бы одной снежинки:  $nS_{\text{снеж}}L = 1$ , откуда  $L = \frac{1}{nS_{\text{снеж}}} \approx \frac{2vS}{(N_1 + N_2)l^2} = 200 \text{ м}$ .

**1.18\*.** Автобус, велосипедист и грузовик в каждый момент времени образуют равнобедренный треугольник, основание которого лежит на дороге, по которой едут автобус и велосипедист (см. рис. 1.18). Направим ось  $X$  вдоль этой дороги в направлении движения автобуса и велосипедиста, а ось  $Y$  — перпендикулярно к ней. Тогда законы движения транспортных средств имеют вид:

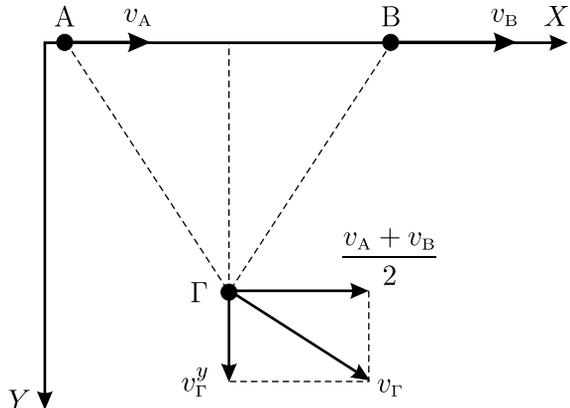


Рис. 1.18.

$$\text{Для автобуса:} \quad x_A(t) = x_A^0 + v_A t, \quad y_A(t) = 0.$$

$$\text{Для велосипедиста:} \quad x_B(t) = x_B^0 + v_B t, \quad y_B(t) = 0.$$

$$\text{Для грузовика:} \quad x_\Gamma(t) = \frac{x_A^0 + x_B^0}{2} + \frac{v_A + v_B}{2} t, \quad y_\Gamma(t) = y_\Gamma^0 + v_\Gamma^y t.$$

Здесь верхними индексами «0» снабжены начальные координаты и скорости, буквами А, В, и Г обозначены величины, относящиеся

к автобусу, велосипедисту и грузовику соответственно, а  $v_{\Gamma}^y$  — проекция скорости грузовика на ось  $Y$ . Заметим, что выражение для  $x_{\Gamma}(t)$  получается из тех соображений, что грузовик всё время находится в вершине равнобедренного треугольника, противоположной его основанию. Из этого, в частности, следует, что проекция скорости грузовика на ось  $X$  равна  $\frac{v_A + v_B}{2}$ . Из условия задачи нам известен модуль скорости грузовика  $v_{\Gamma}$ , которая связана со своими компонентами формулой:  $v_{\Gamma}^2 = \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + (v_{\Gamma}^y)^2$ . Отсюда проекция скорости грузовика на ось  $Y$  равна  $v_{\Gamma}^y = \sqrt{v_{\Gamma}^2 - \left(\frac{v_A + v_B}{2}\right)^2}$ .

Теперь мы знаем обе компоненты скорости грузовика, и найти скорость грузовика относительно автобуса не составляет труда. По теореме Пифагора, применённой к треугольнику скоростей, имеем

$$v_{\text{отн}}^2 = \left(v_A - \frac{v_A + v_B}{2}\right)^2 + (v_{\Gamma}^y)^2,$$

откуда, с учётом выражения для  $v_{\Gamma}^y$ , находим

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{v_{\Gamma}^2 - v_A \cdot v_B} = 25 \text{ км/ч.}$$

**1.19.** Из верхнего графика в условии задачи следует, что скорость вездехода на начальном и конечном участках маршрута равна 36 км/ч, а на среднем участке пути — 51 км/ч, то есть в  $51/36 \approx 1,41 \approx \sqrt{2}$  раз больше. Время движения на всех трёх участках одинаково и составляет по 0,5 часа. Поэтому, как следует из нижнего графика в условии задачи, вездеход сначала проехал 18 км на север, затем 25,5 км на юго-восток, и, наконец, ещё 18 км на запад. Таким образом, траектория его движения представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, и в конце пути вездеход вернулся в исходную точку.

**1.20\*.** Из условия следует, что одинаковые и постоянные величины  $u$  и скоростей теней на вертикальных стенках связаны с величинами  $v$  скоростей точек 1 и 2 соотношением  $v = 2u/\sqrt{3} = u/\cos \alpha$ . Поскольку источник света, точка и тень от неё лежат на одной прямой, а скорость источника  $V$  также должна быть постоянна по величине, то ясно, что взаимное расположение источника, точек 1 и 2 и теней должно быть симметричным и таким, как изображено на рисунке 1.20.1: источник, точка 1 и её тень лежат на перпендикуляре к одной стенке, источ-

ник, точка 2 и её тень лежат на перпендикуляре к другой стенке, а сам источник движется по биссектрисе прямого угла между стенками со скоростью  $V = u\sqrt{2}$ . Только в этом случае после небольшого смещения источника, точек 1 и 2 и теней за малое время  $\Delta t$  прямые, соединяющие источник с каждой из точек и их тенями, сместятся параллельно самим себе, соотношения между  $u$ ,  $v$  и  $V$  не изменятся, и величина  $V$  останется неизменной.

Действительно, если точки и их тени не лежат на перпендикулярах к стенкам, то для того, чтобы величина  $V$  оставалась постоянной при движении точек и источника, величина скорости точек  $v'$  должна быть либо больше (см. рис. 1.20.2), либо меньше (см. рис. 1.20.3), чем  $v = 2u/\sqrt{3}$ .

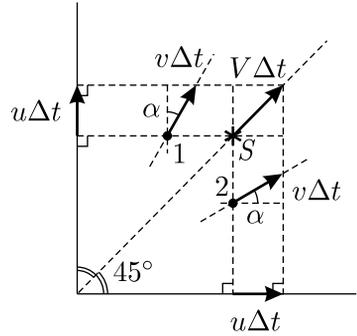


Рис. 1.20.1.

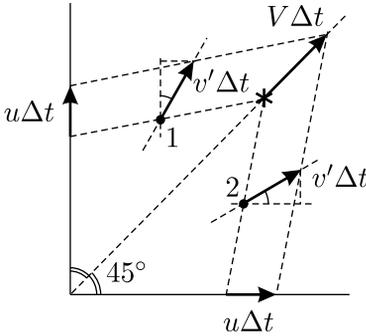


Рис. 1.20.2.

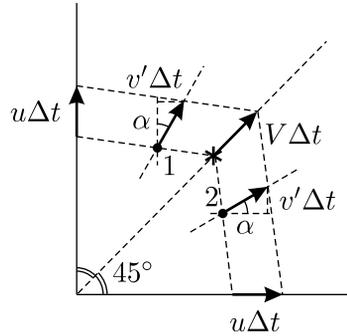


Рис. 1.20.3.

**1.21.** Нарисуем положения кораблей в  $12^{00}$ . В этот момент первый корабль движется со скоростью  $v_1 = 15$  миль в час на восток, а второй корабль находится на 100 миль восточнее и на 60 миль южнее острова и движется со скоростью  $v_2 = 15$  миль в час на юг. Перейдём в систему отсчёта, связанную с одним из кораблей — например, с первым. Пусть начало координат совпадает с первым кораблём, ось  $X$  направлена с запада на восток, а ось  $Y$  — с севера на юг. В этой системе отсчёта второй корабль в  $12^{00}$  находится в точке с координатами  $(x_0, y_0) = (100 \text{ миль}, 100 \text{ миль})$  и движется со скоростью  $(v_x, v_y) = (-v_1, v_2) = (-15 \text{ миль/ч}, 15 \text{ миль/ч})$  в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей оба корабля (см. рис. 1.21). Очевидно, что именно в этот момент расстояние между кораблями

минимально и равно  $L = 100\sqrt{2} \approx 141,4$  мили.

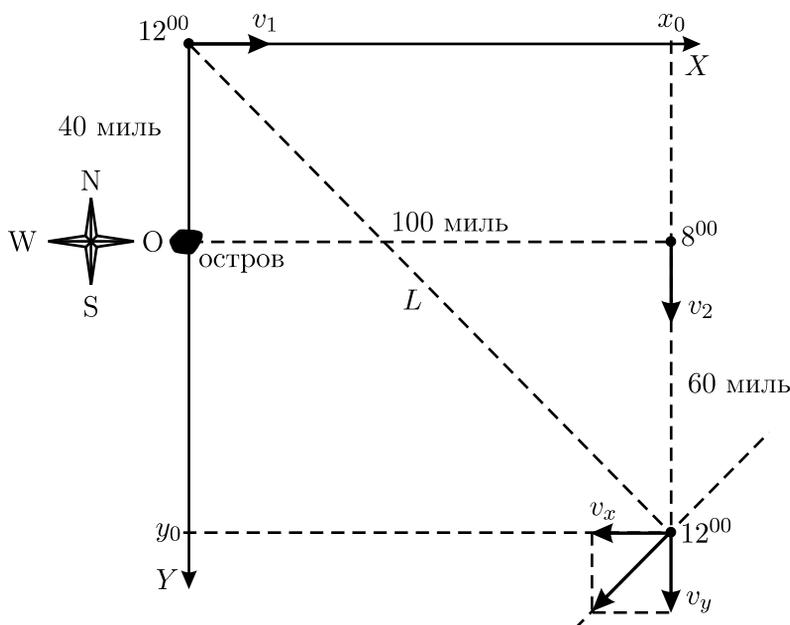


Рис. 1.21.

**1.22.** Представим себе, что корабли проплыли друг мимо друга и после момента их встречи прошёл один час. Тогда расстояние между кораблями будет составлять 40 морских миль, а шлейфы их дымов пересекутся в некоторой точке, которая будет находиться западнее первого корабля (см. рис. 1.22). Заметим, что в месте пересечения шлейфов находятся клубы дыма, которые были испущены в момент встречи кораблей. Так как скорости кораблей одинаковы, то точка встречи находится посередине между кораблями, то есть на расстоянии 20 морских миль от первого корабля. Таким образом, за 1 час клубы дыма под действием ветра передвинулись на расстоя-

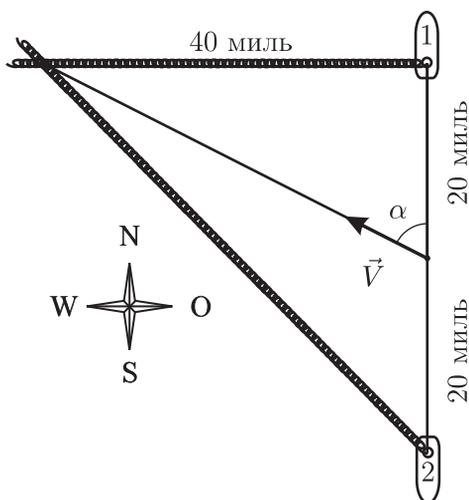


Рис. 1.22.

ние  $s = \sqrt{40^2 + 20^2} = \sqrt{2000} \approx 44,7$  миль, то есть скорость ветра равна  $V \approx 44,7$  узла  $\approx 82,8$  км/ч. Из рисунка видно, что направление ветра составляет с курсом первого корабля угол, определяемый из соотношения  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{40 \text{ миль}}{20 \text{ миль}} = 2$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63^\circ$ .

**1.23.** Построим вектор скорости  $\vec{v}_{\text{отн}}$  первой машины относительно второй (см. рисунок 1.23). Отрезок  $AB$ , соединяющий машины в момент их наибольшего сближения, перпендикулярен этому вектору.

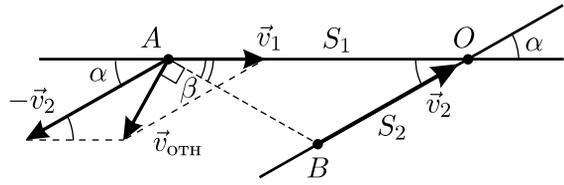


Рис. 1.23.

Из рисунка видно, что  $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} = v_1$ , то есть векторный треугольник — равнобедренный. Следовательно, угол  $\beta = 90^\circ - 2\alpha = 30^\circ = \alpha$ , и треугольник  $AOB$  также является равнобедренным. Поэтому  $S_2 = OB = S_1 / (2 \cos \alpha) = S_1 / \sqrt{3} \approx 115$  м.

**1.24\*.** Перейдём в систему отсчёта  $X'Y'Z'$ , связанную с точкой  $A$ . Время в этой системе отсчёта совпадает со временем в исходной системе отсчёта, а точка  $A$  покоится в начале координат. Поэтому задача упрощается — для решения задачи нужно рассматривать только движение точки  $B$ .

Выясним сначала, с какой скоростью движется в новой системе отсчёта точка  $B$ . Из графиков, приведённых в условии, следует, что в исходной системе отсчёта точки  $A$  и  $B$  имели следующие проекции скорости на координатные оси  $XYZ$ .

Точка  $A$ :  $v_{Ax} = -1$  м/с,  $v_{Ay} = 2$  м/с,  $v_{Az} = -4$  м/с.

Точка  $B$ :  $v_{Bx} = -4$  м/с,  $v_{By} = -2$  м/с,  $v_{Bz} = 8$  м/с.

В новой системе отсчёта точка  $B$  имеет следующие проекции скорости на координатные оси  $X'Y'Z'$ :

$$v_{Bx'} = v_{Bx} - v_{Ax} = -3 \text{ м/с},$$

$$v_{By'} = v_{By} - v_{Ay} = -4 \text{ м/с},$$

$$v_{Bz'} = v_{Bz} - v_{Az} = 12 \text{ м/с}.$$

Значит, в системе отсчёта  $X'Y'Z'$  точка  $B$  движется со скоростью  $V_{B(r)'} = \sqrt{(v_{Bx'})^2 + (v_{By'})^2 + (v_{Bz'})^2} = 13$  м/с, которая представляет собой скорость движения точки  $B$  относительно точки  $A$ .

Теперь выясним, по какой траектории движется точка  $B$  относительно точки  $A$ . Очевидно, что она представляет собой прямую линию,

расположение которой нетрудно установить. Действительно, как следует из графиков, в момент времени  $t = 0$  точка  $B$  в системе отсчёта  $X'Y'Z'$  имела координаты  $x'_0 = 3$  м,  $y'_0 = 4$  м,  $z'_0 = 0$  м, то есть находилась в плоскости  $X'Y'$  (см. рис. 1.24). Расстояние от начала отсчёта до точки  $B$  в этот момент составляло  $s'_0 = \sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2 + (z'_0)^2} = 5$  м.

В момент времени  $t = 1$  с точка  $B$  в новой системе отсчёта имела координаты  $x'_1 = 0$  м,  $y'_1 = 0$  м,  $z'_1 = 12$  м, то есть находилась на оси  $Z'$ , и расстояние от неё до начала координат было равно  $s'_1 = 12$  м. Отсюда видно, что начало координат (в котором находится точка  $A$ ) и точки, в которых находилась точка  $B$  в моменты времени  $t = 0$  с и  $t = 1$  с, являются вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой  $s' = 13$  м, причём точка  $B$  движется вдоль гипотенузы. Значит, минимальное расстояние  $h$  между точками  $A$  и  $B$  равно минимальному расстоянию от начала координат до гипотенузы, то есть длине высоты, опущенной на гипотенузу:

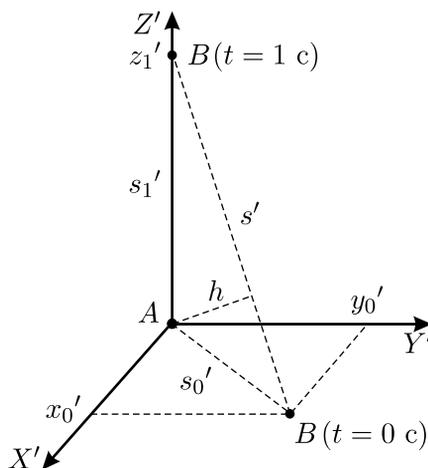


Рис. 1.24.

$$h = s'_0 \frac{s'_1}{s'} = \frac{60}{13} \text{ м} \approx 4,62 \text{ м.}$$

К тому моменту, когда расстояние между точками  $A$  и  $B$  будет минимальным, точка  $B$  пройдет вдоль гипотенузы расстояние  $L = \sqrt{(s'_0)^2 - h^2} = \frac{25}{13}$  м. Поскольку точка  $B$  в системе отсчёта  $X'Y'Z'$  движется со скоростью  $V_{B(r)'}$ , то это случится через время

$$T = \frac{L}{V_{B(r)'}} = \frac{25}{169} \text{ с} \approx 0,15 \text{ с.}$$

Задачу можно решить и более формальным способом. Запишем законы движения точек  $A$  и  $B$  в системе координат  $XYZ$ :

$$\begin{aligned} x_A(t) &= 9 - t, & y_A(t) &= 3 + 2t, & z_A(t) &= 7 - 4t; \\ x_B(t) &= 12 - 4t, & y_B(t) &= 7 - 2t, & z_B(t) &= 7 + 8t. \end{aligned}$$

Тогда зависимость квадрата расстояния между точками от времени даётся выражением:

$$S^2(t) = (x_A(t) - x_B(t))^2 + (y_A(t) - y_B(t))^2 + (z_A(t) - z_B(t))^2 = \\ = 169t^2 - 50t + 25,$$

то есть представляет собой квадратичную функцию. Из теоремы Виета следует, что она имеет минимум при значении аргумента, равном взятому с обратным знаком отношению коэффициента при  $t$  к удвоенному коэффициенту при  $t^2$ :

$$T = -\frac{-50}{2 \cdot 169} = \frac{25}{169} \text{ с.}$$

При этом минимальное значение расстояния между точками равно

$$S(T) = \sqrt{169 \cdot \left(\frac{25}{169}\right)^2 - 50 \cdot \frac{25}{169} + 25} = \frac{60}{13} \text{ м.}$$

**1.25.** Пусть наблюдатель находится на высоте  $h$  и на расстоянии  $a$  от линии, по которой движется тело. При бросании тела возможны два случая:

1) тело не долетает до высоты, на которой находится наблюдатель — в этом случае расстояние  $l$  от тела до наблюдателя сначала уменьшается, а затем увеличивается;

2) тело поднимается выше наблюдателя — в этом случае расстояние  $l$  сначала уменьшается от  $\sqrt{a^2 + h^2}$  до  $a$ , затем увеличивается до  $\sqrt{a^2 + (H - h)^2}$ , где  $H$  — высота подъёма тела, а потом опять уменьшается до  $a$  и увеличивается до  $\sqrt{a^2 + h^2}$ .

Как видно из приведённого в условии рисунка, реализуется именно второй случай. При этом

$$l_0 = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad l_1 = \sqrt{a^2 + (H - h)^2}.$$

Отсюда находим:

$$a = l_2, \quad h = \sqrt{l_0^2 - a^2} = \sqrt{l_0^2 - l_2^2}$$

и

$$H = h + \sqrt{l_1^2 - a^2} = \sqrt{l_0^2 - l_2^2} + \sqrt{l_1^2 - l_2^2}.$$

Начальную скорость тела можно определить из соотношения  $V_0^2 = 2gH$ , откуда

$$V_0 = \sqrt{2g \left( \sqrt{l_0^2 - l_2^2} + \sqrt{l_1^2 - l_2^2} \right)}.$$

**1.26.** Поскольку в некоторый момент времени  $t_0$  относительная скорость автомобилей равна нулю, то скорости автомобилей в этот момент равны и по величине, и по направлению. Поэтому величины скоростей автомобилей одинаковы. В момент  $t_0$  ускорение одного автомобиля равно нулю, а ускорение второго автомобиля равно  $(v^2/R)\vec{n}$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор в направлении к центру окружности, по которой движется этот автомобиль (см. рис. 1.26.1). В течение промежутка времени  $\Delta t = |t - t_0| \ll \frac{R}{v}$  движение второго автомобиля относительно первого можно считать равноускоренным, поэтому относительная скорость  $\vec{v}_{\text{отн}} \approx \frac{v^2}{R}\vec{n}(t - t_0)$ , то есть

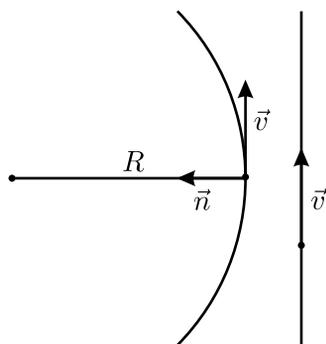


Рис. 1.26.1.

$v_{\text{отн}} \approx \frac{v^2}{R} |t - t_0|$ .

Проводя касательные к графику вблизи момента времени  $t_0 = 20$  с (см. рис. 1.26.2), из их наклона получаем  $\frac{v^2}{R} = \frac{\Delta v_{\text{отн}}}{\Delta t} = \frac{40 \text{ м/с}}{20 \text{ с}} = 2 \text{ м/с}^2$ , откуда

$$v = \sqrt{\frac{\Delta v_{\text{отн}}}{\Delta t} \cdot R} = \sqrt{2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 200 \text{ м}} = 20 \text{ м/с}.$$

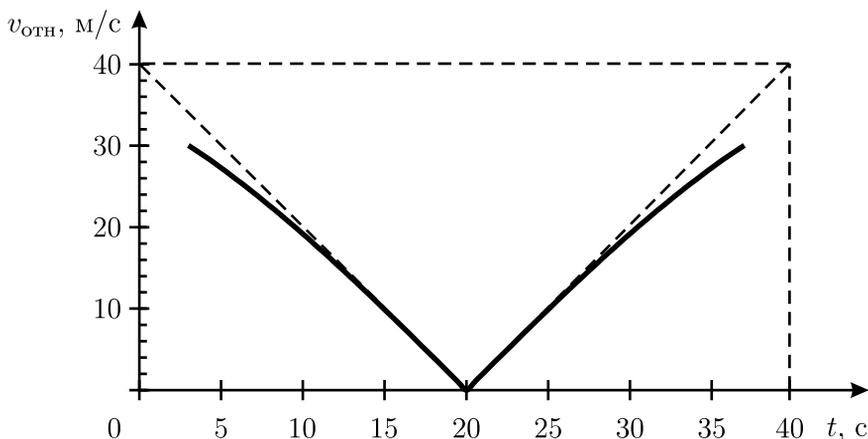


Рис. 1.26.2.

**1.27.** В системе отсчёта, связанной с водой, дощечки проплывут до полной остановки одинаковое расстояние. Поскольку вторая дощечка движется в этой системе отсчёта перпендикулярно берегу, это расстояние как раз и равно  $S_2$ . Следовательно, первая дощечка сместилась тоже на расстояние  $S_2$ , и при этом её смещение перпендикулярно берегу составило  $S_1$  (см. рис. 1.27). Следовательно, смещение первой дощечки параллельно берегу равно  $\sqrt{S_2^2 - S_1^2}$ . Угол  $\alpha$  между скоростями дощечек в системе отсчёта, связанной с водой, определяется из соотношения:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{S_2^2 - S_1^2}}{S_2}.$$

При переходе в систему отсчёта, связанную с берегом, начальные скорости дощечек  $\vec{V}_0$  складываются со скоростью течения воды в канале  $\vec{U}$ . Следовательно, для первой дощечки

$$U = V_0 \sin \alpha = \frac{V_0 \sqrt{S_2^2 - S_1^2}}{S_2} = \frac{1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \sqrt{25 \text{ м}^2 - 16 \text{ м}^2}}{5 \text{ м}} = 0,6 \text{ м/с}.$$

**1.28\*.** Направление сканирования определяется просто. Очевидно, что кривизна изображения стрелки максимальна там, где скорость каретки была направлена вдоль стрелки. На рисунке максимальная кривизна соответствует точкам вблизи оси, причём стрелка в этот момент была направлена почти «вертикально», то есть от цифры «12» к цифре «6». Значит сканирование осуществлялось в вертикальном направлении. Проведём касательную к секундной стрелке в точке её крепления к оси. Деление на циферблате, на которое «покажет» касательная, есть момент начала или конца сканирования стрелки (в зависимости от того, вверх или вниз движется каретка). Проводя касательную, убедимся, что она «упирается» в деление, соответствующее 28 секундам, в то время как остриё стрелки показывает 20 секунд, то есть меньшее время. Значит, каретка сканера пересекла остриё секундной стрелки раньше, чем её ось, то есть каретка двигалась от цифры «6» к цифре «12». Отсюда сразу же можно найти время  $\Delta t$ , за которое каретка просканировала стрелку. Оно, очевидно, равно  $28 - 20 = 8$  секундам.

Теперь найдём скорость каретки. Расстояние, которое прошла каретка за время  $\Delta t$ , равно расстоянию от острия секундной стрелки до прямой, проходящей через ось и цифру «3» на циферблате. Обозначим

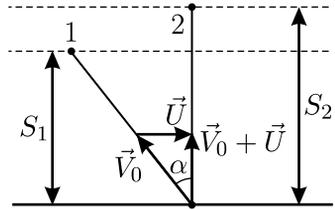


Рис. 1.27.



Рис. 1.28.

его через  $L$ . На рисунке 1.28 это расстояние равно  $L_1 \approx 13$  мм. Кроме того, длина секундной стрелки на рисунке равна  $l_1 \approx 25$  мм, а по условию задачи её истинная длина  $l = 15$  мм. Так как при увеличении рисунка все размеры изменились в одинаковое число раз (изображение не искажено), то справедлива пропорция  $L : L_1 = l : l_1$ . Поэтому скорость каретки  $v = \frac{L}{\Delta t} = \frac{l L_1}{l_1 \Delta t} \approx 1$  мм/с.

**1.29.** Поскольку все удары неупругие, то после удара о стенку груз может иметь скорость  $u$ , только параллельную этой стенке (см. рис. 1.29). При преодолении каждой стенки угол наклона стержня к горизонту будет оставаться близким к  $\alpha$ , поскольку стенки невысокие. Из постоянства длины стержня следует, что проекции скоростей концов стержня на него самого должны быть одинаковы, то есть  $v \cos \alpha = u \cos(\alpha - \beta)$ . Отсюда  $u = v \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}$ .

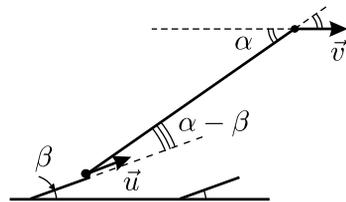


Рис. 1.29.

**1.30\***. Разложим движение мальчика со змеем на два более простых движения и рассмотрим их по отдельности. Сначала представим себе, что мальчик покоится, а змеей движется (нить при этом сматывается с катушки). Так как нить прямолинейна, то проекции скоростей всех точек нити на её направление одинаковы. Значит, составляющая скорости узелка вдоль нити равна  $V_{\parallel} = v \sin \alpha$ .

Так как мальчик покоится, то в данный момент времени можно считать, что движение нити складывается из двух движений — движения вдоль самой себя со скоростью  $V_{\parallel}$  и вращения вокруг катушки с угловой скоростью  $\omega_1 = \frac{v \cos \alpha}{L + l}$ . Тогда составляющая скорости узелка

в направлении, перпендикулярном нити, равна  $V_{\perp 1} = \omega_1 L = \frac{vL \cos \alpha}{L + l}$ .

Далее представим себе, что покоится змей, а мальчик движется. В этом случае в данный момент времени нить вращается по окружности вокруг точки крепления к змею с угловой скоростью  $\omega_2 = \frac{u \sin \alpha}{L + l}$ .

Значит, узелок имеет скорость, перпендикулярную нити и равную  $V_{\perp 2} = \omega_2 l = \frac{ul \sin \alpha}{L + l}$ , составляющая же скорости узелка вдоль направления нити равна нулю.

Так как движение мальчика и змея представляет собой сумму двух рассмотренных простых движений, то скорость узелка можно найти, пользуясь правилом сложения скоростей:

$$v_{\text{узелка}} = \sqrt{V_{\parallel}^2 + (V_{\perp 1} + V_{\perp 2})^2} = \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + \left( \frac{vL \cos \alpha + ul \sin \alpha}{L + l} \right)^2}.$$

**1.31\***. Проекция скорости телеги на направление любой из веревок должна быть равна скорости животного, тянущего за эту верёвку, поскольку длина любой из веревок постоянна.

Пусть скорость рака равна  $V$ , тогда скорость щуки равна  $2V$ , а скорость лебедя  $4V$ . Будем откладывать векторы этих скоростей из одной точки  $A$  и проведём окружность через концы  $B$  и  $C$  векторов скоростей лебедя и щуки, угол между которыми по условию равен  $\alpha$  (см. рисунки). Поскольку вписанные в окружность треугольники, опирающиеся на её диаметр, являются прямоугольными, то вектор скорости телеги является диаметром этой окружности. При этом возможны следующие случаи.

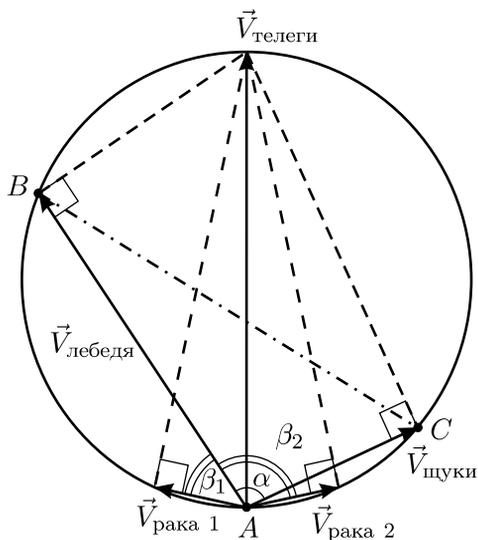


Рис. 1.31.1.

1) Вектор скорости телеги лежит между векторами скоростей лебедя и щуки (см. рис. 1.31.1). Этот случай реализуется при  $\alpha > 60^\circ$ . По теореме косинусов для треугольника  $ABC$  получаем  $|BC| = \sqrt{(4V)^2 + (2V)^2 - 2 \cdot 4V \cdot 2V \cos \alpha} = 2V\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$ . По теореме синусов диаметр окружности, в которую вписан треугольник  $ABC$ , равен  $V_{\text{телеги}} = \frac{|BC|}{\sin \alpha} = \frac{2V\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}{\sin \alpha}$ . При этом скорость рака, как видно из рисунка 1.31.1, может быть направлена под углом либо  $\beta_1$ , либо  $\beta_2$  к скорости лебедя:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \arccos \frac{V_{\text{рака}}}{V_{\text{телеги}}} - \arccos \frac{V_{\text{лебедя}}}{V_{\text{телеги}}} = \\ &= \arccos \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} - \arccos \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}, \\ \beta_2 &= \arccos \frac{V_{\text{рака}}}{V_{\text{телеги}}} + \arccos \frac{V_{\text{лебедя}}}{V_{\text{телеги}}} = \\ &= \arccos \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}} + \arccos \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

2) Вектор скорости телеги не лежит между векторами скоростей лебедя и щуки (см. рис. 1.31.2). Этот случай реализуется при  $\alpha < 60^\circ$ . Проводя аналогичные выкладки, получим:

$$\beta_1 = \arccos \frac{V_{\text{рака}}}{V_{\text{телеги}}} + \arccos \frac{V_{\text{лебедя}}}{V_{\text{телеги}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \arccos \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{5-4\cos \alpha}} + \arccos \frac{2\sin \alpha}{\sqrt{5-4\cos \alpha}}, \\
 \beta_2 &= \arccos \frac{V_{\text{рака}}}{V_{\text{телеги}}} - \arccos \frac{V_{\text{лебедя}}}{V_{\text{телеги}}} = \\
 &= \arccos \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{5-4\cos \alpha}} - \arccos \frac{2\sin \alpha}{\sqrt{5-4\cos \alpha}}.
 \end{aligned}$$

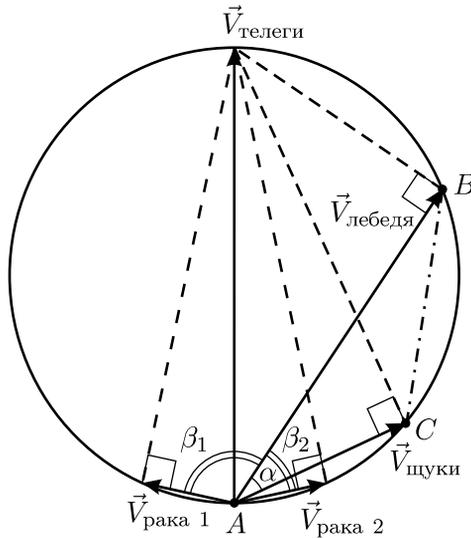


Рис. 1.31.2.

3) При  $\alpha = 60^\circ$ , как видно из рисунков,  $V_{\text{телеги}} = V_{\text{лебедя}} = 4V$ , и  $\beta_1 = \beta_2 = \arccos(1/4)$ .

4) При  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 180^\circ$  у задачи решений нет.

**1.32\***. Для удобства рассмотрения пронумеруем вершины ромба так, как показано на рисунке 1.32. Поскольку характер движения вершин 2 и 4 одинаков, будем рассматривать только вершину 2.

В момент времени, когда ромб превратится в квадрат, двигающаяся с ускорением  $a$  вершина 3 будет иметь скорость  $v$ . К этому моменту времени вершина 2 сместится в направлении движения вершины 3 на вдвое меньшее расстояние, чем прошла вершина 3. Значит, проекции скорости и ускорения вершины 2 на направление движения вершины 3 будут равны  $v/2$  и  $a/2$  соответственно. К рассматриваемому моменту времени вершина 3 пройдёт путь  $S = L\sqrt{2}$ . Поэтому  $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2aL\sqrt{2}} = 2^{3/4}\sqrt{aL}$ .

Так как стержни жёсткие, то вершина 2 всё время движется по окружности радиусом  $L$  с центром в вершине 1. Поэтому скорость  $u$

вершины 2 направлена по касательной к этой окружности, то есть в рассматриваемый момент времени направлена вдоль стержня, соединяющего вершины 2 и 3. Следовательно, можно записать

$$u = \frac{v/2}{\cos(\pi/4)} = \frac{v}{\sqrt{2}} = 2^{1/4}\sqrt{aL}.$$

Проекция ускорения вершины 2 на направление стержня, соединяющего её с вершиной 1, есть центростремительное ускорение, равное  $u^2/L = a\sqrt{2}$ .

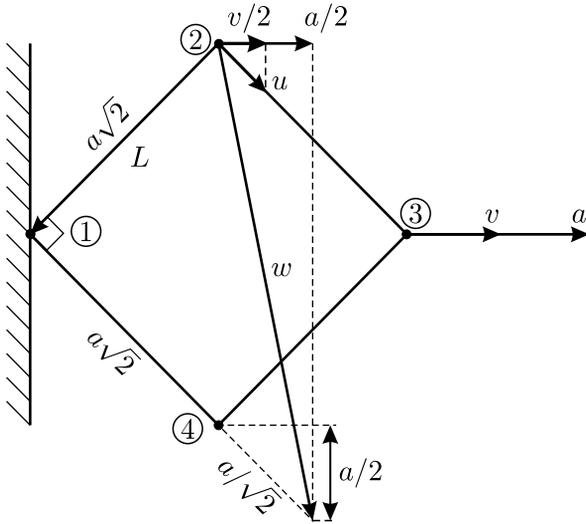


Рис. 1.32.

Мы нашли проекции ускорения вершины 2 на два различных направления. Полное ускорение можно найти, нарисовав соответствующим образом направленные векторы компонент ускорения, имеющие длины  $a/2$  и  $a\sqrt{2}$ , и восставив перпендикуляры к ним. Точка пересечения этих перпендикуляров позволит определить направление и величину вектора ускорения вершины 2. Чертёж удобно построить следующим образом. Выберем масштаб так, чтобы вектор  $a/2$  на чертеже имел длину, равную четверти диагонали нашего квадрата. Тогда вектор  $a\sqrt{2}$  будет иметь длину, равную стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора получаем:

$$w = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(a\sqrt{2} + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{13}{2}}.$$

**1.33\***. Так как при быстрой перемотке ленты ведущая ось вращается с постоянной угловой скоростью, то радиус принимающей бобины  $\tilde{r}$  возрастает со временем  $t$  от  $r$  до  $R$  по линейному закону:  $\tilde{r} = r + \frac{t}{T_1}(R - r)$ . После перемотки в течение времени  $T_2$  радиус бобины станет равным  $r_1 = r + (T_2/T_1)(R - r)$ .

При нормальном прослушивании кассеты лента движется с некоторой постоянной линейной скоростью  $v$ . Это означает, что за промежуток времени  $\Delta t$  на бобину наматывается участок ленты длиной  $v\Delta t$ , а площадь бобины увеличивается на величину  $\Delta S = hv\Delta t$ , где  $h$  — толщина ленты. Таким образом, площадь бобины возрастает с постоянной скоростью  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = hv$ . Значит, зависимость площади бобины от времени прослушивания  $t$  можно записать в виде  $S = \pi r^2 + hvt$ .

После перемотки в течение времени  $T_2$  радиус бобины станет равным  $r_1$ , а её площадь, соответственно,  $\pi r_1^2$ . При нормальном прослушивании кассеты бобина приобрела бы такую площадь через время  $T_3$ , которое можно определить из уравнения  $\pi r_1^2 = \pi r^2 + hvT_3$ .

С другой стороны, при нормальном прослушивании ленты от начала до конца бобина приобретает площадь  $\pi R^2$  за время  $N\tau$ , то есть справедливо уравнение  $\pi R^2 = \pi r^2 + hvN\tau$ .

Отсюда, с учётом выражения для  $r_1$ , находим:

$$T_3 = \frac{r_1^2 - r^2}{R^2 - r^2} N\tau = \frac{\left(r + \frac{T_2}{T_1}(R - r)\right)^2 - r^2}{R^2 - r^2} N\tau =$$

$$= \frac{\left(10 \text{ мм} + \frac{110 \text{ с}}{165 \text{ с}} \cdot (25 \text{ мм} - 10 \text{ мм})\right)^2 - 10^2 \text{ мм}^2}{25^2 \text{ мм}^2 - 10^2 \text{ мм}^2} \cdot 45 \text{ мин} \approx 25,7 \text{ мин.}$$

Таким образом, в результате перемотки мы попадём на песню с номером  $k = \left\lceil \frac{T_3}{\tau} \right\rceil + 1 = 26$ , то есть примерно на середину двадцать шестой песни.

**1.34.** Легко сообразить, что путь будет минимальным тогда, когда тело движется по прямой. Действительно, введём прямоугольную систему координат и направим ось  $x$  вдоль вектора ускорения  $\vec{a}$ . Тогда проекции вектора скорости тела на координатные оси зависят от времени  $\tau$  по следующим законам:  $v_x(\tau) = v_{x0} + a\tau$ ;  $v_y(\tau) = v_{y0}$ ;  $v_z(\tau) = v_{z0}$ . Здесь  $v_{x0}$ ,  $v_{y0}$ ,  $v_{z0}$  — проекции скорости тела на соответствующие оси

при  $\tau = 0$ . Если положить  $v_{y0} = v_{z0} = 0$ , то величина скорости тела в каждый момент времени  $\tau$  будет меньше, чем она была бы при отличных от нуля  $v_{y0}$  и  $v_{z0}$ . Поэтому будет меньше и пройденный путь. Значит, для решения задачи нужно рассматривать движение тела вдоль прямой, параллельной оси  $x$ .

При таком движении возможны три случая, отличающиеся по знакам скорости в течение времени движения  $t$ :

а)  $v_x(\tau) > 0$  при  $0 \leq \tau \leq t$ ;

б)  $v_x(\tau) < 0$  при  $0 \leq \tau \leq t$ ;

в)  $v_x(\tau) < 0$  при  $0 \leq \tau < t_0$  и  $v_x(\tau) > 0$  при  $t_0 < \tau \leq t$ .

Отметим, что во всех случаях  $a > 0$ .

В случае (а) пройденный путь совпадает с перемещением и равен

$$S_a = v_{x0}t + \frac{at^2}{2} \geq \frac{at^2}{2}.$$

В случае (б) пройденный путь — это перемещение, взятое с обратным знаком. Он равен

$$\begin{aligned} S_b &= - \left( v_{x0}t + \frac{at^2}{2} \right) = - \left( (v_{x0} + at)t - \frac{at^2}{2} \right) = \\ &= - \left( v_x(t)t - \frac{at^2}{2} \right) = |v_x(t)| \cdot t + \frac{at^2}{2} \geq \frac{at^2}{2}. \end{aligned}$$

Наконец, в случае (в) пройденный путь складывается из двух отрезков, пройденных телом до и после «точки поворота» (точки, в которой скорость тела обращается в ноль при  $\tau = t_0$ ). Первый отрезок пути может быть найден из формулы, полученной при рассмотрении случая (б), при подстановке в неё  $t = t_0$ :  $S_{B_1} = |v_x(t_0)| \cdot t_0 + \frac{at_0^2}{2} = \frac{at_0^2}{2}$

(здесь учтено, что  $v_x(t_0) = 0$ ). Второй же отрезок равен  $S_{B_2} = \frac{a(t - t_0)^2}{2}$ .

Таким образом, пройденный путь в случае (в) равен

$$S_B = S_{B_1} + S_{B_2} = \frac{at_0^2}{2} + \frac{a(t - t_0)^2}{2} = a \left( \left( t_0 - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{t^2}{4} \right) \geq \frac{at^2}{4}.$$

Значит, минимальным является путь, который тело проходит в случае (в). Он равен  $S = at^2/4$ , причём «точка поворота» должна приходиться на середину промежутка времени движения  $t$ .

**1.35.** Рассмотрим систему отсчёта, в которой муха вначале покоится, а капля мёда, находящаяся под мухой на расстоянии  $H$ , движется

от неё с постоянной скоростью  $v$  (см. рис. 1.35). Очевидно, что в этой системе отсчёта муха, чтобы достигнуть капли за минимальное время, должна начать лететь к точке встречи с мёдом по прямой с максимальным ускорением  $a$ .

Из построения на рисунке следует, что  $(at^2/2)^2 = (vt)^2 + H^2$ . Отсюда искомое минимальное время

$$t = \frac{\sqrt{2(v^2 + \sqrt{v^4 + H^2 a^2})}}{a}.$$

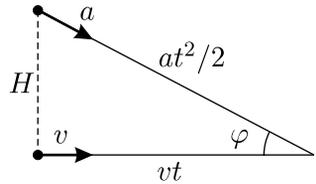


Рис. 1.35.

При этом вектор ускорения должен быть направлен под углом  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{H}{vt}$  к поверхности стола, где  $t$  найдено выше.

**1.36.** Перейдём в инерциальную систему отсчёта, движущуюся с постоянной скоростью  $\vec{V}$ . Так как во всех инерциальных системах отсчёта при одинаковых начальных условиях все механические явления протекают одинаково (принцип относительности Галилея), то ограничение, наложенное в условии задачи на ускорение корабля, не изменится. В новой системе отсчёта начальная скорость космического корабля равна нулю, а конечная скорость по модулю равна  $V\sqrt{2}$  и направлена под углом  $135^\circ$  к первоначальному направлению движения.

Теперь ясно, что для совершения манёвра нужно включить двигатели так, чтобы при развороте корабля его ускорение было всё время направлено в сторону конечной скорости корабля, то есть под углом  $135^\circ$  к первоначальному направлению движения. Тогда минимальное время манёвра будет равно  $\tau = V\sqrt{2}/a$ .

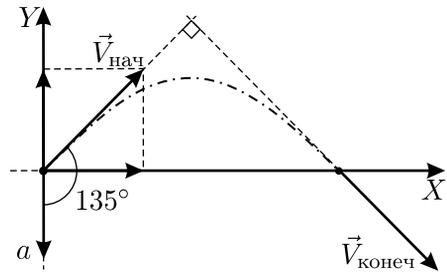


Рис. 1.36.

Выясним, по какой траектории будет двигаться корабль при манёвре. Для этого вернёмся в исходную систему отсчёта и направим координатную ось  $Y$  декартовой системы координат в направлении, обратном ускорению, а ось  $X$  — перпендикулярно к ней, так, как показано на рисунке 1.36. Тогда закон движения в проекциях на эти оси примет вид:

$$x = \frac{V\sqrt{2}}{2}t, \quad y = \frac{V\sqrt{2}}{2}t - \frac{at^2}{2}.$$

Выражая из первого уравнения время и подставляя его во второе, получим уравнение траектории корабля:  $y = x - \frac{ax^2}{V^2}$ , то есть корабль будет двигаться по параболе, аналогично телу, брошенному под углом  $45^\circ$  к горизонту.

В заключение приведём примеры двух неправильных решений задачи, которые сразу приходят в голову.

1) Корабль осуществляет поворот, двигаясь по окружности радиусом  $R$  с постоянным центростремительным ускорением  $a = V^2/R$ . Тогда время, которое он затратит на манёвр, рано  $\tau_1 = \frac{\pi R}{2V} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{V}{a} > \tau$ .

2) Корабль сначала полностью гасит начальную продольную скорость и только потом развивает необходимую поперечную скорость. В этом случае время манёвра равно  $\tau_2 = 2(V/a) > \tau$ .

**1.37.** Рассмотрим второй, вспомогательный шарик, который начинает двигаться с той же высоты, что и первый, но не падает свободно, а движется равномерно таким образом, что он одновременно с первым шариком ударяется о плоскость и одновременно с ним достигает максимальной высоты.

Пусть к моменту времени  $t$  первый шарик прошёл путь  $S$ , а второй шарик прошёл путь  $S_2$ . Тогда число ударов второго шарика может быть найдено при помощи формулы:  $N = \left[ \frac{t+T}{2T} \right]$ , где  $T$  — время, в течение которого шарики проходят от верхней до нижней точки траектории, а квадратными скобками обозначена операция выделения целой части числа. С учётом того, что  $S_2 = \frac{gT}{2}t$ , где  $\frac{gT}{2}$  — скорость равномерного

движения вспомогательного шарика, получаем:  $N = \left[ \frac{gt^2 + 2S_2}{4S_2} \right]$ .

Поскольку к моменту, когда первый шарик пройдёт путь  $S$ , количество его ударов о плоскость будет равно количеству ударов к тому моменту, когда второй шарик пройдёт путь  $S_2$ , то в последней формуле можно заменить  $S_2$  на  $S$ . В итоге получим:

$$N = \left[ \frac{gt^2 + 2S}{4S} \right] = \left[ \frac{gt^2}{4S} + \frac{1}{2} \right].$$

**1.38\*.** Введём обозначение:  $t_0 = 1$  с. Поместим начало координат в точке бросания и направим ось  $y$  вверх. Возможны три случая, в зависимости от величины  $S$ .

1. В течение первых двух секунд камень движется вверх, то есть  $v_0 > g \cdot 2t_0 = 20$  м/с. Тогда для первой секунды полёта путь

$$S = v_0 t_0 - (gt_0^2/2) > 3gt_0^2/2 = 15 \text{ м.}$$

Из написанного равенства следует, что  $v_0 = (2S + gt_0^2)/(2t_0)$ .

К концу второй секунды полёта вертикальная координата камня будет равна  $y = v_0 \cdot 2t_0 - (g/2) \cdot (2t_0)^2 = 2S - gt_0^2$ . Следовательно, за вторую секунду камень пройдёт путь  $\Delta S = S - gt_0^2 > 5$  м.

2. В течение первой секунды камень движется вверх, а в течение второй секунды направление его движения изменяется. При этом, очевидно,  $v_0$  должно удовлетворять следующим условиям:

$$v_0 - gt_0 > 0; \quad v_0 - g \cdot 2t_0 < 0,$$

откуда

$$gt_0 = 10 \text{ м/с} < v_0 < g \cdot 2t_0 = 20 \text{ м/с.}$$

Тогда, аналогично первому случаю,  $v_0 = \frac{2S + gt_0^2}{2t_0}$ , и, с учётом написанного выше условия для  $v_0$ , получим:  $gt_0^2/2 = 5 \text{ м} < S < 3gt_0^2/2 = 15 \text{ м}$ .

Камень остановится через время  $\tau = \frac{v_0}{g} = \frac{S}{gt_0} + \frac{t_0}{2}$ . При этом  $t_0 = 1 \text{ с} < \tau < 2t_0 = 2 \text{ с}$ . К концу промежутка времени  $\tau$  вертикальная координата камня будет равна

$$y_{\text{макс}} = v_0 \tau - \frac{g\tau^2}{2} = \frac{(2S + gt_0^2)^2}{8gt_0^2},$$

а к концу второй секунды полёта координата камня будет равна

$$y_{\text{кон}} = v_0 \cdot 2t_0 - (g/2) \cdot (2t_0)^2 = 2S - gt_0^2.$$

Таким образом, за вторую секунду камень пройдёт путь

$$\Delta S = (y_{\text{макс}} - S) + (y_{\text{макс}} - y_{\text{кон}}) = 2y_{\text{макс}} - S - y_{\text{кон}} = \frac{5g^2 t_0^4 - 8gt_0^2 S + 4S^2}{4gt_0^2},$$

и с учётом неравенства, написанного выше для  $S$ , получим

$$2,5 \text{ м} < \Delta S < 5 \text{ м.}$$

При этом если камень останавливается строго в начале или в конце второй секунды полёта, то  $\Delta S = 5$  м, а если остановка происходит в середине второй секунды, то путь минимален:  $\Delta S = 2,5$  м.

3. Направление движения камня изменяется в течение первой секунды. При этом  $v_0 < gt_0 = 10$  м/с, часть пути  $S$  камень проходит вверх до точки остановки на высоте  $y_{\text{макс}} = \frac{v_0^2}{2g} = S_1$  за время  $\tau = v_0/g$ , а оставшуюся часть — за время  $(t_0 - \tau)$ :

$$S_2 = \frac{g(t_0 - \tau)^2}{2}.$$

Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2v_0^2 - 2v_0gt_0 + g^2t_0^2}{2g} < \frac{gt_0^2}{2} = 5 \text{ м.}$$

Из последнего равенства получаем:  $v_0 = \frac{gt_0 \pm \sqrt{4gS - g^2t_0^2}}{2}$ . Поскольку при этом должно выполняться неравенство  $4gS - g^2t_0^2 > 0$ , то  $S > gt_0^2/4 = 2,5$  м. Окончательно получаем, что в третьем случае ограничения на величину  $S$  имеют вид:

$$\frac{gt_0^2}{4} = 2,5 \text{ м} < S < \frac{gt_0^2}{2} = 5 \text{ м.}$$

В конце первой секунды координата камня будет равна

$$y_1 = v_0t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = \pm \frac{t_0\sqrt{4gS - g^2t_0^2}}{2},$$

а в конце второй секунды

$$y_2 = v_0 \cdot 2t_0 - \frac{g}{2} \cdot (2t_0)^2 = t_0 \left( -gt_0 \pm \sqrt{4gS - g^2t_0^2} \right).$$

Поскольку в данном случае в течение всей второй секунды камень падает вниз, то путь, пройденный им за вторую секунду, составляет

$$\Delta S = y_1 - y_2 = gt_0^2 \mp \frac{t_0\sqrt{4gS - g^2t_0^2}}{2}.$$

С учётом ограничений на величину  $S$  получаем:  $5 \text{ м} < \Delta S < 15 \text{ м}$ .

Очевидно, что при  $S < 2,5$  м решения задачи нет.

**1.39.** Так как стержень невесомый и трение бусинки о стержень отсутствует, то бусинка свободно падает. Из рисунка 1.39 видно, что  $gt^2/2 = l \operatorname{tg} \alpha$ . Отсюда угол, который стержень составляет с горизонталью, возрастает со временем по закону:  $\alpha = \arctg \frac{gt^2}{2l}$ . После того, как

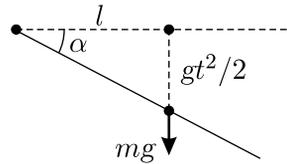


Рис. 1.39.

бусинка соскользнёт со стержня, дальнейшее его вращение будет происходить с постоянной угловой скоростью.

**1.40.** Введём прямоугольную систему координат в плоскости движения частиц. Её начало поместим в точку вылета, ось  $X$  направим горизонтально вдоль вектора скорости  $v_1$ , а ось  $Y$  — вниз. Тогда через время  $t$  проекции векторов скоростей частиц на оси координат будут равны:  $v_{1x} = v_1$ ,  $v_{1y} = gt$ ;  $v_{2x} = -v_2$ ,  $v_{2y} = gt$ . Если угол между векторами скоростей в момент времени  $\tau$  равен  $90^\circ$ , то скалярное произведение этих векторов должно равняться нулю:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} = -v_1v_2 + g^2\tau^2 = 0,$$

откуда  $\tau = \sqrt{v_1v_2}/g$ .

**1.41.** Найдём уравнение траектории снаряда в системе координат, заданной на рисунке в условии задачи. Пусть  $t$  — время, прошедшее с момента выстрела, а  $V_0$  — начальная скорость снаряда. Очевидно, что координаты снаряда в момент  $t$  есть  $x = V_0 \cos \alpha \cdot t$ ,  $y = \frac{gt^2}{2} - v_0 \sin \alpha \cdot t$ , откуда  $y(x) = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \operatorname{tg} \alpha$ . Точка столкновения снаряда с поверхностью горы находится из уравнения

$$y = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \operatorname{tg} \alpha = ax^2.$$

Решение  $x = 0$  соответствует месту выстрела, поэтому точка падения снаряда определяется уравнением

$$\left( \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} - a \right) x = \operatorname{tg} \alpha.$$

Это уравнение не имеет положительных решений при  $\frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} \leq a$ , то есть минимальное значение начальной скорости снаряда, при которой он никогда не упадёт на поверхность горы,  $V_{0\min} = \frac{1}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2a}}$ . При меньших значениях  $V_0$  столкновение снаряда с горой неизбежно.

**1.42.** Поместим начало координат в точку бросания камня, направим ось  $X$  в сторону лампочки, а ось  $Y$  вертикально вверх (см. рис. 1.42). Так как камень бросается под углом  $45^\circ$  к горизонту, то горизонтальная составляющая начальной скорости камня равна вертикальной составляющей — обозначим их через  $v$ .

В произвольный момент времени  $t$  камень имеет координаты

$$x = vt, \quad y = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Приравнивая координату  $y$  нулю, найдём время  $T$  полёта камня:  $T = 2v/g$ . Так как хулиган попал в лампочку, то  $L = vT = 2v^2/g$ .

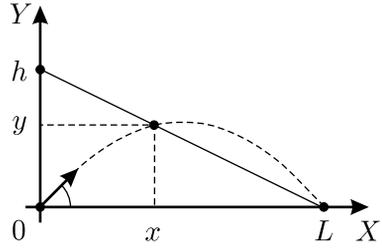


Рис. 1.42.

С учётом этих соотношений для координаты тени камня на стене в момент времени  $t$  имеем:

$$\begin{aligned} h(t) &= L \operatorname{tg} \alpha = L \frac{y}{L - x} = L \frac{vt - (gt^2/2)}{L - vt} = \frac{L}{v} \cdot vt \cdot \frac{v - (gt/2)}{L - vt} = \\ &= vt \cdot \frac{vT - (gT/2)t}{L - vt} = vt \cdot \frac{L - vt}{L - vt} = vt = t \sqrt{\frac{gL}{2}}, \end{aligned}$$

то есть тень камня движется по стене равномерно со скоростью  $v = \sqrt{gL/2}$ .

**1.43\*.** Между моментом броска шарика и его первым ударом о плоскость пройдёт время  $t_0 = \frac{2v \sin \alpha}{g}$ . После удара горизонтальная составляющая скорости шарика не изменится, а вертикальная станет равна  $Rv$ . Значит, между первым и вторым ударами шарика о плоскость пройдёт время  $t_1 = \frac{2Rv \sin \alpha}{g}$ . Рассуждая аналогично, получим,

что между  $n$ -м и  $(n + 1)$ -м ударами пройдёт время  $t_n = \frac{2v \sin \alpha}{g} R^n$ .

Полное время  $T$ , в течение которого шарик будет продолжать прыгать, может быть найдено, как сумма промежутков времени  $t_n$ :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} t_n = \frac{2v \sin \alpha}{g} \sum_{n=0}^{\infty} R^n = \frac{2v \sin \alpha}{g} \cdot \frac{1}{1 - R}$$

(здесь мы использовали формулу для суммы геометрической прогрессии). Так как горизонтальная составляющая скорости шарика во время процесса не изменяется, то для расстояния, которое пропрыгает шарик,

получаем:  $S = v \cos \alpha T = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g(1-R)} \approx 10$  м.

Отметим, что в этой задаче рассмотрен простой пример бесконечного процесса, занимающего конечный промежуток времени.

**1.44.** Ни в каком. Месяц «рогами» вверх можно увидеть только вблизи экватора, а пейзаж на картине — зимний! Правда, снег и мороз около экватора бывают высоко в горах. Но пейзаж, судя по картине, равнинный.

**1.45.** Если Вы поскользнулись и падаете назад, то помочь Вам восстановить равновесие может направленная вперёд сила, приложенная к верхней части корпуса. Роль такой силы выполняет сила взаимодействия Ваших рук с корпусом. Действительно, в первый момент Ваши руки после взмаха вверх резко двигаются назад и вниз, поэтому со стороны корпуса на руки действует сила, создающая необходимое (и довольно значительное) ускорение, направленное назад и вниз. Противоположно направленная сила, действующая на корпус со стороны рук, позволяет Вам восстановить равновесие и прекратить начавшееся скольжение. В следующий момент сила трения покоя, заметно превышая силу трения скольжения по льду, обеспечивает погашение количества движения, приобретённого руками в момент взмаха.

**1.46.** Из условия следует, что при скорости, близкой к 150 км/ч, подъёмная сила равна силе тяжести, и самолёт сможет взлететь с полосы. Чтобы разогнать самолёт до такой скорости, сила тяги должна превосходить силу сопротивления воздуха. Эта сила сопротивления почти не отличается от силы сопротивления при планировании с указанной постоянной скоростью под небольшим углом к горизонту:  $F_{\text{сопр}} = Mg \sin \alpha$ . Таким образом, минимальная сила тяги должна равняться  $F_{\text{min}} \approx Mg \sin \alpha \approx 1,7 \cdot 10^3$  Н.

**1.47.** Пусть угол наклона прямых участков тоннеля к горизонту равен  $\alpha$ . Тогда вагонетка движется по этим участкам с постоянным ускорением  $a = g \sin \alpha$ , сначала ускоряясь, а затем замедляясь. Первый наклонный участок будет пройден вагонеткой за время  $t$ , определяемое

из условия:  $\frac{at^2}{2} = \frac{l}{2 \cos \alpha}$ . Отсюда  $t = \sqrt{\frac{l}{a \cos \alpha}}$ . Второй наклонный участ

сток будет пройден вагонеткой, очевидно, за такое же время  $t$  (тоннель симметричный). Значит, полное время поездки от  $A$  до  $B$  равно

$$T = 2t = 2\sqrt{\frac{l}{a \cos \alpha}} = 2\sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha \cos \alpha}} = 2\sqrt{\frac{2l}{g \sin 2\alpha}}.$$

Это время будет минимальным при максимальном значении  $\sin 2\alpha$ . Так как значение функции синус не может превышать 1, а это значение достигается при величине её аргумента  $\pi/2$ , то в нашем случае  $\alpha = \pi/4$ . Учитывая это, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{l} = 1, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{l}{2}.$$

Минимальное время поездки, достигаемое при данном значении максимальной глубины тоннеля, равно  $T_{\min} = 2\sqrt{2l/g}$ .

**1.48.** Обозначим расстояние от А до Б через  $S$ , а скорость течения реки через  $u$ . Скорость движения лодки с одним мотором относительно воды обозначим через  $v$ . Поскольку при установке на лодку двух моторов сила тяги вырастает вдвое, а сила сопротивления движению лодки пропорциональна квадрату скорости движения лодки относительно воды, то скорость движения лодки с двумя моторами относительно воды равна  $\sqrt{2}v$ . Из условия задачи не известно, какой из населённых пунктов — А или Б — находится выше по течению реки. Поэтому нужно проверить два варианта:

1) А находится выше по течению; 2) Б находится выше по течению.

Для первого варианта имеем уравнения:

$$\frac{S}{u+v} = t_1, \quad \frac{S}{u+\sqrt{2}v} = t_2 = \frac{t_1}{2}. \quad (1)$$

Для второго варианта:

$$\frac{S}{v-u} = t_1, \quad \frac{S}{\sqrt{2}v-u} = t_2 = \frac{t_1}{2}. \quad (2)$$

Для варианта (1), разделив одно уравнение на другое, получим:

$$\frac{u+\sqrt{2}v}{u+v} = 2, \quad \text{откуда} \quad \frac{u}{v} = \sqrt{2} - 2 < 0.$$

Так как  $u$  и  $v$  положительны, то отсюда следует, что система (1) не имеет решения. Значит, Анискино (А) находится ниже по течению, чем Борискино (Б). Из системы (2), поделив уравнения друг на друга, получаем:

$$\frac{u}{v} = 2 - \sqrt{2}.$$

Чтобы найти время движения из Б в А на лодке с одним или двумя моторами, нужно вычислить величины:

$$t_3 = \frac{S}{u+v} \quad \text{и} \quad t_4 = \frac{S}{u+\sqrt{2}v}. \quad (3)$$

Выражая из (2)  $S$  через  $t_1$  и подставляя в (3), получаем:

$$t_3 = \frac{1 - (u/v)}{1 + (u/v)} \cdot t_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}} \cdot t_1 \approx 13,06 \text{ мин} \quad \text{— время движения}$$
 с одним мотором;

$$t_4 = \frac{1 - (u/v)}{\sqrt{2} + (u/v)} \cdot t_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \cdot t_1 \approx 10,35 \text{ мин} \quad \text{— время движения}$$
 с двумя моторами.

**1.49\*.** Когда лифт неподвижен, на тело действуют сила тяжести  $mg$ , сила натяжения верхней верёвки  $F$  и силы натяжения нижних верёвок  $F_0$ . Из условия равновесия получаем:

$$F = mg + 2F_0. \quad (1)$$

При движении лифта с постоянным ускорением  $a$ , направленным вверх, в установившемся режиме тело движется с тем же ускорением  $a$ . Поэтому силы натяжения верёвок должны измениться. Из второго закона Ньютона:

$$F' - mg - 2F'_0 = ma, \quad (2)$$

где  $F'$  и  $F'_0$  — силы натяжения верхней и нижних верёвок.

Для того, чтобы записать ещё одно недостающее для решения задачи уравнение, учтём, что сила натяжения верёвки зависит от её удлинения  $x$  следующим образом: при  $x \leq 0$  сила  $F = 0$ , при  $x > 0$  сила  $F = kx$ , где  $k$  — некоторый коэффициент, одинаковый для всех верёвок. Отсюда получаем, что при неподвижном лифте удлинения верхней и нижних верёвок  $x$  и  $x_0$  связаны соотношением:

$$\frac{x}{F} = \frac{x_0}{F_0} = \frac{1}{k}.$$

В лифте, движущемся с направленным вверх ускорением  $a$ , верхняя верёвка дополнительно растянется на величину  $y$ , а нижние укоротятся на такую же величину. Таким образом, удлинения верёвок будут равны

$$x' = x + y, \quad x'_0 = x_0 - y.$$

Возможны два случая:  $x'_0 > 0$  и  $x'_0 \leq 0$ .

В первом случае

$$F'_0 = kx'_0, \quad F' = kx', \quad F'_0 - F_0 = -ky, \quad F' - F = ky.$$

Вычитая из соотношения (2) соотношение (1), получаем:

$$F' - F = ma + 2(F'_0 - F_0),$$

или  $ma = 3ky$ , то есть  $y = \frac{ma}{3k}$ . Отсюда сила натяжения верхней верёвки

$$F' = F + ky = mg + 2F_0 + \frac{ma}{3},$$

а силы натяжения нижних верёвок

$$F'_0 = F_0 - ky = F_0 - \frac{ma}{3}.$$

Указанный случай возможен при  $F_0 - \frac{ma}{3} > 0$ , то есть при  $a < 3F_0/m = 1,5 \text{ м/с}^2$ . Этому неравенству соответствует заданное в условии задачи ускорение  $a_1 = 1 \text{ м/с}^2$ . Следовательно, при этом ускорении

$$F' = m \left( g + \frac{a_1}{3} \right) + 2F_0 \approx 111 \text{ Н}.$$

В другом случае (при  $x'_0 \leq 0$ ), когда  $a \geq 3F_0/m = 1,5 \text{ м/с}^2$ , нижние верёвки не натянуты, то есть  $F'_0 = 0$ , а  $F' = m(g + a)$ . Этот случай реализуется при ускорении лифта  $a_2 = 2 \text{ м/с}^2$ . При этом ускорении

$$F' = m(g + a_2) = 118 \text{ Н}.$$

**1.50.** На прикреплённый к середине бруска груз массой  $m_2$  действуют сила  $\vec{F}$  со стороны верёвки и некоторая сила  $\vec{F}_1$  со стороны бруска, направленная в противоположную сторону. Так как брусок лёгкий, то сумма всех действующих на него сил должна быть равна нулю. Поэтому на каждый из прикреплённых к концам бруска одинаковых грузов массой  $m_1$  действует сила  $-\vec{F}_1/2$ . Так как ускорения всех трёх грузов одинаковы, то можно записать:

$$\frac{F - F_1}{m_2} = \frac{F_1/2}{m_1}.$$

Отсюда

$$F = F_1 \left( 1 + \frac{m_2}{2m_1} \right).$$

Из условия задачи следует, что брусок ломается, когда сила, действующая на его середину со стороны груза  $m_2$ , равна  $F_1 = mg$ . С учётом этого, полагая  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , получаем:

$$F = mg \left( 1 + \frac{m_2}{2m_1} \right) = 88 \text{ Н}.$$

**1.51.** На тело массой  $m$  действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила реакции опоры  $\vec{N}$  со стороны клина.

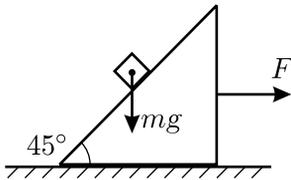


Рис. 1.51.1.

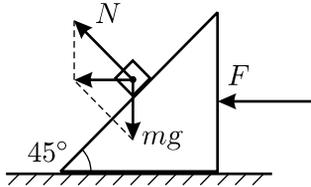


Рис. 1.51.2.

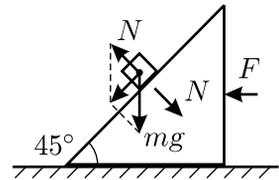


Рис. 1.51.3.

(а) Ускорение тела может быть направлено вертикально, только если сила реакции опоры равна нулю (см. рис. 1.51.1). При этом величина ускорения тела будет равна  $g$ , то есть оно будет свободно падать. Для того, чтобы при падении тела оно не касалось клина с углом при основании  $45^\circ$ , клин должен двигаться вправо с ускорением  $A \geq g$ . Следовательно, к клину нужно приложить направленную вправо силу  $F = MA \geq Mg$ .

(б) Как видно из рисунка 1.51.2, ускорение тела будет горизонтально, если  $N = mg\sqrt{2}$ . При этом равнодействующая сил, приложенных к телу, равна  $mg$  и направлена влево. Поэтому ускорение тела направлено влево и равно по величине  $g$ . Для того, чтобы в процессе движения клин давил на тело с необходимой силой  $\vec{N}$ , он также должен двигаться влево с таким же по величине ускорением  $g$ . Чтобы сообщить и клину, и телу такое ускорение, к клину необходимо приложить направленную влево силу  $F = (m + M)g$ .

(в) Для того, чтобы ускорение тела составляло угол  $45^\circ$  с вертикалью, сила реакции опоры, как видно из рисунка 1.51.3, должна быть по величине равна  $N = mg/\sqrt{2}$ . При этом, очевидно, клин должен покоиться — в противном случае он выскользнет из-под тела. На клин со стороны тела действует сила  $-\vec{N}$  с направленной вправо горизонтальной составляющей, равной по величине  $mg/2$ . Чтобы её компенсировать, к клину необходимо приложить такую же по величине силу, направленную влево:  $F = mg/2$ .

**1.52.** Поскольку нить и блоки невесомые и трения нет, то на левый груз в горизонтальном направлении действует сила (см. рис. 1.52), равная  $3F$  и направленная слева направо, а на правый груз — сила  $2F$ , направленная справа налево. Направим ось  $X$  неподвижной системы координат направо. Тогда проекция ускорения левого груза на ось  $X$  будет, очевидно, равна  $a_1 = 3F/M$ , а проекция ускорения правого груза  $a_2 = -2F/M$ .

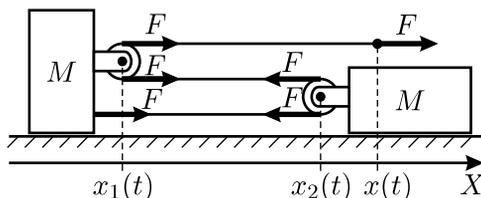


Рис. 1.52.

Найдём, как связаны друг с другом ускорения грузов и конца нити, то есть получим уравнение кинематической связи. Для этого обозначим координату оси левого блока в некоторый момент времени  $t$  через  $x_1(t)$ , координату оси правого блока — через  $x_2(t)$ , а координату конца нити через  $x(t)$ . Пусть длина нити равна  $L$ , радиусы блоков —  $r$ , расстояние от оси левого блока до левого груза —  $x_0$ . Так как нить нерастяжима, то можно выразить её постоянную длину  $L$  через введённые координаты:

$$x(t) - x_1(t) + \pi r + x_2(t) - x_1(t) + \pi r + x_2(t) - x_1(t) + x_0 = L.$$

Отсюда

$$x(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + L - 2\pi r - x_0.$$

Такое же соотношение справедливо также и для момента времени  $t + \Delta t$ , близкого к моменту  $t$ :

$$x(t + \Delta t) = 3x_1(t + \Delta t) - 2x_2(t + \Delta t) + L - 2\pi r - x_0.$$

Вычитая из второго соотношения первое, найдём связь между перемещениями левого и правого грузов  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  и смещением конца нити  $\Delta x$ :  $\Delta x = 3\Delta x_1 - 2\Delta x_2$ . Деля полученное уравнение на величину промежутка времени  $\Delta t$ , найдём связь между скоростями грузов и конца нити:  $v = 3v_1 - 2v_2$ . Это соотношение также справедливо для любых двух близких моментов времени. Поэтому связь между ускорениями грузов может быть найдена аналогично и имеет вид:  $a = 3a_1 - 2a_2$ . Следует отметить, что ускорение правого груза  $a_2$  направлено влево, против оси  $X$ , и поэтому отрицательно.

Таким образом, из нерастяжимости нити следует, что ускорение, с которым движется конец нити, складывается из утроенной величины ускорения левого груза и удвоенной величины ускорения правого груза:

$$a = 3a_1 - 2a_2 = 3 \cdot \frac{3F}{M} - 2 \cdot \left( -\frac{2F}{M} \right) = \frac{13F}{M}.$$

**1.53.** Поскольку ускорение каждого груза определяется только силой натяжения прикреплённой к нему нити, то величины и направления скоростей грузов не играют в данном случае никакой роли. Всего возможны шесть разных вариантов расположения грузов, нитей и направления действия силы. Они приведены на рисунках:

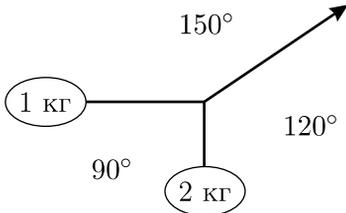


Рис. 1.53.1.

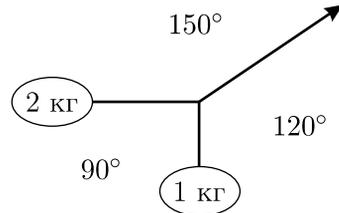


Рис. 1.53.2.

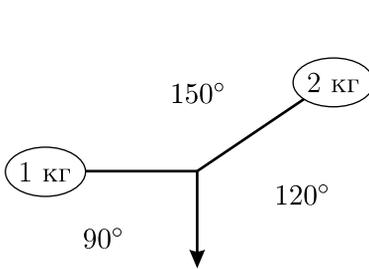


Рис. 1.53.3.

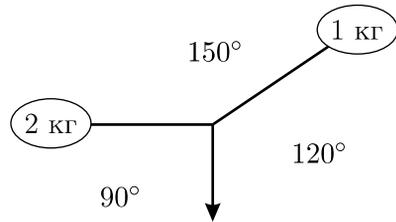


Рис. 1.53.4.

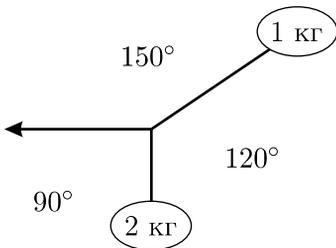


Рис. 1.53.5.

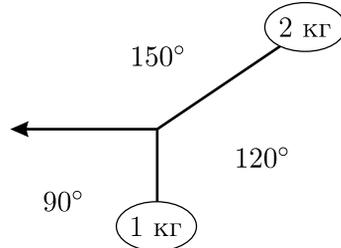


Рис. 1.53.6.

Так как нити невесомы, то сумма сил натяжения, действующих на узелок, равна нулю. Для того, чтобы ускорения грузов были одинаковы, сила натяжения  $F_1$  нити, действующая на груз массой  $m_1 = 1$  кг, должна быть в два раза меньше силы натяжения  $F_2$ , действующей на груз массой  $m_2 = 2$  кг. Этим условиям удовлетворяет только вариант № 6 (см. рис. 1.53.7). С учётом того, что сила, с которой тянут за нить, равна  $F = 10$  Н, получаем:

$$F_1 = F \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ Н},$$

$$F_2 = \frac{F}{\cos 30^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ Н}.$$

Поэтому величины ускорений грузов в варианте № 6 равны

$$a_1 = a_2 = \frac{F_1}{m_1} = \frac{F_2}{m_2} = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ м/с}^2,$$

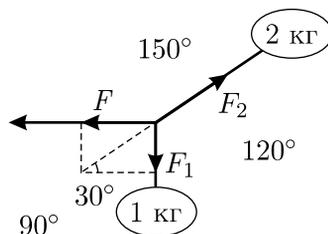


Рис. 1.53.7.

причём ускорение  $a_1$  направлено под углом  $+90^\circ$  к силе  $F$ , а ускорение  $a_2$  — под углом  $-30^\circ$  к силе  $F$ .

**1.54.** Введём прямоугольную систему координат с началом в точке крепления нити к потолку, направим координатную ось  $X$  вниз и запишем уравнения движения грузов  $m_1$ ,  $m_2$  и блока  $A$  в проекциях на эту ось (см. рис. 1.54). Учтём при этом, что ввиду невесомости нити и блоков сила натяжения  $T$  по всей её длине одинакова.

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - 2T, \\ m_2 a_2 &= m_2 g - T, \\ F &= 2T. \end{aligned}$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  — ускорения грузов  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Для того, чтобы решить данную систему, необходимо получить уравнение, связывающее эти ускорения — уравнение кинематической связи. Это можно сделать, воспользовавшись нерастяжимостью нити. Обозначим координаты оси нижнего блока, груза  $m_2$  и оси верхнего блока через  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_A$  соответственно. Тогда длина нити  $L$  выразится следующим образом:

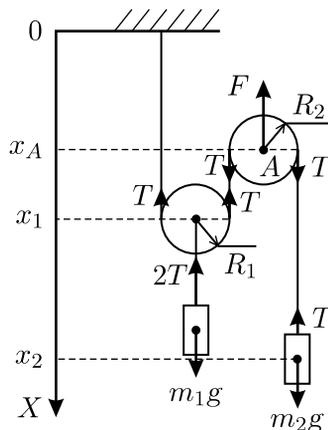


Рис. 1.54.

$$L = x_1 + \pi R_1 + (x_1 - x_A) + \pi R_2 + (x_2 - x_A).$$

Отметим, что радиусы нижнего и верхнего блоков  $R_1$  и  $R_2$  являются постоянными величинами. Данное соотношение справедливо для любого момента времени.

Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  координаты оси нижнего блока, груза  $m_2$  и оси верхнего блока изменились и стали равны  $x'_1$ ,  $x'_2$  и  $x'_A$  соответственно. Тогда можно записать:

$$L = x'_1 + \pi R_1 + (x'_1 - x'_A) + \pi R_2 + (x'_2 - x'_A).$$

Вычитая друг из друга два последних уравнения, деля разность на  $\Delta t$  и учитывая, что отношение  $(x' - x)/\Delta t$  представляет собой скорость, найдём связь между скоростями оси нижнего блока, груза  $m_2$  и оси верхнего блока:  $2v_1 + v_2 = 2v_A$ . Рассматривая аналогичным образом малые изменения скоростей за время  $\Delta t$ , можно убедиться, что ускорения  $a_1$  и  $a_2$  и  $a_A$  связаны аналогичным соотношением:

$$2a_1 + a_2 = 2a_A.$$

Это и есть уравнение кинематической связи.

Решая уравнения движения с учётом полученного уравнения кинематической связи, найдём ускорение оси верхнего блока:

$$a_A = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1m_2}F.$$

Отметим, что при некоторых соотношениях величин  $m_1$ ,  $m_2$  и  $F$  (в частности, при очень малых  $F$ ) ускорение точки  $A$  может быть больше ускорения свободного падения  $g$ . Это связано с тем, что блок невесом, и на него действуют силы  $F$  и  $2T$ , равные в сумме нулю, так что его ускорение может быть как меньше, так и больше  $g$ .

**1.55\***. Из условия задачи следует, что сила натяжения нити  $F$  везде вдоль нити одна и та же. До начала движения, очевидно, эта сила равна  $F_0 = mg$ , а груз  $2m$  не давит на пол. В начале движения сила увеличивается на некоторую величину  $\Delta F$  на короткое время  $\Delta t$ , за счёт чего грузы начинают двигаться вверх со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . По закону изменения импульса можно записать:

$$\Delta F \cdot \Delta t = mv_1; \quad 2\Delta F \cdot \Delta t = 2mv_2,$$

откуда следует, что  $v_1 = v_2$ . В дальнейшем эти скорости будут оставаться постоянными, а сила натяжения снова станет равной  $F_0 = mg$ . Поскольку конец нити вытягивают со скоростью  $v$ , а длина нити  $L$ , можно записать для двух моментов времени выражение для длины нити через координаты блоков и грузов (см. рис. 1.55):

$$x_k - x_2 + x_0 - x_2 + x_0 - x_1 + 2\pi R = L;$$

$$(x_k + vt) - (x_2 + v_1t) + x_0 - (x_2 + v_1t) + x_0 - (x_1 + v_1t) + 2\pi R = L. \quad (1)$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем:  $vt - 3v_1t = 0$ , или  $v_1 = v_2 = v/3$ .

Задача может быть решена и другим способом, путём рассмотрения уравнений движения грузов на этапе их разгона от состояния покоя до конечной скорости. Обозначая ускорения грузов  $m$  и  $2m$  через  $a_1$  и  $a_2$  соответственно, получаем уравнения движения:  $F - mg = ma_1$ ;  $2F - 2mg = 2ma_2$ . Отсюда  $a_1 = a_2$ .

Из уравнения кинематической связи (1) следует, что  $x_k - 2x_2 - x_1 = \text{const}$ , следовательно, в каждый момент времени скорости грузов  $v_1(t)$ ,  $v_2(t)$  и конца нити  $v_k(t)$  связаны соотношением  $v_k(t) = 2v_2(t) + v_1(t)$ , а связь соответствующих ускорений имеет вид:  $a_k = 2a_2 + a_1$ .

С учётом равенства ускорений грузов получаем  $a_1 = a_2 = a_k/3$ . Поскольку ускорения грузов в каждый момент времени одинаковы, а в начальный момент времени грузы покоятся, то скорости, которые приобретут грузы, также будут одинаковы и равны  $v_1 = v_2 = v/3$ .

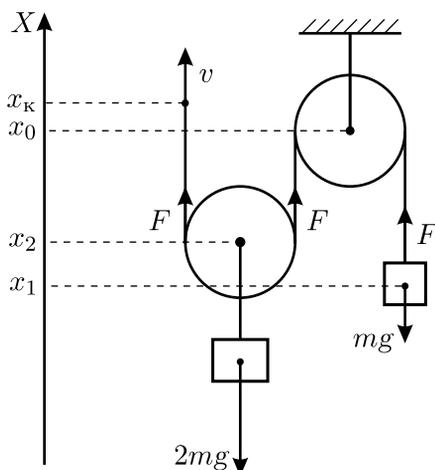


Рис. 1.55.

**1.56.** Направим координатную ось  $X$  вертикально вниз (см. рис. 1.56). Тогда, если координаты тяжёлой оси блока, первого груза и второго груза равны  $x$ ,  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, условие нерастяжимости нити имеет вид:

$$x_1 + 2x_2 - x = L = \text{const}.$$

Это соотношение справедливо для любых двух близких моментов времени  $t$  и  $t + \Delta t$ , откуда следует связь изменений координат за время  $\Delta t$ :

$$\Delta x_1 + 2\Delta x_2 - \Delta x = 0.$$

Деля полученное уравнение на  $\Delta t$ , находим связь скоростей грузов и блока:

$$v_1 + 2v_2 - v = 0.$$

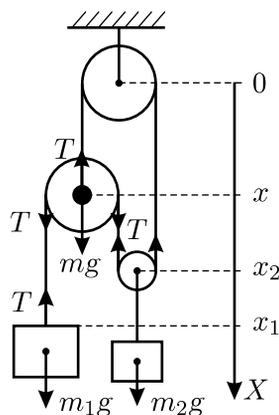


Рис. 1.56.

Повторяя описанную процедуру, получаем соотношение, связывающее проекции ускорений первого груза, второго груза и тяжёлой оси блока на ось  $X$ :

$$a_1 + 2a_2 - a = 0.$$

Обозначим через  $T$  силу натяжения нити, прикрепленной к первому грузу и тяжёлой оси блока (сила натяжения постоянна вдоль нити, так как нить невесома). Тогда уравнения движения грузов и оси блока, спроецированные на координатную ось  $X$ , имеют вид:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T, \quad m_2 a_2 = m_2 g - 2T, \quad ma = mg + T.$$

Решая совместно четыре последних уравнения, получаем:

$$a_2 = \frac{(m + m_1)m_2}{m(4m_1 + m_2) + m_1 m_2} g.$$

**1.57\***. Обозначим силу натяжения подвеса, на котором закреплён груз  $m_1$ , через  $F$  (см. рис. 1.57). Тогда сила натяжения нити на вертикальных участках по обе стороны от нижнего блока равна  $F/2$  — из-за невесомости этого блока и нити, а также из-за отсутствия трения в оси блока и о воздух. Силу натяжения нити, действующую на подвешенный к ней груз  $m_2$ , обозначим через  $f$ . Так как двухступенчатый блок невесом и трение в его оси и о воздух отсутствует, то сумма моментов сил натяжения нити, действующих на него, равна нулю:  $\frac{F}{2}R = \frac{F}{2}r + fR$ .

$$\text{Отсюда } f = \frac{R - r}{2R} F.$$

Поскольку система из таких блоков не даёт выигрыша в работе, то при смещении нижнего груза на расстояние  $\Delta x_1$ , например, вниз, верхний груз сместится на расстояние  $\Delta x_2$  вверх, и будет справедливо соотношение:  $F\Delta x_1 + f\Delta x_2 = 0$ . Отсюда, с учётом найденной связи сил  $F$  и  $f$ , получаем:  $\Delta x_1 + \frac{R - r}{2R}\Delta x_2 = 0$ . Таким образом, связь проекций  $a_1$  и  $a_2$  ускорений грузов на вертикальную ось (уравнение кинематической связи) имеет вид:

$$a_1 + \frac{R - r}{2R} a_2 = 0.$$

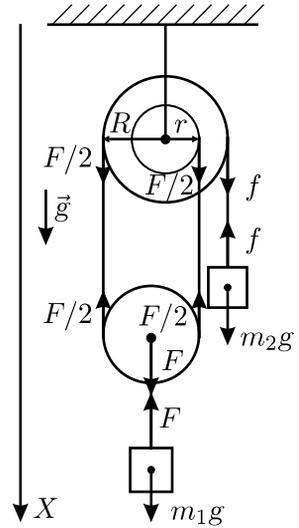


Рис. 1.57.

Запишем уравнения движения грузов в проекциях на ту же ось:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F, \quad m_2 a_2 = m_2 g - f.$$

Для решения получившейся системы подставим во второе уравнение выражения для  $a_2$  и  $f$ :

$$m_1 a_1 = m_1 g - F, \quad -m_2 \frac{2R a_1}{R - r} = m_2 g - \frac{R - r}{2R} F.$$

Умножим второе уравнение на  $-\frac{2R}{R - r}$  и сложим результат с первым уравнением. В итоге получим:

$$a_1 \left( m_1 + m_2 \left( \frac{2R}{R - r} \right)^2 \right) = m_1 g - m_2 g \cdot \frac{2R}{R - r}.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2 \cdot \frac{2R}{R - r}}{m_1 + m_2 \left( \frac{2R}{R - r} \right)^2} \cdot g = \frac{(m_1(R - r) - 2m_2 R) \cdot (R - r)}{m_1(R - r)^2 + 4m_2 R^2} g.$$

**1.58\***. Введём неподвижную систему координат, как показано на рисунке 1.58. Обозначим силу натяжения нити через  $T$  (она постоянна вдоль всей длины нити, так как нить и блоки невесомы и трения нет), а силу нормального давления груза 3 на груз 1 через  $N$ .

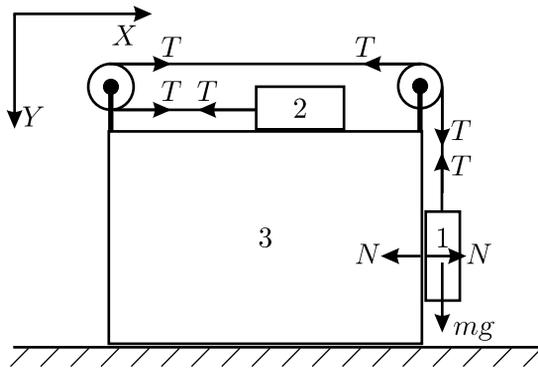


Рис. 1.58.

Центр масс системы грузов остаётся на месте. Поэтому при движении системы груз 2 смещается влево, а груз 3 вместе с грузом 1 —

вправо, причём груз 1 смещается ещё и вниз. Отсюда следует, что смещения грузов 1 и 3 по горизонтали одинаковы:  $\Delta x_1 = \Delta x_3$ . Из нерастяжимости нити следует, что смещение груза 1 по вертикали равно по величине и противоположно по знаку смещению груза 2 относительно груза 3 в горизонтальном направлении:  $\Delta y_1 = -\Delta x_{2\text{отн}}$ . В свою очередь,  $\Delta x_{2\text{отн}} = \Delta x_2 - \Delta x_3 = \Delta x_2 - \Delta x_1$ . Отсюда следуют уравнения кинематических связей:  $a_{1x} = a_{3x}$  и  $a_{1y} = a_{1x} - a_{2x}$ .

Уравнения движения тел системы в проекциях на оси координат имеют вид:

$$ma_{1x} = N, \quad ma_{1y} = mg - T, \quad ma_{2x} = -T, \quad ma_{3x} = T - N.$$

Решая полученную систему уравнений, находим проекции ускорения первого груза:  $a_{1x} = g/5$ ,  $a_{1y} = 3g/5$ . Следовательно, величина ускорения груза 1 равна

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = g\sqrt{\frac{2}{5}},$$

и оно направлено вниз под таким углом  $\alpha$  к горизонту, что

$$\alpha = \arctg \frac{a_{1y}}{a_{1x}} = \arctg 3.$$

**1.59.** Предположим, что все три тела движутся вправо (см. рис. 1.59). Тогда интересующая нас нить натянута, а поскольку все нити

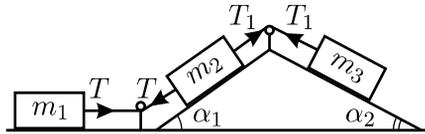


Рис. 1.59.

нерастяжимы, то ускорения тел одинаковы по величине и равны  $a$ . Запишем уравнения движения тел в проекциях на направления их движений ( $T_1$  — сила натяжения нити, связывающей тела 2 и 3):

$$m_1 a = T, \quad m_2 a = T_1 - T - m_2 g \sin \alpha_1, \quad m_3 a = m_3 g \sin \alpha_2 - T_1.$$

Складывая все уравнения друг с другом, находим:

$$(m_1 + m_2 + m_3)a = (m_3 \sin \alpha_2 - m_2 \sin \alpha_1)g,$$

откуда

$$T = \frac{m_3 \sin \alpha_2 - m_2 \sin \alpha_1}{m_1 + m_2 + m_3} m_1 g.$$

Если тела 2 и 3 движутся влево, то тело 1 стоит на месте, и  $T = 0$ . Так будет, если  $m_3 \sin \alpha_2 \leq m_2 \sin \alpha_1$ .

**1.60\***. Из второго закона Ньютона следует, что тело будет двигаться до остановки равнозамедленно с ускорением, равным по величине  $\mu g$ , где  $\mu$  — искомый коэффициент трения. Понятно, что при решении задачи следует рассматривать два различных случая:

- 1) тело остановится в течение первых  $t$  секунд;
- 2) тело в момент времени  $t$  будет продолжать двигаться.

Рассмотрим эти случаи. Прежде всего найдём время  $\tau$ , через которое тело должно остановиться. Проекция скорости тела на направление его движения изменяется по закону:  $v_t = v - \mu g t$ , откуда для момента остановки  $\tau$  имеем:  $\tau = \frac{v}{\mu g}$ .

Запишем закон движения тела в проекции на ту же ось для каждого из случаев 1) и 2):

- 1)  $t > \tau$ . В этом случае

$$S = v\tau - \frac{\mu g \tau^2}{2} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Отсюда  $\mu = \frac{v^2}{2gS}$ , а условие  $t > \tau$ , с учётом выражения для  $\tau$ , переписывается в виде  $S < vt/2$ .

- 2)  $t \leq \tau$ . В этом случае

$$S = vt - \frac{\mu g t^2}{2}.$$

Отсюда  $\mu = \frac{2(vt - S)}{gt^2}$ , а условие  $t \leq \tau$  переписывается в виде  $S \geq vt/2$ .

Так как коэффициент трения положителен, то  $S < vt$ . Учитывая всё вышесказанное, запишем окончательный ответ:

$$\mu = \frac{v^2}{2gS} \quad \text{при} \quad 0 < S < \frac{vt}{2};$$

$$\mu = \frac{2(vt - S)}{gt^2} \quad \text{при} \quad \frac{vt}{2} \leq S < vt.$$

При  $S > vt$  задача решений не имеет — такой случай невозможен.

**1.61.** Рассмотрим вначале случай, когда ластик проскальзывает по линейке (см. рис. 1.61). При этом со стороны линейки на него действуют сила реакции  $N$  и сила трения  $\mu N$ , что вызывает смещение

ластика из точки  $O$  в точку  $O'$ . Обозначим угол между направлением перемещения ластика и линейкой через  $\beta$ . Тогда  $\operatorname{tg} \beta = \frac{N}{\mu N} = \frac{1}{\mu}$ .

Из треугольников  $OAB$  и  $OO'B$  искомое перемещение  $OO'$  равно

$$L = \frac{H \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Но  $\frac{1}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \beta} = \sqrt{1 + \mu^2}$ , и

$$L = H \sin \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

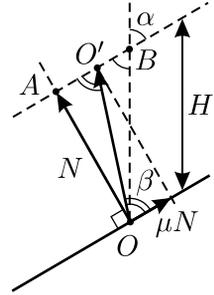


Рис. 1.61.

Такое движение возможно тогда, когда линия  $OO'$  лежит левее направления движения линейки  $OB$ :  $\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha$ , откуда  $1/\mu > \operatorname{tg} \alpha$ , то есть  $\mu < \operatorname{ctg} \alpha$ .

В случае  $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$  ластик не будет двигаться относительно линейки и сместится вместе с ней на расстояние  $H$ .

**1.62\***. Направим ось  $X$  вдоль доски в направлении движения автомобиля и будем отсчитывать время от момента старта автомобиля. Пусть  $v_d(t)$  и  $v_a(t)$  — скорости доски и автомобиля относительно дороги в момент времени  $t$ . Будем считать, что  $v_d(t)$  и  $v_a(t)$  являются алгебраическими величинами, то есть могут принимать как положительные, так и отрицательные значения — это избавит нас от необходимости следить за знаками при написании формул. Тогда из закона сложения скоростей имеем:

$$v_a(t) = v_d(t) + v, \quad (1)$$

причём скорость  $v$  по условию задачи постоянна и положительна.

Рассмотрим движение доски. Пусть в момент старта автомобиля доска приобрела скорость  $u$  относительно дороги. Тогда автомобиль в этот момент времени, согласно (1), имел относительно дороги скорость  $u + v$ . Применяя для указанного момента времени закон сохранения импульса, получаем  $m(u + v) + Mu = 0$ , откуда  $u = -\frac{mv}{m + M}$ . Знак «минус» в выражении для  $u$  показывает, что в начальный момент времени доска начала двигаться в направлении, противоположном направлению движения автомобиля.

На скользящую по дороге доску действует направленная вдоль оси  $X$  сила трения  $F = \mu(m + M)g$ . Значит, доска и автомобиль движутся с постоянным положительным ускорением  $a = \frac{F}{m + M} = \mu g$ .

Зависимость скорости движения доски относительно дороги от времени определяется законом

$$v_d(t) = u + at = -\frac{mv}{m+M} + \mu gt.$$

Из этой формулы следует, что скорость доски относительно дороги с течением времени будет уменьшаться по модулю, и в конце концов доска остановится. Это произойдёт через время  $\tau = \frac{mv}{\mu(m+M)g}$  после старта автомобиля. До остановки доски, то есть при  $0 \leq t \leq \tau$ , автомобиль будет двигаться относительно дороги с переменной скоростью, зависимость которой от времени можно найти, используя (1):

$$v_a(t) = v_d(t) + v = -\frac{mv}{m+M} + \mu gt + v = \frac{Mv}{m+M} + \mu gt.$$

Понятно, что после остановки доски, при  $t > \tau$ , скорость движения автомобиля относительно дороги будет постоянна и равна  $v$ .

**1.63\***. Направим координатную ось  $X$  вдоль плоскости стола в сторону, противоположную направлению движения клина, а ось  $Y$  — вертикально вверх (см. рис. 1.63). Обозначим через  $N_1$  силу, с которой клин давит на брусок,  $N_2$  — силу, с которой стол давит на клин,  $A$  — ускорение клина,  $a$  — бруска,  $M = 1000m$  — массу бруска,  $F_{\text{тр}}$  — силу трения. Тогда с учётом того, что угол при основании клина  $\alpha = 45^\circ$ , уравнения движения клина и бруска в проекциях на координатные оси будут иметь вид:

$$\begin{aligned} ma_x &= -\frac{N_1\sqrt{2}}{2} + F_{\text{тр}}, & N_2 &= mg + \frac{N_1\sqrt{2}}{2}, \\ Ma_x &= \frac{N_1\sqrt{2}}{2}, & Ma_y &= -Mg + \frac{N_1\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Далее учтём, что в силу малой величины коэффициента трения между клином и столом  $\mu = 0,2$  и большой разницы в массах бруска  $M$  и клина  $m$ , последний не сможет оставаться на месте и будет выскальзываться из под бруска. При этом на клин со стороны стола будет действовать сила трения скольжения  $F_{\text{тр}} = \mu N_2$ .

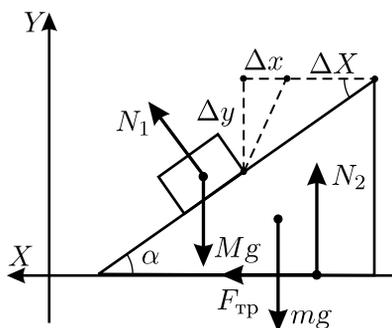


Рис. 1.63.

Кроме того, имеется ещё уравнение кинематической связи, которое проще всего получить следующим образом. Пусть во время движения бруска и клина координаты бруска изменились на величины  $\Delta x > 0$  и  $\Delta y < 0$ , а координата клина — на  $\Delta X < 0$ , причём брусок остался на поверхности клина. Тогда из рисунка видно, что  $\Delta y = (\Delta X - \Delta x) \operatorname{tg} \alpha$ , и с учётом того, что в нашем случае  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , получаем

$$a_y = A_x - a_x.$$

Решая полученную систему уравнений, найдём искомую силу давления  $N_1$ :

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}mMg(1 + \mu)}{2m + M(1 - \mu)}.$$

Так как  $M = 1000m \gg m$ , то это выражение можно упростить:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}mMg(1 + \mu)}{2m + M(1 - \mu)} = \frac{\sqrt{2}mg(1 + \mu)}{\frac{2m}{M} + 1 - \mu} \approx \sqrt{2}mg \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \approx 2,1mg.$$

**1.64.** В зависимости от угла  $\alpha$  катапульта может стрелять в двух режимах — проскальзывая по земле и будучи заклиненной трением. Получим условие проскальзывания катапульти.

Пружина катапульти, выталкивая груз с силой  $F$ , действует на её основание с такой же по модулю и противоположной по направлению силой. Так как масса катапульти много меньше массы груза, то её весом по сравнению с силой  $F$  можно пренебречь. Тогда условие начала проскальзывания имеет вид:

$$F \cos \alpha_0 = \mu N = \mu F \sin \alpha_0,$$

откуда  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 1/\mu$ . При стрельбе в режиме проскальзывания, когда  $\alpha < \alpha_0$ , пружина не может действовать на груз в горизонтальном направлении с силой большей, чем сила трения скольжения  $\mu N$ . Значит, горизонтальная компонента ускорения снаряда равна

$$a_1 = \frac{\mu N}{m} = \frac{\mu F \sin \alpha}{m}.$$

В режиме заклинивания горизонтальная компонента ускорения сообщается грузу горизонтальной составляющей силы  $F$ :

$$a_2 = \frac{F \cos \alpha}{m}.$$

Видно, что ускорения  $a_1$  и  $a_2$  монотонно возрастают; первое — при увеличении угла  $\alpha$  от 0, второе — при уменьшении угла  $\alpha$  от  $\pi/2$ , и достигают максимума при пограничном значении угла  $\alpha = \alpha_0$ , соответствующем началу проскальзывания. Выражая  $\sin \alpha_0$  или  $\cos \alpha_0$  через  $\operatorname{tg} \alpha_0$ , для искомой величины максимального горизонтального ускорения груза получаем:

$$a_{\max} = \frac{F}{m} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

**1.65\***. Отношение сил натяжения верёвки на свободных участках остаётся неизменным, пока верёвка проскальзывает по шкиву. Это утверждение можно доказать, проведя такой мысленный эксперимент: перекинем через шкив вторую верёвку с такими же грузами, и для неё отношение сил натяжения будет тем же самым. Мысленно совмещая соответствующие грузы и две верёвки, получим систему с вдвое большими грузами, вдвое большими силами натяжения и прежним отношением этих сил. Ясно, что пропорционально уменьшая и увеличивая массы грузов, можно получить любую величину силы  $T_1$  на одном из свободных участков верёвки, и её отношение к силе натяжения  $T_2$  на другом участке останется прежним. Обозначим это отношение символом  $y$ . (Заметим, что по формуле Эйлера  $y = e^{\mu\pi}$ , где  $\mu$  — коэффициент трения верёвки о шкив, но это для решения задачи знать не обязательно!) Составим динамические уравнения движения грузов:

$$\begin{cases} T_1 = yT_2, \\ M_1 a_1 = T_1 - M_1 g, \\ M_2 a_1 = M_2 g - T_2, \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' = yT_1', \\ M_1 a_2 = M_1 g - T_1', \\ M_2 a_2 = T_2' - M_2 g. \end{cases}$$

Исключая из уравнений силы натяжения, получаем:

$$a_1 = \frac{M_2 y - M_1}{M_2 y + M_1} g; \quad a_2 = \frac{M_1 y - M_2}{M_1 y + M_2} g, \quad \text{где } a_1 < g, \quad a_2 < g.$$

Обозначим искомое отношение масс грузов  $M_1/M_2$  символом  $x$  и преобразуем последние уравнения:

$$\frac{a_1}{g} = \frac{y - x}{y + x}; \quad \frac{a_2}{g} = \frac{yx - 1}{yx + 1}.$$

Решая совместно эти уравнения, найдём искомое отношение масс грузов:

$$x = \frac{M_1}{M_2} = \sqrt{\frac{(1 - (a_1/g))(1 + (a_2/g))}{(1 + (a_1/g))(1 - (a_2/g))}}.$$

**1.66.** В неинерциальной системе отсчёта, связанной с платформой, на контейнер при разгоне действуют (см. рис. 1.66): сила инерции  $\vec{F}_и = -m\vec{a}$ , сила тяжести  $m\vec{g}$ , силы реакции опор  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  и сила трения  $\vec{F}_тр = -\vec{F}_и$  (пока контейнер неподвижен относительно платформы). Контейнер начнёт смещаться, когда сила трения покоя достигнет предельного значения  $\mu N_1$ , где  $\mu$  — коэффициент сухого трения. Условия равновесия контейнера в данной неинерциальной системе отсчёта имеют вид:

$$N_1 + N_2 = mg, \quad \mu N_1 \frac{H}{2} + N_1 \frac{L}{2} = N_2 \frac{L}{2}.$$

Второе уравнение (уравнение моментов) записано относительно оси, проходящей через центр масс контейнера перпендикулярно плоскости рисунка. Заменяя в нём  $\mu N_1$  на  $ma$ , получаем

$$a = \frac{\mu g}{2 + \frac{\mu H}{L}}, \quad \text{или} \quad \mu = \frac{2a}{g - \frac{aH}{L}}.$$

При торможении направления сил  $\vec{F}_и$  и  $\vec{F}_тр$  меняются на противоположные, и аналогичным образом получаем, что контейнер начнёт смещаться при ускорении

$$a_1 = \frac{\mu g}{2 - \frac{\mu H}{L}} = \frac{a}{1 - \frac{2aH}{gL}}.$$

При достаточном большом ускорении  $a_1$  контейнер может перевернуться, не начав смещаться. Критическому значению ускорения (обозначим его  $a_0$ ) соответствует  $N_2 = 0$ , и из уравнения моментов относительно оси, проходящей через опору без колёс, получим:  $a_0 = gL/H$ , или  $\mu_0 = L/H$ . Этим  $a_0$  и  $\mu_0$  соответствует ускорение  $a = \frac{gL}{3H}$ .

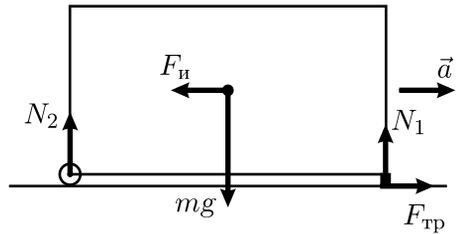


Рис. 1.66.

Итак,  $a_1 = \frac{a}{1 - \frac{2aH}{gL}}$ ; если  $a$  было больше, чем  $\frac{gL}{3H}$ , то контейнер опрокинется, не сползая.

**1.67\*.** Из условия задачи ясно, что оба тела должны двигаться. Проведём координатные оси  $X$  и  $Y$  так, как указано на рисунке 1.67, и рассмотрим силы, действующие на тела в данной системе.

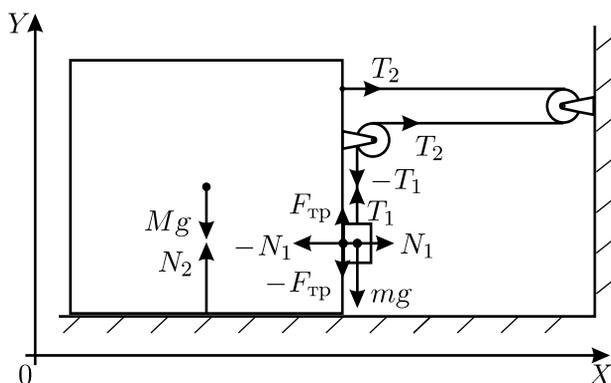


Рис. 1.67.

На тело массой  $m$  действуют: сила тяжести  $m\vec{g}$ , сила натяжения нити  $\vec{T}_1$ , направленная вверх и равная по величине  $T$ , сила реакции  $\vec{N}_1$  со стороны тела массой  $M$  и сила трения  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Тогда второй закон Ньютона для тела  $m$  можно записать так:

$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

На тело массой  $M$  действуют: сила тяжести  $M\vec{g}$ , сила реакции со стороны горизонтальной плоскости  $\vec{N}_2$ , сила натяжения нити  $-\vec{T}_1$ , направленная вниз и равная по величине  $T$ , сила трения  $-\vec{F}_{\text{тр}}$ , две силы натяжения нити  $\vec{T}_2$ , направленные вправо и равные по величине  $T$ , и сила реакции  $-\vec{N}_1$  со стороны тела массой  $m$ . Второй закон Ньютона для тела  $M$  имеет вид:

$$M\vec{a}_2 = M\vec{g} + \vec{N}_2 + (-\vec{T}_1) + (-\vec{F}_{\text{тр}}) + 2\vec{T}_2 + (-\vec{N}_1).$$

Запишем векторные уравнения второго закона Ньютона для тел в проекциях на координатные оси с учётом того, что оба тела двигаются вдоль оси  $X$  с одинаковым ускорением  $a$ :

$$ma_{1x} = N_1 = ma; \quad Ma_{2x} = 2T + (-N_1) = Ma;$$

$$ma_{1y} = -mg + T + F_{\text{тр}}; \quad Ma_{2y} = -Mg + N_2 + (-T) + (-F_{\text{тр}}) = 0.$$

Складывая два верхних уравнения, получим:  $ta + Ma = 2T$ , и  $N_1 = ma = \frac{2m}{m+M}T$ . Поскольку тело  $m$  скользит по телу  $M$ , то сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu N_1$ , откуда

$$ma_{1y} = -mg + T + \mu \frac{2m}{m+M}T.$$

Так как нить нерастяжима, то величина смещения тела  $m$  по вертикали будет вдвое больше, чем смещение обоих тел в горизонтальном

направлении, а значит, вертикальная составляющая ускорения тела  $m$  по величине также вдвое больше горизонтальной составляющей. Следовательно,  $a_{1y} = -2a$ , и

$$ma_{1y} = -2ma = -\frac{4m}{m+M}T = T - mg + \mu\frac{2m}{m+M}T.$$

Отсюда находим силу натяжения нити  $T$ :

$$T = \frac{m+M}{M+(5+2\mu)m}mg,$$

и для ускорения тела  $M$  получаем

$$a = \frac{2T}{m+M} = \frac{2mg}{M+(5+2\mu)m}.$$

**1.68.** Поскольку автомобили после старта движутся с ускорениями, то давления, оказываемые на дорогу передними и задними колёсами каждого автомобиля, различны. В условии сказано, что водители «выжимают» из автомобилей всё возможное. Будем считать, что мощности двигателя у обоих автомобилей при довольно небольшой их массе достаточно для того, чтобы в начальный период разгона ведущие колёса пробуксовывали (это надо будет проверить!). Значит, сила трения  $F_{\text{тр}}$ , движущая автомобиль и приложенная к ведущим колёсам, равна произведению коэффициента трения  $\mu$  на силу реакции, действующую со стороны дороги на пару ведущих колёс.

Запишем для каждого из автомобилей уравнение моментов относительно горизонтальной оси  $O$ , перпендикулярной направлению движения, находящейся над дорогой на высоте центра масс автомобиля и лежащей над осью неведущих колёс. Для переднеприводного автомобиля имеем:

$$mg\frac{L}{2} = N_1L + \mu N_1H,$$

а для заднеприводного:

$$mg\frac{L}{2} + \mu N_2H = N_2L.$$

Здесь  $N_1$  и  $N_2$  — силы реакции, действующие на передние и задние колёса соответственно. Отсюда для переднеприводного автомобиля

$$N_1 = \frac{mgL}{2(L+\mu H)}, \text{ а для заднеприводного } N_2 = \frac{mgL}{2(L-\mu H)}.$$

Ускорения переднеприводного автомобиля  $a_{\text{п}}$  и заднеприводного  $a_{\text{з}}$  равны:

$$a_{\text{п}} = \frac{\mu N_1}{m} = \frac{\mu g L}{2(L + \mu H)} \approx 3,4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{з}} = \frac{\mu N_2}{m} = \frac{\mu g L}{2(L - \mu H)} \approx 4,9 \text{ м/с}^2.$$

Так как ускорение заднеприводного автомобиля больше, то он и победит в заезде на дистанцию  $S = 10$  м. Вычислим, на какое время победитель обгонит побеждённого. Переднеприводный автомобиль придёт к финишу через время  $t_{\text{п}} = \sqrt{2S/a_{\text{п}}} \approx 2,4$  с, а заднеприводный — через время  $t_{\text{з}} = \sqrt{2S/a_{\text{з}}} \approx 2,0$  с. Таким образом, разница времён составит  $\Delta t = t_{\text{п}} - t_{\text{з}} \approx 0,4$  с.

Осталось проверить, хватит ли мощности  $N = 100$  кВт для пробуксовки в конце разгона. Для этого надо найти конечную скорость  $v_{\text{к}}$  заднеприводного автомобиля (она больше, чем у переднеприводного!), и умножить её на силу трения:  $N_{\text{к}} = F_{\text{тр}} v_{\text{к}} = m a_{\text{з}} \cdot \sqrt{2 a_{\text{з}} S} \approx 48,5$  кВт. Значит, в конце заезда пробуксовка у обоих автомобилей ещё не кончится, и наше решение правильно.

**1.69.** Так как движущийся автомобиль не переворачивается, то величины  $N_{\text{н}}$  и  $N_{\text{в}}$  нормальных составляющих сил реакции дороги, приложенных к нижним и к верхним колёсам, удовлетворяют следующим уравнениям для моментов сил:

$$N_{\text{н}} \cdot 2L = mg(L \cos \alpha + H \sin \alpha),$$

$$N_{\text{в}} \cdot 2L = mg(L \cos \alpha - H \sin \alpha).$$

Здесь первое уравнение записано относительно оси, проходящей через точки касания дороги верхними колёсами, а второе — относительно оси, проходящей через точки касания дороги нижними колёсами. Из этих уравнений видно, что вне зависимости от того, какие колёса являются ведущими,  $N_{\text{н}} > N_{\text{в}}$ .

Автомобиль движется в гору под действием силы тяги, которая представляет собой тангенциальную составляющую сил реакции дороги, действующих на ведущие колёса. Эта сила не может превышать величину силы трения покоя, равную  $\mu N_i$ , где  $N_i$  — сила реакции, действующая либо на нижние, либо на верхние колёса — в зависимости от того, какие из них являются ведущими. При движении автомобиля в гору с очень малой скоростью сила тяги должна быть равна «скатывающей» силе:  $\mu N_i = mg \sin \alpha$ , то есть автомобиль может преодолеть участок дороги с тем бóльшим углом наклона, чем больше нормальная сила

реакции, действующая на его ведущие колёса. Следовательно, автомобиль должен ехать в гору так, чтобы его ведущие колёса находились снизу, то есть автомобилю с передними ведущими колёсами выгоднее въезжать на поднимающийся участок дороги задним ходом. При этом  $\mu N_{\text{н}} = mg \sin \alpha$ , откуда, с учётом выражения для  $N_{\text{н}}$ , получаем:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\mu L}{2L - \mu H}.$$

Для того чтобы автомобиль не перевернулся, ещё должно выполняться дополнительное условие  $N_{\text{в}} > 0$ , или  $\operatorname{tg} \alpha < L/H$ . С учётом полученного выражения для  $\alpha$ , это условие можно переписать в виде:  $\mu < L/H$ . Так как  $\mu < 1$ , а для реальных автомобилей  $L/H \gg 1$ , то полученное условие практически всегда выполняется.

Кроме того, на ведущих колёсах автомобиля должен создаваться крутящий момент

$$M = \mu N_{\text{н}} R = mgR \sin \alpha = \frac{\mu mgRL}{\sqrt{(2L - \mu H)^2 + (\mu L)^2}}.$$

При этом мощность двигателя может быть любой, так как в условии задачи нет никаких ограничений на минимальную скорость движения автомобиля (он может въезжать в гору и очень медленно).

**1.70\***. Из условия понятно, что сила трения скольжения цилиндра по кольцу равна  $F$ . Предположим, что цилиндр при повороте на угол  $\Delta\alpha$  смещается вниз на расстояние  $\Delta y$ . Тогда сила трения, действующая против направления движения, может быть разложена на две ортогональные составляющие: вертикальную, направленную вверх, и горизонтальную, направленную противоположно направлению вращения. Они соответственно равны

$$F_{\text{верт}} = F \frac{\Delta y}{\sqrt{(R\Delta\alpha)^2 + (\Delta y)^2}} = F \frac{v_{\text{верт}}}{\sqrt{(R\omega)^2 + (v_{\text{верт}})^2}}$$

и

$$F_{\text{гор}} = F \frac{R\Delta\alpha}{\sqrt{(R\Delta\alpha)^2 + (\Delta y)^2}} = F \frac{R\omega}{\sqrt{(R\omega)^2 + (v_{\text{верт}})^2}},$$

где  $v_{\text{верт}}$  — вертикальная составляющая скорости цилиндра. Вертикальная составляющая силы трения должна быть меньше силы тяжести или равна ей:

$$F_{\text{верт}} = F \frac{v_{\text{верт}}}{\sqrt{(R\omega)^2 + (v_{\text{верт}})^2}} \leq mg.$$

Отсюда

$$v_{\text{верт}} \leq \frac{mgR\omega}{\sqrt{F^2 - (mg)^2}} \approx \frac{mgR\omega}{F},$$

поскольку по условию  $F \gg mg$ . По истечении некоторого времени скорость установится и станет равной  $v_{\text{верт}} \approx mgR\omega/F$ .

Найдём теперь момент силы, необходимый для вращения. Поскольку цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то момент горизонтальной составляющей силы трения должен быть равен искомому моменту:

$$\begin{aligned} M = F_{\text{тр}} R &= F \frac{R\omega}{\sqrt{(R\omega)^2 + (v_{\text{верт}})^2}} \cdot R \approx \\ &\approx \frac{FR \cdot R\omega}{\sqrt{(R\omega)^2 + \frac{(mgR\omega)^2}{F^2}}} \approx \frac{FR}{\sqrt{1 + (mg/F)^2}} \approx FR. \end{aligned}$$

**1.71.** При движении каждого шарика в установившемся режиме разность величин действующих на него силы Архимеда и силы тяжести равна силе сопротивления движению  $\alpha v$ , где  $v$  — скорость соответствующего шарика, а  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, одинаковый для обоих шариков. Поэтому на удерживаемые неподвижно шарики со стороны воды и Земли в вертикальном направлении действуют силы  $\alpha v_1$  и  $-\alpha v_2$ , а при движении соединённых ниткой шариков в установившемся режиме их скорость  $v$  может быть найдена из условия:  $\alpha v_1 - \alpha v_2 = 2\alpha v$ . Отсюда  $v = (v_1 - v_2)/2$ . Если  $v_1 > v_2$ , то шарики всплывают, а если  $v_1 < v_2$ , то тонут. При  $v_1 = v_2$  они находятся в равновесии, то есть  $v = 0$ .

**1.72\*.** При движении шарика в жидкости на него действуют сила тяжести  $F_T$ , направленная вниз, сила Архимеда  $F_A$ , направленная вверх, и сила вязкого трения  $F_{\text{тр}}$ , зависящая, как это следует из условия задачи, от скорости и от диаметра шарика. Две первые силы являются объёмными. Это значит, что их разность пропорциональна разности  $\rho - \rho_{\text{ж}}$  ( $\rho$  — плотность шарика) и объёму шарика, то есть кубу его диаметра  $d$ :

$$|F_T - F_A| = A |\rho - \rho_{\text{ж}}| d^3.$$

Здесь  $A$  — коэффициент пропорциональности. Предположим, что сила вязкого трения зависит от диаметра шарика  $d$  и его скорости  $v$  следующим образом:  $F_{\text{тр}} = B d^n v^m$ , где  $B$  — коэффициент пропорциональности,  $n$  и  $m$  — неизвестные показатели степени. При движении с постоянной скоростью разность сил тяжести и Архимеда равна по величине

силе вязкого трения. Тогда для пузырька диаметром  $d_1$  имеем:

$$A\rho_{\text{ж}}d_1^3 = Bv_1^m, \quad \text{откуда} \quad v_1 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_{\text{ж}}d_1^{3-n}}.$$

Аналогично, с учётом условия задачи для пузырька диаметром  $d_2$  получаем

$$v_2 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_{\text{ж}}(2d_1)^{3-n}} = 4v_1 = 4\sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_{\text{ж}}d_1^{3-n}},$$

откуда следует уравнение

$$2^{(3-n)/m} = 2^2, \quad \text{или} \quad 3 - n = 2m.$$

Далее, для дробинки диаметром  $d_2$ , учитывая, что  $v_3 = 4v_2$  и  $\rho_{\text{д}} = 5\rho_{\text{ж}}$ , получаем

$$v_3 = \sqrt[m]{\frac{A}{B}(\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{ж}})d_2^{3-n}} = \sqrt[m]{\frac{A}{B} \cdot 4\rho_{\text{ж}}d_2^{3-n}} = 4\sqrt[m]{\frac{A}{B}\rho_{\text{ж}}d_2^{3-n}},$$

откуда находим, что  $m = 1$ . Зная  $m$ , определяем, что и  $n = 1$ . Значит, зависимость  $F_{\text{тр}}(d, v)$  имеет следующий вид:  $F_{\text{тр}} = Bdv$ .

Теперь можно найти скорость  $u$ , с которой будет всплывать пластмассовый шарик. Учитывая, что его плотность равна  $\frac{2}{3}\rho_{\text{ж}}$ , получаем:

$$u = \frac{A}{B} \left( \rho_{\text{ж}} - \frac{2}{3}\rho_{\text{ж}} \right) \cdot (3d_1)^2 = 3\frac{A}{B}\rho_{\text{ж}}d_1^2 = 3v_1 = 1,5 \text{ см/с}.$$

**1.73.** До приложения силы  $f$  выполнялось равенство:  $(m - \rho V)g = kv^2$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности между силой сопротивления движению шарика и его скоростью. После приложения дополнительной силы  $f$  суммарная сила  $\vec{F}$ , действующая на шарик, равна по величине  $F = ku^2 = \sqrt{(m - \rho V)^2 g^2 + f^2}$  и направлена вместе с вектором установившейся скорости  $\vec{u}$  под таким углом  $\alpha$  к вертикали, что  $\text{tg } \alpha = \frac{f}{(m - \rho V)g}$ . Поэтому вертикальная проекция скорости шарика станет равной  $v_1 = u \cos \alpha$ :

$$v_1 = \frac{((m - \rho V)^2 g^2 + f^2)^{1/4}}{\frac{\sqrt{(m - \rho V)g}}{v} \cdot \sqrt{1 + \frac{f^2}{(m - \rho V)^2 g^2}}} = \frac{v}{\left(1 + \frac{f^2}{(m - \rho V)^2 g^2}\right)^{1/4}}.$$

**1.74.** Из условия задачи известно, что сила сопротивления воздуха, действующая на мяч, пропорциональна квадрату его скорости:  $F = kv^2$ , где  $k$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Пусть масса мяча равна  $m$ . Запишем применительно к мячу второй закон Ньютона для момента непосредственно перед ударом, когда мяч летел горизонтально, и сразу после удара, когда он полетел вертикально вверх:

$$(ma_1)^2 = (mg)^2 + (kv_1^2)^2, \quad ma_2 = mg + kv_2^2.$$

Здесь  $a_2$  — искомое ускорение мяча сразу после удара. Решая полученную систему уравнений и полагая  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>, найдём это ускорение:

$$a_2 = g + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \sqrt{a_1^2 - g^2} \approx 11,9 \text{ м/с}^2.$$

**1.75\*.** Так как тело движется вдоль оси  $x$ , то его ускорение, в соответствии со вторым законом Ньютона, равно

$$a_x = \frac{f_x}{m} = -\frac{\alpha(x)}{m}v^2.$$

Из условия задачи следует, что тело, пущенное в начальный момент времени из начала координат с начальной скоростью  $v_0$ , движется равнозамедленно. Обозначим ускорение тела  $a_x$  при данных начальных условиях через  $-a = \text{const}$ . Координата тела  $x$  и его скорость  $v$  зависят от времени  $t$  следующим образом:

$$x = v_0t - \frac{at^2}{2}, \quad v = v_0 - at.$$

Отсюда, с учётом предыдущей формулы, имеем:

$$a = \frac{\alpha(x)}{m}(v_0 - at)^2.$$

Поэтому

$$\alpha(x) = \frac{ma}{(v_0 - at)^2} = \frac{m}{\frac{v_0^2}{a} - 2v_0t + at^2} = \frac{m}{2\left(\frac{v_0^2}{2a} - x\right)}.$$

Таким образом, тело, пущенное из начала координат со скоростью  $v_0$ , может двигаться равнозамедленно только тогда, когда зависимость  $\alpha(x)$  имеет вид:

$$\alpha(x) = \frac{m}{2(X - x)},$$

где  $X = \frac{v_0^2}{2a}$  — некоторое положительное число.

Отметим, что  $X$  имеет смысл расстояния, которое проходит тело от начала координат до полной остановки, и зависит только от свойств среды. При этом последнюю формулу следует понимать в том смысле, что тело, пущенное с некоторой скоростью  $v_0$ , движется с ускорением  $a = v_0^2/(2X)$ , которое определяется начальной скоростью и свойствами среды.

Нас не должно удивлять наличие в выражении для  $\alpha(x)$  массы тела  $m$ . При другой массе  $m'$ , но тех же размерах, форме и начальной скорости тела его движение в среде с зависимостью  $\alpha(x)$ , соответствующей массе  $m$ , уже не будет равнозамедленным!

**1.76.** Обозначим через  $S$  длину пути, пройденного мылом от начальной точки  $O$  (см. рис. 1.76). На участке  $OA$  сила давления мыла на ванну равняется, очевидно, нулю. На закруглённом участке  $AB$  сила давления равна  $N = mg \sin \varphi + \frac{mv^2}{R}$ ,

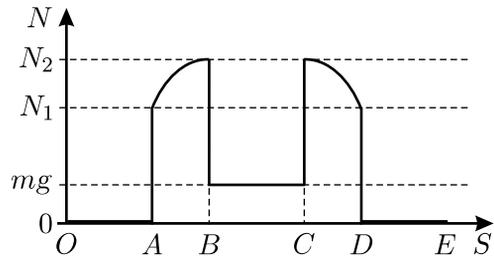


Рис. 1.76.

где  $\varphi$  — угол, под которым наклонён к горизонту перпендикуляр к поверхности ванны в данной точке ( $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ ). Мгновенную скорость  $v$  можно найти из закона сохранения энергии:  $mv^2/2 = mgh - mgR(1 - \sin \varphi)$ . Следовательно,  $N = mg(3 \sin \varphi - 2 + 2(h/R))$ . В начале закругления  $N_1 = 2mg((h/R) - 1)$ , в конце  $N_2 = mg(2(h/R) + 1)$ . Важно отметить, что центростремительное ускорение, с наличием которого связано слабое  $mv^2/R$  в выражении для силы  $N$ , практически скачкообразно появляется при въезде куска мыла на закругление и исчезает при съезде с него. При движении мыла по дну ванны на участке  $BC$  сила давления постоянна и равна  $mg$ . Далее вид графика повторяется в обратном порядке: участок  $CD$  воспроизводит  $BA$ , а участок  $DE$ , в свою очередь, воспроизводит  $AO$ .

**1.77\*.** Поскольку в начале поворота автомобиля в течение некоторого времени солнечный «зайчик» от его бокового стекла попадал в одну точку, то боковое стекло двигалось по некоторой поверхности, фокусирующей лучи Солнца в этой точке. Считая Солнце точечным бесконечно удалённым источником, расположенным на линии горизонта, можно утверждать, что это — поверхность цилиндрического зеркала с фокусным расстоянием 10 футов ( $\sim 3$  метра).

Рассмотрим участок цилиндрического зеркала  $OA$  (см. рис. 1.77). Пусть один луч падает в точку  $O$ , проходя через ось цилиндра — точку  $R$ , и при отражении меняет своё направление на противоположное. Другой луч, параллельный первому, падает в точку  $A$  и после отражения проходит через точку  $F$ . На рисунке обозначены три равных угла: угол падения, угол отражения и угол между первым лучом и нормалью к цилиндрической поверхности, проведённой из точки падения второго луча. Треугольник  $AFR$  равнобедренный. Отсюда следует, что расстояние от точки  $O$  до точки  $F$  при малых углах равно половине радиуса цилиндрического зеркала.

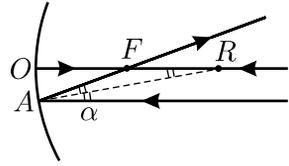


Рис. 1.77.

Следовательно, радиус окружности, по которой двигался кабриолет, примерно в два раза больше расстояния от него до столба, на который попадал «зайчик»: у цилиндрического зеркала фокусное расстояние в два раза меньше радиуса его кривизны.

Максимальное центростремительное ускорение, сообщаемое силой трения, не может превосходить  $\mu g$ , то есть заведомо меньше ускорения свободного падения. Обозначив скорость кабриолета через  $v$  и предполагая, что кабриолет двигался по окружности радиусом  $r = 20$  футов, получим:  $g > \mu g = v^2/r$ , откуда  $v < \sqrt{gr} \approx 8 \text{ м/с} = 18 \text{ миль/час}$ .

Холмс, как всегда, оказался прав!

**1.78.** Если угловая скорость вращения  $\omega$  достаточно велика, то форма прыгалки от неё не зависит, поскольку ускорения всех частей верёвки одинаково пропорциональны  $\omega^2$ .

В случае провисания верёвки под действием собственного веса силы, действующие на единицу её длины, не зависят от расстояния  $r$  до линии подвеса верёвки, а при её вращении они пропорциональны расстоянию от оси (поскольку центростремительное ускорение элемента верёвки  $\sim \omega^2 r$ ). Поэтому во втором случае части верёвки, сильнее удалённые от оси, окажутся «тяжелее», чем в первом случае, и в результате прогиб прыгалки увеличится.

**1.79.** Для упрощения рассмотрим два двигателя, находящиеся по разные стороны от оси корабля, вокруг которой происходит вращение (ясно, что наличие двух остальных симметрично расположенных двигателей не повлияет на результат). Понятно, что манёвр должен совершаться следующим образом: сначала двигатели разгоняют вращение корабля вокруг оси, а когда он повернётся на  $90^\circ$ , они должны начинать тормозить корабль так, чтобы он, повернувшись ещё на  $90^\circ$ , оста-

новился. Так как двигатели развивают постоянную силу тяги, то времена разгона и торможения одинаковы. Таким образом, чтобы решить задачу, нам необходимо найти время разворота на  $90^\circ$ .

Очевидно, что при развороте двигатели перемещаются по дугам окружностей одинакового радиуса  $r$ . Так как силы  $F$ , возникающие при работе двигателей, направлены по касательным к этим окружностям, то тангенциальное ускорение каждого двигателя равно  $a_\tau = F/m$ , где  $m$  — масса двигателя. При повороте на  $90^\circ$  двигатель проходит путь, равный четверти длины дуги окружности:  $\frac{\pi r}{2} = \frac{a_\tau t^2}{2}$ . Подставляя сюда выражение для  $a_\tau$ , найдём время поворота на  $90^\circ$ :

$$t = \sqrt{\frac{\pi r m}{F}}.$$

Из полученного выражения видно, что время разворота тем меньше, чем меньше радиус дуги окружности, по которой перемещается двигатель. Значит, разворот выгоднее совершать вокруг оси Б.

Задачу можно решать, пользуясь и энергетическими соображениями. Действительно, при повороте на  $90^\circ$  сила тяги, развиваемая одним двигателем, совершает работу  $A = F \cdot \frac{\pi r}{2}$ . В результате этого кинетическая энергия двигателя возрастает на величину

$$\Delta W = \frac{mv^2}{2} = A = F \cdot \frac{\pi r}{2},$$

где  $v$  — линейная скорость двигателя в конце поворота на  $90^\circ$ . Отсюда  $v = \sqrt{\frac{\pi r F}{m}}$ . Далее, пользуясь тем, что  $\frac{\pi r}{2} = \frac{a_\tau t^2}{2} = \frac{vt}{2}$ , с учётом выражения для  $v$  приходим к прежнему ответу для времени  $t$ .

**1.80\***. Условие равновесия шарика имеет вид  $F = m\omega^2(x + l_0)$ . Это уравнение можно решить графически (см. рис. 1.80). Для этого надо провести прямую линию  $F(x) = m\omega^2(x + l_0)$  из точки, расположенной на оси  $x$  слева от начала отсчёта на расстоянии  $l_0$ . Наклон этой прямой, то есть угловой коэффициент  $m\omega^2$ , растёт с ростом угловой скорости  $\omega$ , а точки пересечения прямой с графиком зависимости силы натяжения  $F$  от удлинения  $x$  резинового шнура дают те значения  $x$ , которые соответствуют равновесию шарика. Это равновесие устойчиво, пока кривая зависимости силы натяжения от удлинения в точке пересечения с прямой  $F(x)$  идёт круче этой прямой — тогда при отклонении шарика от равновесного положения возникает суммарная сила, возвращающая его обратно.

Видно, что по мере роста угловой скорости точка равновесия шарика смещается всё дальше от оси вращения. Ясно, что предельной угловой скорости  $\omega_0$  соответствует либо крайняя жирная точка на кривой, соответствующая предельной силе натяжения, которую может выдержать шнур, либо точка касания прямой  $F(x)$  и графика, если она имеется. Действительно, при отклонении шарика от положения равновесия, соответствующего этой последней точке, возвращающей силы уже не возникает, шнур растягивается до предела и рвётся.

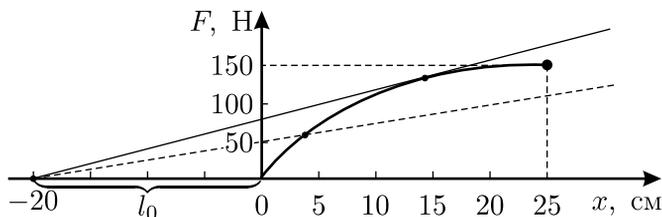


Рис. 1.80.

Из нашего построения видно, что касательная к графику существует, и для её углового коэффициента получаем:

$$m\omega_0^2 \approx \frac{80 \text{ Н}}{0,2 \text{ м}} = 400 \text{ Н/м},$$

откуда при данной в условии задачи массе шарика  $m = 0,5 \text{ кг}$  получаем  $\omega_0 \approx \sqrt{800 \text{ с}^{-2}} \approx 28 \text{ рад/с}$ . При более высоких угловых скоростях шнур не сможет удержать шарик и разорвётся.

**1.81.** Каждый маленький элемент кольца, изготовленного из пружины и имеющего радиус  $R$ , при угловой скорости вращения  $\omega$  движется с центростремительным ускорением  $a = \omega^2 R$ . Если обозначить через  $\Delta\alpha$  угол между радиусами, проведёнными от оси вращения к концам этого элемента (см. рис. 1.81), то его масса будет равна  $\frac{m}{2\pi}\Delta\alpha$ . Действующая на рассматриваемый элемент центростремительная сила  $\Delta F = T\Delta\alpha$  обеспечивается силой натяжения пружины

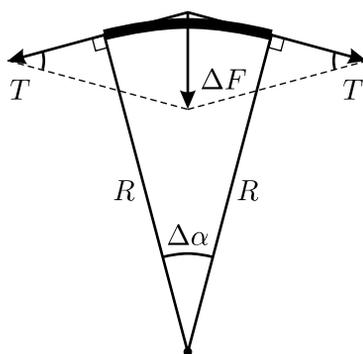


Рис. 1.81.

$T = k(2\pi R - l)$  (для удобства нахождения  $\Delta F$  на рисунке совмещены начала векторов  $T$ ). Таким образом, уравнение движения для данного

элемента пружины имеет вид:  $\frac{m}{2\pi}\Delta\alpha\omega^2 R = k(2\pi R - l)\Delta\alpha$ , откуда

$$R = \frac{l}{2\pi - \frac{m\omega^2}{2\pi k}}.$$

Таким образом, с увеличением  $\omega$  радиус кольца  $R$  растёт, стремясь «к бесконечности» при критической угловой скорости  $\omega_0 = 2\pi\sqrt{k/m}$ , когда пружина или растягивается до предела её упругости, или рвётся.

**1.82.** Рассматривая так же, как описано в решении [предыдущей задачи](#), вращение маленького участка цепи вокруг оси блока, на котором находится этот участок, можно записать уравнение его движения в отсутствие давления цепи на блок в виде:  $\rho R \Delta\alpha \cdot \frac{v^2}{R} = T \Delta\alpha$ . Здесь  $R$  — радиус блока,  $\Delta\alpha$  — угол между радиусами, проведёнными от оси вращения к концам рассматриваемого участка цепи,  $v$  — скорость её движения. Отсюда получаем:  $v = \sqrt{T/\rho}$ . Заметим, что при постоянной скорости цепи сила её натяжения вдоль всей длины также постоянна. Кроме того, радиусы блоков в ответ не входят, так что они могут быть различными.

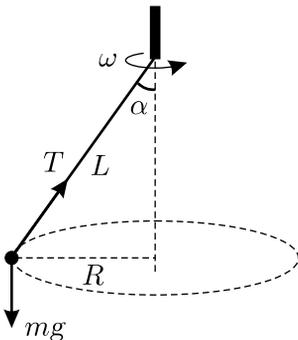


Рис. 1.83.1.

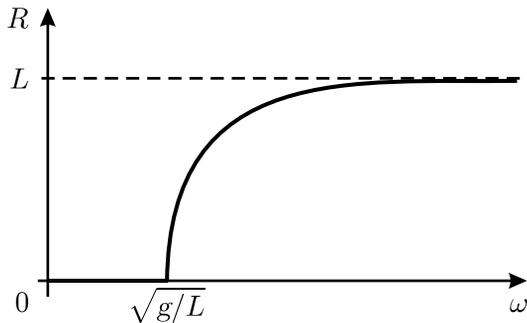


Рис. 1.83.2.

**1.83.** Обозначим через  $\alpha$  угол отклонения нити от вертикальной оси вращения системы, а через  $T$  — силу натяжения нити (см. рис. 1.83.1). В установившемся режиме шарик может либо вращаться по окружности радиусом  $R$ , либо висеть на вертикальной нити на оси вращения. Запишем уравнения вращательного движения шарика в проекциях на вертикаль и на радиальное направление:  $T \cos \alpha = mg$  и  $T \sin \alpha = m\omega^2 R$ . Кроме того,  $\sin \alpha = R/L$ . Отсюда получаем: либо  $R = \sqrt{L^2 - (g^2/\omega^4)}$ , либо  $R = 0$ . Первое решение не существует при  $\omega < \sqrt{g/L}$ , так что шарик при малых угловых скоростях вращения

будет висеть на вертикальной нити, а  $R$  будет равняться 0 вплоть до достижения угловой скорости  $\omega = \sqrt{g/L}$ . При  $\omega > \sqrt{g/L}$  первое решение становится неустойчивым: при малом отклонении шарика от оси на расстояние  $r$  «возвращающая» сила  $T \sin \alpha \approx mgr/L$  будет меньше, чем сила, необходимая для обеспечения центростремительного ускорения  $m\omega^2 r$ , и  $r$  будет расти до тех пор, пока «возвращающая» сила не достигнет необходимой величины при  $R = \sqrt{L^2 - (g^2/\omega^4)}$ , то есть устойчивым станет второе решение. В дальнейшем с ростом  $\omega$  расстояние  $R$  будет быстро увеличиваться, стремясь к  $L$ . График зависимости  $R$  от  $\omega$  изображён на рисунке 1.83.2.

**1.84.** В системе отсчёта, движущейся со скоростью  $\vec{u} = \frac{m}{m+M}\vec{v}_0$ , центр масс шайбы и сферы покоится, а сама шайба и центр сферы движутся вокруг этого центра масс по окружностям с радиусами  $R_{\text{ш}} = a\frac{M}{m+M}$  и  $R_{\text{с}} = a\frac{m}{m+M}$  соответственно. Их скорости при этом направлены в противоположные стороны и по величине равны, соответственно,  $v_{\text{ш}} = v_0 - u = v_0\frac{M}{m+M}$  и  $v_{\text{с}} = \frac{mv_{\text{ш}}}{M} = v_0\frac{m}{m+M}$ . Поэтому сила, действующая на шайбу со стороны сферы, равна

$$F = \frac{mv_{\text{ш}}^2}{R_{\text{ш}}} = \frac{mM}{m+M} \cdot \frac{v_0^2}{a}.$$

**1.85\*.** Разложим силу, с которой стержень действует на средний шарик, на вертикальную и горизонтальную составляющие. Ясно, что вертикальная составляющая равна  $mg$ , а горизонтальная равна  $f = m\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha$ , где  $m$  — масса шарика,  $\omega$  — угловая скорость вращения стержня,  $l$  — его длина. Для крайнего шарика вертикальная составляющая также равна  $mg$ , а горизонтальная вдвое больше, то есть равна  $2f$ . Стержень образует с вертикалью неизменный угол  $\alpha$ , значит, моменты сил, действующих на него со стороны шариков, уравновешены относительно шарнира:

$$mgl \sin \alpha + mg\frac{l}{2} \sin \alpha - 2fl \cos \alpha - f\frac{l}{2} \cos \alpha = 0,$$

откуда получаем:  $f = \frac{3}{5}mg \operatorname{tg} \alpha$ . Следовательно, искомая сила образует с вертикалью угол  $\beta$ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f}{mg} = \frac{3}{5} \operatorname{tg} \alpha.$$

**1.86.** Рассмотрим движение одной из шайб с постоянной скоростью  $v$  по окружности радиусом  $R$  на высоте  $h$  от вершины конуса. На шайбу действуют сила тяжести  $mg$  и сила реакции  $N$  со стороны воронки (см. рис. 1.86). Уравнения движения шайбы в проекциях на вертикальное и радиальное направления имеют вид:  $N \sin \alpha = mg$  и  $N \cos \alpha = mv^2/R$ , где  $\alpha$  — угол полураствора конуса. Кроме того,  $R = h \operatorname{tg} \alpha$ . Из этих уравнений получаем:  $v = \sqrt{gh}$ , и период обращения  $T = 2\pi R/v = 2\pi \operatorname{tg} \alpha \sqrt{h/g}$ . Таким образом, аналог третьего закона Кеплера для описанных в условии шайб имеет вид:  $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{h_1}{h_2}$ .

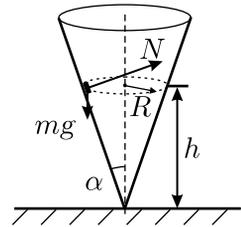


Рис. 1.86.

**1.87.** На шарик массой  $m$ , отклонённый от вертикали на некоторый угол  $\alpha$ , действуют сила тяжести  $mg$  и сила натяжения нити  $N_i$ .

Рассмотрим первый случай, когда шарик вращается в горизонтальной плоскости по окружности радиусом  $r = l \cdot \sin \alpha$ . Запишем для некоторого момента времени второй закон Ньютона в проекциях на вертикальную ось  $Z$  и на горизонтальную ось  $R$ , причём ось  $Z$  направим вверх, а ось  $R$  — к центру окружности:

$$ma_z = -mg + N_1 \cos \alpha = 0, \quad ma_r = m \frac{v^2}{r} = N_1 \sin \alpha.$$

Отсюда величина ускорения шарика равна

$$a = a_r = \frac{N_1 \sin \alpha}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m \cos \alpha} = g \operatorname{tg} \alpha,$$

а его скорость  $v = \sqrt{gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$ . Поскольку период обращения равен

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi l \sin \alpha}{\sqrt{gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}},$$

то  $\cos \alpha = \frac{gT^2}{4\pi^2 l}$ , и сила натяжения нити  $N_1 = \frac{mg}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 ml}{T^2}$  — постоянная величина.

Для второго случая удобно записать второй закон Ньютона в проекциях на касательную ось  $X$ , направленную в данный момент вдоль траектории движения шарика, и на нормальную ось  $Y$ , направленную к точке подвеса нити:

$$ma_x = mg \sin \alpha, \quad ma_y = -mg \cos \alpha + N_2.$$

Поскольку здесь шарик движется по окружности радиусом  $l$ , то его ускорение  $a_y = v^2/l$ . Очевидно, что максимум отношения сил натяжения нити  $N_1/N_2$  будет достигаться тогда, когда величина

$$N_2 = m \left( \frac{v^2}{l} + g \cos \alpha \right)$$

принимает минимальное значение, то есть при  $v = 0$ , в положении максимального отклонения шарика:  $(N_2)_{\min} = mg \cos \alpha$ .

Таким образом, максимальное отношение силы натяжения нити в первом случае к силе её натяжения во втором случае равно

$$\left( \frac{N_1}{N_2} \right)_{\max} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \left( \frac{2\pi}{T} \right)^4 \left( \frac{l}{g} \right)^2.$$

**1.88.** Рассмотрим неподвижную жидкость массой  $\Delta m$  в объёме, равном объёму пробки. В обычных земных условиях на него действует сила тяжести  $\Delta mg$ , направленная вниз. Она уравнивается силами давления, действующими на этот объём со стороны соседних слоёв жидкости. Равнодействующая сил давления представляет собой выталкивающую Архимедову силу, направленную в сторону уменьшения давления в жидкости, то есть вверх. Она, очевидно, равна  $F_1 = \Delta mg$ .

Пусть теперь рассматриваемый элементарный объём жидкости находится во вращающейся трубке. Так как он движется по окружности, то на него, кроме силы тяжести и силы  $F_1$ , должна действовать сила, направленная к оси вращения и обеспечивающая ему центростремительное ускорение. Такой силой может быть только равнодействующая сил давления, возникающих внутри жидкости. По величине она равна  $F_2 = \Delta m \omega^2 r$ , где  $r$  — расстояние от выделенного элемента жидкости до оси вращения. Эта сила, подобно силе  $F_1$ , пропорциональна массе элементарного объёма и направлена в сторону уменьшения давления, то есть к оси, вокруг которой вращается трубка. Силы  $F_1$  и  $F_2$ , складываясь геометрически, дают силу Архимеда  $F_{\text{Арх}}$ , действующую на вращающийся выделенный объём жидкости. Отметим, что Архимедова сила в данном случае направлена под углом к вертикали.

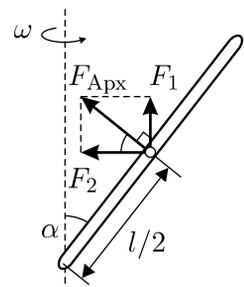


Рис. 1.88.

Так как в условии задачи сказано, что пробка лёгкая (это означает, что её масса много меньше массы  $\Delta m$  вытесненной ею жидкости), то действующую на пробку силу тяжести можно не учитывать,

и принимать во внимание только силы  $F_1$  и  $F_2$ . Для того, чтобы пробка покоилась, сумма этих сил не должна иметь составляющей, направленной вдоль трубки, то есть должна быть перпендикулярна трубке. Из рисунка 1.88 видно, что для этого должно выполняться соотношение:  $F_2 \sin \alpha = F_1 \cos \alpha$ , или  $\Delta m \omega^2 \frac{l}{2} \sin^2 \alpha = \Delta m g \cos \alpha$ . Отсюда

$$\omega = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2g \cos \alpha}{l}}.$$

Отметим, что положение пробки при данной частоте вращения будет устойчивым. Действительно, при неизменной составляющей силы Архимеда  $F_1$ , обусловленной силой тяжести, смещение пробки вверх приводит к увеличению её расстояния от оси вращения, в результате чего увеличивается составляющая силы Архимеда  $F_2$ . В результате появляется составляющая силы, направленная вдоль трубки вниз, которая возвращает пробку в прежнее положение. При смещении пробки вниз картина обратная.

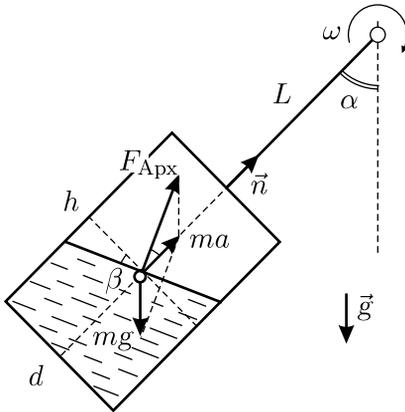


Рис. 1.89.1.

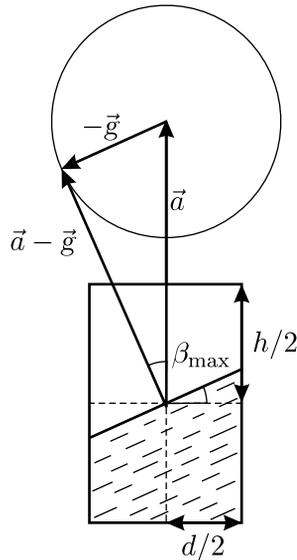


Рис. 1.89.2.

**1.89\*.** Определим положение поверхности воды в ведре в момент, когда лопасть составляет некоторый угол  $\alpha$  с вертикалью (см. рис. 1.89.1). Уравнение движения элемента жидкости, находящегося вблизи её поверхности, имеет вид:  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{Арх}}$ , где  $\vec{F}_{\text{Арх}}$  — архимедова сила, действующая на данный элемент,  $\vec{a}$  — его

центростремительное ускорение. Известно, что в равновесии направление архимедовой силы перпендикулярно к свободной поверхности жидкости; с другой стороны, из-за малости размеров ведра переходные процессы быстротечны, и воду в каждый момент времени можно считать находящейся в равновесии. Поскольку  $\vec{F}_{\text{Арх}} = m(\vec{a} - \vec{g})$ , получаем, что поверхность воды в ведре перпендикулярна вектору  $\vec{a} + (-\vec{g})$ .

Так как лопасть очень длинная, то центростремительное ускорение равно  $\vec{a} = \omega^2 L \vec{n}$ , где  $\vec{n}$  — единичный вектор, направленный к оси вращения. Вектор ускорения  $\vec{a}$  постоянен по величине и направлен вдоль лопасти мельницы и оси жёстко прикреплённого к ней ведра, а вектор  $-\vec{g}$  вращается относительно ведра при вращении лопасти. Поэтому векторную сумму  $\vec{a} + (-\vec{g})$  удобно изображать в системе отсчёта, жёстко связанной с ведром (см. рис. 1.89.2). Обозначив угол отклонения вектора  $\vec{a} + (-\vec{g})$  от оси ведра, равный углу наклона поверхности воды ко дну ведра, через  $\beta$ , получаем, что максимальное его значение определяется соотношением:  $\sin \beta_{\text{max}} = g/a = g/(\omega^2 L)$ . Вода не будет выливаться из ведра, заполненного наполовину, если  $\sin \beta_{\text{max}} = \frac{g}{\omega^2 L} < \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}$ . Отсюда

$$\omega^2 > \frac{g}{L} \sqrt{1 + \frac{d^2}{h^2}}.$$

**1.90.** Поскольку все части системы, кроме груза массой  $M$ , лёгкие, то можно считать, что груз совершает свободные колебания на невесомом подвесе длиной  $L - h$ . При этом на него действуют сила тяжести  $Mg$ , направленная вниз, и сила натяжения стержня  $T$ , направленная вдоль стержня (см. рис. 1.90).

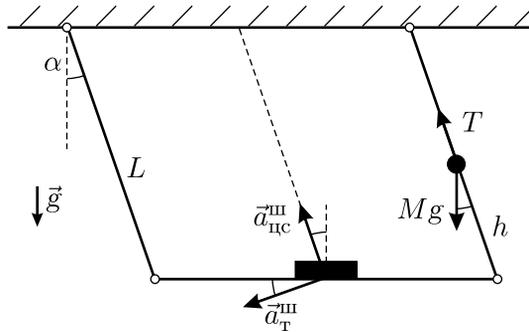


Рис. 1.90.

Уравнения вращательного движения груза на подвесе в проекциях на радиальное и тангенциальное направления имеют вид:

$Ma_{\text{цс}} = T - Mg \cos \alpha$  и  $Ma_{\text{т}} = Mg \sin \alpha$ . Здесь  $a_{\text{цс}}$  — центростремительное,  $a_{\text{т}}$  — тангенциальное ускорение груза,  $\alpha$  — угол отклонения стержней от вертикали. Ясно, что шайба, лежащая на шероховатой планке, колеблется так же, как нижние концы стержней, расположенные на расстоянии  $L$  от точек подвеса, и имеет проекции ускорения на те же направления, в  $L/(L-h)$  раз бóльшие, чем груз:  $a_{\text{цс}}^{\text{ш}} = a_{\text{цс}} L/(L-h)$  и  $a_{\text{т}}^{\text{ш}} = a_{\text{т}} L/(L-h) = g \sin \alpha \cdot L/(L-h)$ . Уравнение движения шайбы в проекции на вертикальную ось имеет вид:  $N - mg = m(a_{\text{цс}}^{\text{ш}} \cos \alpha - a_{\text{т}}^{\text{ш}} \sin \alpha)$ , где  $m$  — масса шайбы,  $N$  — сила реакции со стороны планки. Шайба начинает подпрыгивать на планке при  $N = 0$ , то есть когда  $g \left( \sin^2 \alpha \cdot \frac{L}{L-h} - 1 \right) = a_{\text{цс}}^{\text{ш}} \cos \alpha$ . Раньше всего отрыв шайбы от планки будет происходить в моменты максимального отклонения, когда скорость шайбы и её центростремительное ускорение  $a_{\text{цс}}^{\text{ш}} = 0$ , откуда искомое значение минимального угла  $\alpha_{\text{min}}$  соответствует  $\sin \alpha_{\text{min}} = \sqrt{1 - (h/L)}$ .

**1.91\***. По условию эллиптическое колесо мало отличается от круглого:  $\delta = a - b = 1 \text{ см} \ll R = (a + b)/2 \approx 50 \text{ см}$ , поэтому можно пренебречь неравномерностью вращения колеса и считать, что при качении его скорость  $v \approx \omega R$ , а зависимость вертикальной координаты  $y$  центра масс колеса от времени  $t$  имеет вид:  $y = \frac{\delta}{2} \cos 2\omega t$ . Здесь учтено, что за один оборот колеса  $y$  дважды проходит через максимум, и начало отсчёта координаты  $y$  помещено на высоте  $R$  над дорогой. Колесо начнёт подпрыгивать тогда, когда при качении максимальная величина проекции ускорения его центра масс на вертикаль превысит ускорение свободного падения. Поскольку проекция ускорения  $a_y$  — это вторая производная от соответствующей координаты, то  $a_y = y'' = -2\delta\omega^2 \cos 2\omega t$ , и  $|(a_y)_{\text{max}}| = 2\delta\omega^2 > g$ . Отсюда угловая скорость колеса  $\omega > \sqrt{\frac{g}{2\delta}}$ , и искомая скорость его качения

$$v > R \sqrt{\frac{g}{2\delta}} \approx 11 \text{ м/с}.$$

**1.92.** В момент отрыва тела от стола на него со стороны стола не действуют никакие силы, а ускорение в вертикальном направлении равно нулю. Следовательно, в этот момент вертикальная составляющая силы натяжения нити равна  $mg$ , где  $m$  — масса тела. Таким образом, величина силы натяжения нити равна  $T = mg/\cos \alpha$ .

Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вверх с искомой скоростью  $v$ . В этой системе отсчёта тело движется по окружности, так как

точка, за которую тянут нить, покоится. Скорость  $u$  тела в этой системе отсчёта перпендикулярна нити (см. рис. 1.92) и равна  $u = v / \sin \alpha$ , а сумма проекций сил на направление нити равна произведению массы тела на центростремительное ускорение:

$$T - mg \cos \alpha = \frac{mu^2}{L}.$$

Отсюда с учётом выражений для  $T$  и  $u$  находим скорость  $v$  подъёма конца нити:

$$v = \sin^2 \alpha \sqrt{\frac{gL}{\cos \alpha}}.$$

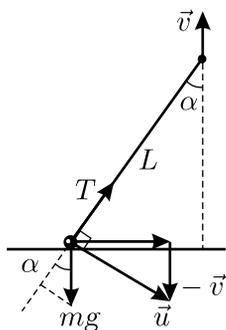


Рис. 1.92.

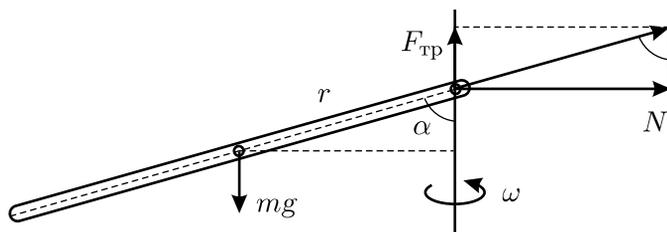


Рис. 1.93.

**1.93\*.** Сделаем чертёж и изобразим на нём все силы, действующие на кольцо (см. рис. 1.93). Это сила тяжести  $mg$ , приложенная к центру кольца, а также силы трения  $F_{\text{тр}}$  и нормального давления спицы на кольцо  $N$ , приложенные в точке касания кольца и спицы и направленные вверх и перпендикулярно спице соответственно. Кроме того, понятно, что для устойчивого вращения кольца оно должно быть наклонено под некоторым углом  $\alpha$  к вертикали — так, чтобы сумма моментов сил  $N$  и  $F_{\text{тр}}$  относительно центра кольца была равна нулю, или, что то же самое, равнодействующая этих сил лежала в плоскости кольца.

Запишем уравнения движения. Для этого можно заменить кольцо материальной точкой массы  $m$ , расположенной в его центре. Из рисунка видно, что центр кольца движется по окружности радиусом  $r \sin \alpha$ , причём центростремительное ускорение обеспечивается силой  $N$ . В вертикальном же направлении кольцо удерживается силой трения  $F_{\text{тр}}$ . Уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} N &= m\omega^2 r \sin \alpha; & F_{\text{тр}} &= mg; \\ F_{\text{тр}} &\leq \mu N; & N &= F_{\text{тр}} \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Решая их, получим условие для величины угловой скорости кольца, при которой оно будет устойчиво вращаться вокруг спицы:

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu r}} \sqrt{1 + \mu^2}.$$

**1.94\*.** Введём неподвижную прямоугольную систему координат  $XYZ$  (см. рис. 1.94). Её начало поместим в то место, где в данный момент времени находится шайба, ось  $X$  направим горизонтально (перпендикулярно радиусу желоба в сторону движения шайбы), ось  $Y$  — вверх, а ось  $Z$  — в сторону оси желоба перпендикулярно к ней (на нашем рисунке ось  $Z$  направлена «от нас»). Пусть масса шайбы равна  $m$ . Обозначим на рисунке действующие на шайбу силы. Сила тяжести  $mg$  направлена вниз; сила реакции желоба  $N$  направлена перпендикулярно к желобу, под некоторым углом к горизонту, и имеет проекции  $N_x$ ,  $N_y$  и  $N_z$  на все три координатные оси; наконец, сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu N$  направлена по касательной к желобу в сторону, противоположную направлению скорости шайбы  $v$ . Запишем уравнение движения шайбы (второй закон Ньютона) в проекциях на координатные оси:

$$\begin{aligned} N_x &= \mu N \cos \alpha; \\ N_y + \mu N \sin \alpha &= mg; \\ N_z &= \frac{mv_x^2}{R} = \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{R}. \end{aligned}$$

Учтём также, что  $N_x = N_y \operatorname{tg} \alpha$ , поскольку сила  $N$  перпендикулярна желобу, и что

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для  $N_x$  и  $N_z$ , с учётом связи между  $N_x$  и  $N_y$  получаем уравнение, связывающее  $N$  и  $\mu$ :

$$N^2 = N_x^2 \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}\right) + \left(\frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{R}\right)^2 = \frac{\mu^2 N^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \left(\frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{R}\right)^2.$$

Далее заметим, что

$$mg \sin \alpha = N_y \sin \alpha + \mu N \sin^2 \alpha = \frac{N_x \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \mu N \sin^2 \alpha =$$

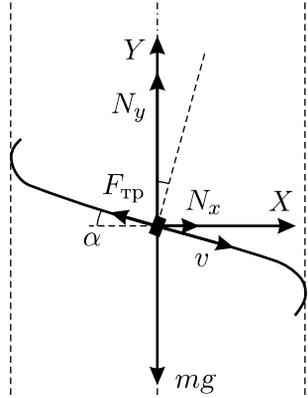


Рис. 1.94.

$$= \mu N \cos^2 \alpha + \mu N \sin^2 \alpha = \mu N.$$

Следовательно, полученное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{m^2 g^2 \sin^2 \alpha}{\mu^2} = m^2 g^2 \cos^2 \alpha + \frac{m^2 v^4 \cos^4 \alpha}{R^2}.$$

Отсюда для коэффициента трения окончательно имеем:

$$\mu = \frac{mg \sin \alpha}{\sqrt{m^2 g^2 \cos^2 \alpha + \frac{m^2 v^4 \cos^4 \alpha}{R^2}}} = \frac{gR \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4 \cos^2 \alpha}}.$$

**1.95\***. Изобразим на рисунке 1.95 вид сверху на систему, описанную в условии задачи. Так как модель самолёта (точка  $A$  на рисунке) движется по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v$ , она имеет центростремительное ускорение  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , создаваемое нормальной составляющей силы натяжения кордов  $T_n = ma_n = \frac{mv^2}{R}$ . Тангенциальная составляющая силы натяжения частично компенсирует силу сопротивления движению самолёта и связана с нормальной составляющей соотношением

$T_\tau = T_n \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha = \angle DAO$  — угол между радиусом  $OA$  окружности, по которой движется самолёт, и проекцией  $DA$  кордов  $AB$  на плоскость этой окружности (точка  $B$  находится на рисунке под точкой  $D$ ).

Треугольник  $ABD$  — прямоугольный, поэтому  $AD = \sqrt{L^2 - h^2}$ . На основании теоремы косинусов длины сторон треугольника  $ADO$  должны удовлетворять соотношению:

$$r^2 = R^2 + L^2 - h^2 - 2R\sqrt{L^2 - h^2} \cos \alpha,$$

откуда  $\cos \alpha = \frac{R^2 + L^2 - r^2 - h^2}{2R\sqrt{L^2 - h^2}}.$

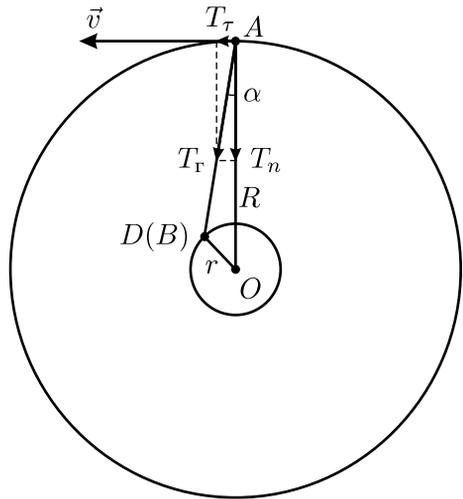


Рис. 1.95.

Из этих формул следует, что горизонтальная составляющая силы натяжения кордов

$$T_{\Gamma} = \sqrt{T_n^2 + T_r^2} = 2mv^2 \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{R^2 + L^2 - r^2 - h^2}.$$

Поскольку в вертикальном направлении самолёт не имеет ускорения (так как по условию он движется в горизонтальной плоскости), то проекция суммы всех действующих на самолёт сил, — силы тяжести  $mg$ , силы натяжения кордов  $T$  и силы со стороны воздуха, — на вертикальное направление должна быть равна нулю. Силу, действующую на самолёт со стороны воздуха, можно разложить на две составляющие: горизонтальную, равную сумме силы сопротивления и силы тяги, направленную горизонтально по касательной к траектории, и вертикальную — подъёмную силу  $F$ :

$$mg + T_{\text{в}} - F = 0,$$

где  $T_{\text{в}}$  — модуль вертикальной составляющей силы натяжения кордов,  $F$  — модуль искомой подъёмной силы,  $T_{\text{в}} = T_{\Gamma} \operatorname{tg} \beta$ , где  $\beta = \angle BAD$  — угол между кордами  $AB$  и горизонтом, причём  $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}}$ .

В результате получаем, что подъёмная сила равна:

$$F = m \left( g + \frac{2v^2 h}{R^2 + L^2 - r^2 - h^2} \right).$$

**1.96.** Вращение станции создаёт эффект искусственной силы тяжести с эффективным ускорением свободного падения  $g_{\text{эфф}} = \omega^2 R$ . Линейная скорость вращения коридора станции, имеющего средний радиус  $R$ , равна  $v_0 = \omega R$ . Полёт попугайчика со скоростью  $v$  в направлении, противоположном направлению вращения станции, приведёт к уменьшению его угловой скорости и ускорения искусственной силы тяжести до значения  $g'_{\text{эфф}} = \frac{(v - v_0)^2}{R}$ . При  $v = v_0 = \omega R$  величина  $g'_{\text{эфф}} = 0$ , то есть для попугайчика наступит состояние невесомости; отсюда  $R \sim v/\omega \sim 5$  м. Полёт по коридору в направлении вращения станции приведёт к увеличению эффективного ускорения свободного падения до значения  $g''_{\text{эфф}} = \frac{(v + \omega R)^2}{R}$ . Таким образом, попугайчику легче лететь в направлении, противоположном направлению вращения орбитальной станции.

**1.97\*.** Будем считать, что время, необходимое для перехода между двумя орбитами, много меньше 30 часов, и им можно пренебречь.

Угловое расстояние между двумя станциями равно  $\Delta\varphi = L/R$ , где  $R$  — радиус основной круговой орбиты. Найдём зависимость угловой скорости  $\omega$  вращения спутника Земли по круговой орбите от её радиуса. Из второго закона Ньютона получаем:

$$\omega^2 R = G \frac{M_3}{R^2} = G \frac{M_3}{R_3^2} \left( \frac{R_3}{R} \right)^2 = g \left( \frac{R_3}{R} \right)^2,$$

где  $R_3$  — радиус Земли,  $M_3$  — её масса,  $G$  — гравитационная постоянная. Отсюда для близких орбит с малой разностью радиусов  $\Delta R$  получаем:  $2\omega\Delta\omega R + \omega^2\Delta R = -2gR_3^2\Delta R/R^3$ . Разделив это уравнение на  $\omega^2 R = g \left( \frac{R_3}{R} \right)^2$ , находим, что  $\Delta\omega = -\frac{3}{2}\omega \frac{\Delta R}{R}$  (здесь  $\Delta R < 0$ ,  $\Delta\omega > 0$ ). С другой стороны,  $\Delta\varphi = \frac{L}{R} = t\Delta\omega = \frac{3}{2}\omega t \frac{|\Delta R|}{R}$ , откуда, с учётом того, что  $\omega \approx \sqrt{g/R_3} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ , окончательно получаем:  $|\Delta R| = \frac{2L}{3\omega t} \approx 15 \text{ км}$ .

**1.98\***. Запишем уравнение движения спутника по круговой орбите радиуса  $R$ :

$$\frac{mv_R^2}{R} = \frac{GmM_3}{R^2} = \frac{mgR_3^2}{R^2}. \quad (1)$$

Здесь  $v_R$  — скорость спутника при движении по орбите радиуса  $R$ ,  $M_3$  — масса Земли,  $R_3$  — её радиус,  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Пусть за малое время  $\Delta t$  радиус орбиты уменьшился на  $\Delta R$ . Тогда из закона изменения механической энергии имеем:

$$\frac{mv_{R-\Delta R}^2}{2} - \frac{mv_R^2}{2} + \left( -\frac{mgR_3^2}{R-\Delta R} - \left( -\frac{mgR_3^2}{R} \right) \right) = -Fv\Delta t. \quad (2)$$

Кроме того, можно записать уравнение движения спутника по орбите радиуса  $R - \Delta R$  со скоростью  $v_{R-\Delta R}$ , аналогичное (1):

$$\frac{mv_{R-\Delta R}^2}{R-\Delta R} = \frac{mgR_3^2}{(R-\Delta R)^2}. \quad (3)$$

Выражая из (1) и (3)  $v_R^2$  и  $v_{R-\Delta R}^2$  и подставляя их в (2), получим соотношение, связывающее изменение радиуса орбиты  $\Delta R$  с интервалом времени  $\Delta t$ :

$$\Delta R = \frac{2FvR(R-\Delta R)}{mgR_3^2} \Delta t.$$

Учитывая, что  $\Delta R \ll R$ ,  $R \sim R_3$ , для скорости снижения спутника окончательно получим:

$$v_{\text{сн}} = \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2FvR(R - \Delta R)}{mgR_3^2} \approx \frac{2Fv}{mg}.$$

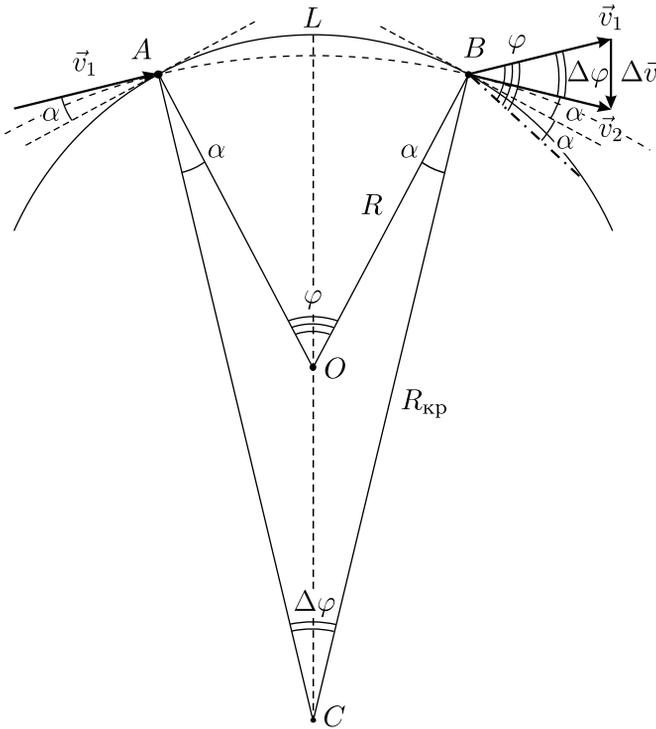


Рис. 1.99.

**1.99\***. Скорость снаряда  $v = 10$  км/с больше первой космической скорости ( $v_{1к} \approx 8$  км/с) и лишь немного меньше второй ( $v_{2к} \approx 11,2$  км/с). Поэтому снаряд будет двигаться по сильно вытянутому эллипсу, большая полуось которого значительно больше радиуса Земли  $R \approx 6400$  км, и ударится о Землю позади орудия. Иначе говоря, обычную формулу баллистики применять нельзя. Рассчитать такой эллипс — сложная задача, но в данном случае это делать и не нужно.

Мысленно сосредоточим всю массу Земли в её центре, и рассмотрим траекторию снаряда. Из симметрии расположения эллипса относительно Земли следует, что угол падения снаряда на Землю равен углу возвышения орудия  $\alpha = 3^\circ$ . Ясно, что если бы Земля не мешала, то снаряд пролетел бы по участку траектории, проходящему «внутри Земли»

(см. рис. 1.99). Поскольку начальная скорость снаряда очень велика, а угол возвышения орудия мал, то этот участок эллипса внутри Земли близок к прямой линии, а градусная мера  $\varphi$  дуги, лежащей между точками нахождения орудия и падения снаряда, мала.

Поэтому в первом приближении можно считать, что «внутри Земли» снаряд летит по прямой с постоянной скоростью  $v$ , а  $\varphi \approx 2\alpha$ . Таким образом, искомое расстояние  $L = R\varphi \approx 2R\alpha$ , и поскольку  $2\alpha = 6^\circ \approx 0,1$  рад, то

$$L \approx 0,1 \text{ рад} \cdot 6400 \text{ км} \approx 640 \text{ км.}$$

Можно попытаться оценить величину  $L$  другим, более точным способом, учитывая силу притяжения снаряда к центру Земли. После падения снаряд будет двигаться по участку траектории «внутри Земли» и пролетит его с почти постоянной по величине скоростью за время  $\Delta t \approx L/v$ . За это время вектор скорости повернётся на угол  $\Delta\varphi = \varphi - 2\alpha$ , причём этот поворот возникает из-за действия силы притяжения Земли на снаряд во время его «полёта внутри Земли». Поскольку сила притяжения почти перпендикулярна скорости, то приращение скорости снаряда  $\Delta v \approx v\Delta\varphi \approx g\Delta t \approx gL/v$ . Таким образом,

$$\Delta\varphi \approx \frac{gL}{v^2} \approx \frac{L}{R} - 2\alpha,$$

откуда

$$L \approx \frac{2\alpha R}{1 - \frac{gR}{v^2}} \approx \frac{0,1 \text{ рад} \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{1 - \frac{10 \text{ м/с}^2 \cdot 6400 \cdot 10^3 \text{ м}}{(10^4 \text{ м/с})^2}} \approx 1780 \text{ км.} \quad (1)$$

Эту формулу можно также получить, используя метод последовательных приближений, на рассмотрении которого мы не будем подробно останавливаться.

Отметим, что вычисление по формуле (1) даёт результат, который очень близок к точному значению  $L \approx 1859$  км (результат численного расчёта для полёта снаряда по эллиптической траектории при  $g = 10 \text{ м/с}^2$ ,  $R = 6400$  км). Более того, если подставить в формулу (1) более точное значение величины  $2\alpha = 6^\circ \approx 0,1047$  рад и выполнить подсчёт при помощи микрокалькулятора, то совпадение станет ещё лучше — оценка для расстояния будет равна  $L \approx 1861$  км, что отличается от точного значения только на  $0,1\%$ !

Формулу (1) можно получить и другим способом. Небольшой участок траектории, проходящий «внутри Земли», на всём своём протяжении имеет приблизительно одинаковый радиус кривизны  $R_{\text{кр}}$ . Его можно найти из условия примерного равенства вблизи поверхности Земли центростремительного ускорения снаряда  $v^2/R_{\text{кр}}$  и ускорения свободного падения  $g$ , откуда

$$R_{\text{кр}} \approx \frac{v^2}{g} = \frac{(10000 \text{ м/с})^2}{10 \text{ м/с}^2} = 10^7 \text{ м} = 10000 \text{ км}.$$

Если из центра кривизны  $C$  данного участка траектории провести два радиуса кривизны — в точку падения  $A$  и в точку вылета  $B$  снаряда, то вектора скорости снаряда  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  в этих точках будут перпендикулярны проведённым радиусам (см. рис. 1.99). Углы между этими радиусами  $CA$  и  $CB$  и радиусами Земли  $OA$  и  $OB$ , проведёнными из центра Земли  $O$  в те же точки, будут равны  $\alpha$ , поскольку первые перпендикулярны векторам скорости, а вторые — касательным к поверхности Земли. Поскольку угол  $ACB$  равен углу поворота вектора скорости  $\Delta\varphi$ , а угол  $\varphi/2$  является внешним углом для треугольника  $AOC$ , то  $\frac{\varphi}{2} = \alpha + \frac{\Delta\varphi}{2}$ . Замечая, что  $R\varphi \approx R_{\text{кр}}\Delta\varphi \approx \frac{v^2}{g}\Delta\varphi$ , получаем  $\varphi = 2\alpha + \frac{gR}{v^2}\varphi$ , откуда  $\varphi = \frac{2\alpha}{1 - (gR/v^2)}$ , и для  $L = R\varphi$  получаем прежнюю формулу (1).

**1.100.** Направим ось  $X$  параллельно плоскости  $A$  в направлении вершины угла, а ось  $Y$  — параллельно плоскости  $B$ . Движения шарика вдоль этих осей, очевидно, независимы. При ударах о плоскость  $A$  проекция скорости шарика на ось  $X$  не изменяется, а составляющая ускорения вдоль этой оси постоянна и равна  $a_x = g \sin \alpha$ . Таким образом, движение шарика вдоль оси  $X$  — равноускоренное, поэтому до его удара о плоскость  $B$  пройдёт время  $t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}}$ .

**1.101.** После  $n$  ударов о дно шарик вернётся на первоначальную высоту в момент времени  $t_n = 2n\sqrt{2H/g}$ , где  $n > 0$  — целое число. В этот момент шарик должен находиться у правой стенки, то есть пройденный им в горизонтальном направлении путь равен  $S_k = (2k + 1)L$ , где  $2k$  — число ударов о вертикальные стенки ямы ( $k \geq 0$ ). Отсюда скорость приближения шарика к краю ямы должна быть равна

$$v = \frac{S_k}{t_n} = \frac{2k + 1}{2n} L \sqrt{\frac{g}{2H}}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2, 3, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$$

**1.102.** Как видно из рисунка 1.102, мячик после упругого удара о лестницу может отскочить в одном из двух возможных направлений: если он ударился один раз — то вниз под углом  $-30^\circ$ , а если два — то вверх под углом  $+30^\circ$ , то есть в обратном направлении по отношению к броску. Если точка броска выбирается случайным образом, то можно оценить вероятности этих углов отскока, найдя отношения ширины полосы, в которую должен попасть мячик для реализации данного угла отскока, к полной ширине зоны бросания напротив ступеньки (вероятностью отскока маленького мячика в других направлениях после попадания в углы ступеньки можно пренебречь). Если считать ширину и высоту ступеньки равными единице, то из рисунка видно, что полная ширина зоны бросания по вертикали равна  $1 + (1/\sqrt{3})$ , а ширины полос для первого и второго углов отскока составляют, соответственно,  $1 - (1/\sqrt{3})$  и  $2/\sqrt{3}$ . Поэтому вероятность отскока под углами  $-30^\circ$  и  $+30^\circ$  равны:

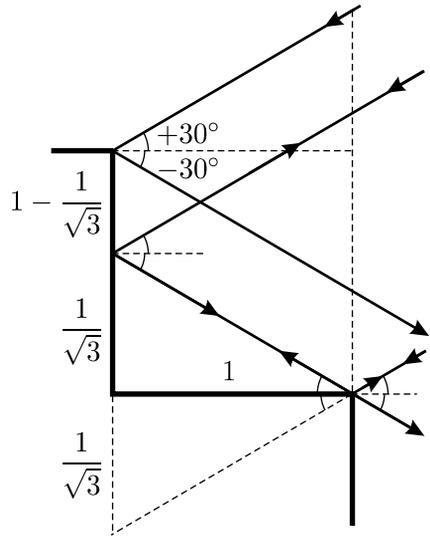


Рис. 1.102.

$$p(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \approx 27\%; \quad p(+30^\circ) = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} \approx 73\%.$$

**1.103.** Ясно, что точки 1 и 2 упругого отражения шарика от стенок цилиндра должны лежать ниже его оси. Траектория — замкнутая, то есть шарик должен периодически возвращаться в исходную точку. Этим условиям удовлетворяют три типа траекторий (см. рис. 1.103).

1) Траектории 1–2 и 2–1 совпадают, при этом отражение от стенок происходит по нормали, а положение точек 1 и 2 ниже оси цилиндра может быть любым: всегда можно подобрать для данного положения точки 1 такую величину скорости шарика, чтобы он попал в точку 2, расположенную на той же высоте, вылетев по нормали к стенке из точки 1.

2) Траектория 1–2 — «настильная», а 2–1 — «навесная»; в этом случае углы падения и отражения должны быть симметричны относительно нормалей к стенкам, наклонённым под углом  $45^\circ$  к горизонту, и таким образом, данное решение единственно.

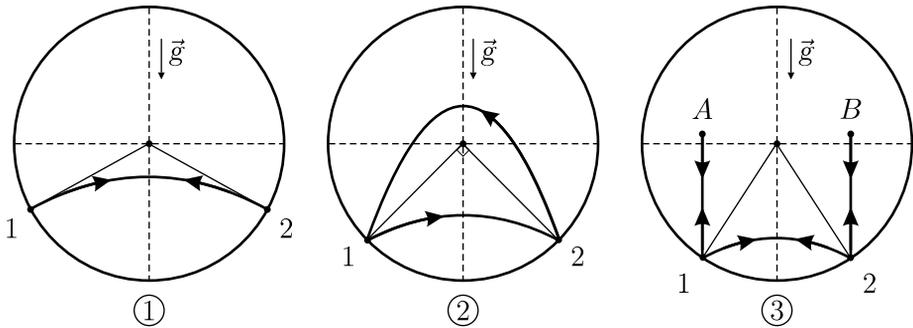


Рис. 1.103.

3) Шарик падает из точки  $A$  в точку 1 с такой высоты, чтобы, отразившись, попасть в точку 2, и после второго отскока поднимается на прежнюю высоту в точку  $B$ ; далее процесс повторяется в обратной последовательности. Траектории этого типа ограничиваются тем условием, что начальная точка  $A$ , из которой падает шарик, должна находиться внутри цилиндра. Поэтому точки 1 и 2 не могут располагаться выше некоторого уровня над нижней точкой цилиндра.

**1.104\***. Возможны три вида траекторий:

1) с возвратом в начальную точку удара о первый клин после отражения от второго клина (см. рис. 1.104.1);

2–3) с подъёмом на ту же высоту, но над другим клином (см. рис. 1.104.2).

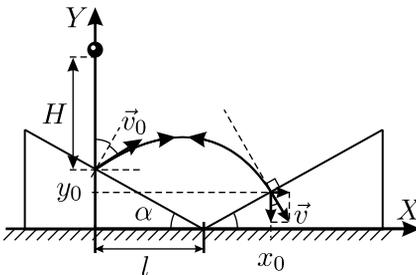


Рис. 1.104.1.

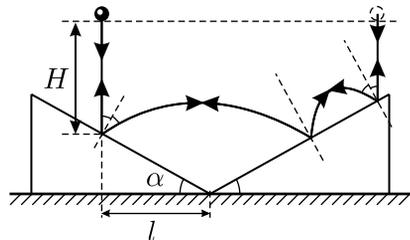


Рис. 1.104.2.

В первом случае расчёт проще, чем во втором или третьем. Проведём его.

Расположим оси координат так, как показано на рисунке 1.104.1. Скорость шарика сразу после первого удара равна по модулю  $v_0 = \sqrt{2gH}$ . Законы движения шарика вдоль осей координат между первым и вторым ударами имеют вид:

$$x = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \cdot t, \quad (1)$$

$$y = l \operatorname{tg} \alpha + v_0 \sin \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad (2)$$

где время  $t$  отсчитывается от момента первого удара. Пусть шарик ударился о вторую плоскость в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ . Они связаны между собой соотношением

$$y_0 = (x_0 - l) \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Так как после второго удара шарик возвращается к первому клину по участку своей прежней траектории, то перед ударом вектор скорости направлен по нормали к плоскости второго клина. Значит, для составляющих скорости шарика в этот момент справедливо соотношение:

$$\frac{v_y}{v_x} = -\operatorname{ctg} \alpha. \quad (4)$$

Знак «минус» в (4) появляется из-за того, что при выбранных направлениях осей координат составляющая скорости  $v_y$  перед ударом отрицательна. Составляющие  $v_x$  и  $v_y$  между первым и вторым ударами выражаются формулами:

$$v_x = v_0 \sin 2\alpha, \quad v_y = v_0 \cos 2\alpha - gt. \quad (5)$$

Время  $t_0$ , через которое шарик ударится о второй клин, находим из (1):  $t_0 = \frac{x_0}{v_0 \sin 2\alpha}$ . Подставляя (5) в (4), с учётом выражения для  $t_0$ , находим  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 2\alpha (\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha).$$

Далее, из (2) и (3), с учётом выражения для  $t_0$ , получаем:

$$y_0 = (x_0 - l) \operatorname{tg} \alpha = l \operatorname{tg} \alpha + x_0 \operatorname{ctg} 2\alpha - \frac{gx_0^2}{2v_0^2 \sin^2 2\alpha}.$$

Подставляя в последнее соотношение найденное  $x_0$  и учитывая, что  $v_0^2/g = 2H$ , имеем:

$$\begin{aligned} H &= \frac{2l \operatorname{tg} \alpha}{\sin^2 2\alpha (\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} \alpha) (\operatorname{ctg} \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}{(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha) (1 + 5 \operatorname{tg}^2 \alpha)} l. \end{aligned}$$

Из полученной формулы следует, что данное решение задачи существует при  $\operatorname{tg} \alpha < \sqrt{3}$ , то есть при  $\alpha < \pi/3$ .

**1.105.** Перейдём в систему отсчёта, связанную с движущимся цилиндром. В ней перед ударом шарик движется со скоростью  $\vec{v} + \vec{u}$  (см. рис. 1.105).

Так как цилиндр гладкий и между ним и шариком не действуют силы трения, то углы между нормалью к поверхности цилиндра в месте удара и направлениями движения шарика до и после удара одинаковы. Следовательно, после удара о цилиндр шарик в движущейся системе отсчёта будет двигаться с той же по модулю скоростью  $\vec{v} + \vec{u}$  под углом  $\beta = \pi - 2\alpha$  к направлению исходного движения, причём  $\cos \alpha = L/R$ .

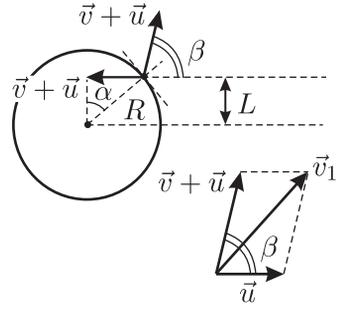


Рис. 1.105.

Вернёмся обратно в неподвижную систему отсчёта, связанную с землёй. В ней скорость шарика после удара  $\vec{v}_1$  будет представлять собой векторную сумму скорости  $\vec{u}$  цилиндра относительно земли и скорости  $\vec{v} + \vec{u}$  шарика относительно цилиндра (см. рис. 1.105). Используя теорему косинусов, получим:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= u^2 + (v + u)^2 - 2u(v + u) \cos 2\alpha = \\ &= v^2 + 2u^2(1 - \cos 2\alpha) + 2uv(1 - \cos 2\alpha) = \\ &= v^2 + 2u(u + v)(1 - \cos 2\alpha) = v^2 + 4u(u + v)(1 - \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

С учётом выражения для  $\cos \alpha$  окончательно получаем:

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 4u(u + v) \left(1 - \frac{L^2}{R^2}\right)}.$$

**1.106.** Процесс взаимодействия конструкции со стенкой можно разделить на три стадии.

1) Ящик сталкивается со стенкой и отскакивает от неё со скоростью  $v$ . При этом лежащий в ящике груз продолжает двигаться к стене с прежней скоростью.

2) Ящик сталкивается с грузом. Направления скоростей ящика и груза после удара изменяются на противоположные — ящик вновь начинает двигаться в сторону стены со скоростью  $v$ , а груз с такой же по величине скоростью движется от стены.

3) Ящик снова сталкивается со стеной и отскакивает от неё. Теперь и груз, и ящик движутся от стены с одинаковой скоростью  $v$ . При этом очевидно, что груз по-прежнему находится в середине ящика.

**1.107.** Полный импульс системы равен нулю, поскольку массы и скорости у коробки и у шайбы одинаковые. Следовательно, центр масс системы, расположенный на половине расстояния от центра коробки до шайбы, в любой момент времени остаётся неподвижным. Поскольку расстояние от шайбы до центра коробки не может превышать  $R$ , то центр коробки всё время находится внутри окружности радиусом  $R/2$  с центром в центре масс системы.

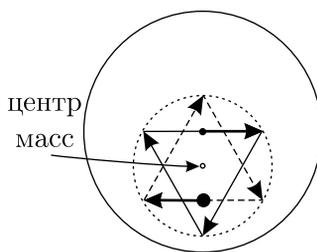


Рис. 1.107.

В те моменты, когда центр коробки достигает этой окружности, происходят соударения шайбы со стенками коробки. Из условия задачи следует, что угол падения шайбы на стенку коробки равен  $30^\circ$ . Поскольку при ударе шайба и коробка обмениваются нормальными составляющими скоростей, которые равны друг другу, а тангенциальные составляющие скоростей не изменяются, то угол падения будет равен углу отражения. Таким образом, векторы скоростей шайбы и центра коробки при ударе поворачиваются на угол, равный  $180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ , и траектория, которую описывает центр коробки, является равносторонним треугольником, вписанным в окружность радиусом  $R/2$  (см. рис. 1.107, где эта траектория изображена сплошными прямыми линиями, а траектория шайбы — пунктиром, и показаны начальные положения и скорости шайбы и коробки).

**1.108\*.** Если  $S_2 \neq 0$ , то шайбы за рассматриваемый промежуток времени соударялись. Пусть  $v$  — скорость первой шайбы до соударения. Соударение одинаковых шайб удобно исследовать в системе отсчёта, движущейся со скоростью  $v/2$ . В этой системе отсчёта шайбы до соударения движутся навстречу друг другу со скоростями  $v/2$ , противоположными по направлению. После столкновения шайбы разлетятся в противоположные стороны со скоростями  $\alpha v/2$ , где  $\alpha$  — число от 0 до 1. В неподвижной системе отсчёта скорости шайб после соударения будут равны

$$v_1 = \frac{v}{2}(1 - \alpha), \quad v_2 = \frac{v}{2}(1 + \alpha),$$

а пути, пройденные шайбами за время  $t$ :

$$S_1 = v\tau + \frac{v}{2}(1 - \alpha)(t - \tau), \quad S_2 = \frac{v}{2}(1 + \alpha)(t - \tau).$$

Здесь  $\tau > 0$  — время, прошедшее от начала движения первой шайбы до момента её соударения со второй шайбой. Складывая два последних равенства, получаем:  $S_1 + S_2 = vt$ , откуда однозначно определяется

начальная скорость первой шайбы:

$$v = \frac{S_1 + S_2}{t}.$$

Подставляя эту скорость в выражение для  $S_2$ , находим:

$$\frac{\tau}{t} = 1 - \frac{2S_2}{(S_1 + S_2)(1 + \alpha)}.$$

Начальное расстояние между шайбами

$$l = v\tau = (S_1 + S_2)\frac{\tau}{t} = S_1 + S_2 - \frac{2S_2}{1 + \alpha}.$$

Поскольку  $0 \leq \alpha \leq 1$ , то  $l$  может принимать следующие значения:  $S_1 - S_2 \leq l \leq S_1$ . Это условие следует дополнить ограничением  $l \geq 0$ . С его учётом получаем диапазон возможных значений начального расстояния между шайбами при  $S_2 \neq 0$ :

$$\max(S_1 - S_2; 0) \leq l \leq S_1.$$

При  $S_2 = 0$  шайбы не соударялись, что означает  $l \geq S_1$  и  $v = S_1/t$ .

**1.109\***. Рассмотрим сначала случай нелобового абсолютно упругого удара шара массой  $m$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , о такой же покоящийся. Из законов сохранения импульса и энергии имеем:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

или

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Из первого соотношения следует, что векторы  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  образуют треугольник, а из второго соотношения — что этот треугольник прямоугольный, причём векторы  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  являются его катетами. Значит, действительно, после такого удара шары разлетаются под углом  $90^\circ$ . Этот угол не зависит от прицельного расстояния  $\rho$ , от него зависят только конкретные направления разлёта шаров.

Так как написанные уравнения можно прочитать и справа налево (законы упругого удара обратимы!), то при столкновении шаров, движущихся со скоростями  $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$  и  $\vec{u}_2 = -\vec{v}_2$ , один из шаров останется, а второй будет двигаться со скоростью  $\vec{u} = -\vec{v}$ , если только

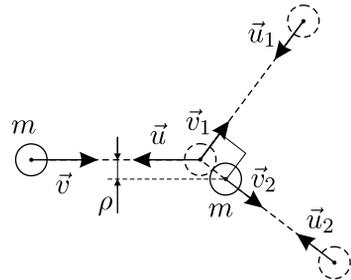


Рис. 1.109.

расположение шаров в момент удара будет таким же, как в рассмотренном ранее случае. Для того, чтобы проводить рассуждения дальше, заметим, что при абсолютно упругом ударе потерь на трение нет, и поэтому тангенциальные составляющие скоростей шаров при нелобовом ударе не изменяются, а нормальными составляющими они обмениваются. Отсюда следует, что для остановки одного из шаров, кроме всего прочего, должно выполняться следующее условие: линия, проходящая через центры обоих шаров, должна при ударе совпадать с направлением скорости одного из них. Действительно, пусть эта линия совпадает с направлением скорости  $\vec{u}_2$  второго шара (см. рис. 1.109). Тогда у второго шара при ударе отсутствует тангенциальная составляющая скорости, а у первого — нормальная. При ударе второй шар обменивается нормальной составляющей скорости с первым и останавливается. Первый же шар приобретает нормальную составляющую скорости и сохраняет тангенциальную, в результате чего продолжает двигаться со скоростью  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ .

Отметим, ещё раз, что для остановки одного из шаров при абсолютно упругом нелобовом ударе одного условия  $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$  недостаточно! Необходимо ещё выполнение условия, о котором шла речь выше.

**1.110\***. Как следует из решения предыдущей задачи, после упругого нелобового соударения двух одинаковых шайб, одна из которых покоится, шайбы разлетаются под прямым углом.

Применим это правило к двум последовательным соударениям (см. рис. 1.110). Обозначим конечные скорости трёх

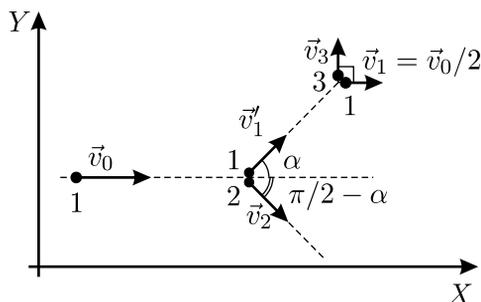


Рис. 1.110.

шайб через  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  и  $\vec{v}_3$ . Направим координатную ось  $X$  вдоль начальной скорости первой шайбы, а ось  $Y$  — перпендикулярно к ней. Будем считать, что одна из скоростей, например,  $\vec{v}_1$ , равна, как сказано в условии,  $\vec{v}_0/2$ . Тогда проекция скорости первой шайбы после первого удара  $\vec{v}'_1$  на ось  $X$  должна быть равна  $v'_{1x} = v_1 = v_0/2$ , проекция скорости второй шайбы  $\vec{v}_2$  на ось  $X$  равна  $v_{2x} = v_0 - v'_{1x} = v_0 - \frac{v_0}{2} = \frac{v_0}{2}$ , а проекции скоростей  $\vec{v}'_1$  и  $\vec{v}_2$  на ось  $Y$  должны быть равны по величине и противоположны друг другу по знаку. Следовательно, угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}'_1$  равен  $\pi/4$ .

В итоге первая шайба движется со скоростью  $v_0/2$  в том же направлении, в котором она двигалась до ударов, третья имеет скорость  $\vec{v}_3$ , равную по величине  $v_0/2$  и направленную вверх вдоль оси  $Y$ , а вторая шайба имеет скорость  $\vec{v}_2$ , равную по величине  $v_0/\sqrt{2}$  и направленную под углом  $\frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4}$  к вектору  $\vec{v}_0$ . Заметим, что это не единственный тип решения: возможно зеркально симметричное относительно оси  $X$  расположение всех векторов, когда вектор  $\vec{v}_3$  направлен вниз вдоль оси  $Y$ , а  $\vec{v}_2$  — вверх, под углом  $\pi/4$  к оси  $X$ . Кроме того, индексы 1, 2 и 3 у конечных скоростей шайб на рис. 1.110 могут располагаться произвольным образом, то есть имеется по  $3! = 6$  решений каждого типа. Таким образом, если все шайбы пронумерованы, то возможны 12 решений этой задачи, и только 2 разных решения, если шайбы неразличимы.

**1.111.** Известно, что при упругом лобовом ударе двух одинаковых шариков они «обмениваются» скоростями, а при упругом ударе о стенку направление скорости шарика меняется на противоположное. Поэтому при столкновениях шариков можно считать, что они проходят друг через друга «насквозь», не изменяя скоростей, и в окончательном состоянии системы шарики будут двигаться влево с теми же по величине скоростями, а расстояния между ними в направлении слева направо будут составлять, соответственно,  $l_3$ ,  $l_2$  и  $l_1$  (см. рис. 1.111). При этом, конечно, шарики реально не могут поменяться местами, и их нумерация слева направо 1–2–3–4 в конечном состоянии сохранится.

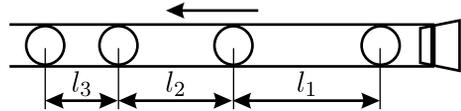


Рис. 1.111.

**1.112.** Из условия понятно, что процесс циклический. Найдём время между двумя последовательными отскоками шарика от нижней плоскости. Для начала проверим, долетает ли шарик до верхней плоскости.

1) Если  $v_0 \leq \sqrt{2gH}$ , то шарик не ударяется о верхнюю плоскость, и средняя сила, действующая на эту плоскость со стороны шарика, равна нулю:  $F_{в1} = 0$ . Время полёта шарика легко вычислить из соотношения:  $0 = v_0T - (gT^2/2)$ . Отсюда  $T = 2v_0/g$  (понятно, что решение  $T = 0$  не подходит). Поскольку средняя сила  $F_{\text{сред}} = \Delta p / \Delta t$ , то в данном случае для нижней плоскости она равна  $F_{н1} = 2mv_0/T = mg$ .

2) Если  $v_0 > \sqrt{2gH}$ , то шарик долетает до верхней плоскости с ненулевой скоростью. Найдём время  $\tau$ , которое затрачивает шарик

на полёт от нижней плоскости до верхней:  $H = v_0\tau - (g\tau^2/2)$ . Отсюда  $\tau_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$  и  $\tau_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gH}}{g}$ . Понятно, что нас интересует время  $\tau_1$ , поскольку  $\tau_2$  — это время, которое шарик затратил бы на то, чтобы вначале подняться до максимальной высоты без соударения с верхней плоскостью, а затем опуститься обратно до высоты  $H$ . Поскольку при достижении высоты  $H$  скорость шарика равна  $v_H = \sqrt{v_0^2 - 2gH}$ , а время, которое он затрачивает на один цикл «нижняя плоскость — верхняя плоскость — нижняя плоскость», равно  $2\tau_1$ , то теперь можно вычислить средние силы, действующие на плоскости:

$$F_{н2} = \frac{2mv_0}{2\tau_1} = mg \frac{v_0}{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}},$$

$$F_{в2} = \frac{2mv_H}{2\tau_1} = mg \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gH}}{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gH}}.$$

Видно, что разность этих средних сил, как и в первом случае, равна  $mg$ .

**1.113.** Рассмотрим вначале процесс соударения одинаковых точечных упругих шариков между собой или со стенками. В первом случае шарики, как уже было указано выше в решении задачи 1.111, просто обмениваются скоростями, а во втором — меняют направление скорости на противоположное. Так как нас совершенно не интересует движение отдельно взятого шарика, то мы можем считать, что они свободно проходят друг через друга. Тогда движение каждого точечного шарика циклично с периодом  $T = 2L/v_0$ , и средняя сила  $F_{\text{сред}}$ , действующая на стенку со стороны одного шарика, равна  $F_{\text{сред}} = 2mv_0/T = mv_0^2/L$ . Всего за цикл происходит  $N$  соударений, значит, средняя сила  $F$ , действующая на стенку со стороны всех шариков, равна  $F = NF_{\text{сред}} = N \cdot mv_0^2/L$ . Учтём теперь, что шары имеют конечный размер. Нетрудно видеть, что вышеизложенное остаётся справедливым, если считать шары точечными, а расстояние между стенками  $L$  — укороченным на величину  $2R \cdot N$ . Поэтому

$$F = \frac{mv_0^2 N}{L - 2RN}.$$

**1.114\*.** Сначала докажем, что если шарик поворачивает на угол  $\alpha$ , меньший  $180^\circ$ , за два удара, то при заданной начальной скорости его конечная скорость будет максимальной в том случае, если при каждом ударе он поворачивал на угол, равный  $\alpha/2$ .

Пусть до первого удара первый шарик двигался со скоростью  $v$ . Тогда после этого удара первый шарик будет двигаться с некоторой скоростью  $v_1$ , направленной под углом  $\varphi$  к направлению первоначального движения, а второй шарик, который до удара покоился, будет двигаться со скоростью  $v_2$ , направленной под углом  $\psi$  к направлению первоначального движения первого шарика. Тогда из закона сохранения импульса для абсолютно упругого удара движущегося шарика о неподвижный шарик имеем:

$$mv = mv_1 \cos \varphi + mv_2 \cos \psi, \quad mv_1 \sin \varphi = mv_2 \sin \psi,$$

причём  $\varphi + \psi = \pi/2$ , так как после абсолютно упругого нелобового удара движущегося шарика о такой же покоящийся скорости разлетающихся шаров, как уже отмечалось выше в решении задачи 1.109, направлены под углом  $90^\circ$  друг к другу.

Отсюда находим скорость первого шара после удара:  $v_1 = v \cos \varphi$ . Это означает, что поворот вектора скорости налетающего шара на угол  $\varphi$  сопровождается уменьшением величины скорости в  $\cos \varphi$  раз. Значит, после двух последовательных соударений скорость налетающего шарика будет равна  $u^{(2)} = v \cos \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi)$  (напомним, что шарик поворачивает за два удара на угол  $\alpha$ ). Для того, чтобы скорость шарика  $u^{(2)}$  после двух ударов была максимальна, необходимо, чтобы было максимальным произведение  $\cos \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ . По известной формуле:

$$u^{(2)} = v \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \frac{v}{2} (\cos(\alpha - 2\varphi) + \cos \alpha).$$

Ясно, что это выражение будет иметь максимальное значение при  $\cos(\alpha - 2\varphi) = 1$ , откуда  $\varphi = \alpha/2$ , что и требовалось доказать.

Рассматривая таким же способом каждую пару последовательных ударов, приходим к выводу, что для максимизации конечной скорости при каждом ударе налетающий шар должен поворачивать на один и тот же угол  $\varphi$ . Так как по условию после  $N - 1 = 100$  соударений этот шар начинает двигаться в противоположном направлении, то

$$\varphi = \frac{\pi}{N - 1} = \frac{\pi}{100}.$$

После сотого соударения шар будет иметь скорость

$$u^{(100)} = v (\cos \varphi)^{N-1} = v \left( \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \right)^{N-1}.$$

Учитывая, что при  $x \ll 1$  и  $nx \ll 1$  справедливы приближённые формулы:  $\sin x \approx x$  и  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , окончательно получаем:

$$\begin{aligned} u_{\max}^{(100)} &= v \left( \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \right)^{N-1} \approx v \left( \sqrt{1 - \varphi^2} \right)^{N-1} \approx v \left( 1 - \frac{N-1}{2} \varphi^2 \right) = \\ &= v \left( 1 - \frac{\pi^2}{2(N-1)} \right) = v \left( 1 - \frac{\pi^2}{200} \right) \approx 0,95v. \end{aligned}$$

**1.115\***. Пусть масса первого (самого тяжёлого) шарика равна  $m$ . Тогда масса второго шарика равна  $(1-\alpha)m$ , третьего —  $(1-\alpha)^2m$ , и так далее (здесь  $\alpha = 0,01$ ). Пусть после столкновения первый шарик приобрёл скорость  $u$ , а второй начал двигаться со скоростью  $v_1$ . Запишем законы сохранения импульса и энергии для столкновения первого и второго шариков:

$$mv = mu + (1-\alpha)mv_1, \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + \frac{(1-\alpha)mv_1^2}{2}.$$

Отсюда скорость первого шарика равна  $u = \frac{\alpha}{2-\alpha}v > 0$ , а скорость второго шарика (после первого соударения)  $v_1 = \frac{2}{2-\alpha}v > u > 0$ .

Таким образом, после первого соударения оба шарика будут двигаться в направлении исходного движения первого шарика, причём второй, более лёгкий шарик будет двигаться быстрее первого, более тяжёлого. Поскольку шарики разложены в порядке убывания их масс, то аналогичные рассуждения справедливы для любой пары сталкивающихся шариков. Поэтому любой более тяжёлый шарик, столкнувшись со следующим за ним более лёгким, впоследствии не будет влиять на дальнейшее движение всех остальных более лёгких шариков. Вследствие этого при решении задачи можно просто последовательно рассматривать соударения в цепочке шариков.

Первое соударение шариков произойдёт через время  $\Delta t_0 = L/v$ . Так как массы любых двух соседних шариков отличаются в одинаковое число раз, то аналогичная формула справедлива для любого соударения. Поэтому скорость третьего шарика (после второго соударения) равна  $v_2 = \frac{2}{2-\alpha}v_1 = \left( \frac{2}{2-\alpha} \right)^2 v$ , скорость четвёртого шарика (после третьего соударения)  $v_3 = \frac{2}{2-\alpha}v_2 = \left( \frac{2}{2-\alpha} \right)^3 v$ , и так далее. Следова-

тельно, промежуток времени между соударениями  $(n + 1)$ -го и  $(n + 2)$ -го шариков равен

$$\Delta t_n = \frac{L}{v_n} = \frac{L}{v} \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^n,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 2$ , а время, через которое начнёт двигаться последний шарик, равно сумме всех промежутков  $\Delta t_n$ :

$$T = \frac{L}{v} + \frac{L}{v} \cdot \frac{2 - \alpha}{2} + \frac{L}{v} \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^2 + \dots + \frac{L}{v} \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^{N-2}.$$

Последняя сумма представляет собой сумму  $N - 1$  члена геометрической прогрессии с первым членом  $a = L/v$  и знаменателем  $q = \frac{2 - \alpha}{2} < 1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} T &= \frac{a(1 - q^{N-1})}{1 - q} = \frac{L}{v} \cdot \frac{\left( 1 - \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^{N-1} \right)}{1 - \frac{2 - \alpha}{2}} = \\ &= \frac{2L}{\alpha v} \left( 1 - \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^{N-1} \right) \approx \frac{2L}{\alpha v} = \frac{2 \cdot 1 \text{ м}}{0,01 \cdot 1 \text{ м/с}} = 200 \text{ с}. \end{aligned}$$

В последней формуле учтено, что  $q^{N-1} = \left( \frac{2 - \alpha}{2} \right)^{N-1} = 0,995^{2001} \approx \approx 4,4 \cdot 10^{-5} \ll 1$ .

Отметим, что последний шарик после соударения приобретёт скорость  $v_{N-1} = \left( \frac{2}{2 - \alpha} \right)^{N-1} v = \frac{v}{q^{N-1}} \approx 22,8 \text{ км/с}$ , что превышает вторую космическую скорость!

**1.116\***. Рассмотрим процесс столкновения шарика массой  $m_1$ , движущегося с некоторой скоростью  $u$ , с покоящимся шариком массой  $m_2$ . Из законов сохранения импульса и энергии имеем:

$$m_1 u = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad \frac{m_1 u^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Здесь  $u_1$  и  $u_2$  — скорости первого и второго шариков после столкновения. Из написанных уравнений найдём скорость второго шарика после столкновения:

$$u_2 = \frac{2m_1 u}{m_1 + m_2}. \quad (1)$$

Так как в нашем случае массы шариков почти равны ( $|m_1 - m_2| = \delta m \ll m_1, m_2$ ), то скорость шарика, который перед столкновением покоился, после столкновения незначительно отличается от скорости налетающего шарика, который, в свою очередь, после столкновения практически полностью теряет свою скорость. Поэтому после любого соударения самую большую скорость будет иметь самый удалённый от конца стержня движущийся шарик. Для того, чтобы найти, как изменяется с течением времени его скорость, рассмотрим процесс последовательных соударений шариков с порядковыми номерами  $2i + 1$ ,  $2i + 2$  и  $2i + 3$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Пусть в некоторый момент времени  $(2i + 1)$ -й шарик был самым быстрым и имел скорость  $v_{2i+1} = v$ . На основании (1) имеем, что скорость  $(2i + 2)$ -го шарика после столкновения равна:

$$v_{2i+2} = \frac{2m}{m + m + \delta m} v_{2i+1} = \frac{m}{m + (\delta m/2)} v_{2i+1},$$

а скорость  $(2i + 3)$ -го шарика после столкновения:

$$v_{2i+3} = \frac{2(m + \delta m)}{m + \delta m + m} v_{2i+2} = \frac{m + \delta m}{m + (\delta m/2)} v_{2i+2}.$$

Объединяя эти соотношения, получаем:

$$v_{2i+3} = \frac{m(m + \delta m)}{(m + (\delta m/2))^2} v_{2i+1}.$$

Таким образом, скорость самого быстрого шарика в процессе двух последовательных соударений изменяется на

$$\Delta v = v_{2i+3} - v_{2i+1} = -\frac{(\delta m)^2}{4(m + (\delta m/2))^2} v_{2i+1} \approx -\left(\frac{\delta m}{2m}\right)^2 v.$$

Здесь мы пренебрегли величиной  $\delta m/2$  по сравнению с  $m$ .

Итак, мы видим, что скорость самого быстрого шарика уменьшается, и её изменение на  $\Delta v$  происходит за удвоенное время между последовательными столкновениями  $\Delta t \approx 2l_0/v$ . Поэтому

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\left(\frac{\delta m}{2m}\right)^2 \frac{v^2}{2l_0}.$$

Учитывая, что  $\Delta v \ll v$ , получаем:

$$-\frac{\Delta v}{v^2} \approx \Delta \left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{2l_0} \left(\frac{\delta m}{2m}\right)^2 \Delta t,$$

откуда

$$t = \frac{8m^2 l_0}{(\delta m)^2} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Эта формула даёт зависимость скорости  $v$  самого быстрого шарика от времени  $t$ . Значит, скорость самого быстрого шарика станет равной  $\frac{3}{4}v_0$  через время

$$\tau = \frac{8m^2 l_0}{(\delta m)^2} \left( \frac{1}{3v_0/4} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{8l_0}{3v_0} \left( \frac{m}{\delta m} \right)^2.$$

**1.117.** Пусть  $\mu$  — масса угля, которая грузится на поезд за единицу времени. Тогда масса поезда со временем возрастает по закону  $M = m + \mu t$ . Из закона изменения импульса, записанного для поезда, имеем:  $\Delta((m + \mu t)v) = F\Delta t$ , где  $F$  — искомая сила тяги локомотива. Отсюда получаем:  $(m + \mu t)\Delta v + \mu v\Delta t = F\Delta t$ , и

$$(m + \mu t) \frac{\Delta v}{\Delta t} + \mu v = F. \quad (1)$$

Так как  $v = \frac{v_0 t}{t + t_0}$ , то, дифференцируя, получаем:  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 t_0}{(t + t_0)^2}$ . Под-

ставляя в (1) выражения для  $v$  и  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ , находим:

$$F = (m + \mu t) \frac{v_0 t_0}{(t + t_0)^2} + \frac{\mu v_0 t}{t + t_0}.$$

Так как в условии сказано, что сила тяги локомотива постоянна, то последнее выражение должно быть справедливо для любого момента времени  $t$ , в том числе и для  $t = 0$ . Поэтому, полагая  $t = 0$ , получаем:

$$F = \frac{mv_0}{t_0}.$$

Существует и другой путь решения. Из (1) следует:  $(m + \mu t) \frac{\Delta v}{\Delta t} = F - \mu v$ . Ясно, что установившаяся скорость поезда (при  $t \rightarrow \infty$ ) соответствует  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$ . С учётом этого получаем, что

$$v_{t \rightarrow \infty} = \left( \frac{v_0 t}{t_0 + t} \right)_{t \rightarrow \infty} = v_0 = \frac{F}{\mu}, \quad (2)$$

и, следовательно,  $F = \mu v_0$ . С другой стороны, с учётом (2) ускорение поезда в начальный момент времени равно:

$$\left( \frac{\Delta v}{\Delta t} \right)_{t=0} = \frac{F}{m} = \left( \frac{\Delta}{\Delta t} \left( \frac{v_0 t}{t_0 + t} \right) \right)_{t=0} = \frac{v_0}{t_0} = \frac{F}{\mu t_0},$$

откуда  $\mu = m/t_0$ . Подставляя это выражение для  $\mu$  в (2), получаем прежний ответ.

**1.118.** Поскольку в начальный момент времени кольцо покоится, то начальная скорость бусинки направлена по касательной к кольцу. Направим ось  $X$  системы координат лабораторной системы отсчёта  $S$  вдоль скорости бусинки  $v$ , а ось  $Y$  этой системы координат проведём через бусинку и центр кольца. Перейдём в систему отсчёта  $S'$ , связанную с центром масс кольца и бусинки и договоримся, что оси  $X'Y'$  сонаправлены с осями  $XY$ . Эта система отсчёта движется относительно системы  $S$  со скоростью  $u = \frac{mv}{m+M}$ . В системе отсчёта, связанной с центром масс, бусинка и центр кольца совершают равномерное вращение по окружностям, центры которых совпадают с центром масс. При этом в начальный момент времени проекции скорости бусинки на оси  $X'$  и  $Y'$  равны соответственно

$$v_{X'}(0) = v - u = v - \frac{mv}{m+M} = \frac{Mv}{m+M} \quad \text{и} \quad v_{Y'}(0) = 0.$$

Значит, проекции скорости бусинки на оси  $X'$  и  $Y'$  зависят от времени  $t$  следующим образом:

$$v_{X'} = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t, \quad v_{Y'} = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t,$$

где  $\omega$  — некоторая частота.

Возвращаясь в систему отсчёта  $S$ , получим проекции скорости бусинки на оси  $X$  и  $Y$ :

$$v_X = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t + \frac{mv}{m+M}, \quad v_Y = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t.$$

Кинетическая энергия бусинки равна

$$W = \frac{m}{2} (v_X^2 + v_Y^2) = \frac{m}{2} \left( \frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \cos^2 \omega t + \frac{2mMv^2}{(m+M)^2} \cos \omega t + \frac{m^2 v^2}{(m+M)^2} + \frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \sin^2 \omega t \right) =$$

$$= \frac{mv^2}{2(m+M)^2} (M^2 + m^2 + 2mM \cos \omega t).$$

Она становится минимальной в тот момент времени, когда косинус принимает значение  $-1$ . Следовательно,

$$W_{\min} = \frac{mv^2}{2} \left( \frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

**1.119\***. В системе отсчёта, движущейся вместе со снарядом, в соответствии с законом сохранения импульса скорости осколков сразу после взрыва одинаковы:  $\vec{v}_{1c} = -\vec{v}_{2c}$ . В неподвижной системе отсчёта скорости первого и второго осколков равны  $\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_{1c}$  и  $\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{v}_{2c}$  соответственно (см. рис. 1.119). Согласно условию задачи,

$$\Delta W = \frac{mv_1^2}{4} + \frac{mv_2^2}{4} - \frac{mv^2}{2}.$$

Из записанных соотношений получаем:  $v_{1c}^2 = 2\Delta W/m$ .

Обозначим через  $\alpha$  угол разлёта осколков, а через  $\beta$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{v}_{1c}$ .

Тогда по теореме косинусов (см. рис. 1.119)

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v^2 + v_{1c}^2 + 2vv_{1c} \cos \beta, \\ v_2^2 &= v^2 + v_{1c}^2 - 2vv_{1c} \cos \beta, \\ (2v_{1c})^2 &= v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha, \end{aligned}$$

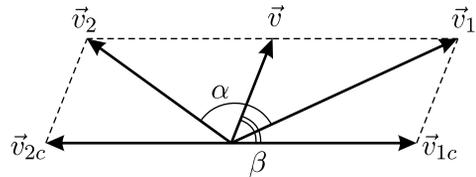


Рис. 1.119.

откуда получаем:

$$\cos \alpha = \frac{v^2 - v_{1c}^2}{\sqrt{(v^2 + v_{1c}^2)^2 - 4v^2v_{1c}^2 \cos^2 \beta}}.$$

Максимальный угол разлёта осколков  $\alpha_{\max}$  лежит в пределах от 0 до  $\pi$ , а  $\cos \alpha_{\max}$  — в пределах от 1 до  $-1$ . Если  $v < v_{1c} = \sqrt{2\Delta W/m}$ , то из полученной формулы следует, что  $\cos \alpha < 0$ , и  $\alpha_{\max} = \pi$  достигается при  $\beta = 0$ , то есть осколки летят в разные стороны вдоль первоначального направления полёта снаряда. Если  $v = v_{1c}$ , то  $\alpha = \pi/2$  при всех  $\beta$ , кроме  $\beta = 0$ , когда один из осколков останавливается ( $v_2 = 0$ ), и угол разлёта не определён. Если же  $v > v_{1c} = \sqrt{2\Delta W/m}$ , то  $\cos \alpha > 0$ , и  $\alpha_{\max}$  достигается при минимальном значении  $\cos \alpha$ , то есть при  $\beta = \pi/2$ . При этом

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{v^2 - v_{1c}^2}{v^2 + v_{1c}^2} = \frac{mv^2 - 2\Delta W}{mv^2 + 2\Delta W}.$$

**1.120\***. Введём прямоугольную систему координат с началом в нижнем гвозде и рассмотрим движение шарика после того, как его отпустили. Сначала он движется по окружности радиусом  $L$  с центром в верхнем гвозде. Затем, после того, как нить зацепится за нижний гвоздь, шарик движется по окружности радиусом  $(L - l)$  с центром в нижнем гвозде. Далее, в некоторый момент времени сила натяжения нити обращается в ноль, и шарик начинает двигаться по параболе. Он перелетит через нижний гвоздь в том случае, если парабола пересекает ось  $y$  выше гвоздя. На рисунке 1.120 показан предельный случай, соответствующий минимально возможной длине  $l$ , при которой шарик ещё перелетает через гвоздь. Пусть в тот момент, когда шарик начинает двигаться по параболе, нить составляет с горизонтом угол  $\alpha$ . Уравнение движения шарика для этого момента времени имеет вид:

$$\frac{mv^2}{L-l} = mg \sin \alpha,$$

а закон сохранения энергии (за ноль потенциальной энергии принят уровень, где вбит нижний гвоздь):

$$\frac{mv^2}{2} = mg(l - (L-l) \sin \alpha).$$

Отсюда находим, что  $\sin \alpha = \frac{2l}{3(L-l)}$  и  $v = \sqrt{2gl/3}$ .

Учитывая, что в рассматриваемый момент времени вектор скорости шарика перпендикулярен нити, запишем закон движения шарика по параболе:

$$\begin{aligned} x &= (L-l) \cos \alpha - v \sin \alpha \cdot t, \\ y &= (L-l) \sin \alpha + v \cos \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Условие того, что шарик перелетит через гвоздь, есть  $y > 0$  при  $x = 0$ .

Из первого уравнения для времени полёта шарика до гвоздя имеем:

$t = \frac{(L-l) \cos \alpha}{v \sin \alpha}$ . Подставляя  $t$  и  $v$  в выражение для  $y$ , получаем:  $4l \sin \alpha > 3(L-l) \cos^2 \alpha$ . Отсюда, с учётом выражения для  $\alpha$ , окончательно находим:  $l > (2\sqrt{3} - 3)L \approx 0,46L$ .

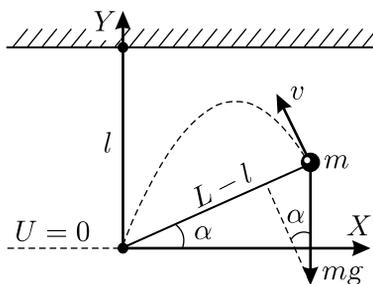


Рис. 1.120.

**1.121\***. Минимальная скорость маленького тела в момент его падения на плоскость достигается при броске этого тела с минимальной начальной механической энергией. Нужно правильно выбрать высоту точки броска и скорость тела — ясно, что оптимальная траектория должна почти касаться полусферы в некоторой (пока неизвестной) точке (см. рис. 1.121). Обозначим начальную скорость тела через  $v$ , скорость в точке касания — через  $u$ , высоту точки броска над плоскостью — через  $H$ . Пусть траектория почти касается полусферы на высоте  $h = R \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между горизонтом и радиусом полусферы, проведённым в точку касания. Ясно, что вектор  $\vec{u}$  направлен по касательной к полусфере, то есть перпендикулярно указанному радиусу, и составляет такой же угол  $\alpha$  с вертикалью. Горизонтальная компонента скорости тела во время полёта постоянна, отсюда  $u = v / \sin \alpha$ . Время полёта до точки касания  $t = R \cos \alpha / v$ , за это время вертикальная компонента скорости возрастает на  $gt$ , тогда  $u \cos \alpha = gt = gR \cos \alpha / v$ . Из написанных соотношений получаем:  $v^2 = gR \sin \alpha$ .

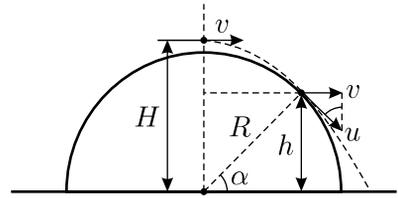


Рис. 1.121.

При движении тела от точки броска до точки касания среднее значение вертикальной проекции его скорости равно  $(u \cos \alpha) / 2$ . Тогда

$$H - h = \frac{u \cos \alpha}{2} t = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \frac{R \cos \alpha}{v} = \frac{R \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Отсюда

$$H = R \sin \alpha + \frac{R \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha}.$$

Запишем теперь выражение для полной механической энергии тела массой  $m$  в точке броска:

$$\begin{aligned} E &= mgH + \frac{mv^2}{2} = mgR \left( \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha} \right) + \frac{mgR \sin \alpha}{2} = \\ &= \frac{mgR}{2} \cdot \frac{3 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{mgR}{2} \left( 2 \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = \\ &= \frac{mgR}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{2} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{2} \sin \alpha} \right). \end{aligned}$$

В последних скобках стоит сумма обратных друг другу величин, которая, как известно, не может быть меньше 2. Минимальное значение этой суммы достигается тогда, когда её слагаемые одинаковы и

равны 1. Таким образом,  $\sin \alpha_{\min} = 1/\sqrt{2}$ , и минимальная энергия соответствует углу касания  $45^\circ$  и равна  $E_{\min} = \sqrt{2}mgR$ . В момент падения тела на плоскость его потенциальная энергия равна нулю. Следовательно, согласно закону сохранения механической энергии, минимальная скорость тела  $V$  при падении определяется из соотношения:  $mV^2/2 = E_{\min} = \sqrt{2}mgR$ , откуда  $V = \sqrt{2\sqrt{2}gR}$ .

Отметим, что высота, с которой должен производиться бросок, равна  $H = \frac{3R}{2\sqrt{2}} \approx 1,06R$ , то есть чуть больше радиуса полусферы.

**1.122.** Обозначим коэффициент жёсткости верёвки длиной  $L$  через  $k$ . Тогда  $k = T/(\alpha L)$ , поскольку  $T$  — это сила, которая растягивает верёвку на длину  $\Delta L = \alpha L$ .

Рассмотрим схему испытания верёвки на прочность при максимально возможной массе груза  $m$ . Упав с высоты  $2L$ , этот груз растянул верёвку до максимального удлинения  $\Delta L = \alpha L$  и остановился. При этом потенциальная энергия груза в поле силы тяжести уменьшилась на величину  $\Delta U_1 = mgL(2 + \alpha)$ , а потенциальная энергия, запасённая в упругой верёвке, увеличилась на  $\Delta U_2 = k(\alpha L)^2/2 = T\alpha L/2$ . Поскольку и в верхней, и в нижней точке кинетическая энергия груза равна нулю, то  $\Delta U_1 = \Delta U_2$ , то есть  $mgL(2 + \alpha) = T\alpha L/2$ . Отсюда масса груза  $m = \frac{T\alpha}{2g(2 + \alpha)} \approx 125$  кг.

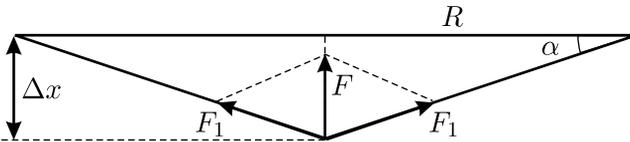


Рис. 1.123.

**1.123\*.** Пусть сетка, закреплённая на обруче радиусом  $R$ , состоит из  $N$  радиальных нитей, а жёсткость каждой из них равна  $k$ . При смещении центра сетки вниз на расстояние  $\Delta x \ll R$  сила упругости  $F$ , действующая со стороны сетки на находящегося в её центре гимнаста, в силу центральной симметрии направлена вертикально вверх (см. рис. 1.123) и равна

$$\begin{aligned}
 F &= NF_1 \sin \alpha \approx NF_1 \frac{\Delta x}{R} = Nk \left( \sqrt{R^2 + (\Delta x)^2} - R \right) \frac{\Delta x}{R} = \\
 &= Nk \left( \left( 1 + \left( \frac{\Delta x}{R} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right) \Delta x \approx \frac{Nk(\Delta x)^3}{2R^2}
 \end{aligned}$$

(для преобразования квадратного корня использована формула, приведённая в условии задачи). Здесь  $F_1$  — сила упругости, действующая на гимнаста со стороны каждой из нитей. Из условия известно, что когда гимнаст лежит в центре сетки неподвижно, она прогибается на величину  $l$ . При этом действующая на гимнаста сила тяжести  $mg$  уравновешивается силой  $F$ . Значит, условие равновесия гимнаста имеет вид:

$$mg = \frac{Nkl^3}{2R^2}.$$

Рассмотрим далее падение гимнаста с высоты  $H$ . В момент времени перед падением его потенциальная энергия (относительно уровня ненатянутой сетки) была равна  $mgH$ . В момент же максимального прогиба сетки она складывалась из энергии в поле силы тяжести  $-mgL$  (она отрицательна) и энергии упругой деформации сетки, которая равна

$$\begin{aligned} E_{\text{деф.}} &= \frac{Nk}{2} \left( \sqrt{R^2 + L^2} - R \right)^2 = \\ &= \frac{NkR^2}{2} \left( \left( 1 + \left( \frac{L}{R} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right)^2 \approx \frac{NkL^4}{8R^2}. \end{aligned}$$

С учётом этого, из закона сохранения механической энергии получаем:  $mgH = -mgL + \frac{NkL^4}{8R^2}$ . Отсюда, используя записанное ранее условие равновесия, окончательно находим искомую высоту:

$$H = \left( \frac{L^3}{4l^3} - 1 \right) L.$$

**1.124\***. Направим координатную ось  $X$  влево, а координатную ось  $Y$  вверх (рис. 1.124). Через малое время  $\Delta t$  после того, как систему предоставили самой себе, расстояние  $x$  практически не успевает измениться, проекции скоростей центра обруча и шарика на ось  $X$  равны  $V$  и  $v$ , а проекции их ускорений на эту же ось равны  $A = \Delta V/\Delta t$  и  $a = \Delta v/\Delta t$ . Энергия рассматриваемой системы через указанный промежуток времени складывается из кинетических энергий поступательного

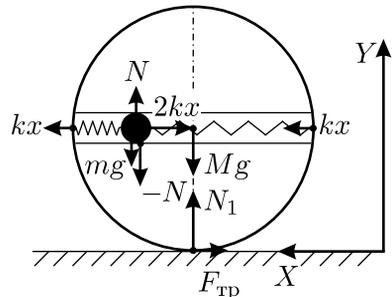


Рис. 1.124.

$W_{\text{пост}} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$  и вращательного  $U_{\text{вр}} = \frac{MV^2}{2} + \frac{m(V/R)^2 x^2}{2}$  движений обруча и шарика, потенциальной энергии пружин  $U_{\text{пр}} = 2 \cdot \frac{kx^2}{2}$  и шарика в поле силы тяжести  $U_{\text{тяж}} = mgy$ , где  $y$  — высота шарика над поверхностью. Изменения кинетической и потенциальной энергий системы за время  $\Delta t$  равны, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{\Delta t} &= \frac{\Delta W_{\text{пост}}}{\Delta t} + \frac{\Delta W_{\text{вр}}}{\Delta t} = \\ &= MV \frac{\Delta V}{\Delta t} + mv \frac{\Delta v}{\Delta t} + MV \frac{\Delta V}{\Delta t} + m \left(\frac{x}{R}\right)^2 V \frac{\Delta V}{\Delta t} = \\ &= AV \left(2M + m \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) + mav; \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta U_{\text{пр}}}{\Delta t} + \frac{\Delta U_{\text{тяж}}}{\Delta t} = 2kx \frac{\Delta x}{\Delta t} + mg \frac{\Delta y}{\Delta t} = 2kx(v - V) - mgx \frac{V}{R},$$

где  $\Delta x/\Delta t = v - V$  и учтено, что  $\Delta y/\Delta t < 0$ . В соответствии со вторым законом Ньютона,  $ma = -2kx$  (сразу после того, как систему предоставили самой себе, ускорение шарика направлено вправо — см. рисунок). С учётом этого из закона сохранения механической энергии  $\Delta W + \Delta U = 0$  получаем, что

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} + \frac{\Delta U}{\Delta t} = AV \left(2M + m \left(\frac{x}{R}\right)^2\right) - 2kxV - mgx \frac{V}{R} = 0.$$

Отсюда искомое ускорение центра обруча в начальный момент времени

$$A = xR \frac{mg + 2kR}{2MR^2 + mx^2}.$$

**1.125\***. Обозначим через  $2l$  расстояние между гвоздями,  $\alpha$  — угол наклона нити к горизонту в некоторый момент времени,  $T$  — силу её натяжения,  $y_1$  и  $y_2$  — смещения грузов 1 и 2 от начального положения,  $v_1$  и  $v_2$  — их скорости,  $a_1$  и  $a_2$  — ускорения (см. рис. 1.125). Запишем уравнения кинематической связи для грузов 1 и 2:

$$y_1 = l \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = 2 \left( \frac{l}{\cos \alpha} - l \right), \quad (1)$$

$$v_2 = 2v_1 \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\Delta \alpha = \Delta y_1 \frac{\cos \alpha}{l/\cos \alpha}, \quad \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v_1}{l} \cos^2 \alpha,$$

$$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = 2v_1 \cos \alpha \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} + 2 \sin \alpha \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = 2 \frac{v_1^2}{l} \cos^3 \alpha + 2a_1 \sin \alpha. \quad (3)$$

Запишем закон сохранения механической энергии для грузов:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} - mgy_1 + mgy_2 = 0. \quad (4)$$

Продифференцируем это соотношение по времени и разделим на массу груза  $m$ :

$$v_1 a_1 + v_2 a_2 - g(v_1 - v_2) = 0. \quad (5)$$

Равновесие системы определяется соотношением  $2T_0 \sin \alpha_0 = T_0$ , то есть  $\sin \alpha_0 = 1/2$ , поэтому  $v_{10} = v_{20}$ , как следует из (2). При этом из соотношения (5) следует, что  $a_{10} = -a_{20}$ , а из (4) — что  $v_{10}^2 = g(y_1 - y_2)$ . Тогда из соотношения (3) получаем, что  $a_{10} = -\frac{v_{10}^2}{l} \cos^3 \alpha_0$ . Из (4) и (1) с учётом равенства  $v_{10} = v_{20}$  следует, что  $\frac{v_{10}^2}{l} = \frac{g}{\cos \alpha_0} (\sin \alpha_0 - 2 + 2 \cos \alpha_0)$ . Отсюда окончательно получаем:

$$a_{10} = -a_{20} = -g(\sin \alpha_0 - 2 + 2 \cos \alpha_0) \cos^2 \alpha_0 = -\frac{3(2\sqrt{3}-3)}{8}g \approx -0,174g.$$

При этом оба вектора ускорений грузов направлены вверх! Необычность данной механической системы состоит в том, что в момент прохождения положения равновесия ускорения тел отличны от нуля.

**1.126\*.** Для решения задачи воспользуемся законом сохранения механической энергии. При падении тела  $m$  в поле силы тяжести его потенциальная энергия уменьшается, а кинетическая — увеличивается, пока тело не зацепится за нить. Далее одновременно с его опусканием происходит подъём и ускорение двух грузов массой  $M$ . Скорости тела и грузов связаны между собой, поскольку нить по условию задачи нерастяжима. Если тело  $m$  сместилось вместе с нитью вниз на расстояние  $x$  от положения, когда нить горизонтальна, то скорость грузов  $v$  и скорость тела  $u$  связаны соотношением:  $u = \frac{v}{x/\sqrt{l^2 + x^2}} \approx \frac{vl}{x}$ .

Здесь использовано то обстоятельство, что, поскольку масса тела мала по сравнению с массами грузов, и оно падает на нить с небольшой высоты  $h$ , то смещение тела  $x$  будет также невелико по сравнению с  $h$  и, тем более, с  $l$ , то есть  $x \ll h \ll l$ . При этом из закона сохранения энергии следует, что

$$mg(h+x) = 2Mg(\sqrt{x^2 + l^2} - l) + \frac{mu^2}{2} + 2 \cdot \frac{Mv^2}{2},$$

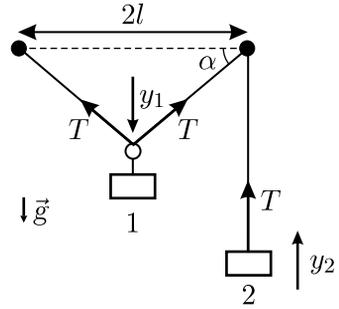


Рис. 1.125.

откуда

$$mg(h+x) - Mg \cdot \frac{x^2}{l} \approx \frac{m(vl/x)^2}{2} + 2 \cdot \frac{Mv^2}{2} = v^2 \left( M + \frac{m(l/x)^2}{2} \right),$$

$$v^2 \approx \frac{mg(h+x) - (Mgx^2/l)}{M + \frac{m(l/x)^2}{2}} \approx \frac{mgh - (Mgl \cdot x^2/l^2)}{M + \frac{m(l/x)^2}{2}}.$$

Обозначим малый параметр  $z = x^2/l^2$ . Теперь задача свелась к отысканию максимума выражения:

$$v^2 = \frac{mgh - Mglz}{M + (m/(2z))},$$

для чего нужно приравнять нулю его производную по  $z$ . Это даёт уравнение:  $2M^2l \cdot z^2 + 2mMl \cdot z - m^2h = 0$ . Решая его, получим, что  $z \approx mh/(2Ml)$ . Следовательно, искомая максимальная скорость движения грузов будет равна:  $v \approx h\sqrt{\frac{mg}{2Ml}}$ .

**1.127\***. Изобразим на рисунке нить в тот момент времени, когда она ещё не порвалась, но вот-вот порвётся. Пусть в этот момент расстояние от проволочного грузика до линии, вдоль которой перемещаются концы нити, равно  $x$ , а скорость грузика равна  $u$ . Так как нить нерастяжима, то проекция скорости грузика и проекция скорости конца нити на направление нити должны быть одинаковы. Следовательно,

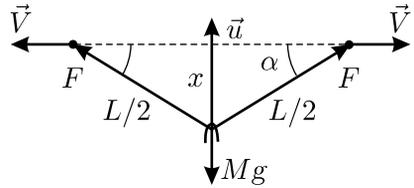


Рис. 1.127.

$$V \cos \alpha = u \sin \alpha, \quad \text{то есть} \quad u = V \operatorname{ctg} \alpha = \frac{V \sqrt{(L/2)^2 - x^2}}{x}.$$

Из условия задачи видно, что  $F \gg Mg$ . Поэтому угол, который составляют две половинки нити в момент перед разрывом, близок к  $180^\circ$ , а угол  $\alpha$  мал. Это означает, что  $x^2 \ll (L/2)^2$ , то есть  $u \approx \frac{VL}{2x}$ . Изменение расстояния  $x$  на малую величину  $\Delta x$  приведёт к тому, что скорость  $u$  увеличится на  $\Delta u$ . При этом изменения скорости  $u$  и величины  $x$  связаны друг с другом соотношением:

$$\Delta u = \frac{VL}{2(x - \Delta x)} - \frac{VL}{2x} = \frac{VL}{2} \cdot \frac{\Delta x}{x^2 - x\Delta x} \approx \frac{VL}{2x^2} \Delta x.$$

Разделим данное соотношение на величину малого промежутка времени  $\Delta t$ , за который эти изменения произошли, и учтём, что  $u = \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{VL}{2x}$ :

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx \frac{VL}{2x^2} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{V^2 L^2}{4x^3}.$$

В соответствии со вторым законом Ньютона ускорение  $\frac{\Delta u}{\Delta t}$  равно сумме всех действующих на груз сил, разделённой на его массу. Так как равнодействующая сил натяжения равна  $2F \sin \alpha = 4Fx/L$ , то

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx \frac{V^2 L^2}{4x^3} \approx \frac{1}{M} \left( \frac{4Fx}{L} - Mg \right).$$

Предположим, что не только  $F \gg Mg$ , но и  $\frac{4Fx}{L} \gg Mg$  (потом нужно будет обязательно проверить, выполняется ли на самом деле это неравенство!). В этом случае

$$\frac{V^2 L^2}{4x^3} \approx \frac{4Fx}{ML}, \quad \text{и} \quad x \approx \left( \frac{MV^2 L^3}{16F} \right)^{1/4} = 0,1 \text{ м.}$$

Неравенство  $\frac{4Fx}{L} = 1 \text{ Н} \gg Mg = 0,01 \text{ Н}$  действительно выполняется. Теперь можно определить скорость груза в момент разрыва нити:  $u \approx \frac{VL}{2x} \approx \left( \frac{FLV^2}{M} \right)^{1/4} = 10 \text{ м/с}$ . Следовательно, груз после разрыва нити взлетит на высоту  $h = \frac{u^2}{2g} \approx \frac{V}{2g} \sqrt{\frac{FL}{M}} = 5 \text{ м}$ .

**1.128.** Так как нить нерастяжима, то величины ускорений обоих грузов одинаковы. Поскольку блок и нить невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения  $T$  вдоль всей нити одинакова. Направим координатную ось вниз и запишем уравнения движения грузов с учётом того, что  $m_1 > m_2$ :

$$m_1 a = m_1 g - T, \quad -m_2 a = m_2 g - T.$$

Отсюда следует, что ускорение равно

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

В момент касания первого груза с плоскостью оба груза разогнутся до скорости

$$V = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

После этого груз  $m_1$  остановится (так как удар о плоскость абсолютно неупругий), а груз  $m_2$  полетит вверх со скоростью  $V$  и ускорением  $g$ , направленным вниз. Через некоторое время, достигнув максимальной высоты, груз  $m_2$  начнёт падать с ускорением  $g$  и снова натянет нить. В этот момент его скорость будет по величине той же, что и в начале полёта, но направлена она будет уже вниз. Поскольку нить неупругая, а блок невесомый, скорости обоих грузов после рывка выровняются:  $m_2V = (m_1 + m_2)V_1$ , откуда начальная скорость движения груза  $m_1$  вверх (а груза  $m_2$  — вниз) будет равна

$$V_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Ускорение грузов при дальнейшем их движении будет прежним, равным  $a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$ , а максимальная высота подъёма груза  $m_1$  составит

$$h_1 = \frac{V_1^2}{2a} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot 2gh \cdot \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{(m_1 + m_2)}{2g(m_1 - m_2)} = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h.$$

При дальнейшем движении в системе будут происходить те же процессы, но после каждого следующего удара о плоскость высота подъёма первого груза будет уменьшаться в  $(1 + (m_1/m_2))^2$  раз, так что  $h_1$  действительно является искомой максимальной высотой подъёма.

**1.129\***. Второй закон Ньютона для любой части невесомого тела записывается, как  $0 = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$ . Следовательно, силы, действующие в данный момент на невесомое тело, не могут зависеть от состояния его движения и, таким образом, совпадают с силами, действующими на это тело при его равновесии. Значит, для сил давления обоих тел на рычаг мы можем записать условие равенства моментов:  $N_1L = N_2l$ . Следовательно, для полных импульсов этих двух сил за всё время удара справедливо соотношение:  $p_1L = p_2l$ . В то же время, согласно закону изменения импульса, суммарный импульс сил, действующих на тело во время удара, равен изменению импульса тела; импульсом силы тяжести мы можем пренебречь из-за малой длительности удара.

Итак, мы можем записать соотношение для величин изменения импульсов тел:  $M(v + \sqrt{2gH})L = mvl$ , где  $v$  и  $u$  — скорости тел  $M$  и  $m$  сразу после удара. Отсюда  $v = \frac{m}{M} \cdot \frac{l}{L}u - \sqrt{2gH}$ . Так как тела абсолютно упругие, то из закона сохранения механической энергии следует, что  $MgH = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$ , откуда с учётом предыдущего соотношения получаем:

$$\frac{m^2}{2M} \left( \frac{l}{L} \right)^2 u^2 - m \frac{l}{L} \sqrt{2gH}u + \frac{mu^2}{2} = 0.$$

Таким образом, скорость тела массой  $m$  после удара будет равна

$$u = \sqrt{2gH} \cdot 2M \left/ \left( \frac{ML}{l} + \frac{ml}{L} \right) \right.,$$

а высота, на которую оно взлетит,

$$h = \frac{u^2}{2g} = 4H \left( M \left/ \left( \frac{ML}{l} + \frac{ml}{L} \right) \right. \right)^2.$$

**1.130.** Поскольку  $m \ll M$ , то при каждом столкновении шайбы с горкой ей передаётся лишь малая часть энергии шайбы, то есть шайба будет долго «снывать» между двумя горками, постепенно теряя скорость. В конце процесса, очевидно, практически вся начальная потенциальная энергия шайбы перейдёт в кинетическую энергию двух горок, которые будут разъезжаться с одинаковыми скоростями  $v$ :  $mgH = 2 \cdot \frac{Mv^2}{2}$ , откуда  $v = \sqrt{\frac{m}{M}gH}$ .

**1.131\*.** Найдём из энергетических соображений ускорение шнура  $a$  в данный момент времени. Приращение кинетической энергии шнура массой  $m$  за малый промежуток времени  $\Delta t$  равно

$$\Delta W = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \approx mv\Delta v = mva\Delta t.$$

Уменьшение его потенциальной энергии за то же время связано фактически с «перемещением» малого отрезка шнура длиной  $\Delta x = v\Delta t$  и массой  $(m/L)\Delta x$  сверху вниз на расстояние  $h = 4R$ , то есть  $\Delta U = \frac{m}{L}\Delta x \cdot gh = \frac{m}{L}v\Delta t \cdot g \cdot 4R$ . Из закона

сохранения механической энергии получаем:  $a = gh/L = 4gR/L = 2g/\pi$ .

Мысленно разрежем теперь шнурок в какой-нибудь точке на два куска. Очевидно, что если место разреза выбрано так, что ускорения

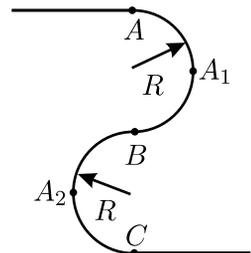


Рис. 1.131.

этих кусков совпадают, то сила натяжения шнура в данной точке равна нулю, и наоборот. Пусть длины кусков равны  $l'$  и  $l''$ , причём  $l' + l'' = L$ . Применяя найденную выше формулу для ускорения и подставляя в неё вместо  $h$  разности высот концов этих кусков  $h'$  и  $h''$ , получаем  $h'/l' = h''/l'' = h/L = 4R/L = 2/\pi$ . Легко видеть, что этому условию удовлетворяют точки  $A_1$ ,  $B$  и  $A_2$  (см. рис. 1.131).

**1.132.** Поместим начало системы координат в левый угол клина и направим ось  $X$  вправо по горизонтали. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — координаты вершущки клина до и после соскальзывания грузов, а  $x_0$  — расстояние по оси  $X$  от вершущки до центра масс клина. Так как при соскальзывании грузов координата центра масс всей системы  $X_{ц.м.}$  остаётся неизменной, то имеем уравнение:

$$\begin{aligned} (M + 2m)X_{ц.м.} &= \text{const} = M(x_1 + x_0) + 2mx_1 = \\ &= M(x_2 + x_0) + m(x_2 - h \operatorname{ctg} \alpha) + m(x_2 + h \operatorname{ctg} \beta). \end{aligned}$$

Из него для смещения клина получаем:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{m}{M + 2m} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta) h.$$

Заметим, что при  $\alpha < \beta$  клин смещается вправо.

**1.133\*.** В системе отсчёта, в которой горизонтальная скорость цилиндра равна нулю (см. рис. 1.133), смещение цилиндра по вертикали за малое время на  $\Delta y < 0$  вызывает смещения клиньев по горизонтали, равные  $\Delta y \operatorname{ctg} \alpha$  и  $-\Delta y \operatorname{ctg} \beta$ . Поскольку в неподвижной системе отсчёта центр цилиндра смещается по горизонтали ещё на некоторое расстояние

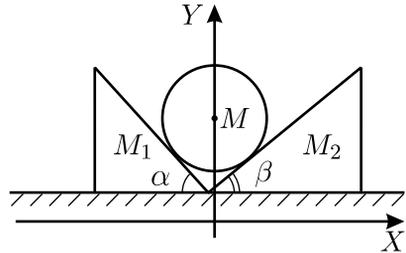


Рис. 1.133.

$\Delta x$ , то суммарные смещения клиньев относительно поверхности равны  $\Delta x_1 = \Delta x + \Delta y \operatorname{ctg} \alpha$  и  $\Delta x_2 = \Delta x - \Delta y \operatorname{ctg} \beta$ . Поэтому скорости левого и правого клиньев  $v_1$  и  $v_2$  и проекции скорости цилиндра  $v_x$  и  $v_y$  связаны соотношениями:  $v_1 = v_x + v_y \operatorname{ctg} \alpha$  и  $v_2 = v_x - v_y \operatorname{ctg} \beta$ . Проекция импульса данной системы тел на горизонтальное направление во время движения постоянна и равна нулю:  $M_1 v_1 + M_2 v_2 + M v_x = 0$ . Исключая  $v_x$  и  $v_y$  из написанных уравнений, получим, что отношение скоростей клиньев равно:

$$\frac{v_1}{v_2} = - \frac{M \operatorname{tg} \beta + M_2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{M \operatorname{tg} \alpha + M_1 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}.$$

Заметим, что контакт цилиндра с обоими клиньями сохраняется до момента его соприкосновения с горизонтальной поверхностью, и полученное отношение будет справедливо и после этого момента, когда скорости клиньев достигнут максимума и далее уже не будут изменяться.

**1.134\***. Рассмотрим соударение передней пары колёс с наклонной плоскостью. Поскольку удар неупругий, то в момент удара колёс о плоскость сохраняется проекция импульса тележки на эту плоскость:

$$2Mv \cos \alpha = Mv'_1 + Mv'_2 \cos \alpha,$$

где  $v'_1$  и  $v'_2$  — скорости передней и задней пар колёс после рассматриваемого удара. Поскольку длина стержня не меняется, то  $v'_1 \cos \alpha = v'_2$ , и  $v'_1 = \frac{2v \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$ . Далее передняя пара колёс тележки движется по наклонной плоскости, а задняя — по горизонтальной. Скорость передней пары колёс  $u_1$  перед вторым ударом, когда стержень располагается параллельно наклонной плоскости, можно найти из закона сохранения механической энергии, учитывая, что скорость задней пары колёс в этот момент направлена горизонтально и равна  $u_2 = u_1 / \cos \alpha$ :

$$\frac{M(v'_1)^2}{2} + \frac{M(v'_1 \cos \alpha)^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{M(u_1 / \cos \alpha)^2}{2} + Mgl \sin \alpha.$$

Соударение задней пары колёс с наклонной плоскостью рассматривается аналогично первому удару:  $Mu_1 + Mu_2 \cos \alpha = 2Mu$ . Отсюда следует, что после второго удара скорость  $u$  обеих пар колёс будет одинакова, направлена вдоль наклонной плоскости и равна

$$u = u_1 = \sqrt{\frac{4 \cos^4 \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)^2} v^2 - \frac{2 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} gl}.$$

Для того, чтобы тележка полностью въехала на плоскость, подкоренное выражение в последнем соотношении должно быть неотрицательным, то есть начальная скорость тележки должна удовлетворять

$$v \geq \sqrt{\frac{\sin \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}{2 \cos^2 \alpha} gl}.$$

**1.135.** Потенциальная энергия поезда максимальна тогда, когда часть поезда полностью занимает оба склона горки (см. рис. 1.135). Поскольку, как видно из условия, для длин склонов и основания горки выполняется теорема Пифагора:  $l_1^2 + l_2^2 = l^2$ , то угол при вершине горки — прямой (закруглениями мы пренебрегаем). Следовательно, высота

горки  $h = l_1 l_2 / l$ , а средняя высота подъёма части поезда, находящейся на горке, составляет  $h_{\text{ср}} = h/2 = l_1 l_2 / (2l)$ . Поскольку масса указанной части поезда пропорциональна её длине, то можно найти потенциальную энергию поезда относительно подножия горки:

$$U = M \cdot \frac{l_1 + l_2}{L} \cdot gh_{\text{ср}} = \frac{Mg(l_1 + l_2)l_1 l_2}{2Ll},$$

где  $M$  — масса всего поезда. Для того, чтобы поезд преодолел горку, его начальная кинетическая энергия  $W = Mv^2/2$  должна быть больше потенциальной энергии  $U$ . Отсюда искомая минимальная скорость поезда

$$v_{\text{min}} = \sqrt{g \frac{(l_1 + l_2)l_1 l_2}{Ll}} \approx 11,5 \text{ м/с.}$$

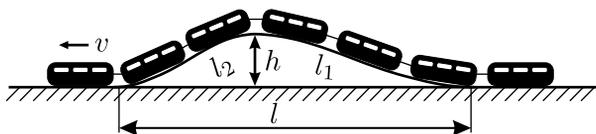


Рис. 1.135.

**1.136.** Описанный в условии процесс будет протекать следующим образом. Если энергия маятника  $E$  не превосходит величину  $mgl$ , то груз остановится на высоте  $h$ , определяемой из соотношения  $E = mgh$ , и получит дополнительное приращение энергии  $\Delta E = mu^2/2$ . Поскольку начальная энергия маятника равна  $-mgl$ , после  $n$  толчков он будет иметь энергию  $E_n = -mgl + (nmu^2/2)$ .

Если  $E_n = mgl$ , то есть  $n = \frac{2mgl}{mu^2/2} = \frac{4gl}{u^2}$  — целое число, то маятник будет бесконечно долго двигаться вверх по окружности до остановки в верхней точке, а значит, следующий толчок никогда не произойдёт, и энергия маятника спустя длительное время будет равна  $E_\infty = E_n = mgl$ .

Если  $E_n > mgl$ , а величина  $\frac{4gl}{u^2}$  не является целым числом, то маятник будет двигаться по окружности без остановок — процессы с изменением энергии происходить не будут. Следовательно, через достаточно большой промежуток времени энергия маятника будет совпадать с наименьшим  $E_n$ , превосходящим  $mgl$ ; при этом  $n$  — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию  $n > \frac{4gl}{u^2}$ . Отсюда  $n = \left[ \frac{4gl}{u^2} \right] + 1$ ,

и  $n - \frac{4gl}{u^2} = 1 - \left\{ \frac{4gl}{u^2} \right\}$ , где через  $[x]$  и  $\{x\}$  обозначены целая и дробная части  $x$  соответственно. Таким образом, в данном случае спустя длительное время энергия маятника будет равна:

$$E_{\infty} = mgl + \frac{mu^2}{2} \left( 1 - \left\{ \frac{4gl}{u^2} \right\} \right).$$

**1.137\*.** Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  после отпущения маятник повернулся на малый угол  $\Delta\alpha$ . При этом его потенциальная энергия уменьшилась, поскольку суммарная потенциальная энергия грузов № 1 и № 2 не изменилась, а груз № 3 опустился на высоту

$$\Delta h = L \cos(\alpha - \Delta\alpha) - L \cos \alpha = L \cos \alpha \cos \Delta\alpha + L \sin \alpha \sin \Delta\alpha - L \cos \alpha.$$

Так как угол  $\Delta\alpha$  мал, то  $\cos \Delta\alpha \approx 1$ ,  $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ , и  $\Delta h \approx L\Delta\alpha \sin \alpha$ . Следовательно, изменение потенциальной энергии маятника за рассматриваемый промежуток времени равно  $\Delta U = -mg\Delta h = -mgL\Delta\alpha \sin \alpha$ .

Ввиду жёсткости маятника во время движения величины смещений, скоростей и ускорений всех трёх грузов одинаковы. За время  $\Delta t$  первоначально покоившиеся грузы, двигаясь с одинаковыми ускорениями  $a$ , приобретают одинаковые по величине скорости  $v = a\Delta t$  и смещаются на малые расстояния

$$\Delta x = L\Delta\alpha = \frac{a(\Delta t)^2}{2} = \frac{v\Delta t}{2},$$

откуда  $\Delta\alpha = \frac{v\Delta t}{2L}$ . При этом маятник приобретает кинетическую энергию, равную  $\Delta W = 3 \cdot \frac{mv^2}{2}$ .

По закону сохранения механической энергии

$$\Delta W + \Delta U = \frac{3mv^2}{2} - mgL\Delta\alpha \sin \alpha = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражение для  $\Delta\alpha$ , получаем:

$$mgL \cdot \frac{v\Delta t}{2L} \cdot \sin \alpha = \frac{3mv^2}{2},$$

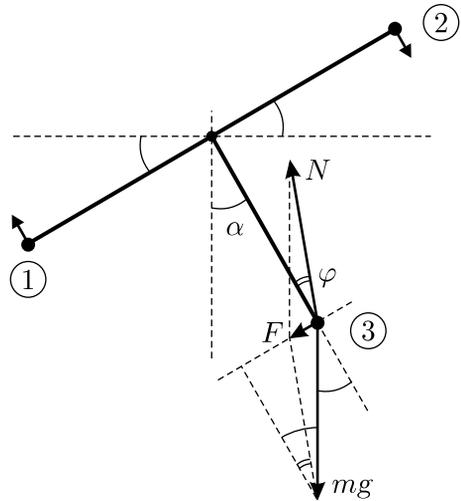


Рис. 1.137.

$$\text{откуда } a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{\Delta t} = \frac{g \sin \alpha}{3}.$$

Таким образом, сразу после отпускания маятника на груз № 3 действует сила  $F = ma = \frac{mg \sin \alpha}{3}$ , направленная перпендикулярно третьему стержню, по касательной к траектории движения груза (см. рис. 1.137). Эта сила равна сумме силы тяжести  $m\vec{g}$  и искомой силы реакции со стороны стержня  $\vec{N}$ . Из треугольника сил по теореме косинусов получаем:

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{F^2 + (mg)^2 - 2Fmg \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \\ &= mg \sqrt{\left(\frac{\sin \alpha}{3}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{3} \cdot \sin \alpha} = mg \sqrt{1 - \frac{5}{9} \sin^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Из рисунка видно, что сила  $\vec{N}$  направлена под таким углом  $\varphi$  к стержню, что

$$N \sin \varphi = mg \sin \alpha - F = \frac{2}{3} mg \sin \alpha.$$

Отсюда

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{9 - 5 \sin^2 \alpha}}\right).$$

**1.138\***. Работа мотора в процессе перемещения муфты идёт только на увеличение её кинетической энергии, поскольку в условии сказано, что трение отсутствует. В процессе движения компонента скорости муфты, связанная с её вращением вместе со штангой вокруг оси  $OO'$ , равна  $\omega R$ , где  $R$  — текущее расстояние от оси до муфты. Таким образом, для увеличения кинетической энергии за счёт роста этой компоненты скорости муфты мотором будет совершена работа, равная  $A_1 = \frac{1}{2} m \omega^2 (L^2 - l^2)$ .

Чтобы муфта не смещалась по вращающейся штанге, на неё должна действовать центробежная сила  $F_{\text{цс}} = m \omega^2 R$ , направленная к оси вращения. Поэтому, если вдоль штанги не действуют никакие силы, то смещение муфты будет происходить с радиальным ускорением  $a_R = -a_{\text{цс}} = \omega^2 R$ , направленным от оси вращения. Тогда за малый промежуток времени  $\Delta t$  радиальная компонента скорости муфты изменится на величину  $\Delta v_R = a_R \Delta t = \omega^2 R \Delta t$ . Ускоре-

ние  $a_R = \frac{\Delta v_R}{\Delta t} = \frac{v_R \Delta v_R}{v_R \Delta t} = \frac{v_R \Delta v_R}{\Delta R} = \omega^2 R$ , откуда имеем, что величина  $v_R \Delta v_R = \omega^2 R \Delta R$ , то есть  $\Delta(v_R^2/2) = \omega^2 \Delta(R^2/2)$ . Поэтому для увеличения кинетической энергии муфты за счёт приобретения ею радиальной компоненты скорости мотором будет совершена работа, равная  $A_2 = \frac{1}{2} m v_R^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 (L^2 - l^2)$ .

Таким образом, полная работа, совершаемая мотором над муфтой при её перемещении от оси вращения с расстояния  $l$  до расстояния  $L$ , равна

$$A = A_1 + A_2 = m \omega^2 (L^2 - l^2).$$

Заметим, что часть кинетической энергии, связанная с движением муфты вдоль штанги со скоростью  $v_R$ , при ударе о заглушку теряется, превращаясь в тепло.

**1.139.** Потенциальная энергия спутника массой  $m$  на поверхности Земли равна  $U_1 = -\frac{GmM_3}{R_3}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $M_3$  — масса Земли. Пусть спутник вывели на круговую орбиту радиусом  $r$ , сообщив ему при этом скорость  $v$ . Тогда уравнение движения спутника по орбите имеет вид:  $\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_3}{r^2}$ , а потенциальная и кинетическая энергии спутника равны, соответственно,  $U_2 = -\frac{GmM_3}{r}$  и  $W_2 = \frac{mv^2}{2}$ .

Работа ракетносителя равна изменению полной механической энергии спутника:

$$\begin{aligned} A &= W_2 - W_1 + U_2 - U_1 = \\ &= \frac{mv^2}{2} - 0 - \frac{GmM_3}{r} + \frac{GmM_3}{R_3}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что на поверхности Земли перед стартом кинетическая энергия спутника  $W_1 = 0$ , поскольку мы пренебрегаем вращением Земли. С учётом уравнения движения из последнего соотношения получаем:

$$W_2 = \frac{GmM_3}{R_3} - A = mgR_3 - A,$$

так как выражение для ускорения свободного падения на поверхности Земли имеет вид:  $g = GM_3/R_3^2$ .

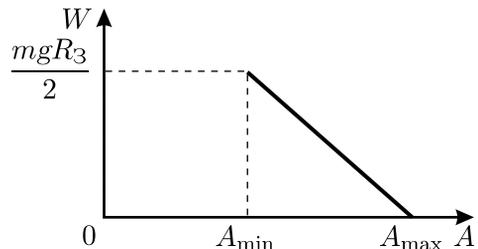


Рис. 1.139.

Это и есть искомая зависимость. График  $W = W_2(A)$  изображён на рисунке 1.139. Он начинается из точки, соответствующей минимально возможной работе  $A_{\min} = mgR_3/2$ , которую нужно совершить для того, чтобы вывести спутник на самую низкую орбиту, расположенную у поверхности Земли. При этом совершённая работа пойдёт на разгон спутника до скорости, которая необходима ему для того, чтобы держаться на этой орбите. Максимальная же работа, которую может совершить ракетоноситель, равна  $A_{\max} = mgR_3$ . Она должна быть совершенна для выведения спутника на самую высокую орбиту, которая бесконечно удалена от Земли. Скорость движения по такой орбите будет равна нулю.

**1.140.** Из закона всемирного тяготения следует, что ускорение свободного падения на поверхности Земли равно  $g = GM_3/R_3^2$ , где  $M_3$  — масса Земли. Уравнение движения спутника массой  $m$  по круговой орбите высотой  $h$  со скоростью  $v$  имеет вид:  $\frac{mv^2}{R_3 + h} = G \frac{mM_3}{(R_3 + h)^2}$ ,

откуда  $v = \sqrt{\frac{gR_3^2}{R_3 + h}} \approx 7,8$  км/с. Применяя закон сохранения механической энергии к процессу разгона спутника, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{mv_\infty^2}{2} &= \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - \frac{GmM_3}{R_3 + h} = \\ &= \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - m \frac{gR_3^2}{R_3 + h} = \frac{m(v + \Delta v)^2}{2} - mv^2, \end{aligned}$$

откуда  $v_\infty = \sqrt{2v\Delta v + \Delta v^2 - v^2} \approx 6,5$  км/с. Заметим, что найденная скорость спутника  $v_\infty$  вдали от Земли превышает величину  $\Delta v$ !

**1.141.** Найдём при помощи графика ускорение корабля в момент времени сразу после выключения двигателя. Для этого проведём касательную к графику в точке  $t = 0$  (см. рис. 1.141). По определению величина ускорения равна модулю углового коэффициента этой касательной:

$$a_0 = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{v_0}{3\tau}.$$

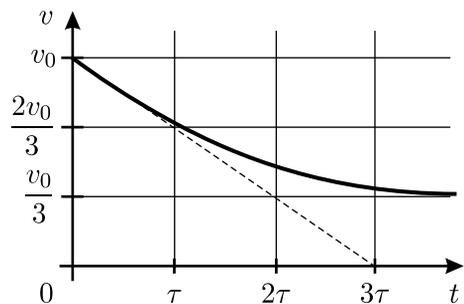


Рис. 1.141.

Поскольку на корабль после выключения двигателя действует только гравитационная сила со стороны небесного тела, то

$ma_0 = \frac{GmM}{R_0^2}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная,  $m$  — масса корабля,  $M$  — масса небесного тела,  $R_0$  — искомое расстояние.

После удаления корабля на очень большое расстояние от небесного тела скорость корабля уменьшается до величины  $v_1 = v_0/3$  и становится постоянной. Применяя закон сохранения механической энергии для корабля в гравитационном поле планеты, получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GmM}{R_0} = -ma_0R_0.$$

Отсюда

$$R_0 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2a_0} = \frac{3\tau}{2v_0}(v_0^2 - v_1^2) = \frac{3\tau}{2v_0} \left( v_0^2 - \frac{v_0^2}{9} \right) = \frac{4}{3}\tau v_0.$$

**1.142.** Для получения оценки будем считать, что свет состоит из частиц — фотонов, которые движутся со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с, и будем использовать формулы классической механики (хотя на самом деле этого делать нельзя). Внешний наблюдатель не увидит испущенный с поверхности звезды свет в том случае, если фотон не сможет преодолеть гравитационное притяжение звезды, то есть если скорость фотона  $c$  будет меньше второй космической скорости. Вторая космическая скорость  $v_{2к}$  может быть найдена из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{mv_{2к}^2}{2} = G \frac{mM_{\min}}{R}. \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса фотона,  $M$  — масса звезды,  $R$  — её радиус,  $G$  — гравитационная постоянная. Полагая  $v_{2к} = c$ , получаем:

$$M_{\min} = \frac{Rc^2}{2G}.$$

Чтобы получить представление о найденном ответе, сделаем численные оценки. Предположим, что звезда, о которой идёт речь в условии задачи, подобна нашему Солнцу. Радиус Солнца равен  $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8$  м. Значит, для того, чтобы свет, испускаемый такой звездой, перестал быть виден внешнему наблюдателю, необходимо, чтобы она имела массу  $M = \frac{R_{\odot}c^2}{2G} \approx 4,7 \cdot 10^{35}$  кг. При этом звезда будет иметь

$$\text{плотность } \rho = \frac{3c^2}{8\pi GR_{\odot}^2} \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{ кг/м}^3.$$

Для сравнения приведём массу Солнца —  $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30}$  кг и среднюю плотность вещества Земли — она составляет  $\rho_{\oplus} \sim 5,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Для получения оценки можно также считать, что вылетевший фотон выходит на «околозвёздную» орбиту и поэтому не достигает внешнего наблюдателя. В этом случае получается, что скорость фотона  $c$  равна первой космической скорости, которая в  $\sqrt{2}$  раз меньше второй космической скорости. Тогда для  $M_{\min}$  получится вдвое большая величина. Заметим, что в исходную формулу (1) входит масса фотона, хотя фотон не имеет массы покоя. Однако на ответ это не влияет, так как оценки делаются формальным способом, и масса фотона всюду сокращается. Далее, возникает вопрос: насколько полученная оценка близка к верному ответу, который может быть получен средствами общей теории относительности? Ответ неожиданный: полученная формальным способом оценка чудесным образом совпадает с точным ответом!

**1.143\***. Обозначим расстояние от центра Земли до ближнего конца палочки за  $y$  (в начале падения  $y = r$ ). Разобьём палочку на малые части длиной  $\Delta x_i$ , находящиеся на расстояниях  $x_i$  от этого конца, и найдём силу, с которой палочка притягивается к Земле:

$$F = \sum_i \frac{Gm_i M_3}{(y + x_i)^2} = \sum_i \frac{Gm_{\text{п}} M_3 \Delta x_i}{l(y + x_i)^2} = \frac{1}{l} \sum_i \frac{Gm_{\text{п}} M_3 \Delta x_i}{(y + x_i)^2},$$

где  $m_{\text{п}}$  и  $M_3$  — массы палочки и Земли. Сумма в последнем выражении численно равна работе против гравитационных сил по перемещению материальной точки массой  $m_{\text{п}}$  от расстояния  $y$  до  $y + l$  от центра Земли. Для этой работы можно записать:

$$A = Gm_{\text{п}} M_3 \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{y + l} \right).$$

Отсюда

$$F = \frac{1}{l} Gm_{\text{п}} M_3 \frac{l}{y(y + l)} = \frac{Gm_{\text{п}} M_3}{y(y + l)}.$$

Заменим теперь палочку на материальную точку массой  $m_{\text{п}}$ , находящуюся на расстоянии  $c$  от ближнего к Земле конца палочки так, чтобы сила гравитационного взаимодействия не изменилась:

$$F = \frac{Gm_{\text{п}} M_3}{y(y + l)} = \frac{Gm_{\text{п}} M_3}{(y + c)^2},$$

или  $y^2 + yl = y^2 + 2yc + c^2$ . Поскольку  $c \sim l \ll y$ , то  $yc \gg c^2$  и  $yl \gg c^2$ , то есть  $c \approx l/2$ .

Найдём разницу ускорений бусинки  $a_6$  и палочки  $a_{\text{п}}$ , учитывая, что  $b \ll l \ll y$  и  $GM_3 = gR_3^2$ , где  $g$  — ускорение свободного падения на поверхности Земли:

$$a_6 - a_{\text{п}} \approx \frac{gR_3^2}{(y+b)^2} - \frac{gR_3^2}{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{gR_3^2(yl + \frac{l^2}{4} - 2yb - b^2)}{(y+b)^2 \left(y + \frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{gR_3^2 yl}{y^4} = \frac{glR_3^2}{y^3}.$$

Теперь, зная ускорение бусинки относительно палочки, мы можем оценить время  $t$ , необходимое бусинке для соскальзывания с палочки, из следующего соотношения:  $b = \frac{(a_6 - a_{\text{п}})t^2}{2} = \frac{gR_3^2 l}{y^3} \cdot \frac{t^2}{2} \approx \frac{gR_3^2 l t^2}{2r^3}$ . Отсю-

да  $t \approx \sqrt{\frac{2br^3}{glR_3^2}} \approx 7 \cdot 10^3$  с.

Осталось оценить расстояние  $L$ , которое палочка пролетит за это время, и убедиться, что оно мало по сравнению с  $r$ :

$$L \approx \frac{gR_3^2}{r^2} \cdot \frac{t^2}{2} \approx \frac{gR_3^2}{2r^2} \cdot \frac{2br^3}{glR_3^2} = \frac{br}{l} \approx 10^6 \text{ м} \ll r = 10^8 \text{ м}.$$

Поэтому ускорения бусинки и палочки, а также разность этих ускорений мы можем считать постоянными, и наши оценки справедливы.

**1.144.** При натягивании лука прикладывалась максимальная сила, соответствующая, видимо, примерно 400 Н — поднимать двухпудовую гирию (36 кг) можно натренировать практически каждого. Будем считать, что среднее значение  $F$  этой силы было в 2 раза меньше, то есть  $F = 200$  Н, и что вся эта сила разгоняла стрелу на пути  $S = 0,8$  м (от вытянутой левой руки до правого уха). Тогда скорость стрелы  $v = \sqrt{2FS/m} = 40$  м/с. Считая, что цель находится на той же высоте от земли, что и лук, и что использование угла прицеливания больше  $\alpha = 15^\circ$  над горизонтом неприемлемо, получаем дальность прицельной стрельбы  $L = v^2 \sin 2\alpha / g \approx 80$  м = 110 шагов. Эта оценка вполне соответствует сведениям о дальности меткой стрельбы, приведённым в рыцарских романах.

**1.145.** Кинетическая энергия катка складывается из энергии, связанной с его поступательным движением и равной  $Mv^2/2$  (здесь  $v$  — скорость оси катка), и энергии вращательного движения относительно центра масс, равной также  $Mv^2/2$ , поскольку при движении катка без проскальзывания все его точки вращаются вокруг оси с одной и той же

скоростью  $v$ . Поэтому полная кинетическая энергия полого катка равна  $W = Mv^2$ . Работа силы  $F$ , прикладываемой трактором к катку на пути  $L$ , равна  $A = FL$  и расходуется на увеличение кинетической энергии катка от нуля до  $W$ , то есть  $FL = Mv^2$ , откуда  $v = \sqrt{FL/M}$ .

**1.146\***. Будем считать, что вертолёт отбрасывает вниз поток воздуха сечением  $\pi d^2/4$  со скоростью  $v$ . Пусть плотность воздуха равна  $\rho$ . Тогда за время  $\Delta t$  винт придаёт воздуху массой  $\Delta m = \rho \frac{\pi d^2}{4} v \cdot \Delta t$

импульс  $\Delta p = \rho \frac{\pi d^2}{4} v^2 \cdot \Delta t$  и кинетическую энергию  $\Delta W = \rho \frac{\pi d^2}{8} v^3 \cdot \Delta t$ .

Ясно, что винт должен создавать силу тяги, равную весу вертолёта с грузом:  $\Delta p/\Delta t = Mg$ , а необходимая для этого мощность равна  $N = \Delta W/\Delta t$ . Кроме того, известно, что при нормальных условиях молярный объём любого газа равен  $V_{\text{норм}} \approx 22,4$  л/моль, поэтому плотность воздуха  $\rho = \mu/V_{\text{норм}} \approx 1,3$  кг/м<sup>3</sup>.

Таким образом,  $v = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{Mg}{\pi\rho}} \approx 3,5$  м/с, и требуемая для взлёта

мощность  $N = Mgv/2 \approx 1400$  Вт — это почти две лошадиные силы! Пилот же при длительной работе мышц развивает примерно в 10 раз меньшую мощность, так что взлететь на педальном вертолёте он не сможет.

**1.147\***. Пусть комар машет крыльями с частотой  $\nu$ . Предположим, что амплитуда взмахов его крыльев имеет порядок длины крыла, то есть равна  $l$ , и что крылья опускаются плашмя, а поднимаются ребром, так, что сопротивлением воздуха при поднимании крыльев можно пренебречь. Средняя скорость воздуха, отбрасываемого крыльями, равна  $v = \nu l$ . Сила сопротивления движению крыла даётся формулой  $f = (1/2)\rho_1 S v^2$ , где  $S = ld$  — площадь крыла. (Для нахождения оценки можно получить эту формулу методом размерностей, предположив, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. В этом случае в результате будет отсутствовать коэффициент 1/2, что является несущественным.)

Подъёмная сила равна произведению средней по времени силы сопротивления движению крыла на число крыльев (у комара их два). Так как крыло отбрасывает воздух только тогда, когда опускается вниз, то средняя по времени сила сопротивления вдвое меньше  $f$ . Значит, подъёмная сила равна

$$F = 2 \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{2} \rho_1 S v^2 = \frac{1}{2} \rho_1 \nu^2 l^3 d,$$

и поскольку комар не падает, то она должна уравновешивать его вес:

$$\frac{1}{2}\rho_1\nu^2l^3d = mg = \rho_2ld^2g.$$

Отсюда

$$\nu = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2\rho_2gd}{\rho_1}} \approx 1 \text{ кГц} \sim 10^3 \text{ Гц}.$$

Этот результат достаточно хорошо согласуется с реально наблюдаемой частотой писка комара.

**1.148.** За время  $\Delta t$  через отверстие площадью  $S$  из резервуара выходит масса пара, равная  $\Delta m = \frac{N\Delta t}{\lambda} = \rho S v \Delta t$ , со скоростью  $v = \frac{1}{\rho S} \cdot \frac{N}{\lambda}$ . Поэтому сила тяги такого двигателя равна

$$F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{N}{\lambda} v = \frac{1}{\rho S} \left( \frac{N}{\lambda} \right)^2.$$

**1.149.** Как следует из решения задачи 1.146, реактивная струя со скоростью  $u$  и силой тяги  $mg$  развивает мощность

$$N = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{u^2}{2} = \frac{\Delta(mu)}{\Delta t} \cdot \frac{u}{2} = \frac{mgu}{2}.$$

Так как практически вся энергия топлива переходит в кинетическую энергию реактивной струи, то  $q = u^2/2$ . С учётом этого получаем:  $N \cdot t = \frac{mg\sqrt{2q}}{2} \cdot t = \frac{qm}{3}$ , и искомое время, за которое истребитель

истратит всё топливо, равно  $t = \frac{\sqrt{2q}}{3g} \approx 320 \text{ с} \approx 5,4 \text{ мин}$ .

**1.150.** Изменение кинетической энергии автомобиля за малый промежуток времени  $\Delta t$  равно  $\Delta W = \Delta \frac{mv^2}{2} = N\Delta t = at\Delta t \cong \Delta \frac{at^2}{2}$ . Поэтому скорость автомобиля возрастает со временем  $t$  по закону  $v = t\sqrt{a/m}$ .

**1.151.** Разгон автомобиля будет проходить в два этапа. На первом этапе колёса автомобиля будут проскальзывать, часть развиваемой двигателем мощности будет превращаться в тепло, а остальная — уходить на его разгон. При этом автомобиль будет двигаться с постоянным ускорением, величина которого определяется величиной силы трения скольжения:  $a = \mu mg/m = \mu g$ .

Так будет продолжаться до тех пор, пока мощность двигателя не станет равна мощности силы трения  $N = \mu mg u$ , где

$$u = \frac{N}{\mu mg} \approx 10 \text{ м/с}$$

— скорость автомобиля, при которой прекратится проскальзывание колёс. Этой скорости автомобиль достигнет за время

$$\Delta t_1 = \frac{u}{a} = \frac{N}{m(\mu g)^2} \approx 1,7 \text{ с.}$$

На втором этапе проскальзывания колёс не будет, и вся мощность двигателя будет расходоваться на разгон автомобиля, то есть превращаться в его кинетическую энергию. Из закона изменения механической энергии можно найти время  $\Delta t_2$ , за которое автомобиль разгонится от скорости  $u$  до скорости  $v$ :  $N \Delta t_2 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$ , откуда

$$\Delta t_2 = \frac{m(v^2 - u^2)}{2N} = \frac{m}{2N} \left( v^2 - \frac{N^2}{(\mu mg)^2} \right) \approx 2,5 \text{ с.}$$

В итоге полное время разгона автомобиля от старта до скорости  $v = 20 \text{ м/с}$  составляет

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{N}{m(\mu g)^2} + \frac{m}{2N} \left( v^2 - \frac{N^2}{(\mu mg)^2} \right) = \frac{N}{2m(\mu g)^2} + \frac{mv^2}{2N} \approx 4,2 \text{ с.}$$

**1.152\*.** Проанализируем движение автомобиля, которое, очевидно, должно состоять из двух этапов: разгона и торможения.

1) *Торможение.* Пусть в момент начала торможения автомобиль имеет скорость  $v_{\max}$ . Тогда тормозной путь автомобиля при максимально возможном значении ускорения  $a = \mu g$  равен  $L_{\text{торм}} = \frac{v_{\max}^2}{2a} = \frac{v_{\max}^2}{2\mu g}$ , где  $\mu$  — коэффициент трения между дорогой и колёсами автомобиля. Отсюда  $v_{\max} = \sqrt{2\mu g L_{\text{торм}}}$ .

2) *Разгон.* При разгоне автомобиль движется с максимально возможным ускорением  $a = \mu g$  до тех пор, пока хватает мощности двигателя (первая стадия разгона). При этом, пройдя расстояние  $L_1$ , он приобретает скорость  $v_1 = \sqrt{2\mu g L_1} = \frac{N}{\mu mg}$ . Далее с ростом скорости ускорение при постоянной мощности двигателя будет постепенно уменьшаться (вторая стадия разгона). Для того, чтобы определить, на какой из этих двух стадий разгон нужно прекратить, найдём коэффициент трения. Это можно сделать, используя данные, приведённые в условии, и воспользовавшись теоремой об изменении кинетической энергии:  $mv^2/2 = \mu mgl_{\text{T}}$ . Отсюда, полагая  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ , имеем:  $\mu = \frac{v^2}{2gl_{\text{T}}} \approx 0,50$ .

Разгон необходимо прекратить, когда оставшееся расстояние до точки 2 будет равно тормозному пути:  $L - L_1 = L_{\text{торм}}$ . Ясно, что если разгон кончается на первой стадии, то есть ускорение при разгоне равно ускорению при торможении, то торможение придётся начинать на середине дистанции, и  $L_1 = L_{\text{торм}} = L/2$ . В этом случае  $v_{\text{max}} = \sqrt{\mu g L} \approx 15,6$  м/с. В то же время максимальная скорость, которой может достичь автомобиль на первой стадии разгона, равна  $v_1 = \frac{N}{\mu mg} \approx 16,3$  м/с  $> v_{\text{max}}$ , так что разгон действительно нужно прекращать на первой стадии. При этом время  $t_{1/2}$ , необходимое для прохождения половины дистанции, можно найти из условия:  $\frac{L}{2} = \frac{\mu g t_{1/2}^2}{2}$ . Отсюда наименьшее время, необходимое автомобилю для прохождения всей дистанции при условиях задачи, равно

$$t = 2t_{1/2} = 2\sqrt{\frac{L}{\mu g}} = \frac{2}{v}\sqrt{2L\mu g} \approx 6,4 \text{ с.}$$

**1.153.** Работа, совершённая силой трения к моменту попадания тела в точку с координатой  $x$ , по модулю равна

$$A(x) = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2(x)}{2} = \frac{m}{2} \left( v_0^2 - \left( v_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \right)^2 \right) = \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{2x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right).$$

Следовательно, на участке от  $x$  до  $x + \Delta x$  совершается работа

$$\begin{aligned} A(x + \Delta x) - A(x) &= \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{2(x + \Delta x)}{l} - \left( \frac{x + \Delta x}{l} \right)^2 - \frac{2x}{l} + \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{2 \cdot \Delta x}{l} - \frac{2x \cdot \Delta x}{l^2} - \left( \frac{\Delta x}{l} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

При малых  $\Delta x$  последним слагаемым можно пренебречь. Поскольку  $A(x + \Delta x) - A(x) = F_{\text{тр}} \cdot \Delta x$ , то для силы трения, действующей на тело в точке  $x$ , получаем:

$$F_{\text{тр}} = \frac{mv_0^2}{2} \left( \frac{2}{l} - \frac{2x}{l^2} \right) = \frac{mv_0^2}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right),$$

то есть сила трения линейно зависит от координаты  $x$ .

Задачу можно решать и другим, более формальным способом. Действительно, искомая величина силы трения, в соответствии со вторым законом Ньютона, равна  $F_{\text{тр}} = |ma|$ . По определению ускорения:

$$F_{\text{тр}} = |ma| = m \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = m \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| \cdot \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|.$$

Но  $\left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| = \frac{v_0}{l}$ , а  $\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| = |v(x)| = v_0 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ . Отсюда для величины силы трения получаем прежний ответ.

**1.154.** Скорость шайбы  $v$  на расстоянии  $S$  от точки начала движения можно определить из закона изменения механической энергии. При начальной скорости  $v_0$  и массе шайбы  $m$  имеем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(S),$$

где  $A(S)$  — работа, которую совершает сила трения на пути  $S$ . При достаточно малом перемещении  $\Delta S$  справедлива формула  $\Delta A(S) = -\mu(S)mg\Delta S$ , где  $\mu(S)$  — коэффициент трения на расстоянии  $S$  от точки начала движения. Видно, что величина  $\Delta A(S)$  не зависит от скорости  $v_0$ , а значит, и суммарная работа  $A(S)$  на всём пути  $S$  не зависит от  $v_0$ , пока  $v(S) \geq 0$ . Поэтому при начальной скорости шайбы  $v_1$  она остановится, пройдя путь  $S$ , который можно определить из соотношения  $-\frac{mv_1^2}{2} = A(S)$ . Подставляя  $A(S)$  из этого соотношения в предыдущее уравнение, получаем:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2},$$

откуда находим величину скорости  $v$  на нашем графике, соответствующую точке остановки шайбы во втором случае:  $v = \sqrt{v_0^2 - v_1^2} = 3$  м/с.

Из графика находим, что скорости  $v = 3$  м/с соответствует  $S = 5$  м, то есть при начальной скорости  $v_1 = 4$  м/с шайба пройдёт до полной остановки путь 5 м.

**1.155\*.** Поскольку в условии задана минимальная работа  $A$ , то можно считать, что доску перетаскивают через линию медленно, и её кинетическая энергия равна нулю. При этом работа, которую нужно совершить для перетаскивания доски на шероховатую поверхность, частично переходит в тепло (обозначим его  $Q$ ), а частично — в потенциальную энергию  $U$  пружины, которая к концу процесса перетаскивания

оказывается деформированной. Обозначим массу доски через  $m$ , коэффициент трения доски о шероховатую поверхность — через  $\mu$ . Тогда в момент, когда на шероховатой поверхности оказалась часть однородной доски длиной  $x$ , на неё действует сила трения

$$F_{\text{тр}}(x) = \mu \Delta m g = \mu g \frac{m}{L} x,$$

где  $\Delta m = \frac{m}{L} x$  — масса части доски, перетасченной через линию. Видно, что сила трения возрастает пропорционально величине  $x$ , которая при перетаскивании меняется от 0 до  $L$ . Работа силы трения на малом участке пути  $\Delta x$  равна

$$F_{\text{тр}}(x) \Delta x = \frac{\mu m g}{L} x \Delta x = \frac{\mu m g}{L} \Delta \left( \frac{x^2}{2} \right).$$

Суммарная работа силы трения по абсолютной величине равна искомому количеству теплоты:  $|A_{\text{тр}}| = Q = \frac{\mu m g}{L} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{\mu m g L}{2}$ . Этот результат можно получить несколькими способами: по аналогии с формулой для потенциальной энергии, запасённой в растянутой пружине (сила также пропорциональна смещению); графически, вычисляя работу силы трения, как площадь под графиком зависимости  $F_{\text{тр}}(x)$ ; наконец, непосредственно, путём интегрирования.

Когда вся доска окажется на шероховатой поверхности, пружина будет растянута на некоторую величину  $l$ . При этом сила натяжения пружины будет равна силе трения, действующей со стороны поверхности на всю доску:  $kl = \mu m g$ . Отсюда  $l = \mu m g / k$ . Потенциальная энергия, запасённая к этому моменту в пружине, будет равна

$$U = \frac{kl^2}{2} = \frac{(\mu m g)^2}{2k} = \frac{2Q^2}{kL^2}.$$

Таким образом, можно записать:

$$A = Q + U = Q + \frac{2Q^2}{kL^2} \quad \text{или} \quad \frac{2}{kL^2} Q^2 + Q - A = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, найдём  $Q$ :

$$Q = \frac{kL^2}{4} \left( \sqrt{1 + \frac{8A}{kL^2}} - 1 \right) = 5 \text{ Дж}.$$

Оставшиеся  $U = A - Q = 12,5$  Дж запасаются в виде потенциальной энергии в растянутой пружине.

**1.156\***. Так как стержень протягивают через щель очень медленно, то сумма всех приложенных к нему сил всё время равна нулю. Значит, внешняя сила, прикладываемая к переднему концу стержня, всегда равна силе трения щёчек о стержень и постоянна по величине:

$$F_{\text{вн}} = F_{\text{тр}} = 2\mu F = 2 \cdot 0,5 \cdot 30 \text{ Н} = 30 \text{ Н}.$$

Передний конец стержня, к которому приложена внешняя сила, перемещается на расстояние  $L + \Delta l = 10 \text{ см} + 30 \text{ см} = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$ . Здесь  $\Delta l = 30 \text{ см}$  — изменение длины стержня к тому моменту, когда он протянут через щёчки практически целиком; оно соответствует приложенной к стержню растягивающей силе  $F_{\text{вн}} = F_{\text{тр}} = 30 \text{ Н}$  и определяется из графика зависимости силы упругости от удлинения.

Работа постоянной внешней силы над системой «стержень + щёчки» равна

$$A_{\text{вн}} = F_{\text{вн}}(L + \Delta l) = 30 \text{ Н} \cdot 0,4 \text{ м} = 12 \text{ Дж}.$$

Эта работа расходуется, во-первых, на увеличение потенциальной энергии стержня  $\Delta U$  при его растяжении, и, во-вторых, на работу против сил трения, которая увеличивает внутреннюю энергию системы, то есть превращается в тепло  $Q$ . Таким образом,

$$A_{\text{вн}} = \Delta U + Q = \Delta U - A_{\text{тр}},$$

где работа сил трения  $A_{\text{тр}} < 0$ .

Изменение потенциальной энергии стержня, то есть величина энергии упругой деформации к концу всего процесса, может быть определено из приведённого в условии графика. Оно равно площади области под кривой, ограниченной зависимостью  $f(\Delta l)$ , осью абсцисс и вертикальной прямой, соответствующей  $\Delta l = 30 \text{ см}$ . Подсчёт с использованием сетки на графике показывает, что  $\Delta U \approx 3 \text{ Дж}$ . Таким образом, получаем, что

$$A_{\text{тр}} = \Delta U - A_{\text{вн}} \approx 3 \text{ Дж} - 12 \text{ Дж} = -9 \text{ Дж}.$$

Как видно, эту величину нельзя было бы найти просто как произведение постоянной силы трения  $2\mu F$  на «длину пути», то есть, в данном случае, длину прошедшего через щёчки растянувшегося стержня — эта «длину пути» не соответствует ни начальной, ни конечной длине стержня. Такая ошибка в использовании определения работы возникла из-за того, что контакт щёчек, даже сколь угодно узких, со стержнем, в данной задаче нельзя рассматривать как точечный — на протяжении

этого контакта происходят существенные изменения характера движения точек стержня.

**1.157\***. Рассмотрим сдвиг верхнего тела вдоль горизонтальной поверхности нижнего тела на ширину  $l$  одного ребра (см. рис. 1.157).

Пусть для того, чтобы сдвинуть тело на половину ширины ребра («приподнять» его), нам нужно приложить в горизонтальном направлении силу  $f$ . Так как по условию задачи верхнее тело движется с постоянной (в среднем) скоростью, то тангенциальная (параллельная поверхности ребра) компонента силы  $f$  должна уравнивать тангенциальную компоненту силы тяжести  $mg$ . Обозначив угол между образующими ребро гранями через  $\alpha$ , получаем:

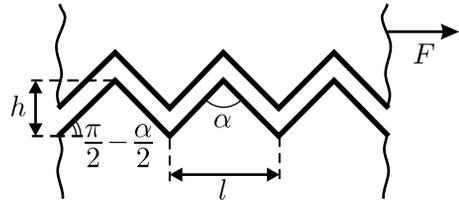


Рис. 1.157.

Работа силы  $f$  на данном участке пути равна  $A = f \frac{l}{2}$ .

На второй половине пути, когда верхнее тело «скатывается под горку», для его смещения на вторую половину ширины ребра не нужно прикладывать никаких внешних сил — тело движется под действием силы тяжести, а запасённая на первом участке потенциальная энергия при соударении переходит в тепло. Следовательно, средняя сила, необходимая для перемещения тела на ширину  $l$  ребра, равна

$$F = \frac{A}{l} = \frac{f}{2} = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{mgh}{l}.$$

Заметим, что эффективный коэффициент трения равен

$$\mu = \frac{F}{mg} = \frac{h}{l} = nh,$$

где  $n = 1/l$  — число рёбер на единицу длины поверхности.

**1.158.** При быстром вращении тяжёлого асимметричного маховика возникают крайне большие периодически изменяющиеся силы реакции, действующие на крепление оси маховика и приводящие к периодическим колебаниям платформы вибратора с частотой, совпадающей с частотой вращения маховика. Поэтому сила взаимодействия вибратора с полом, постоянная при выключенном двигателе, начинает сильно

зависеть от времени, и по существу представляет собой ряд импульсов. Значительная жёсткость платформы и бетона обуславливают малую длительность этих импульсов. С другой стороны, средняя сила давления вибратора на пол по-прежнему равна  $Mg$ , поэтому максимальная величина силы взаимодействия в момент соударения платформы с полом очень велика. В свою очередь, это приводит к возникновению значительных сил трения, которые гасят горизонтальную скорость платформы, набранную к моменту соударения.

Следовательно, для оценки можно считать, что вибратор  $n$  раз в секунду соударяется с полом и полностью гасит горизонтальную скорость  $v$ , набранную за время  $\tau = 1/n$ , прошедшее с момента предыдущего соударения. Очевидно, что  $v = a\tau = \frac{F}{M}\tau = \frac{F}{Mn}$ . Искомая средняя скорость вибратора, с которой он будет перемещаться по шероховатому полу под действием горизонтальной силы  $F$ , равна

$$u = \frac{v}{2} = \frac{F}{2Mn} = 2 \text{ см/с.}$$

**1.159\***. а) Ясно, что конструкция покатится при таком угле, при котором центр масс, находящийся на оси  $O$  (см. рис. 1.159.1), окажется над точкой опоры  $A$  или правее неё. Значит, искомый угол  $\alpha \geq 360^\circ/20 = 18^\circ$ .

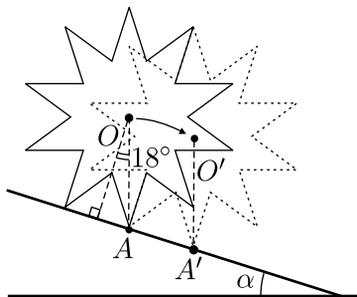


Рис. 1.159.1.

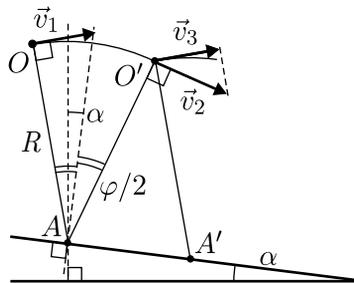


Рис. 1.159.2.

б) На рисунке 1.159.2 показано положение оси конструкции в начале и в конце одного её «шага» по плоскости. Введём обозначения: радиус звёздочки  $R$ , масса оси  $m$ . Тогда, если в начале шага ось имела скорость  $v_1$ , то в конце — скорость  $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh}$ , где  $h = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha$  и  $\varphi = 36^\circ$ . После абсолютно неупругого удара составляющая скорости оси в направлении  $O'A'$  гасится, и поэтому её скорость становится равной  $v_3 = v_2 \cos \varphi$ . При установившемся качении

$v_3 = v_1 = \sqrt{4Rg \sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha \operatorname{ctg}^2 \varphi}$ . Для того, чтобы такое качение происходило, необходимо, чтобы запас кинетической энергии  $U = \frac{mv_1^2}{2}$  был достаточным для преодоления осью максимальной высоты, на которую она поднимается при качении, то есть

$$\frac{mv_1^2}{2} > mgR \left( 1 - \cos \left( \frac{\varphi}{2} - \alpha \right) \right).$$

Отсюда

$$2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha \operatorname{ctg}^2 \varphi > 1 - \cos \left( \frac{\varphi}{2} - \alpha \right) = 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \alpha.$$

Будем считать угол  $\alpha$  малым, тогда  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ . С учётом этого получаем, что искомый угол

$$\alpha \approx \frac{1 - \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2} (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi)} \approx 0,033 \approx 1,9^\circ.$$

**1.160\***. В установившемся режиме вращения за один «такт», который состоит из падения одного груза в верхнюю ячейку и выбрасывания второго груза из нижней ячейки, в систему поступает энергия  $\Delta U = 2mgR$ . Система приобретает эту энергию за счёт работы силы тяжести над грузами, лежащими в ячейках колеса. За то же самое время система теряет кинетическую энергию  $\Delta W_1 = mv^2/2$ , которая уносится вываливающимся снизу грузом и, кроме того, некоторая энергия  $\Delta W_2$  рассеивается при абсолютно неупругом ударе во время падения груза в верхнюю ячейку. По аналогии с законом сохранения импульса, для нашей системы «падающий груз + колесо» при таком ударе можно записать:

$$\frac{N}{2}mv = \left( \frac{N}{2} + 1 \right) mu,$$

где  $v$  — скорость обода до падения груза,  $u$  — после его падения. Потери энергии при ударе определяются соотношением:

$$\Delta W_2 = \frac{N}{2} \cdot \frac{mv^2}{2} - \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \frac{mu^2}{2}.$$

Выражая  $u$  из первого уравнения и подставляя во второе, получаем:

$$\Delta W_2 = \frac{N}{2} \cdot \frac{mv^2}{2} - \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{N^2}{(N+2)^2} v^2 =$$

$$= \frac{mv^2}{2} \left( \frac{N}{2} - \frac{N^2}{2(N+2)} \right) = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{N}{N+2}.$$

При достаточно больших  $N$  ( $\sim 10^2$ ) отношение  $\frac{N}{N+2}$  имеет порядок единицы. Значит,  $\Delta W_2 \cong \frac{mv^2}{2}$ . Этот результат означает, что в системе отсчёта, связанной с ободом колеса, падающий сверху груз тормозится почти до нулевой скорости.

Так как движение колеса является установившимся, то энергия, поступающая в систему за один «такт», и энергия, теряемая за то же время, должны быть одинаковы:

$$\Delta U = \Delta W_1 + \Delta W_2, \quad \text{или} \quad 2mgR \cong \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда  $v = \sqrt{2gR}$ , и для установившейся угловой скорости вращения колеса получаем:

$$\omega = \frac{v}{R} \cong \sqrt{\frac{2g}{R}} \approx 4,4 \text{ рад/с.}$$

**1.161.** После того, как цилиндр начал скатываться с наклонной плоскости, для любого момента времени справедливо следующее соотношение, представляющее собой закон изменения энергии:  $\Delta W + \Delta U = -A_{\text{сум}}$ . Здесь  $\Delta W$  и  $\Delta U$  — изменения кинетической и потенциальной энергий цилиндра за время, прошедшее с начала скатывания,  $A_{\text{сум}}$  — суммарная работа, которую совершили над цилиндром силы сцепления с плоскостью. Знак «минус» показывает, что силы сцепления тормозят цилиндр.

Пусть к рассматриваемому моменту времени цилиндр прошёл по наклонной плоскости путь  $S$ , спустившись на высоту  $h$ , и приобрёл полную кинетическую энергию  $W_0$ . Тогда закон изменения энергии принимает вид:  $W_0 - Mgh = -A_{\text{сум}}$  (за нулевой уровень потенциальной энергии принято начальное положение цилиндра). Полученное соотношение можно переписать в виде:  $Mgh = W_0 + A_{\text{сум}}$ . Так как  $W_0 > 0$ , то справедливо неравенство:

$$Mgh > A_{\text{сум}}.$$

Найдём теперь работу  $A_{\text{сум}}$ . Она равна произведению работы  $A$ , которую нужно затратить для того, чтобы оторвать от петли один крючок, на количество крючков, которые были в зацеплении в течение того времени, пока цилиндр прошёл путь  $S$ . Последнее, в свою очередь, равно произведению площади, «заметённой» цилиндром длиной

$l$  на плоскости при скатывании, на количество крючков (и петель), приходящееся на единицу боковой поверхности цилиндра. В итоге:  $A_{\text{сум}} = A \cdot Sl \cdot \frac{N}{2\pi Rl}$ . Подставляя выражение для  $A_{\text{сум}}$  в записанное выше неравенство и учитывая, что  $h/S = \sin \alpha$ , окончательно получим:

$$\frac{AN}{MR} < 2\pi g \sin \alpha.$$

**1.162.** Как сказано в условии, весь путь санок состоит из трёх участков, одинаковых по длине. Для того, чтобы санки доехали до конца горки, необходимо, чтобы они преодолели второй участок горки, коэффициент трения на котором равен  $\mu$ . Обозначим высоту горки через  $H$ , массу санок — через  $m$ . Тогда длина горки равна  $L = H/\sin \alpha$ .

Санки, пройдя первый участок пути  $L/3$ , опустятся на высоту  $H/3$  и по действием силы тяжести приобретут скорость  $v_1 = \sqrt{2gH/3}$ . На втором участке на санки начинает действовать ещё и сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона горки к горизонту. К концу второго участка скорость санок станет равной

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_1^2 + \frac{2gH}{3} - \frac{2F_{\text{тр}}}{m} \cdot \frac{L}{3}} = \sqrt{\frac{4gH}{3} - \frac{2\mu gL \cos \alpha}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{4gH}{3} - \frac{2\mu gH \cos \alpha}{3 \sin \alpha}}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы санки преодолели второй участок горки, нужно, чтобы скорость  $v_2$  была больше нуля, то есть должно выполняться условие:  $\frac{4gH}{3} - \frac{2\mu gH \cos \alpha}{3 \sin \alpha} > 0$ . Отсюда  $\mu < 2 \operatorname{tg} \alpha$ .

**1.163.** По условию задачи ящик двигают медленно. Это означает, что в любой момент времени сумма действующих на ящик сил равна нулю. Рассмотрим столь малый отрезок горки длиной  $\Delta l_i$ , что его можно считать прямолинейным участком наклонной плоскости, образующим с горизонтом угол  $\alpha_i$ . Тогда сила, которую нужно прилагать к ящику для его медленного равномерного перемещения по этому участку, равна  $F_i = mg(\sin \alpha_i + \mu \cos \alpha_i)$ . Работа, совершаемая

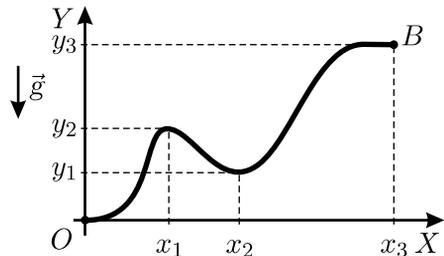


Рис. 1.163.

такой силой на данном участке, равна

$$\Delta A_i = F_i \Delta l_i = mg(\Delta l_i \sin \alpha_i + \mu \Delta l_i \cos \alpha_i) = mg(\Delta y_i + \mu \Delta x_i).$$

Здесь  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  — проекции отрезка  $\Delta l_i$  на оси  $X$  и  $Y$  соответственно. Из рисунка видно, что  $-\pi/2 < \alpha_i < \pi/2$ . Поэтому все  $\Delta x_i = \Delta l_i \cos \alpha_i > 0$  (ящик всё время движется направо, вдоль оси  $X$ ), а величины  $\Delta y_i = \Delta l_i \sin \alpha_i$  могут быть как положительными (ящик поднимается), так и отрицательными (ящик опускается).

Таким образом, искомая работа по перемещению ящика из точки  $O$  в точку  $B$  по горке равна

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \Delta A_i = mg \sum_i (\Delta y_i + \mu \Delta x_i) = \\ &= mg \left( \sum_i \Delta y_i + \mu \sum_i \Delta x_i \right) = mg(y_3 + \mu x_3). \end{aligned}$$

**1.164\***. Понятно, что начальная кинетическая энергия шайбы равна по величине работе, которую совершает сила трения от начала движения шайбы до её полной остановки:  $W = |A_{\text{тр}}|$ . Так как по условию  $v > \sqrt{2\mu gL}$ , то шайба в момент достижения

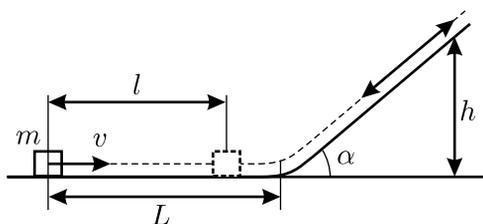


Рис. 1.164.

наклонной плоскости будет иметь некоторую скорость и поэтому не остановится, а начнёт подниматься по плоскости вверх. С другой стороны, так как  $\operatorname{tg} \alpha > \mu$ , то шайба, остановившись на наклонной плоскости, начнёт соскальзывать по ней обратно. Таким образом, шайба до полной остановки пройдёт расстояние  $L$ , двигаясь от своего начального положения до наклонной плоскости, затем поднимется по наклонной плоскости на некоторую высоту  $h$ , спустится с наклонной плоскости и, наконец, пройдёт расстояние  $(L - l)$  от наклонной плоскости до своего конечного положения (см. рис. 1.164). Поэтому

$$W = \frac{mv^2}{2} = |A_{\text{тр}}| = \mu mgL + 2\mu mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} + \mu mg(L - l).$$

Высота  $h$  определяется из условия остановки шайбы:

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgL + \mu mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} + mgh,$$

откуда  $h = \frac{(v^2/(2g)) - \mu L}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}$ . Заметим, что так как  $v > \sqrt{2\mu g L}$ , то  $h > 0$ .

Подставляя выражение для  $h$  в предыдущее уравнение, сокращая на  $m$  и деля обе части на  $\mu g$ , получаем:

$$\frac{v^2}{2\mu g} = 2L - l + 2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\frac{v^2}{2g} - \mu L}{1 + \mu \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Отсюда окончательно имеем:

$$l = L \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{\mu + \operatorname{tg} \alpha} - \frac{v^2}{2\mu g} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{\operatorname{tg} \alpha + \mu}.$$

**1.165\***. Рассмотрим ситуацию, когда магазин расположен крышкой вверх, и в нём находятся  $n$  патронов (см. рис. 1.165). При этом на верхний патрон со стороны крышки действует сила  $F_1$ , на следующий патрон со стороны верхнего — сила  $F_2 = F_1 + mg$ , на третий патрон со стороны лежащего над ним второго — сила  $F_3 = F_2 + mg = F_1 + 2mg$ , и так далее. На  $n$ -й патрон снизу, со стороны поршня, действует сила  $F_{n+1} = F_1 + nmg$ , которая возникает из-за деформации пружины и равна  $F_{n+1} = F_0 + knd$ . Здесь  $k$  — коэффициент жёсткости пружины,  $d$  — диаметр патрона, а  $F_0$  — сила, с которой поршень прижимается к крышке при пустом магазине. Отсюда получаем:  $F_1 = F_0 + (kd - mg)n$ . Сила трения скольжения, действующая на верхний патрон при его вытаскивании, равна

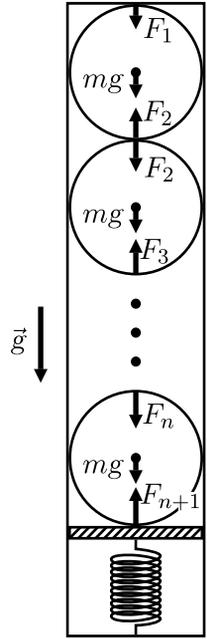


Рис. 1.165.

$$F_{\text{тр}} = \mu(F_1 + F_2) = \mu(2F_1 + mg) = \mu(2F_0 + 2(kd - mg)n + mg),$$

а работа, которую нужно совершить при вытаскивании этого патрона:

$$A_n = \mu L(2F_0 + 2(kd - mg)n + mg).$$

Полная работа, необходимая для опустошения магазина, в данном случае равна

$$A = \sum_{n=1}^N A_n = \mu L N(2F_0 + mg) + 2\mu L(kd - mg) \sum_{n=1}^N n =$$

$$\begin{aligned}
 &= \mu LN(2F_0 + mg) + 2\mu L(kd - mg) \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \\
 &= \mu LN(2F_0 + kd(N+1) - mgN).
 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулой для вычисления суммы первых  $N$  членов арифметической прогрессии:  $\sum_{n=1}^N n = \frac{N(N+1)}{2}$ .

Если перевернуть магазин крышкой вниз, то на рисунке направление силы тяжести изменится на противоположное. Поэтому для того, чтобы найти работу по опустошению магазина во втором случае, нужно в выражении для  $A$  изменить знак перед  $g$ . В итоге получим:  $A' = \mu LN(2F_0 + kd(N+1) + mgN)$ .

Таким образом, во втором случае работа будет больше на величину  $\Delta A = A' - A = 2\mu mgLN^2$ .

**1.166\***. Неподвижно лежащий мяч деформируется по действием собственного веса (см. рис. 1.166). При подпрыгиваниях мяча, начиная с некоторого момента, его центр масс приподнимается над своим равновесным положением на столь малую высоту, что оболочка уже не отрывается от пола. Поскольку при каждом ударе мяча об пол в тепло переходит половина его энергии, то высота подскоков при этом уменьшается в 2 раза, то есть высота подскока после  $n$ -го удара составляет  $h_n = (1/2)^n H$ .

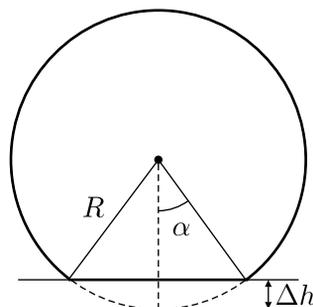


Рис. 1.166.

Так как деформация мяча при ударах невелика, то можно считать, что не касающаяся пола часть поверхности мяча по-прежнему сферическая, а место касания площадью  $S$  становится плоским. Запишем условие равновесия неподвижно лежащего мяча:  $\Delta p S = mg$ . Заметим, что

$$S = \pi R^2 \sin^2 \alpha = \pi R^2 \cdot \frac{R^2 - (R - \Delta h)^2}{R^2} \approx 2\pi R \Delta h,$$

где  $\Delta h$  — статическая деформация лежащего мяча. Отсюда  $\Delta h = \frac{mg}{2\pi R \Delta p} \approx 0,16 \text{ мм} \ll R$ , то есть записанное выше приближённое равенство справедливо.

Вычислим теперь величины высот подскоков  $h_n$  мяча после  $n$ -го удара и сравним их с величиной статической деформации  $\Delta h$ . Расчёты показывают, что  $h_{13} \approx 0,12 \text{ мм} < \Delta h < h_{12} \approx 0,24 \text{ мм}$ . Отсюда следует, что мяч подпрыгнет 12 раз, а ударится о пол 13 раз.

**1.167\***. После удара верхнего бруска о стену его скорость изменится на противоположную по направлению, сохранив свой модуль, а скорость нижнего бруска не изменится. После этого бруски начнут двигаться навстречу друг другу с одинаковыми по модулю начальными скоростями и равными по модулю, но противоположно направленными ускорениями. Из-за этого скорости брусков будут уменьшаться, всё время оставаясь равными друг другу. В результате нижний брусок либо не достигнет стены, либо всё же ударится о неё, имея некоторую скорость  $u$ . В первом случае оба бруска останутся стоять неподвижно на некотором расстоянии от стены. Во втором случае нижний брусок, ударившись о стену, поменяет направление своей скорости на противоположное, в результате чего проскальзывание между брусками прекратится, и оба бруска продолжат движение со скоростью, равной  $u$ , в направлении от стены. Рассмотрим отдельно оба описанных случая.

Поместим начало координатной оси  $X$  в угол между стеной и полом и направим её в сторону первоначального движения брусков (см. рис. 1.167). Ясно, что после первого удара сила трения между брусками  $F_{\text{тр}} = \mu Mg$ , а ускорения нижнего и верхнего брусков по модулю равны  $F_{\text{тр}}/M = \mu g$ . Тогда закон движения передней грани нижнего бруска

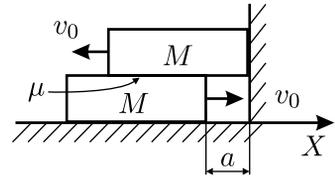


Рис. 1.167.

имеет вид:  $x(t) = -a + v_0 t - \frac{\mu g t^2}{2}$ , а его скорость изменяется по закону  $v(t) = v_0 - \mu g t$ . Время отсчитывается от момента удара верхнего бруска о стену. Найдём ограничение на величину скорости  $v_0$ , при которой нижний брусок не достигнет стены, то есть координаты  $x = 0$ . Оно следует из неравенства  $x(t) < 0$ . Решая его, находим, что дискриминант квадратного трёхчлена, содержащегося в неравенстве, отрицателен при  $v_0^2 < 2a\mu g$ . Это и есть искомое ограничение. Время, через которое нижний брусок остановится, можно определить, приравняв его скорость  $v(t)$  нулю:  $t_1 = v_0/(\mu g)$ . Значит, при  $v_0^2 < 2a\mu g$  оба бруска в конце концов остановятся. Это — первый ответ задачи.

Пусть теперь  $v_0^2 \geq 2a\mu g$ . Приравняв нулю  $x(t)$ , найдём, через какое время  $t_2$  нижний брусок стукнется о стену:

$$t_2^{(1,2)} = \frac{v_0}{\mu g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g} = t_1 \pm \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Для того, чтобы нижний брусок стукнулся о стену, нужно, чтобы выполнялось условие  $t_2 < t_1$  (иначе брусок остановится раньше, чем

доедет до стены). Поэтому один из ответов для  $t_2$  нужно отбросить, и остаётся только решение со знаком «минус» перед корнем:

$$t_2 = \frac{v_0}{\mu g} - \frac{\sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}}{\mu g}.$$

Теперь можно найти скорость, которую будут иметь оба бруска после окончания их взаимодействия со стеной:

$$u = v_0 - \mu g t_2 = \sqrt{v_0^2 - 2a\mu g}.$$

**1.168\***. При каждом упругом соударении бруска и коробки они обмениваются скоростями. После первого соударения брусок остановится, а коробка поедет направо со скоростью  $v_0$ . Запишем уравнение движения коробки:

$$\frac{m\Delta v}{\Delta t} = -\gamma v,$$

откуда  $m\Delta v = -\gamma v\Delta t = -\gamma\Delta S$ , и  $mv_0 = \gamma S$ , где  $S$  — путь, пройденный коробкой. Следовательно, коробка проедет расстояние  $L$  и сможет столкнуться с бруском при выполнении условия  $S > L$ , то есть при  $mv_0 > \gamma L$ . При этом её скорость перед вторым соударением будет равна  $v_1 = v_0 + \Delta v = v_0 - \gamma L/m$ . При втором соударении брусок приобретёт скорость  $v_1$ , а коробка остановится. При третьем соударении брусок остановится, а коробка приобретёт скорость  $v_1$ , после чего все описанные процессы будут повторяться до тех пор, пока коробка не остановится.

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что соударения с нечётными номерами будут обязательно происходить, а соударения с чётными номерами могут как происходить, так и не происходить — в зависимости от того, чему равна скорость коробки после предыдущего соударения, имеющего нечётный номер.

Заметим, что при движении коробки по столу между двумя последовательными соударениями с бруском её скорость каждый раз изменяется на одну и ту же величину  $\Delta v = -\gamma L/m$ . Поэтому соударение с номером  $2n$  произойдёт, если скорость коробки перед этим соударением будет положительна:  $v_n = v_0 - n\gamma L/m > 0$ . Следовательно, брусок совершит  $2n + 1$  ударов о коробку, где  $n$  — наибольшее целое число, удовлетворяющее условию  $n < mv_0/(\gamma L)$ .

**1.169\***. Поскольку трением между трубами во время удара можно пренебречь, удар абсолютно упругий и трубы одинаковы, то после удара катившаяся труба потеряет поступательную компоненту движения, но

сохранит вращение, а покоившаяся труба приобретёт поступательное движение, но не будет вращаться. Таким образом, обе трубы начнут проскальзывать относительно поверхности, причём одна из них будет ускоряться, а вторая — замедляться. Величины ускорений обеих труб одинаковы по модулю, направлены в разные стороны и равны  $a = \mu g$ , поскольку на каждую трубу в горизонтальном направлении действует сила трения  $F_{\text{тр}} = \mu mg$ .

Рассмотрим движение второй трубы, которая приобрела поступательное движение и в начальный момент времени не вращалась (см. рис. 1.169). Скорость её оси уменьшается по закону:  $v_1 = v - at = v - \mu gt$ . Линейная скорость точки касания трубы с поверхностью имеет относительно оси трубы

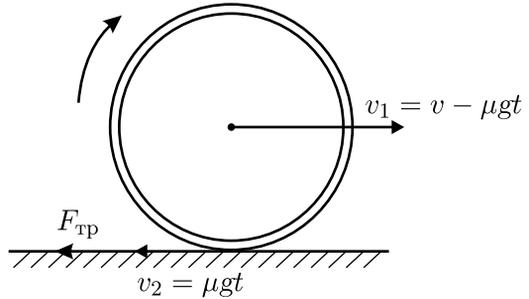


Рис. 1.169.

скорость:  $v_2 = at = \mu gt$ , которая увеличивается. Проскальзывание трубы прекратится в тот момент, когда скорости  $v_1$  и  $v_2$  сравняются. Отсюда  $v - \mu gt = \mu gt$ , и для времени  $t_0$ , через которое прекратится проскальзывание, получаем:  $t_0 = \frac{v}{2\mu g}$ .

Для первой трубы всё будет происходить аналогично, с той лишь разницей, что скорость оси трубы будет нарастать по закону  $v_2 = at = \mu gt$ , а линейная скорость точки касания трубы с поверхностью (относительно оси) будет уменьшаться по закону  $v_1 = v - at = v - \mu gt$ .

Таким образом, проскальзывание труб прекратится через одинаковое время  $t_0$ , и скорости их движения после этого станут одинаковыми и равными  $v/2$ . После того, как скорости труб сравняются, расстояние между ними перестанет увеличиваться. Значит, для того, чтобы найти максимальное расстояние между трубами, нужно вычислить разность их координат через время  $t_0$ . Если начало координат поместить в место, где происходит соударение, то для координаты оси первой трубы через время  $t_0$  имеем:

$$x_1 = -R + \frac{at_0^2}{2} = -R + \frac{v^2}{8\mu g},$$

а для координаты оси второй трубы через время  $t_0$ :

$$x_2 = R + vt_0 - \frac{at_0^2}{2} = R + \frac{3v^2}{8\mu g},$$

где  $R$  — радиус трубы. Значит, расстояние между осями труб через время  $t_0$  будет равно

$$S = x_2 - x_1 = 2R + \frac{v^2}{4\mu g},$$

а искомое максимальное расстояние между трубами

$$L = S - 2R = \frac{v^2}{4\mu g}.$$

Это расстояние можно также найти более простым способом: трубы удаляются друг от друга после удара с ускорением  $a_{\text{отн}} = 2a = 2\mu g$  в течение времени  $t_0$ , поэтому искомое максимальное расстояние между ними равно  $L = \frac{a_{\text{отн}} t_0^2}{2} = \frac{v^2}{4\mu g}$ .

**1.170.** Для решения задачи воспользуемся правилом рычага. При взвешивании груза неизвестной массы  $m$  на плечи коромысла длины  $L$  действуют силы  $mg$ ,  $Mg$  и  $m_k g$ , где  $m_k$  — масса коромысла (см. рис. 1.170). Плечи этих сил относительно оси, проходящей через точку опоры перпендикулярно плоскости рисунка, равны  $(0,5 + x)L$ ,  $(0,5 - x)L$  и  $xL$  соответственно.

Условие равновесия рычага имеет вид:

$$mg(0,5 + x)L + m_k g x L = Mg(0,5 - x)L,$$

откуда

$$m = \frac{M(0,5 - x) - m_k x}{0,5 + x}.$$

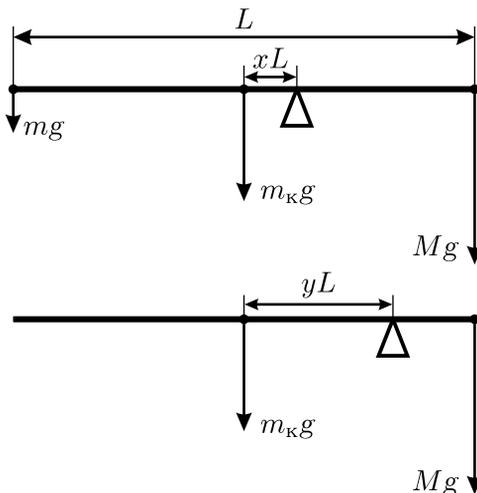


Рис. 1.170.

Рассмотрим теперь второе взвешивание (без груза неизвестной массы), которое позволит нам найти массу коромысла. Плечи сил  $Mg$  и  $m_{\text{к}}g$  будут теперь равны  $(0,5 - y)L$  и  $yL$  соответственно. Тогда условие равновесия рычага даёт:

$$m_{\text{к}}gyL = Mg(0,5 - y)L,$$

откуда

$$m_{\text{к}} = \frac{M(0,5 - y)}{y}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m &= \frac{M(0,5 - x) - \frac{M(0,5 - y)}{y} \cdot x}{0,5 + x} = M \frac{y - x}{y(1 + 2x)} = \\ &= M \frac{(1/3) - (1/4)}{(1/3)(1 + 2 \cdot (1/4))} = \frac{M}{6}. \end{aligned}$$

**1.171\***. Из рисунка (в условии задачи) понятно, что продавец использует неравноплечие весы, причём длины плеч весов неизвестны и по условию задачи измерять их нельзя! Сначала, ради интереса, рассмотрим, как взвешивает рыбу продавец. Он может взвесить рыбу сначала на одной чашке весов, уравновесив её гирями массой  $m_1$ , а затем на второй чашке, уравновесив её гирями массой  $m_2$ . Обозначим длину одного из плеч весов  $a$ , а другого  $b$ . Тогда условия равновесия весов при первом и втором взвешиваниях запишутся в виде:

$$ta = m_1b, \quad m_2a = tb,$$

где  $m$  — неизвестная масса рыбы. Разделив эти соотношения друг на друга, получим:  $m^2 = m_1m_2$ , откуда  $m = \sqrt{m_1m_2}$ .

Покупателю этот путь недоступен, так как рыба всё время лежит на одной чашке весов. Однако, он может взвесить рыбу сначала на одной чашке весов, уравновесив её гирями массой  $m_1$ , а затем может добавить на чашку, где лежит рыба, гирию известной массы  $m_3$ , и вновь провести взвешивание. При этом чашка с рыбой и гирей будет уравновешена гирями массой  $m_4$ . Условия равновесия весов в этом случае запишутся в виде:

$$ta = m_1b, \quad (m + m_3)a = m_4b.$$

Разделив эти соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{m}{m + m_3} = \frac{m_1}{m_4},$$

откуда для истинной величины массы рыбы  $m$  получается следующее выражение:

$$m = \frac{m_1 m_3}{m_4 - m_1}.$$

Так как в знаменателе стоит разность масс гирь при двух взвешиваниях, то для повышения точности измерений необходимо, чтобы эта разность была не очень мала, то есть нужно, чтобы массы  $m_1$  и  $m_4$  были не очень близки. Этого можно достичь, выбирая гирю  $m_3$  побольше, тогда полученный результат будет точнее.

**1.172.** Одна из возможных схем представлена на рисунке 1.172.1. Действительно, если тянуть за нить с силой  $f$ , то на каждый подвижный блок со стороны нити будет действовать сила  $2f$ , а на поднимаемое тело будет действовать суммарная сила  $7f$ .

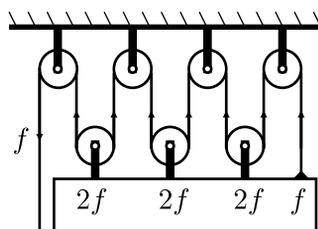


Рис. 1.172.1.

Другая возможная схема представлена на рисунке 1.172.2. В этом случае сила натяжения нити равна  $f/2$ , на каждый подвижный блок действует сила  $f$ , и на поднимаемое тело будет действовать суммарная сила  $7f$ .

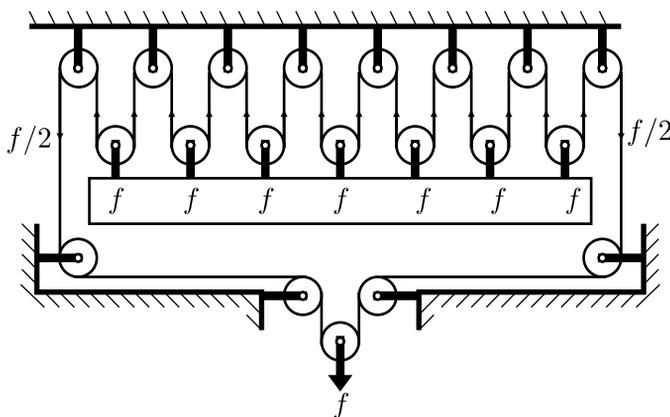


Рис. 1.172.2.

Заметим, что подобные схемы соединения блоков используются в подъёмных механизмах — полиспастах и башенных кранах.

**1.173.** Из приведённого в условии графика видно, что при достаточно больших смещениях  $x$  середины нити прикладываемая к ней сила  $F$  стремится к постоянной величине 20 Н. Это связано с тем, что при больших  $x$  все участки нити становятся почти вертикальными, и поэтому пути, проходимые каждым из грузов в единицу времени, совпадают с путём, который проходит середина нити. Из «золотого правила механики» следует, что отсутствие выигрыша (или проигрыша) в перемещении означает отсутствие проигрыша (или выигрыша) в силе. Следовательно, сила  $F$  должна стремиться к величине, равной суммарному весу двух грузов:  $F \approx 2mg \approx 20$  Н. Отсюда  $m \approx F/(2g) \approx 1$  кг.

**1.174.** Пусть  $r$  — радиус бревна кабестана,  $R$  — расстояние от оси старого кабестана до концов его ручек,  $M$  — масса нового якоря,  $V_{\text{я}}$  — его объём. Из условия известно, что якорная команда, пользуясь старым воротом, поднимает новый якорь только до уровня воды. Значит, в этом положении момент силы  $F$ , с которой матросы действуют на концы ручек ворота, равен моменту силы натяжения цепи, которая, в свою очередь, равна сумме сил тяжести и Архимеда, действующих на якорь. Запишем уравнение моментов:

$$RF = r(Mg - \rho_{\text{в}}gV_{\text{я}}) = r \left( Mg - \rho_{\text{в}}g \frac{M}{\rho_{\text{я}}} \right) = Mgr \left( 1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{я}}} \right).$$

Здесь  $\rho_{\text{в}}$  и  $\rho_{\text{я}}$  — плотности воды и якоря соответственно.

После удлинения ручек кабестана матросы, прикладывая прежнюю силу  $F$ , могут полностью вытащить якорь из воды. Это означает, что для нового ворота при полностью поднятом якоря справедливо уравнение моментов

$$R_1F = Mgr,$$

где  $R_1$  — длина новых ручек ворота. Из полученных уравнений легко найти отношение длин ручек нового и старого кабестанов:

$$k = \frac{R_1}{R} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{я}}}} = \frac{8}{7} \approx 1,14 \text{ раза.}$$

**1.175.** Очевидно, что до тех пор, пока груз во время медленного проталкивания цилиндра под маятником не коснётся цилиндра, сила натяжения верёвки  $T = mg$ . При этом из условий равновесия цилиндра и лежащего на нём участка верёвки следует, что минимальная сила  $F$ , которую нужно прикладывать к оси цилиндра в горизонтальном направлении, по величине должна равняться (см. рис. 1.175.1) горизонтальной проекции силы  $T$ , равной  $T \sin \alpha = mg \sin \alpha$  (здесь  $\alpha$  — угол,

который наклонный участок верёвки образует с вертикалью). Поскольку длина верёвки  $2R > \pi R/2$ , то сила  $F$  постепенно возрастает от нуля до максимального значения, равного  $mg$ .

Из условий равновесия груза после того, как он коснётся цилиндра (см. рис. 1.175.2), следует, что сила натяжения верёвки будет уменьшаться по закону  $T = mg \cos \beta$  (здесь  $\beta$  — угол между горизонталью и радиусом, проведённым в точку касания груза с цилиндром), поскольку часть веса груза компенсируется появившейся силой реакции опоры  $N$ . Из условий равновесия системы, состоящей из цилиндра, груза и участка верёвки, лежащего на цилиндре, следует, что сила  $F = T = mg \cos \beta$ . Таким образом, после касания груза и цилиндра сила  $F$  убывает по величине от  $mg$  до нуля.

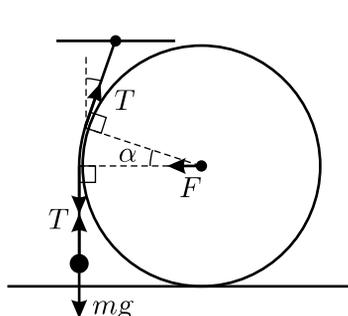


Рис. 1.175.1.

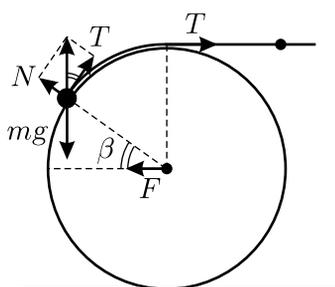


Рис. 1.175.2.

Поэтому минимальная сила, необходимая для того, чтобы медленно протолкнуть цилиндр под маятником, равна  $F_{\min} = mg$ .

**1.176.** Центр тяжести каждого из трёх квадратов, составляющих полоску, находится в его центре. Поэтому центр масс полоски находится на расстоянии  $a/3$  от центра нижнего квадрата (см. рис. 1.176). Ясно, что полоска перевернётся тогда, когда её центр масс будет расположен правее нижнего угла — точки  $A$  на рисунке, то есть когда

$$\alpha > \arctg \frac{a/3}{a/2} = \arctg \frac{2}{3} \approx 33,7^\circ.$$

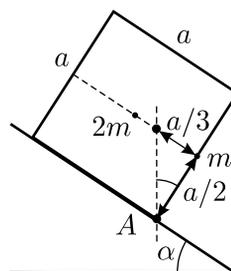


Рис. 1.176.

**1.177.** Нарисуем вид стола сбоку в плоскости, проходящей через короткую и противоположную ей длинную ножки стола (см. рис. 1.177).

Обозначим короткую ножку стола через  $AA'$ , противоположную ей длинную ножку —  $DD'$ , середину столешницы —  $O$ . Пусть также  $OO'$  — прямая, проходящая через точку  $O$  параллельно ножкам и пересекающая пол в точке  $O'$ ;  $A'E$  и  $OF$  — перпендикуляры, опущенные из

точек  $A'$  и  $O$  на отрезки  $OO'$  и  $A'O'$  соответственно. Опустим перпендикуляр из точки  $D$  на пол и обозначим точку его пересечения с полом через  $I'$ . Проведём также через точку  $O$  прямую, параллельную полу, и обозначим точки её пересечения с отрезками  $DI'$  и  $DD'$  через  $I$  и  $G$  соответственно. Из условия задачи и из чертежа следует, что

$$OD = L/\sqrt{2}, \quad OO' = H, \quad O'E = a, \quad OG = O'A'.$$

Из того, что стол, поставленный на три длинные ножки, стоит устойчиво, следует, что его центр масс находится в центре столешницы, то есть в точке  $O$ . Известно также, что для того, чтобы перекосившийся стол выровнялся, на его угол  $D$  нужно положить груз, не меньший  $m$ . Отсюда получаем уравнение моментов:

$$Mg \cdot O'F = mg \cdot O'I',$$

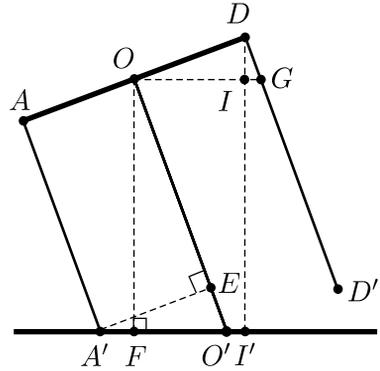


Рис. 1.177.

где  $M$  — масса крышки стола. Данное уравнение записано относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку  $O'$ . Осталось найти из чертежа отрезки  $O'F$  и  $O'I'$ .

Рассмотрим треугольники  $O'EA'$  и  $O'FO$ . Они подобны. Поэтому  $\frac{O'F}{OO'} = \frac{O'E}{O'A'}$ . Отсюда

$$O'F = \frac{O'E \cdot OO'}{O'A'} = \frac{aH}{\sqrt{(L^2/2) + a^2}}.$$

Треугольники  $DOG$  и  $IOD$  также подобны. Поэтому  $\frac{OG}{OD} = \frac{OD}{OI}$ . Отсюда, с учётом того, что  $OG = O'A' = \sqrt{(L^2/2) + a^2}$ , получаем:

$$OI = \frac{(OD)^2}{OG} = \frac{L^2}{2\sqrt{(L^2/2) + a^2}} = FI'.$$

Наконец, из чертежа видно, что

$$O'I' = FI' - O'F = \frac{1}{\sqrt{(L^2/2) + a^2}} \left( \frac{L^2}{2} - aH \right).$$

Подставляя найденные выражения для  $O'F$  и  $O'I'$  в уравнение моментов, найдём массу крышки стола:

$$M = m \frac{O'I'}{O'F} = m \left( \frac{L^2}{2aH} - 1 \right) = 4,7 \text{ кг.}$$

Ответ также можно получить и приближённо, пренебрегая во всех формулах величиной  $a^2$  по сравнению с  $L^2/2$  и считая, что  $O'I' \approx L/\sqrt{2}$ , а  $O'F \approx \sqrt{2}aH/L$  (это можно делать, так как угол, на который наклоняется стол, мал). Тогда для массы крышки стола получится:  $M \approx mL^2/(2aH) = 5 \text{ кг}$ .

**1.178\***. Будем считать, что картина является однородной и висит ровно, то есть касается стены нижней стороной. Обозначим искомый угол между картиной и стеной в положении равновесия через  $\alpha_0$ , угол между верёвкой и стеной — через  $\beta_0$ , силу натяжения верёвки при равновесии через  $T$ , а соответствующую силу реакции стены в точке  $O$  — через  $N$  (см. рис. 1.178). Запишем условия равновесия картины. Сумма проекций сил на горизонтальное и вертикальное направления должна быть равна нулю, откуда

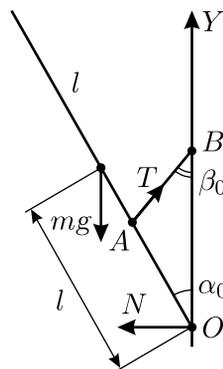


Рис. 1.178.

$$N = T \sin \beta_0, \quad mg = T \cos \beta_0.$$

Сумма моментов сил относительно точки  $A$  также равна нулю:

$$mgd \sin \alpha_0 = N(l - d) \cos \alpha_0.$$

Используя теорему синусов для треугольника  $AOB$ , имеем:

$$a \sin \beta_0 = (l - d) \sin \alpha_0.$$

Прежде всего заметим, что у этой системы уравнений имеется простое решение:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0.$$

При этом  $T = mg$  и  $N = 0$ , то есть картина висит вертикально.

Если считать, что  $\alpha_0 \neq 0$ , то из записанной системы уравнений следует, что  $N = mgtg \beta_0$ , и  $tg \beta_0 = \frac{d}{l - d} tg \alpha_0$ . С учётом этого получаем

второе решение:

$$\sin^2 \alpha_0 = \frac{\left(\frac{a}{l-d}\right)^2 - \left(\frac{l-d}{d}\right)^2}{1 - \left(\frac{l-d}{d}\right)^2}. \quad (1)$$

Исследуем полученные решения, то есть найдём, при каких соотношениях между  $d$ ,  $a$  и  $l$  они реализуются. Для этого определим, как зависит потенциальная энергия  $U$  картины от величины угла  $\alpha$ , который она составляет со стеной. Направим координатную ось  $Y$  вверх и будем отсчитывать потенциальную энергию от положения, в котором находится центр масс картины при натянутой вертикально верёвке:  $U(\alpha) = mgy(\alpha)$ , где

$$y(\alpha) = a(1 - \cos \beta) - d(1 - \cos \alpha) = a - d + d \cos \alpha - \sqrt{a^2 - (l-d)^2 \sin^2 \alpha}. \quad (2)$$

(здесь  $\beta$  — угол между стеной и верёвкой тогда, когда картина образует со стеной угол  $\alpha$ ).

Выясним, при каких условиях найденные выше значения  $\alpha_0$  соответствуют положению устойчивого равновесия. Для этого предположим, что картина сначала была прижата к стене при натянутой верёвке, то есть составляла со стеной угол  $\alpha = 0$  и имела при этом потенциальную энергию  $U(0) = 0$ . Для того, чтобы положение равновесия, соответствующее  $\alpha_0 = 0$ , было устойчивым, необходимо, чтобы при небольшом отклонении картины от вертикального положения её центр масс поднимался, что соответствует увеличению потенциальной энергии картины.

Пусть картина отклонилась от вертикального положения на небольшой угол  $\Delta\alpha$ . При этом высота её центра масс стала равна

$$y(\Delta\alpha) = a - d + d \cos \Delta\alpha - \sqrt{a^2 - (l-d)^2 \sin^2 \Delta\alpha}.$$

Так как  $\Delta\alpha \ll 1$ , то  $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$ , а  $\cos \Delta\alpha \approx 1 - (\Delta\alpha)^2/2$ . С учётом этого изменение высоты центра масс картины

$$\begin{aligned} \Delta y &= y(\Delta\alpha) - y(0) \approx \\ &\approx a - d + d \left(1 - \frac{(\Delta\alpha)^2}{2}\right) - \sqrt{a^2 - (l-d)^2 (\Delta\alpha)^2} = \\ &= a - \frac{(\Delta\alpha)^2 d}{2} - \sqrt{a^2 - (l-d)^2 (\Delta\alpha)^2} > 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что  $ad - (l - d)^2 < \left(\frac{d\Delta\alpha}{2}\right)^2$ . Так как  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ , то из записанного неравенства следует ограничение на параметры задачи:  $a < (l - d)^2/d$  при  $\alpha_0 = 0$ .

Теперь рассмотрим случай  $\alpha_0 \neq 0$ . При этом угол, соответствующий положению равновесия, выражается формулой (1). Это равновесие будет устойчивым в том случае, если при отклонении картины от вертикального положения на небольшой угол её потенциальная энергия убывает (центр масс опускается), то есть  $\Delta y < 0$ . Отсюда следует, что для устойчивости равновесия картины при  $\alpha_0 \neq 0$  должно выполняться условие:  $a > (l - d)^2/d$ . Кроме того, в этом случае выражение, содержащееся под корнем в формуле (2), должно быть неотрицательным:  $a^2 - (l - d)^2 \sin^2 \alpha \geq 0$ , откуда  $\sin \alpha \leq \frac{a}{l - d} < 1$  (картина не может находиться в равновесии, располагаясь перпендикулярно стене). Отсюда получаем дополнительное ограничение на параметры задачи:  $a < (l - d)$ .

Таким образом, положение равновесия, соответствующее углу  $\alpha_0 \neq 0$ , будет устойчивым при  $(l - d)^2/d < a < (l - d)$ . Именно при выполнении этих условий картина не перевернётся. Из полученных условий следует, что точка крепления верёвки к картине должна находиться на расстоянии  $d > l/2$  ниже её центра масс. Легко проверить, что при указанных условиях  $0 < \sin^2 \alpha_0 < 1$ , как это и должно быть.

Заметим, что формулу (1) для  $\alpha_0$  можно получить и непосредственно из выражения для  $U(\alpha)$ , найдя при помощи дифференцирования экстремум этой функции, а затем выяснив, при каких условиях он является минимумом.

**1.179\***. Обозначим радиус дуги через  $R$ , силы реакции, действующие на проволоку со стороны верхнего и нижнего гвоздей, через  $N$  и  $F$  соответственно, а расстояние  $OD$  от центра окружности, частью которой является дуга, до центра масс проволоочной фигуры через  $h$  (см. рисунок 1.179).

Отметим, что центр масс фигуры лежит на оси её симметрии. Так как проволока гладкая, то сила  $F$  направлена к центру указанной окружности. Введём координатные оси  $X$  (горизонтальную) и  $Y$  (вертикальную) и запишем условия равновесия проволоки:

$$\begin{aligned} N_x &= F \sin \beta; \\ N_y + F \cos \beta &= mg; \\ FR \sin \beta &= mg(R - h \operatorname{ctg} \beta) \sin \beta. \end{aligned}$$

Здесь  $N_x$  и  $N_y$  — проекции силы  $N$  на координатные оси,  $\beta = \pi/3$  — угол между вертикалью и диаметром  $AC$  при наличии нижнего гвоздя. При отсутствии нижнего гвоздя, когда проволока находится в положении равновесия, её центр масс лежит на вертикальной прямой, проходящей через верхний гвоздь. Следовательно,  $h = R \operatorname{tg} \alpha_0$ . Решая с учётом этого полученную систему уравнений, имеем

$$F = mg \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{3}} \right),$$

$$N_x = \frac{mg\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{3}} \right),$$

$$N_y = \frac{mg}{2} \left( 1 + \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{3}} \right).$$

Искомая сила  $T$ , с которой проволока давит на гвоздь, равна по величине силе  $N$  и противоположна ей по направлению. Таким образом,

$$T = N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = mg \sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{3}}.$$

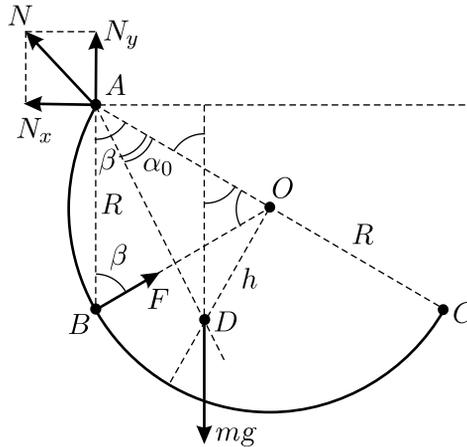


Рис. 1.179.

Заметим, что заданный в условии задачи угол  $\alpha_0$  можно найти при помощи следующего приёма. Расположим проволочную дугу так, чтобы её концы лежали на одной вертикальной прямой, после чего повернём её на малый угол  $\Delta\varphi$  вокруг оси, проходящей перпендикулярно плоскости дуги через точку  $O$ . При этом потенциальная энергия

дуги, с одной стороны, увеличится на  $m \cdot \frac{\Delta\varphi}{\pi} \cdot g \cdot 2R$ , так как элемент проволоки массой  $m \cdot \frac{\Delta\varphi}{\pi}$  поднимется на высоту  $2R$ . С другой стороны, это же увеличение потенциальной энергии равно  $mg \cdot h\Delta\varphi$ , так как центр масс дуги поднимется на высоту  $h\Delta\varphi$ . Приравнявая эти выражения, получим, что  $h = 2R/\pi$ , а  $\operatorname{tg} \alpha_0 = h/R = 2/\pi$ . Поэтому полученный выше ответ задачи можно не исследовать — содержащаяся под корнем величина заведомо положительна.

**1.180\***. Пусть  $T$  и  $T_1$  — силы натяжения среднего и каждого из крайних отрезков троса соответственно,  $\Delta x$  и  $\Delta x_1$  — удлинения среднего и крайних отрезков,  $E$  и  $S$  — модуль Юнга и площадь поперечного сечения троса,  $L$  — расстояние между точками подвеса его крайних и среднего отрезков (см. рис. 1.180).

Найдём связь между удлинениями отрезков троса, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$\left(\frac{L}{\sin \alpha} + \Delta x_1\right)^2 = \Delta x^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \alpha} + 2\Delta x \frac{L}{\sin \alpha} \cos \alpha.$$

Отсюда, пренебрегая квадратами малых удлинений по сравнению с их первыми степенями, получаем:  $\Delta x_1 \approx \Delta x \cos \alpha$ .

Таким образом, в соответствии с законом Гука,

$$T = ES \cdot \frac{\Delta x}{L/\operatorname{tg} \alpha} = \frac{ES\Delta x \sin \alpha}{L \cos \alpha},$$

$$T_1 = ES \cdot \frac{\Delta x_1}{L/\sin \alpha} = \frac{ES\Delta x \cos \alpha \sin \alpha}{L},$$

откуда  $T_1 = T \cos^2 \alpha$ .

Поскольку груз покоится, то сумма всех действующих на него сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на вертикальную ось:

$$T + 2T_1 \cos \alpha = mg.$$

Подставляя сюда выражение для  $T_1$ , получаем ответ:

$$T = \frac{mg}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

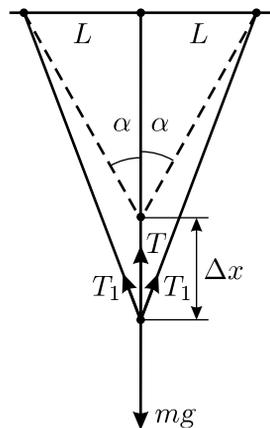


Рис. 1.180.

**1.181\***. Введём прямоугольную систему координат с началом в одном из углов пластинки и направим координатные оси  $X$  и  $Y$  вдоль её сторон. Нарисуем вид пластинки сверху (см. рис. 1.181.1) и обозначим через  $N_1, N_2, N_3$  и  $N_4$  силы натяжения нитей,  $L$  — длину стороны пластинки,  $m$  — массу груза.

Пусть груз находится в точке с координатами  $(x, y)$ . Запишем условия равновесия пластинки. Первое уравнение представляет собой условие равенства нулю суммы всех сил, действующих на пластинку:

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = mg. \quad (1)$$

Далее, сумма моментов всех сил относительно осей, параллельных осям координат и проходящих через точку, в которой находится груз, также должна быть равна нулю. Отсюда имеем ещё два уравнения:

$$(N_1 + N_4)y = (N_2 + N_3)(L - y), \quad (2)$$

$$(N_1 + N_2)x = (N_3 + N_4)(L - x). \quad (3)$$

Полученная система уравнений неполна. Для того, чтобы получить ещё одно уравнение, нужно найти, как связаны друг с другом величины малых деформаций нитей, возникших после того, как на пластинку положили тело. Пусть первая нить деформировалась на величину  $\Delta l_1$ , а три остальные — на величины  $\Delta l_2, \Delta l_3$  и  $\Delta l_4$  соответственно. Тогда центр пластинки сместился на некоторую величину  $h$ , которая равна

$$h = \frac{1}{2}(\Delta l_1 + \Delta l_3) = \frac{1}{2}(\Delta l_2 + \Delta l_4).$$

Поскольку  $N_i \sim \Delta l_i$  и все нити одинаковы, то из последнего соотношения получаем недостающее уравнение:

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4. \quad (4)$$

Решим полученную систему. Из уравнений (1) и (4) следует, что

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4 = \frac{mg}{2}. \quad (5)$$

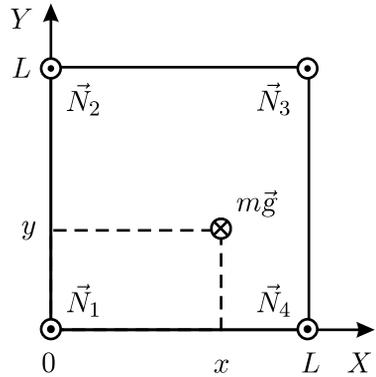


Рис. 1.181.

Преобразовывая уравнения (2) и (3) с учётом (1), получаем:

$$\begin{aligned}(N_1 + N_2 + N_3 + N_4)y &= mgy = (N_2 + N_3)L, \\ (N_1 + N_2 + N_3 + N_4)x &= mgx = (N_3 + N_4)L.\end{aligned}$$

Складывая их, с учётом (5) имеем

$$mg(x + y) = (N_2 + 2N_3 + N_4)L = \left(\frac{mg}{2} + 2N_3\right)L,$$

откуда

$$N_3 = \frac{mg}{2} \left(\frac{x + y}{L} - \frac{1}{2}\right).$$

Так как по условию все нити натянуты, то  $N_3 > 0$ , то есть  $y > \frac{L}{2} - x$ . Область пластинки, удовлетворяющая этому условию, изображена на рисунке 1.181.2. Таким образом, для того, чтобы третья нить была натянута, груз должен лежать в заштрихованной части пластинки. Поскольку все нити одинаковы и пластинка квадратная, то из соображений симметрии следует, что область, в которую можно положить точечный груз для того, чтобы все нити были натянуты, представляет собой квадрат с вершинами, находящимися в серединах сторон пластинки (заштрихован на рисунке 1.181.3).

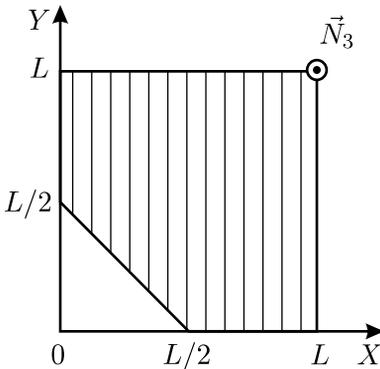


Рис. 1.181.2.

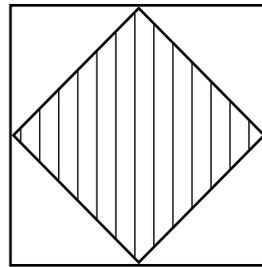


Рис. 1.181.3.

**1.182.** Представим себе, что вместо силы  $F_1$  на свободный конец верёвки подвешен груз весом  $m_1g = F_1 = 40$  Н, а вместо первоначального подвешенного груза массой  $m = 6$  кг на правый конец верёвки действует направленная вниз сила  $F = mg = 60$  Н. Из условия задачи следует, что если чуть-чуть увеличить силу  $F$ , что эквивалентно увеличению массы  $m$ , то начнётся скольжение. Таким, образом, мы знаем, что минимальная сила, необходимая для поднимания груза массой

$m_1 = 4$  кг, составляет  $F = 60$  Н. Ясно, что в предельном случае в любой касающейся бревна точке верёвки сила трения покоя достигает максимального значения, которое пропорционально силе давления верёвки на бревно в данном месте. Из соображений подобия следует, что эта максимальная сила трения покоя прямо пропорциональна весу поднимаемого груза. Отсюда находим, что  $\frac{F_2}{mg} = \frac{mg}{F_1}$ , то есть  $F_2 = \frac{(mg)^2}{F_1} = 90$  Н.

**1.183.** Пусть  $m$  — масса каждой пластинки,  $N$  — сила реакции со стороны бревна,  $\alpha$  — угол, равный половине угла раствора «книжки» (см. рис. 1.183). Запишем условие равновесия «книжки» в проекции на вертикальную ось:

$$2mg - 2N \sin \alpha = 0.$$

Рассмотрим далее, например, только левую пластинку. Так как она покоится, то сумма моментов всех действующих на неё сил, вычисленная относительно оси  $O$ , проходящей по линии склейки пластинок, равна нулю:

$$NR \operatorname{ctg} \alpha - mg \sin \alpha \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Из написанных соотношений, с учётом того, что  $l/R = 4$ , получим уравнение относительно  $\operatorname{ctg} \alpha$ :

$$\operatorname{ctg}^3 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha - 2 = 0.$$

Находящееся в его левой части выражение легко раскладывается на множители:

$$(\operatorname{ctg} \alpha - 1)(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + 2) = 0.$$

Так как второй множитель строго положителен (он представляет собой квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом), то единственному решению рассматриваемого уравнения соответствует  $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ . Следовательно,  $\alpha = 45^\circ$ , и искомый угол между пластинками равен  $2\alpha = 90^\circ$ .

**1.184\*.** Обозначим ось бревна буквой  $O$ , точку касания стержня и бревна —  $A$ , конец стержня, нависающий над бревном —  $B$ , точку касания бревна и верёвки, удерживающей стержень, буквой  $C$  (см. рис. 1.184). Треугольники  $OAB$  и  $OCB$  равны как прямоугольные, имеющие общую гипотенузу и равные катеты. Поэтому  $\angle OBA = \angle OBC = \varphi$ .

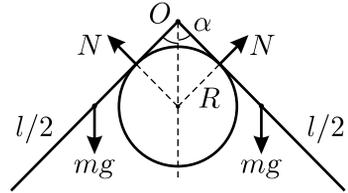


Рис. 1.183.

Поскольку верёвка, удерживающая стержень, невесома, и трения нет, то её сила натяжения постоянна по всей длине и равна  $Mg$ , где  $M$  — масса груза. Так как бревно скользкое, то для того, чтобы стержень находился в равновесии, необходимо, чтобы проекция суммарной силы на направление вдоль стержня была равна нулю:

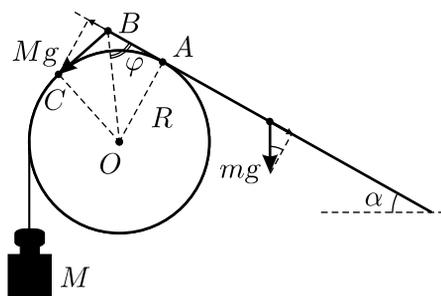


Рис. 1.184.

$$mg \sin \alpha = Mg \cos(\pi - 2\varphi) = Mg(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi).$$

Здесь  $m$  — масса стержня. Так как  $AB = R/\sqrt{2}$ , то из треугольника  $OAB$  находим:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{OA}{AB} = \sqrt{2}$ . Далее, воспользовавшись известными тригонометрическими соотношениями, получаем:

$$\frac{M}{m} = \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi} = \frac{\sin \alpha (\operatorname{tg}^2 \varphi + 1)}{\operatorname{tg}^2 \varphi - 1} = \frac{3}{2}.$$

**1.185\*.** Так как ёмкость наполнена водой до краёв и поверхностное натяжение пренебрежимо мало, то при решении задачи необходимо учесть выливание воды через края при небольших наклонах ёмкости.

Пусть ёмкость повернулась без проскальзывания по бревну на малый угол  $\alpha$  (см. рис. 1.185); при этом можно считать, что  $\cos \alpha \approx 1$ , а  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

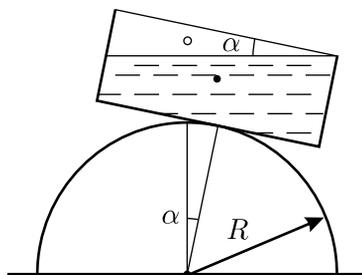


Рис. 1.185.

Тогда линия её опоры на бревно переместилась в горизонтальном направлении вправо на расстояние  $R\alpha$ . Центр масс воды при этом переместился по горизонтали в том же направлении, что и точка опоры, на некоторое расстояние  $X$ , которое можно определить из следующих соображений. Если бы вода не выливалась и её масса  $M$  оставалась постоянной, то центр масс воды (чёрная точка) сместился бы, очевидно, на расстояние  $X_0 \approx (H/2)\alpha$  (при этом мы пренебрегаем горизонтальным смещением ёмкости при её перекачивании по бревну). Однако, при перекачивании вылилась часть воды, соответствующая незаштрихованному треугольнику на рисунке.

Площадь этого прямоугольного треугольника  $S_1 \approx \frac{1}{2}L^2\alpha$ , масса вылив-

шейся воды  $M_1$  пропорциональна доле  $S_1$  от всей площади  $S = LH$ . Таким образом,  $M_1 = \frac{S_1}{S}M \approx \frac{L}{2H}M \cdot \alpha$ , а центр масс этой воды (светлый кружочек) находится на одной трети высоты  $L$  треугольника, то есть на расстоянии  $X_1 = L/6$  по горизонтали слева от центра ёмкости. Поэтому полное смещение центра масс ёмкости с водой после её наклона равно

$$X = \frac{MX_0 + M_1X_1}{M} \approx \frac{H}{2} \cdot \alpha + \frac{L^2}{12H} \cdot \alpha.$$

Для того, чтобы равновесие сосуда было устойчивым, нужно, чтобы его точка опоры смещалась на большее расстояние, чем смещается центр масс воды:  $R\alpha > X$ . Итак, положение сосуда будет устойчивым при  $R > \frac{H}{2} + \frac{L^2}{12H}$ .

**1.186.** Запишем условие устойчивого равновесия груза в проекции на ось  $X$ , перпендикулярную стержню (см. рис. 1.186):

$$F_{\text{упр}} \cos(\alpha/2) \geq Mg \sin \alpha,$$

где  $F_{\text{упр}} = k \cdot 2l \sin(\alpha/2)$ . При малых углах  $\alpha$  можно считать, что  $\cos \alpha \approx 1$ , а  $\sin \alpha \approx \alpha$ . Тогда  $F_{\text{упр}} \approx kl\alpha \geq Mg\alpha$ , откуда максимальная масса груза  $M \approx kl/g$ .

Задачу можно решать и из энергетических соображений. Для устойчивого равновесия необходимо, чтобы при отклонении стержня на малый угол  $\alpha$  потенциальная энергия растянутой пружины была не меньше величины уменьшения потенциальной энергии груза в поле силы тяжести:

$$\frac{k(\alpha l)^2}{2} \geq Mgl(1 - \cos \alpha) \approx Mgl \frac{\alpha^2}{2},$$

откуда получается то же самое ограничение на массу груза.

**1.187.** Сила натяжения нити, соединяющей блоки, одинакова по всей её длине и равна, очевидно,  $T = mg/2$ . Рассмотрим условия равновесия какого-либо из боковых блоков (см. рис. 1.187). Вычисляя моменты сил, действующих на этот блок, относительно его центра, получаем, что  $T = F_{\text{тр}}$ , а из условий равновесия блока в горизонтальном и в вертикальном направлениях имеем:

$$N = T \sin \alpha,$$

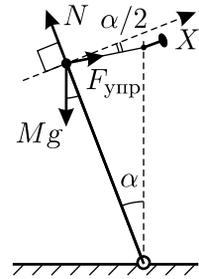


Рис. 1.186.

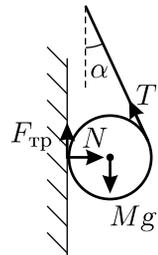


Рис. 1.187.

$$F_{\text{тр}} + T \cos \alpha = T(1 + \cos \alpha) = \frac{mg}{2}(1 + \cos \alpha) = Mg.$$

Отсюда

$$m = \frac{2M}{1 + \cos \alpha}$$

и

$$N = F_{\text{тр}} \sin \alpha \leq \mu N \sin \alpha,$$

то есть  $\mu \geq 1/\sin \alpha$ .

Покажем, что это равновесие устойчиво. Предположим, что нижний груз поднялся выше положения равновесия, тогда боковые блоки опустятся вниз, и угол  $\alpha$  уменьшится. Поэтому уменьшится и равновесное значение массы  $m$ , из чего следует, что при случайном поднятии груза  $m$  он будет возвращаться в прежнее положение. Опускание груза  $m$  рассматривается аналогично. Следовательно, равновесие действительно будет устойчивым.

**1.188.** На цилиндр со стороны рычагов действуют одинаковые силы  $F$ . Для того, чтобы цилиндр находился в равновесии, сумма этих сил и сумма их моментов должны равняться нулю. Это возможно только в том случае, когда эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, то есть точки касания цилиндра с рычагами (см. рис. 1.188). Из рисунка видно, что угол между направлением каждой из этих сил и нормалью к соответствующему рычагу равен  $\alpha/2$ . Силу  $\vec{F}$  можно представить как векторную сумму силы реакции рычага, равной по величине  $N = F \cos(\alpha/2)$  и направленной перпендикулярно рычагу, и силы трения, равной по величине  $F_{\text{тр}} = F \sin(\alpha/2)$  и направленной вдоль рычага. Поскольку  $F_{\text{тр}} = F \sin(\alpha/2) \leq \mu N = \mu F \cos(\alpha/2)$ , то  $\mu \geq \text{tg}(\alpha/2)$ .

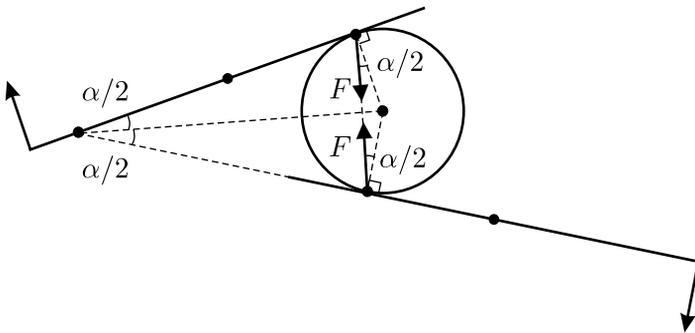


Рис. 1.188.

**1.189.** Если труба не вращается, то её скольжение по плоскости, наклонённой под углом  $\alpha$  к горизонту, начнётся при условии, что коэффициент трения трубы о плоскость  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ .

Условием отсутствия вращения является равенство нулю суммы моментов сил, действующих на трубу, записанное, например, относительно точки её опоры на плоскость. Максимальный угол  $\alpha_{\max}$ , при котором равновесие ещё возможно, определяется из соотношения (см. рис. 1.189):

$$MgR \sin \alpha_{\max} = mgR(1 - \sin \alpha_{\max}),$$

откуда  $\sin \alpha_{\max} = \frac{m}{m + M}$ . При больших углах, если скольжение ещё не началось, труба покатится вниз по плоскости. Поэтому для того, чтобы она начала соскальзывать без вращения, должно выполняться условие:

$$\mu < \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{\sin \alpha_{\max}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{\max}}} = \frac{m}{\sqrt{M(M + 2m)}}.$$

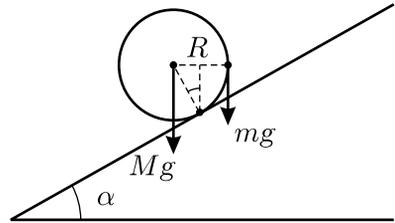


Рис. 1.189.

**1.190\*.** Масса груза  $M$  ограничивается двумя условиями. Во-первых,  $M$  не должна быть слишком велика — иначе шарик упадёт на землю. Во-вторых,  $M$  не должна быть слишком мала — иначе шарик покатится вверх по наклонному потолку. Рассмотрим оба этих условия отдельно.

1. Найдём максимальную массу  $M$ , при которой шарик ещё не будет падать вниз. Поскольку очевидно, что объём грузика очень мал по сравнению с объёмом шарика, при расчётах будем пренебрегать объёмом грузика. Тогда для того, чтобы шарик не падал, действующая на него сила Архимеда должна быть больше суммы сил тяжести, действующих на груз, резиновую оболочку и накачанный в неё газ:

$$\rho_0 gV > mg + Mg + \rho gV,$$

где  $V = (4/3)\pi R^3$  — объём воздушного шарика. Отсюда находим первое условие, которому должна удовлетворять масса груза:

$$M < \frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m. \quad (1)$$

2. Если груз, масса которого удовлетворяет условию (1), подвесить к нижней точке шарика, то шарик покатится вверх по потолку

(по условию задачи проскальзывания нет). Шарик будет проворачиваться до тех пор, пока момент силы тяжести  $L_M$ , действующей на груз, не скомпенсирует сумму моментов силы Архимеда и силы тяжести, действующей на шарик и на накачанный в него газ. Если же этого так и не произойдёт при максимально возможном значении момента  $L_M$ , то шарик будет катиться вверх по потолку.

Выберем для вычисления моментов сил горизонтальную ось, проходящую через точку касания шарика и потолка. Тогда максимально возможный момент силы тяжести, действующей на груз, будет достигаться в ситуации, показанной на рисунке 1.190. Его величина равна:  $L_M = Mg(R + R \sin \alpha) = MgR(1 + \sin \alpha)$ . С учётом этого выражения условие для моментов сил запишется в виде

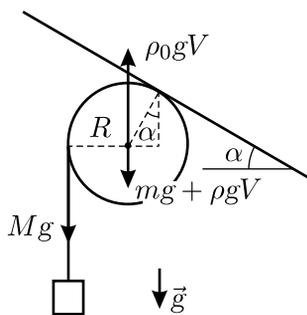


Рис. 1.190.

$$MgR(1 + \sin \alpha) \geq (\rho_0 g V - mg - \rho g V)R \sin \alpha,$$

откуда, с учётом выражения для  $V$ :

$$M \geq \frac{\left(\frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m\right) \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}. \quad (2)$$

Объединяя (1) и (2), окончательно получаем:

$$\left(\frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m\right) \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \leq M < \frac{4}{3}(\rho_0 - \rho)\pi R^3 - m.$$

Следует отметить, что с ростом угла  $\alpha$  максимальная сила трения шарика о потолок уменьшается, и утверждение об отсутствии проскальзывания шарика по потолку, высказанное в условии задачи, перестаёт быть справедливым. Поэтому, конечно, угол  $\alpha$  реально не может достигать  $\pi/2$ , хотя из вида нашего решения это и не следует.

**1.191.** Сила тяги автомобиля есть сила трения ведущих колёс о землю. На рисунке 1.191 рассмотрен случай, когда ведущие колёса — задние. Тогда  $T = \mu N_1$ , и из баланса сил, действующих в вертикальном направлении, имеем:  $N_1 + N_2 = Mg$ . Из баланса моментов сил относительно центра масс автомобиля получаем:

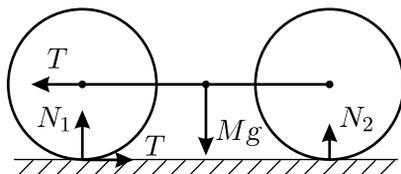


Рис. 1.191.

$N_1(l/2) - N_2(l/2) - T \cdot R = 0$ . Отсюда, полагая  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , находим:

$$T = \frac{\mu Mg/2}{1 - (\mu R/l)} \approx 4120 \text{ Н.}$$

Если же ведущие колёса — передние, то  $T = \mu N_2$ , а условия баланса сил и моментов сил имеют тот же вид, что и в первом случае. Учитывая это, получаем для второго случая:

$$T = \frac{\mu Mg/2}{1 + (\mu R/l)} \approx 3880 \text{ Н.}$$

Таким образом, для получения максимальной силы тяги ведущими должны быть задние колёса.

**1.192.** Выясним, как изменится суммарная потенциальная энергия системы, если левый край трубки оторвётся от стола, и трубка повернётся на малый угол  $\alpha$  (см. рис. 1.192). При этом центр масс трубки поднимется на высоту  $R \sin \alpha \approx R\alpha$ , центр нижнего шара останется на своём месте, а центр верхнего опустится на  $2(R-r)\alpha$  (поскольку линия  $AB$ , соединяющая центры двух шаров, также поворачивается на угол  $\alpha$  — шары не могут изменить своё положение относительно трубки, они способны лишь перемещаться вдоль неё как одно целое). Следовательно, изменение полной потенциальной энергии составляет  $\Delta U = \alpha g(MR - 2m(R-r))$ . Если  $\Delta U > 0$ , то отрыв края энергетически невыгоден; если же  $\Delta U < 0$ , то отрыв произойдёт с неизбежностью. Таким образом, для отрыва необходимо, чтобы отношение масс шара и трубки превышало  $\left(\frac{m}{M}\right)_{\min} = \frac{R}{2(R-r)}$ .

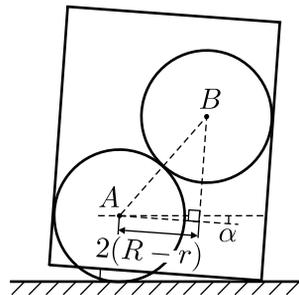


Рис. 1.192.

**1.193\*.** Обозначим через  $\mu_{\text{п}}$  коэффициент трения песка о песок. Песчинка на поверхности горки не будет с неё скатываться, если  $\text{tg } \gamma < \mu_{\text{п}}$ . Поскольку этот песок образует на горизонтальной поверхности горку с малым предельным углом при основании  $\gamma_0$ , то  $\mu_{\text{п}} = \text{tg } \gamma_0 \approx \gamma_0$ . Понятно, что если высота столба очень велика, то давление внутри песка не зависит от этой высоты.

Рассмотрим слой песка толщиной  $h$  и массой  $m$ . Давление на его верхнюю и нижнюю поверхности одинаково и равно  $p$ . Следовательно, этот слой удерживается в равновесии силой трения, действу-

ющей на его боковую поверхность:  $mg = F_{\text{тр}}$ . Если  $\mu < \mu_{\text{п}}$ , то максимальная сила трения со стороны стенок  $F_{\text{тр}} = 2\pi Rh \cdot p \cdot \mu = \pi R^2 \cdot h \cdot \rho g$ .

Отсюда  $p = \frac{\rho g R}{2\mu}$ , поэтому сила давления песка на дно трубы равна

$$F = \pi R^2 \cdot p = \frac{\pi \rho g R^3}{2\mu} \text{ при } \mu < \gamma_0.$$

В случае  $\mu > \gamma_0$  тонкий слой песка «прилипнет» к стенкам трубы, а остальной песок будет тереться о него с коэффициентом  $\mu_{\text{п}}$ . При этом сила давления песка на дно трубы будет равна  $F = \frac{\pi \rho g R^3}{2\gamma_0}$ .

**1.194\***. Так как на столе лежат только  $2/3$  каната, то оставшаяся  $1/3$  каната находится в воздухе и удерживается силой  $F$ . Пусть конец висящей части каната составляет с горизонтом угол  $\alpha$  (см. рис. 1.194).

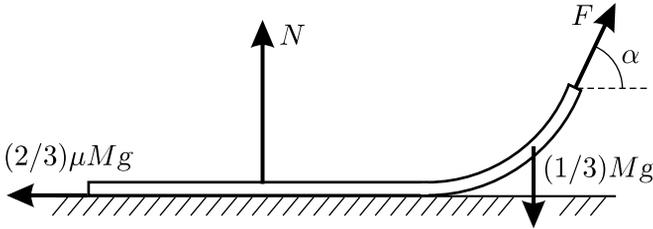


Рис. 1.194.

Тогда условия равновесия каната запишутся в виде:

$$F \sin \alpha + N = Mg, \quad (1)$$

$$F \cos \alpha \leq \mu N, \quad (2)$$

где  $N$  — сила реакции опоры,  $\mu$  — коэффициент трения каната о стол. В точке касания висящей части каната и стола сила натяжения каната направлена горизонтально. Значит, условие равновесия висящей части каната, спроецированное на вертикальную ось, имеет вид:

$$F \sin \alpha = \frac{1}{3}Mg. \quad (3)$$

Из (1) и (3) для силы реакции опоры получаем:  $N = \frac{2}{3}Mg$ . Тогда условие (2) записывается в виде

$$F \cos \alpha \leq \frac{2}{3}\mu Mg. \quad (4)$$

Выражая из (3)  $\sin \alpha$  и используя основное тригонометрическое тождество и неравенство (4), находим:  $\sin \alpha = \frac{Mg}{3F}$ , и

$$\mu \geq \frac{3F \cos \alpha}{2Mg} = \frac{\sqrt{9F^2 - M^2g^2}}{2Mg} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{3F}{Mg}\right)^2 - 1}.$$

Полагая  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ , получаем  $\mu \gtrsim 0,58$ .

**1.195\***. Обозначим вертикальную координату произвольной точки каната через  $y$ , а горизонтальную координату — через  $x$ . Рассмотрим участок каната между двумя горизонтальными координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Поскольку канат сильно натянут, то угол его наклона к горизонту невелик, и косинус этого угла можно считать близким к единице. Масса выбранного участка равна  $(x_2 - x_1)m/L$ . Углы наклона каната к горизонту в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$  отличаются. За счёт различия этих углов при практически одинаковой силе натяжения каната на выбранный его участок действует суммарная вертикальная сила со стороны остальных частей каната, находящихся справа и слева от этого участка. Эта суммарная сила компенсирует силу тяжести, действующую на данный участок каната:

$$F \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x_2} - F \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x_1} = \frac{(x_2 - x_1)mg}{L}.$$

Разделим правую и левую части полученного равенства на  $(x_2 - x_1)$ . Получается, что вторая производная от координаты  $y$  по координате  $x$  равна постоянной величине:  $d^2y/dx^2 = mg/(LF)$ .

Начнём отсчёт координаты  $x$  от самой нижней точки каната, а координату  $y$  будем отсчитывать от этой же точки вверх. Тогда точке с координатой  $L/2$  соответствует координата  $y(L/2)$ , которая отличается от координаты  $y(0)$  в начальной точке на величину прогиба каната. Первая производная координаты  $y$  по  $x$  равна  $xmg/(LF)$ . При такой зависимости первой производной от координаты  $x$  сама функция  $y(x)$  будет равна  $x^2mg/(2LF)$ , а величина прогиба каната составляет

$$y(L/2) = \frac{(L/2)^2mg}{2LF} = \frac{mgL}{8F}.$$

**1.196\***. Поскольку свободный конец нити движется по окружности, то в установившемся режиме оба груза должны двигаться также по окружностям. Эти окружности, очевидно, имеют разные радиусы,

а центры всех трёх окружностей должны совпадать. При медленном перемещении конца нити скорость движения груза 1, к которому прикреплена всего одна нитка, направлена вдоль этой нитки. Это означает, что общий центр окружностей лежит на перпендикуляре к этой нитке, восстановленном из места прикрепления груза 1 (см. рис. 1.196).

Поскольку массы грузов одинаковы, то и силы трения, действующие на них при скольжении по шероховатой поверхности, тоже должны быть одинаковыми. Это означает, что сумма сил, действующих на груз 2 со стороны двух ниток, равна силе натяжения нитки, соединяющей грузы. Чтобы найти направление этой суммарной силы, выполним следующее построение. Проведём вспомогательную окружность произвольного радиуса с центром в месте нахождения груза 2. Через точку  $A$ , которая находится на пересечении окружности и нити, соединяющей грузы, проведём линию, параллельную другой нити. Тогда направление от точки нахождения груза 2 к точке  $B$ , в которой вспомогательная окружность пересекается с проведённой линией, будет совпадать с направлением суммарной силы, а следовательно, и с направлением скорости движения этого груза в данный момент времени. К этому направлению нужно также восстановить перпендикуляр из места прикрепления к ниткам груза 2. Тогда центр всех трёх окружностей, по которым движутся грузы и свободный конец нити, будет находиться в точке  $O$ , в которой пересекаются два вышеуказанных перпендикуляра. Из проведённого построения следует, что задача будет иметь решение только в том случае, если  $2\alpha < \pi/2$ .

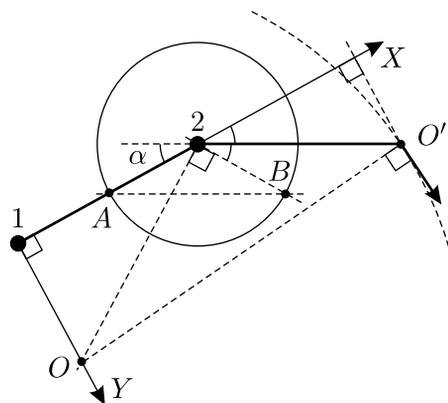


Рис. 1.196.

Направим ось  $X$  вдоль нитки, соединяющей грузы, а ось  $Y$  — перпендикулярно оси  $X$  от груза 1 к точке  $O$ . Тогда разность координат  $\Delta x$  свободного конца нити и общего центра всех трёх окружностей равна  $l(1 + \cos \alpha)$ , а разность координат  $\Delta y$  указанных точек равна  $l \sin \alpha - l \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)$ . Радиус  $R$ , который мы ищем, равен расстоянию  $OO'$  на рисунке:

$$R = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = l \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \operatorname{ctg} 2\alpha)^2}.$$

**1.197\***. Введём систему координат, как показано на рисунке 1.197, и запишем проекции сил натяжения частей паутинки на координатные оси (здесь  $k_1$  и  $k_2$  — жёсткости частей паутинки):

$$\begin{aligned} T_{1x} &= k_1(L \cos \theta - x), & T_{2x} &= -k_2x, \\ T_{1y} &= k_1(L \sin \theta - y), & T_{2y} &= -k_2y. \end{aligned}$$

Из условий равновесия паука имеем:

$$T_{1x} + T_{2x} = 0, \quad T_{1y} + T_{2y} = mg,$$

откуда

$$x = \frac{k_1 L \cos \theta}{k_1 + k_2}, \quad y = \frac{k_1 L \sin \theta}{k_1 + k_2} - \frac{mg}{k_1 + k_2}.$$

Поскольку части паутинки с коэффициентами жёсткости  $k_1$  и  $k_2$  составляют паутинку с жёсткостью  $k$ , имеем:  $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ . Учитывая,

что  $\frac{x}{L \cos \theta} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$  и  $1 - \frac{x}{L \cos \theta} = \frac{k_2}{k_1 + k_2}$ , получаем:

$$\frac{k}{k_1 + k_2} = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{x}{L \cos \theta} \left(1 - \frac{x}{L \cos \theta}\right).$$

Следовательно, траектория паука имеет вид:

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \theta - \frac{mg}{k_1 + k_2} = x \operatorname{tg} \theta - \frac{mg}{k} \frac{x}{L \cos \theta} \left(1 - \frac{x}{L \cos \theta}\right) = \\ &= \frac{mg}{kL^2 \cos^2 \theta} x^2 + \left(\operatorname{tg} \theta - \frac{mg}{kL \cos \theta}\right) x, \end{aligned}$$

то есть является параболой. Тангенс угла наклона касательной к этой параболы в начале координат определяется выражением  $\operatorname{tg} \theta - \frac{mg}{kL \cos \theta}$  и может быть как положительным, так и отрицательным.

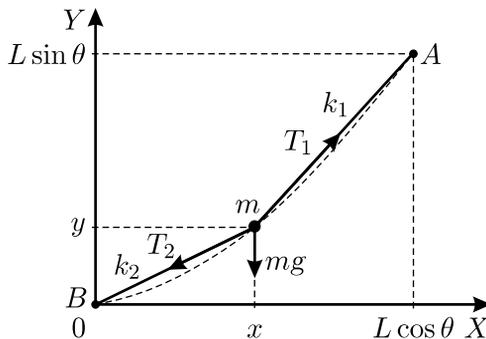


Рис. 1.197.

**1.198.** Разобьём кольцо на маленькие участки, такие, что  $\alpha R \rightarrow 0$  (см. рис. 1.198). Тогда для каждого участка сумма сил натяжения кольца  $T$  и реакции стержня  $N$  равна нулю, откуда  $2T \cdot \sin \alpha/2 = N$ . Поскольку участки маленькие, то  $\alpha T = N$ . Тогда сила трения скольжения, действующая на такой участок при сдвигании кольца, равна  $f_{\text{тр}} = \mu N = \mu \alpha T$ . Суммируя силы трения, действующие на каждый из этих участков, вдоль всей окружности, получаем, что общая сила трения  $F_{\text{тр}} = \sum_i (f_{\text{тр}})_i = \mu T \sum_i \alpha_i = 2\pi \mu T$ .

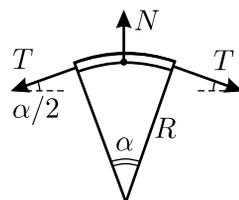


Рис. 1.198.

Таким образом, чтобы сдвинуть кольцо вдоль стержня без вращения, нужно действовать на него с силой  $F \geq F_{\text{тр}} = 2\pi \mu T$ .

**1.199\*.** Напряжение при разрыве трубки продольной силой  $F$  составляет, очевидно,  $\sigma_p = \frac{F}{h\pi d}$ , где  $h$  — толщина ленты.

Рассмотрим условия равновесия выделенного участка поверхности трубки площадью  $\Delta S$  при приложении внутреннего давления  $p$  (см. рис. 1.199). Если рассматриваемый участок виден с оси трубки под малым углом  $\Delta\alpha$ , то, как было показано в решении [предыдущей задачи](#),  $F_1 \Delta\alpha = p \Delta S$ , причём  $F_1 = \sigma l h$  и  $\Delta S = l \Delta\alpha \cdot d/2$ . Отсюда

$$p = \frac{2\sigma h}{d} \leq \frac{2\sigma_p h}{d} = \frac{2h}{d} \cdot \frac{F}{h\pi d} = \frac{2F}{\pi d^2} \approx 1,273 \cdot 10^8 \text{ Па} \approx 1273 \text{ атм.}$$

Заметим, что продольное напряжение при приложении внутреннего давления вдвое меньше поперечного:  $\sigma_{\text{пр}} = \frac{p \cdot (\pi d^2/4)}{h\pi d} = \frac{pd}{4h} = \frac{1}{2}\sigma$ , так что при превышении предельного давления трубка будет разрываться вдоль оси.

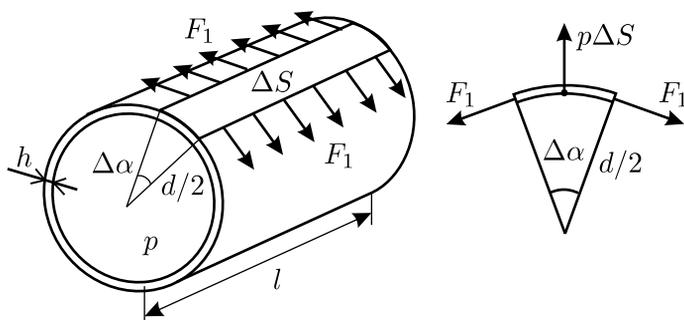


Рис. 1.199.

**1.200\***. Кочерга начинает гнуться тогда, когда напряжение в её материале превышает предел упругости  $\sigma$ . При этом слои, находящиеся на внешней стороне дуги изгибаемой кочерги, растягиваются, а находящиеся на внутренней стороне дуги — сжимаются. Для оценки момента сил, который надо приложить, чтобы кочерга согнулась, можно считать, что на верхнюю половину сечения кочерги действует растягивающее усилие  $f = \sigma \cdot a \cdot \frac{a}{2}$ , а на нижнюю половину — такое же сжимающее усилие (см. рис. 1.200). Тогда момент сил равен:

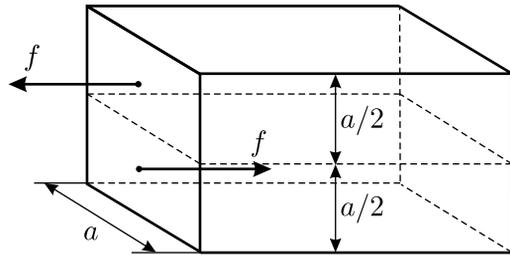


Рис. 1.200.

Тогда момент сил равен:

$$M = \frac{\sigma a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sigma a^3}{4}.$$

Более точная оценка для момента силы получается при учёте линейного закона изменения напряжения по сечению кочерги:

$$M_T = \int_{-a/2}^{a/2} x \cdot \sigma(x) dS, \text{ где } \sigma(x) = \frac{2x}{a}\sigma \text{ и } dS = a dx, \text{ откуда получается,}$$

что  $M_T = 2\sigma \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{\sigma a^3}{6}$ . Таким образом, обе полученные оценки близки.

Получим теперь оценку для силы. Заметим, что кочергу можно гнуть двумя способами. Первый способ — упираться коленом в середину кочерги, а за её концы тянуть руками с силой  $F$ . Тогда изгибающий момент будет равен  $M = Fl/2$ , откуда

$$F = \frac{2M}{l} = \frac{2}{l} \cdot \frac{\sigma a^3}{4(6)} = \frac{\sigma a^3}{2(3)l} = 150 \text{ (100) Н.}$$

(Цифры в скобках здесь и далее соответствуют более точной оценке момента сил  $M_T$ ). Это не очень большое усилие!

Второй, более «честный» способ изгибания кочерги: создавать моменты сил ладонями рук, ничем, кроме них, не упираясь в кочергу. Считая, что ширина ладони равна  $L \approx 10$  см, получаем:  $M \cong F_1 L$ , и

$$F_1 = \frac{M}{L} = \frac{\sigma a^3}{4(6)L} = 750 \text{ (500) Н.}$$

Такое усилие создать пальцами рук достаточно трудно!

**1.201\***. Обозначим смещение верхней платформы под действием приложенной к ней силы  $F$  через  $\Delta x$ , а следующих, расположенных ниже платформ, под действием приложенных к ним сил  $F_1, F_2, F_3, \dots$ , — через  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$  соответственно (см. рис. 1.201). Тогда из условия равновесия верхней платформы (сумма действующих на неё сил равна нулю) следует, что общий коэффициент жёсткости равен:

$$\begin{aligned}
 k_{\Sigma} &= \frac{F}{\Delta x} = \frac{k\Delta x + 2k(\Delta x - \Delta x_1)}{\Delta x} = \\
 &= 3k - 2k \frac{\Delta x_1}{\Delta x} = k \left( 3 - 2 \frac{\Delta x_1}{\Delta x} \right).
 \end{aligned}$$

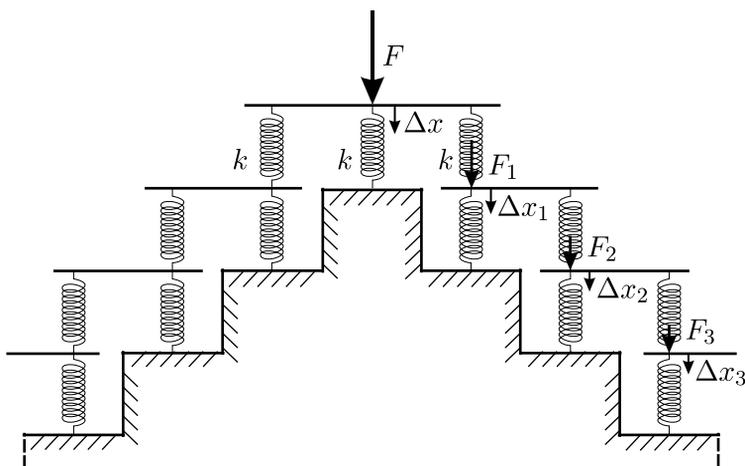


Рис. 1.201.

Из условий равновесия расположенных ниже платформ следует, что

$$\begin{aligned}
 F_1 &= k(\Delta x - \Delta x_1) = k\Delta x_1 + k(\Delta x_1 - \Delta x_2), \\
 F_2 &= k(\Delta x_1 - \Delta x_2) = k\Delta x_2 + k(\Delta x_2 - \Delta x_3), \\
 F_3 &= k(\Delta x_2 - \Delta x_3) = k\Delta x_3 + k(\Delta x_3 - \Delta x_4), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения и сокращая на  $k$ , получаем:

$$\Delta x = 2\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 + \dots \tag{1}$$

Ясно, что общий коэффициент жёсткости правой или левой части данной бесконечной системы пружин не должен зависеть от номера ступени. Поэтому

$$\frac{F_1}{\Delta x_1} = \frac{F_2}{\Delta x_2} = \frac{F_3}{\Delta x_3} = \dots,$$

или

$$\frac{k(\Delta x - \Delta x_1)}{\Delta x_1} = \frac{k(\Delta x_1 - \Delta x_2)}{\Delta x_2} = \frac{k(\Delta x_2 - \Delta x_3)}{\Delta x_3} = \dots$$

Отсюда

$$\frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_3} = \dots \equiv n > 1,$$

поскольку деформации нижних пружин меньше, чем верхних. Таким образом,

$$\Delta x_1 = \frac{\Delta x}{n}; \quad \Delta x_2 = \frac{\Delta x_1}{n} = \frac{\Delta x}{n^2}; \quad \Delta x_3 = \frac{\Delta x_2}{n} = \frac{\Delta x}{n^3}; \quad \dots$$

Подставляя полученные выражения для  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$  в формулу (1), получаем:

$$\Delta x = 2 \frac{\Delta x}{n} + \frac{\Delta x}{n^2} + \frac{\Delta x}{n^3} + \frac{\Delta x}{n^4} + \dots$$

Отсюда, применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии, имеем:

$$n = 1 + \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots\right) = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = 1 + \frac{n}{n-1} = \frac{2n-1}{n-1},$$

или  $n^2 - 3n + 1 = 0$ .

Решая это квадратное уравнение, находим:  $n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Поскольку  $n > 1$ , то  $n = \frac{\Delta x}{\Delta x_1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ . С учётом этого, окончательно получаем:

$$k_{\Sigma} = k \left(3 - 2 \frac{\Delta x_1}{\Delta x}\right) = k \left(3 - 2 \cdot \frac{2}{3 + \sqrt{5}}\right) = k \cdot \frac{5 + 3\sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = k\sqrt{5}.$$

**1.202\***. При действии на раму в продольном направлении внешних сил  $F_{\text{вн}}$  все пружины будут деформироваться: продольные и диагональные — растягиваться, а поперечные — сжиматься. Вследствие этого возникнут силы упругости, действующие на шарниры. Равновесное состояние рамы установится при равенстве нулю суммарной силы, действующей на каждый шарнир.

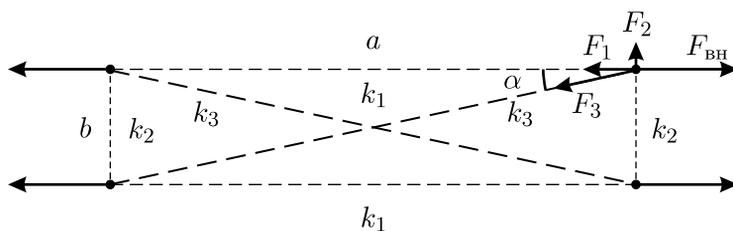


Рис. 1.202.1.

Обозначим угол между диагональю недеформированной рамы и её длинной стороной через  $\alpha$ , а силы упругости, действующие на шарнир со стороны продольной, поперечной и диагональной пружин — через  $F_1$ ,  $F_2$ , и  $F_3$  соответственно (см. рис. 1.202.1). Так как относительное удлинение рамы в продольном направлении  $\Delta a/a$  очень мало, то при рассматриваемой деформации угол  $\alpha$  практически не изменится. Поэтому условие равновесия шарнира в поперечном направлении имеет вид:  $F_2 = F_3 \sin \alpha$ . Учтём, что  $F_2 = k_2|\Delta b|$ ,  $F_3 = k_3\Delta l$ , а удлинение  $\Delta l$  диагональной пружины определим при помощи чертежа (см. рис. 1.202.2):

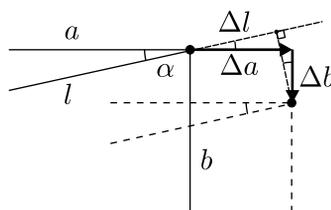


Рис. 1.202.2.

$$\Delta l \approx \Delta a \cos \alpha - |\Delta b| \sin \alpha.$$

Отсюда получим:

$$k_2|\Delta b| \approx k_3(\Delta a \cos \alpha - |\Delta b| \sin \alpha) \sin \alpha,$$

и

$$|\Delta b| \approx \frac{k_3 \sin \alpha \cos \alpha}{k_2 + k_3 \sin^2 \alpha} \Delta a = \frac{(k_3/k_2) \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (k_3/k_2) \sin^2 \alpha} \Delta a.$$

Так как  $b = a \operatorname{tg} \alpha$ , то

$$\frac{|\Delta b|}{b} \approx \frac{(k_3/k_2) \cos^2 \alpha}{1 + (k_3/k_2) \sin^2 \alpha} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Учитывая, что  $\Delta b$  отрицательно (рама в поперечном направлении сжимается),  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ , окончательно найдём:

$$\frac{\Delta b}{b} \approx -\frac{k_3/k_2}{1 + (k_3/k_2) \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\Delta a}{a} = -\frac{k_3/k_2}{1 + (k_3/k_2)(b/a)^2} \cdot \frac{\Delta a}{a} =$$

$$= -\frac{100}{1 + 100 \cdot (1/25)^2} \cdot 0,001 \approx -0,1,$$

то есть относительное изменение ширины рамы составляет  $\sim 10\%$ . Относительное изменение площади рамы при этом равно:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b) - ab}{ab} \approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Так как  $\Delta a/a \ll |\Delta b|/b$ , то  $\Delta S/S \approx \Delta b/b \approx -0,1$ .

Мы видим, что в данном случае площадь рамы при её растяжении уменьшается. Это свидетельствует о том, что объём тела при растяжении может не только увеличиваться (как это имеет место для большинства упругих тел), но и уменьшаться. Приведённая в задаче модель показывает, каким может быть внутреннее строение вещества (например, некоторого полимера), обладающего такими необычными свойствами.

**1.203.** При малых колебаниях можно в первом приближении считать, что грузы смещаются в горизонтальном направлении на одинаковую величину  $x \ll L_{1,2}$ , так как соединяющий их стержень жёсткий (см. рис. 1.203). Высота поднятия каждого из грузов  $y_{1,2}$  равна

$$y_{1,2} = L_{1,2} - L_{1,2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{L_{1,2}^2}} \approx \frac{x^2}{2L_{1,2}}.$$

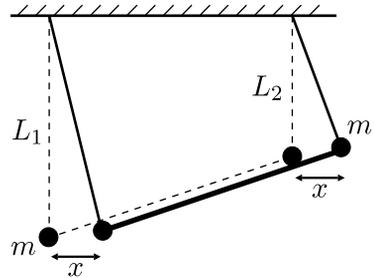


Рис. 1.203.

Поэтому приращение потенциальной энергии системы грузов, выведенной из положения равновесия, равно

$$U = mg(y_1 + y_2) = \frac{mg}{2} \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) x^2.$$

Скорости грузов в первом приближении одинаковы:

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy_{1,2}}{dt} \right)^2} = \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \left( \frac{dy_{1,2}}{dx} \right)^2} \approx \\ &\approx \frac{dx}{dt} \sqrt{1 + \frac{x^2}{L_{1,2}^2}} \approx \frac{dx}{dt} = v. \end{aligned}$$

Поэтому кинетическая энергия системы:  $W = mv^2/2 + mv^2/2 = mv^2$ .

Известно, что если кинетическая энергия системы с одной степенью свободы может быть записана в виде  $W = \alpha v^2/2$ , а потенциальная энергия — в виде  $U = \beta x^2/2$ , где  $x$  — некоторая координата, характеризующая положение системы, а  $v = dx/dt$  — соответствующая ей скорость, то система может совершать гармонические колебания, период которых определяется формулой  $T = 2\pi\sqrt{\alpha/\beta}$ . Поэтому в нашем случае период малых колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{mg\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{2L_1L_2}{g(L_1 + L_2)}}.$$

**1.204\***. Пусть груз сместился от положения равновесия на величину  $x$ . Обозначим длину пружины в положении равновесия через  $x_0$ , длину пружины после смещения груза — через  $x_1$ , величину смещения точки соединения пружины и стержня — через  $x'$ , и найдём удлинение пружины  $\Delta x$ . Применяя к треугольнику  $ABD$  (рис. 1.204) теорему косинусов, получим:

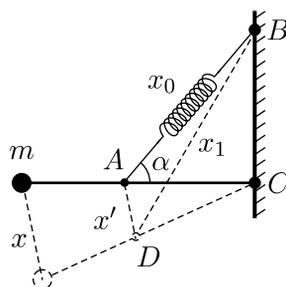


Рис. 1.204.

$$x_1^2 \approx x'^2 + x_0^2 - 2x'x_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Здесь учтено, что смещения  $x$  и  $x'$  малы, и поэтому  $\angle CAD \approx \pi/2$ . Перенося  $x_0^2$  в левую часть уравнения, применяя формулу разности квадратов и учитывая, что  $x_1 - x_0 = \Delta x$ ,  $x_1 + x_0 \approx 2x_0$ , получим:  $2x_0\Delta x \approx x'^2 + 2x'x_0 \sin \alpha$ . Пренебрегая величиной  $x'^2$  ввиду её малости, найдём удлинение пружины:  $\Delta x \approx x' \sin \alpha$ . Смещения  $x$  и  $x'$  связаны между собой соотношением:  $x' = \frac{l_1}{l}x$ , поэтому окончательно для удлинения пружины имеем:

$$\Delta x \approx \frac{l_1 \sin \alpha}{l} x.$$

Запишем теперь выражения для кинетической энергии груза  $W$  и потенциальной энергии  $U$ , запасённой в пружине:

$$W = \frac{mv^2}{2}; \quad U = \frac{k\Delta x^2}{2} = \frac{k}{2} \left(\frac{l_1 \sin \alpha}{l}\right)^2 x^2.$$

Здесь  $v = dx/dt$  — скорость, соответствующая координате  $x$ . Квадрат искомой круговой частоты равен отношению коэффициентов при  $x^2$  и

при  $v^2$  в выражениях для  $U$  и  $W$ . Поэтому окончательно получаем:

$$\omega_0 = \frac{l_1 \sin \alpha}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Заметим, что по аналогии с колебаниями груза, подвешенного на пружине, начальную потенциальную энергию пружины, имеющуюся в положении равновесия нашей системы, а также потенциальную энергию груза в поле силы тяжести можно не учитывать, потому что коэффициент при  $x^2$  в выражении для  $U$  от этого не меняется.

**1.205.** Направим координатную ось  $X$  вниз, начало отсчёта поместим в том месте, где находится площадка при недеформированной пружине, и будем далее рисовать графики проекций скорости и ускорения грузика на эту ось в зависимости от времени (см. рис. 1.205). До удара о площадку движение грузика является равноускоренным с ускорением  $g$ . После удара, при движении сначала вниз, а затем вверх, до тех пор, пока грузик не оторвётся от площадки, — это гармоническое колебание с частотой  $\omega = \sqrt{k/m}$ , происходящее вокруг положения равновесия  $x_0 = mg/k$ . После отрыва от площадки грузик снова летит с ускорением  $g$  до следующего удара, и затем весь процесс повторяется.

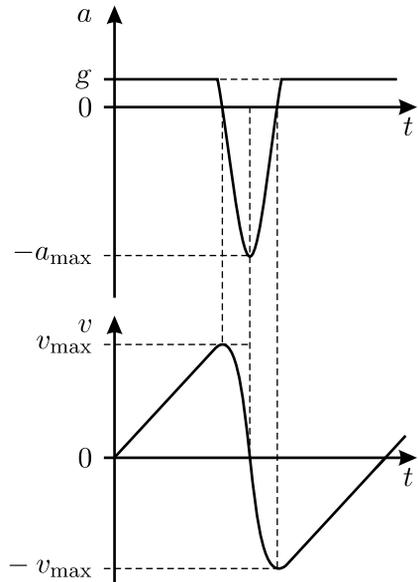


Рис. 1.205.

Запишем закон сохранения механической энергии и найдём из него величину  $x_{\max}$  наибольшего сжатия пружины:

$$mgh = \frac{kx_{\max}^2}{2} - mgx_{\max}. \quad \text{Отсюда} \quad x_{\max} = \frac{mg}{k} \left( 1 + \sqrt{1 + (2kh/(mg))} \right),$$

и амплитуда колебаний  $A = x_{\max} - x_0 = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + (2kh/(mg))}$ . Максимальное по величине ускорение грузика достигается в момент наибольшего сжатия пружины и равно  $a_{\max} = \omega^2 A = g\sqrt{1 + (2kh/(mg))}$ . Максимальная скорость грузика при прохождении положения равновесия равна  $v_{\max} = \omega A = \sqrt{2gh + \frac{mg^2}{k}}$ .

**1.206\***. Запишем выражения для кинетической  $W$  и потенциальной  $U$  энергий груза, колеблющегося на невесомой пружине. Если  $x$  — координата груза,  $v$  — его скорость, то  $W = Mv^2/2$ , а  $U = kx^2/2$ , откуда для периода колебаний получаем  $T_0 = 2\pi\sqrt{M/k}$ .

Пусть теперь пружина имеет массу  $m$ . Тогда в выражении для кинетической энергии системы появляется добавка — кинетическая энергия пружины. Её можно оценить следующим образом. Будем считать, что вся масса пружины сосредоточена в её середине и колеблется с амплитудой, равной половине амплитуды колебаний груза. Тогда кинетическая энергия пружины  $W_{\text{п}} = \frac{m}{2} \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{m}{4} \cdot \frac{v^2}{2}$ , и полная кинетическая энергия системы

$$W = \frac{1}{2} \left( M + \frac{m}{4} \right) v^2.$$

Выражение для потенциальной энергии при этом имеет прежний вид. В результате для периода колебаний груза на массивной пружине получаем:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{M + (m/4)}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \sqrt{1 + \frac{m}{4M}} \approx \\ &\approx 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4M} \right) = T_0 \left( 1 + \frac{m}{8M} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали приближённую формулу  $(1+x)^n \approx 1+nx$ , справедливую при  $x \ll 1$ . По условию  $\frac{m}{8M} \leq 0,01$ , так что искомое соотношение имеет вид:  $m \leq 0,08M$ .

Более точную оценку можно получить, считая, что амплитуда колебаний различных частей пружины нарастает по линейному закону при удалении от закреплённого конца. Тогда скорость  $v_{\text{п}}$  малого участка пружины, находящегося на расстоянии  $y$  от точки её закрепления, выражается формулой:  $v_{\text{п}} = \frac{y}{l}v$ , и для кинетической энергии пружины получается:

$$W_{\text{п}} = \int \frac{1}{2} v_{\text{п}}^2 dm = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{y^2}{l^2} v^2 \frac{m}{l} dy = \frac{m}{3} \cdot \frac{v^2}{2},$$

так что  $W = \frac{1}{2} \left( M + \frac{m}{3} \right) v^2$ . В этом случае, аналогично предыдущему,

получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + (m/3)}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\sqrt{1 + \frac{m}{3M}} \approx T_0 \left(1 + \frac{m}{6M}\right),$$

откуда следует, что при условиях задачи масса пружины должна удовлетворять следующему условию:  $m \leq 0,06M$ .

Видно, что оба метода расчёта дают близкие результаты.

**1.207.** Обозначим массу всего состава через  $M$ , а длину въехавшей на горку части состава — через  $x$ . Тогда второй закон Ньютона, записанный в проекции на ось  $X$ , направленную параллельную горке в сторону движения состава, будет иметь вид:

$$Ma = -M \cdot \frac{x}{L} \cdot g \sin \alpha, \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g \sin \alpha}{L} x = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением гармонических колебаний. Отсюда следует, что искомое время, прошедшее от начала подъёма поезда на горку до его остановки, равно четверти периода таких колебаний:

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g \sin \alpha}}.$$

**1.208\*.** Шайба, попадая на берег, начинает тормозиться под действием силы трения, равной по величине  $\mu mg$ . Уравнение движения шайбы имеет вид:  $ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -\mu mg = -(\mu_0 + kx)mg$ , откуда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kg \left(x + \frac{\mu_0}{k}\right) = 0.$$

Обозначая  $kg$  через  $\omega^2$  и вводя новую переменную  $z = x + \frac{\mu_0}{k}$ , получаем для  $x > 0$  уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0.$$

Решением этого уравнения является функция  $z = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , так что  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{\mu_0}{k}$ , а скорость шайбы  $v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Из условия задачи следует, что при  $t = 0$  координата шайбы  $x = 0$ , а её скорость  $v = v_0$ . Поэтому  $\mu_0/k = A \sin \varphi_0$  и  $v_0 = A\omega \cos \varphi_0$ , откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\omega \mu_0}{k v_0} = \frac{\mu_0}{v_0} \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

Шайба остановится при достижении «максимального отклонения»  $x_0 = A - (\mu_0/k)$ , когда её скорость упадёт до нуля. Это произойдёт в момент времени  $t_1$ , когда  $\omega t_1 + \varphi_0 = \pi/2$ , откуда

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_0 \right) = \frac{1}{\sqrt{kg}} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg \left( \frac{\mu_0}{v_0} \sqrt{\frac{g}{k}} \right) \right).$$

**1.209.** Перед столкновением с шариком скорость чашки была равна  $v = a\sqrt{k/m}$ , а сразу после него —  $u$ . Значение  $u$  можно определить из закона сохранения импульса при соударении:  $mv = (m + M)u$ , откуда

$$u = \frac{ma}{m + M} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Будем отсчитывать потенциальную энергию от положения равновесия пустой чашки. Тогда в момент сразу после прилипания шарика полная механическая энергия системы равна  $E = \frac{(M + m)u^2}{2} = \frac{kma^2}{2(M + m)}$ . В моменты остановок чашки с шариком, то есть в моменты её наибольшего отклонения от положения равновесия, механическая энергия системы равна

$$E = -(m + M)gb + \frac{k}{2} \left( \left( \frac{mg}{k} + b \right)^2 - \left( \frac{mg}{k} \right)^2 \right) = \frac{kma^2}{2(M + m)},$$

где  $b$  — отклонение от положения равновесия пустой чашки ( $b$  считается положительным при смещении чашки вниз). Отсюда получаем:

$$b^2 - \frac{2Mg}{k}b - \frac{ma^2}{m + M} = 0.$$

Оба корня этого квадратного уравнения  $b_1 < 0$  и  $b_2 > 0$  соответствуют верхней и нижней точкам остановки чашки, поэтому амплитуда колебаний системы после удара равна

$$a_1 = \frac{b_2 - b_1}{2} = \sqrt{\frac{ma^2}{m + M} + \left( \frac{Mg}{k} \right)^2}.$$

**1.210.** Пусть шарик перед ударом о платформу имеет скорость  $v$ , а платформа в этот же момент имеет скорость  $V$ . Направим координатную ось  $X$  вниз и применим для процесса столкновения шарика массой  $m$  и платформы массой  $M$  закон сохранения импульса:  $mv - MV = -mv + MV$ . Отсюда  $\frac{m}{M} = \frac{V}{v}$ .

Время между столкновениями шарика и платформы, с одной стороны, равно времени полёта шарика  $t = 2v/g$ , а с другой стороны,  $t = \frac{T}{2} + NT$ , где  $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$  — период свободных колебаний платформы,  $N = 0, 1, 2, \dots$  — число полных периодов колебаний платформы, прошедших между соударениями. Отсюда находим скорость шарика перед ударом:  $v = \frac{gT}{4}(2N + 1)$ . Из закона сохранения механической

энергии для свободных колебаний платформы получаем:  $\frac{kA^2}{2} = \frac{MV^2}{2}$ ,

откуда  $V = A\sqrt{\frac{k}{M}} = 2\pi\frac{A}{T}$ . Значит,

$$\frac{m}{M} = \frac{V}{v} = \frac{2\pi A}{vT} = \frac{8\pi A}{gT^2(2N + 1)}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

**1.211\***. Обозначим амплитуду колебаний пластины через  $A$ . Песчинка после удара отрывается от пластины при её движении вверх на высоте  $h = A \sin(2\pi ft)$  над средним положением пластины и приобретает скорость  $v = A \cdot 2\pi f \cos(2\pi ft)$ , которая равна скорости пластины. В момент отрыва песчинки ускорение пластины направлено вниз и равно по величине  $A(2\pi f)^2 \sin(2\pi ft) = g$ . Обозначим через  $\varphi$  величину  $2\pi ft$ . Тогда  $\sin \varphi = \frac{g}{A(2\pi f)^2}$ . Заметим, что, поскольку  $\sin \varphi \leq 1$ , то искомая амплитуда  $A$  должна удовлетворять условию  $A \geq A_0 = \frac{g}{(2\pi f)^2} \approx 0,25 \cdot 10^{-3}$  мм. При меньших значениях амплитуды песчинка не будет отрываться от пластины и подпрыгивать, что противоречит условию задачи.

Высота, на которую поднимается песчинка после отрыва от пластины, равна:

$$\begin{aligned} H &= h + \frac{v^2}{2g} = A \sin \varphi + \frac{A^2(2\pi f)^2 \cos^2 \varphi}{2g} = A \sin \varphi + \frac{A^2(2\pi f)^2(1 - \sin^2 \varphi)}{2g} = \\ &= \frac{g}{(2\pi f)^2} + \frac{A^2(2\pi f)^2 \left(1 - \frac{g^2}{A^2(2\pi f)^4}\right)}{2g} = \frac{g}{2(2\pi f)^2} + \frac{A^2(2\pi f)^2}{2g}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A = \frac{\sqrt{2gH - \frac{g^2}{(2\pi f)^2}}}{2\pi f} \approx \frac{\sqrt{2gH}}{2\pi f} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,05 \text{ мм},$$

так как  $H \gg A_0$ . Найденное значение амплитуды  $A$  значительно превышает критическое значение  $A_0$ , то есть при колебаниях пластины с такой амплитудой песчинки действительно будут подпрыгивать.

**1.212\***. Если нить 1 всё время остаётся строго вертикальной, то на систему из двух шариков и нити 2 внешние силы в горизонтальном направлении не действуют, и центр масс этой системы по горизонтали не смещается. Направим ось  $X$  горизонтально, в направлении колебаний тележки, а начало координат поместим в точке, где находится центр масс системы из двух шариков:  $x_{\text{цм}} = 0$ . Обозначим координату шарика массой  $M$  через  $X(t)$ , а шарика массой  $m$  — через  $x(t)$ . Тогда  $mx + MX = 0$ .

При малых колебаниях угол  $\alpha$  наклона нити 2 по отношению к вертикали мал:  $|\alpha| \ll 1$ , так что

$$|\alpha| \approx \sin |\alpha| = \frac{|x| + |X|}{L} = \frac{m + M}{mL} |X|.$$

Пусть  $T$  — сила натяжения нити 2. Тогда для шарика массой  $m$  получаем:

$$mg = T \cos \alpha \approx T, \quad T \sin |\alpha| \approx T|\alpha| = M \left| \frac{d^2 X}{dt^2} \right| = M\omega^2 |X|.$$

Отсюда  $mg \frac{m + M}{mL} = M\omega^2$ , и

$$L = \frac{g}{\omega^2} \left( 1 + \frac{m}{M} \right).$$

**1.213.** Из равенства масс грузов следует, что в процессе колебаний, возникших после отпускания грузов, центр пружины остаётся неподвижным. Поэтому данная задача эквивалентна задаче о поиске максимальной скорости груза массой  $m$ , висящего на пружине жёсткостью  $2k$ , после его начального смещения вниз на расстояние  $a/2$  и последующего отпускания.

После отпускания груза он под действием силы упругости начнёт двигаться вверх. Его скорость будет максимальной тогда, когда он

будет проходить через положение равновесия, то есть когда сила упругости станет равной силе тяжести, действующей на груз. Искомая максимальная скорость равна произведению круговой частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} \text{ на их амплитуду } a/2, \text{ поэтому } v_{\max} = a\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

**1.214\***. Направим координатную ось  $X$  вправо вдоль оси пружин и поместим начало координат посередине между стенками. Тогда после пережигания нитей левый грузик будет двигаться по закону  $x_1(t) = -\frac{L}{2} \cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$ , а правый — по закону  $x_2(t) = \frac{L}{2} \cos\left(t\sqrt{\frac{k}{2m}}\right)$  (время  $t$  отсчитывается от момента пережигания нитей). Грузики столкнутся через время  $t_0$ , которое определяется из условия  $x_1(t) = x_2(t)$ , откуда получаем:

$$-\frac{L}{2} \cos\left(t_0\sqrt{\frac{2k}{m}}\right) = \frac{L}{2} \cos\left(t_0\sqrt{\frac{k}{2m}}\right).$$

Преобразовывая сумму косинусов в произведение, имеем:

$$2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0\right) = 0,$$

откуда

$$\cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0\right) = 0 \text{ или } \cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} - \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0\right) = 0.$$

Из всех решений этой системы уравнений нужно выбрать наименьшее положительное. Оно получается из условия:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}} + \sqrt{\frac{k}{2m}}\right)t_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{откуда } t_0 = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}}.$$

В момент столкновения грузики будут иметь координату

$$x_0 = \frac{L}{2} \cos\left(t_0\sqrt{\frac{k}{2m}}\right) = \frac{L}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2m}}\right) = \frac{L}{4}.$$

Скорости  $v_1$  левого и  $v_2$  правого грузиков перед столкновением будут равны:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2k}{m}} \sin \left( t_0 \sqrt{\frac{2k}{m}} \right) = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2k}{m}} \sin \left( \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{2k}{m}} \right) = \\ &= \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin \left( t_0 \sqrt{\frac{k}{2m}} \right) = -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{k}{2m}} \sin \left( \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{2m}} \right) = \\ &= -\frac{L}{2} \sqrt{\frac{k}{2m}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{v_1}{2}. \end{aligned}$$

Скорость грузиков  $u$  непосредственно после соударения может быть найдена из закона сохранения импульса при абсолютно неупругом ударе:

$$u = \frac{mv_1 + 2mv_2}{m + 2m} = 0.$$

Таким образом, скорость грузиков после удара равна нулю, а удлинения пружин в этот момент времени отличны от нуля и равны  $x_0 = L/4$ . Следовательно, после столкновения слипшиеся грузики будут совершать гармонические колебания с амплитудой  $x_0$  и с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k+2k}{m+2m}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . В процессе этих колебаний максимальная скорость грузиков будет равна

$$V_{\max} = \omega x_0 = \frac{L}{4} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

**1.215.** Обозначим вертикальное смещение уровня воды в шланге через  $h$ , площадь его поперечного сечения — через  $S$ , плотность воды — через  $\rho$ . Тогда суммарная сила, действующая на воду в подводной части шланга при таком смещении уровня, равна  $F = pS = -\rho ghS$  (знак «минус» указывает, что эта сила стремится вернуть воду в шланге в равновесное положение). Данная сила сообщает воде в шланге, имеющей массу  $m$ , ускорение

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{F}{m} = -\frac{\rho ghS}{\rho Sl} = -\frac{gh}{l},$$

направленное вдоль шланга. Таким образом, для величины  $h$  получаем уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{g \sin \alpha}{l} h = 0.$$

Отсюда круговая частота  $\omega = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{l}}$ , а период малых колебаний воды

в шланге  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin \alpha}}$ .

**1.216.** Полный объём трубки равен  $\pi R^2 L$ . Поскольку целому кольцу соответствует угол  $2\pi$ , то его части, занятой жидкостью, соответствует пропорционально меньший угол

$$\varphi = 2\pi \frac{V}{\pi R^2 L} = \frac{2V}{R^2 L}.$$

В положении равновесия верхний уровень жидкости находится в наклонной части трубки (см. рис. 1.216), причём угол наклона трубки к горизонту в этом месте равен

$$\alpha = \pi - \frac{\varphi}{2} = \pi - \frac{V}{R^2 L}.$$

Таким образом, наша задача свелась к известной задаче о колебаниях жидкости в U-образной трубке с наклонными коленами.

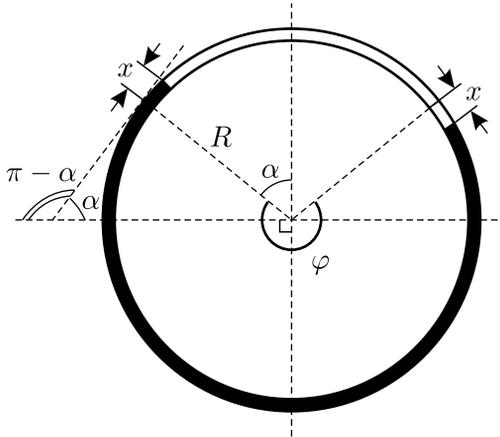


Рис. 1.216.

Обозначим длину столба жидкости в трубке через  $l$ , площадь поперечного сечения трубки — через  $S$ , плотность жидкости — через  $\rho$ .

Пусть жидкость сместилась вдоль трубки на малое расстояние  $x$  от положения равновесия. Тогда потенциальная энергия жидкости увеличится по сравнению с потенциальной энергией в положении равновесия на величину  $U = \rho g S \sin \alpha \cdot x^2$ . Кинетическая же энергия жидкости, движущейся в трубке со скоростью  $v = \frac{dx}{dt}$ , равна  $W = \frac{\rho S l}{2} v^2$ . Следовательно, данная система может совершать гармонические колебания, причём квадрат их круговой частоты равен отношению коэффициентов при  $x^2$  в выражении для  $U$  и при  $v^2$  в выражении для  $W$ , то есть  $\omega^2 = \frac{2g \sin \alpha}{l}$ . Учитывая, что  $l = \frac{V}{\pi R^2}$ , и подставляя найденное выше выражение для  $\alpha$ , получаем период малых колебаний жидкости в трубке:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2\pi V}{g R^2 \sin \left( \frac{V}{R^2 L} \right)}}.$$

**1.217\***. Обозначим массы ртути, воды и спирта через  $m_p$ ,  $m_v$  и  $m_c$  соответственно. Пусть  $S$  — площадь U-образной трубки, а  $x$  — смещение ртути от положения равновесия. Тогда уравнение колебаний ртути в трубке будет иметь вид:  $m_p a = -2\rho_1 g S x$ , откуда для периода колебаний ртути получаем:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_p}{2\rho_1 g S}}.$$

Если теперь записать уравнения колебаний для ртути и воды, а затем для ртути, воды и спирта, то получатся аналогичные выражения для периодов колебаний  $T_2$  и  $T_3$ , в которых под корнем в числителе будет стоять суммарная масса жидкостей, а знаменатель не изменится. Неизменность знаменателя связана с тем, что вода и спирт не смешиваются со ртутью и не перетекают в другое колено, а значит, возвращающая сила, возникающая при смещении жидкостей из положения равновесия, обусловлена только перетеканием ртути из одного колена в другое. В итоге:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_p + m_v}{2\rho_1 g S}}, \quad T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m_p + m_v + m_c}{2\rho_1 g S}}.$$

Из написанных выражений для периодов находим:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{m_p + m_v}{m_p}, \quad \frac{T_3^2}{T_2^2} = \frac{m_p + m_v + m_c}{m_p + m_v}.$$

Вычитая из правой и левой частей последних уравнений единицу, получим:

$$\frac{T_2^2 - T_1^2}{T_1^2} = \frac{m_B}{m_P}, \quad \frac{T_3^2 - T_2^2}{T_2^2} = \frac{m_C}{m_P + m_B}.$$

Далее, комбинируя последние четыре уравнения, найдём:

$$\frac{m_P + m_B}{T_2^2} = \frac{m_C}{T_3^2 - T_2^2} = \frac{m_P}{T_1^2} = \frac{m_B}{T_2^2 - T_1^2}.$$

Отсюда

$$m_P/m_B/m_C = T_1^2/(T_2^2 - T_1^2)/(T_3^2 - T_2^2).$$

**1.218.** При малых колебаниях в отсутствие трения сумма кинетической и потенциальной энергий постоянна:  $W + U = \text{const}$ . Для рассматриваемой системы  $W = Mv^2/2 = M\dot{x}^2/2$ , где  $\dot{x}$  — скорость столба жидкости.

Будем отсчитывать смещение столба жидкости  $x$  от равновесного положения поршня. В этом положении сила сжатия пружины  $kx_0$  ( $x_0$  — положение поршня при несжатой пружине) уравновешивается силой гидростатического давления  $\rho ghS$  за счёт превышения уровня жидкости в наклонном колене на высоту  $h$  над её уровнем в вертикальном колене. Тогда

$$U = \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho g S x \left( h + \frac{x}{2} (1 + \sin \alpha) \right),$$

так как при смещении жидкости на малое расстояние  $x$  от положения равновесия центр масс её элемента массой  $\rho S x$  поднимается на высоту  $\frac{x}{2} + h + \frac{x}{2} \sin \alpha$  (см. рис. 1.218). Таким образом,

$$\frac{M(\dot{x})^2}{2} + \frac{k(x_0 - x)^2}{2} + \rho g S (1 + \sin \alpha) \frac{x^2}{2} + \rho g S h x = \text{const}.$$

Дифференцируя это соотношение по времени и обозначая ускорение столба жидкости через  $\ddot{x} \equiv d\dot{x}/dt$ , имеем:

$$M\ddot{x} + (k + \rho g S (1 + \sin \alpha)) \dot{x}x + \rho g S h \dot{x} - k\dot{x}x_0 = 0.$$

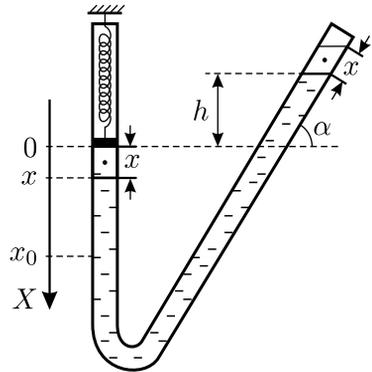


Рис. 1.218.

Поскольку, как уже отмечалось,  $kx_0 = \rho g S h$ , получаем отсюда уравнение движения столба жидкости:

$$\ddot{x} + \frac{k + \rho g S (1 + \sin \alpha)}{M} x = 0,$$

которое представляет собой уравнение гармонических колебаний. Следовательно, период малых колебаний рассматриваемой системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k + \rho g S (1 + \sin \alpha)}}.$$

**1.219.** Обозначим малое смещение центра обруча при его перекатывании через  $x$  (см. рис. 1.219), а скорость центра — через  $v$ . Потенциальная энергия обруча с прикрепленным к нему шариком изменится при таком смещении на  $\Delta U = mgR \left(1 - \cos \frac{x}{R}\right) \approx mg \cdot \frac{x^2}{2R}$ . Так как  $m$  и  $M$  одного порядка, то при  $x \ll R$  скорость шарика мала по сравнению с  $v$ , и кинетической энергией шарика можно пренебречь. Кинетическая же энергия  $W$  катящегося обруча складывается из кинетической энергии поступательного движения его центра  $W_{\text{п}} = Mv^2/2$  и кинетической энергии вращательного движения вокруг центра  $W_{\text{в}} = Mv^2/2$ . Таким образом,  $W = W_{\text{п}} + W_{\text{в}} = Mv^2$ . С учётом этого, из закона сохранения механической энергии получаем:

$$W + U = Mv^2 + \frac{mg}{R} \cdot \frac{x^2}{2} = \text{const.}$$

Отсюда видно, что данная система колеблется так же, как груз массой  $2M$  на пружине с коэффициентом жёсткости, равным  $mg/R$ . Следовательно, период малых колебаний рассматриваемой системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2MR}{mg}}.$$

Отметим, что приведённое решение совершенно неприменимо при  $M \rightarrow 0$ . Полученное нами выражение для периода даёт в этом случае  $T \rightarrow 0$ , что неверно. Можно показать, что при невесомом обруче любые, даже сколь угодно малые, колебания данной системы не являются гармоническими, а их период зависит от амплитуды. При решении

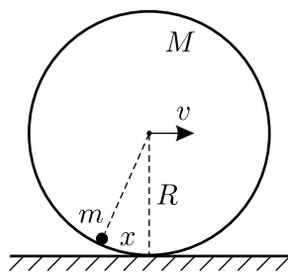


Рис. 1.219.

такой задачи уже необходимо учитывать кинетическую энергию шарика, которой мы пренебрегали.

**1.220.** Обозначим длину пружины в недеформированном состоянии через  $l_0$ , а в положении равновесия — через  $l_1$ . Условие равновесия обруча имеет вид:

$$mg = 2T = 2k(l_1 - l_0),$$

где  $T$  — сила натяжения нити, перекинутой через обруч.

Пусть в процессе колебаний центр обруча сместился вниз от положения равновесия на расстояние  $x$  и приобрёл при этом скорость  $v = dx/dt$ . Тогда потенциальная энергия системы с учётом условия равновесия станет равной

$$\begin{aligned} U &= -mgx + \frac{k}{2} ((l_1 - l_0 + 2x)^2 - (l_1 - l_0)^2) = \\ &= -mgx + 2kx(l_1 - l_0) + 2kx^2 = 2kx^2 \end{aligned}$$

(за начало отсчёта потенциальной энергии выбрано положение равновесия оси обруча). Кинетическая энергия обруча, как и в [предыдущей задаче](#), складывается из энергий его поступательного и вращательного движений и равна

$$W = W_{\text{п}} + W_{\text{в}} = mv^2.$$

Отсюда для круговой частоты колебаний  $\omega$  получаем:  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ .

**1.221\*.** Гайка движется по кривой линии, причём в любой момент сумма расстояний от точек закрепления концов нити до места нахождения гайки постоянна и равна  $2l$ . Таким свойством обладает эллипс. Следовательно, траектория гайки — дуга эллипса с полуосями  $h$  и  $l$  (см. рис. 1.221). Как известно, такой эллипс можно получить сжатием окружности радиусом  $R = l$  в  $l/h$  раз. Значит, радиус кривизны эллипса в его нижней точке в  $l/h$  раз больше радиуса этой окружности:  $R_{\text{кр}} = l^2/h$ . При малых амплитудах колебаний гайка движется так же, как математический маятник длиной  $R_{\text{кр}}$ . Таким образом, период малых колебаний гайки

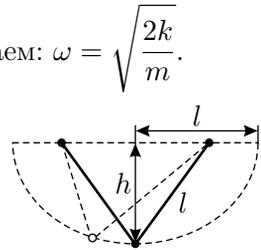


Рис. 1.221.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_{\text{кр}}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{gh}}.$$

**1.222\***. Расстояние от верхнего кубика до отверстия в поверхности при равновесном скольжении равно, очевидно,  $L = g/\omega^2$ . Пусть после того, как дёрнули за нижний кубик, это расстояние увеличилось и в некоторый момент достигло максимального значения  $L + \Delta x$ , где  $\Delta x \ll L$ , а скорость верхнего кубика стала равна  $v'$ . Поскольку при этом для верхнего кубика сохраняется величина  $m \cdot \omega L \cdot L = mv'(L + \Delta x)$  (момент количества движения или, иначе, момент импульса), то полная механическая энергия обоих кубиков в положении наибольшего отклонения равна

$$E_1 = \frac{mv'^2}{2} + mg\Delta x = \frac{m \left( \frac{\omega L^2}{L + \Delta x} \right)^2}{2} + mg\Delta x.$$

(потенциальная энергия отсчитывается от исходного равновесного положения нижнего кубика). Энергия обоих кубиков в момент прохождения положения равновесия равна

$$E_2 = \frac{m(\omega L)^2}{2} + \frac{2mv^2}{2},$$

так как верхний кубик одновременно участвует во вращательном и в поступательном движениях. По закону сохранения механической энергии  $E_1 = E_2$ , поэтому

$$2v^2 + \omega^2 L^2 = \frac{\omega^2 L^4}{(L + \Delta x)^2} + 2g\Delta x.$$

Поскольку  $\Delta x \ll L$ , то дробь  $\frac{1}{(L + \Delta x)^2}$  можно разложить по степеням  $\Delta x$  до квадратичных членов:

$$\frac{1}{(L + \Delta x)^2} \approx \frac{1}{L^2} + A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta x^2.$$

(заметим, что при решении данной задачи разложения с точностью до членов первого порядка малости оказывается недостаточно). Найдём коэффициенты этого разложения  $A$  и  $B$ , выполнив следующие преобразования:

$$1 \approx \frac{1}{L^2} (L^2 + 2L\Delta x + \Delta x^2) + A\Delta x(L^2 + 2L\Delta x) + B\Delta x^2 L^2,$$

$$\Delta x \left( \frac{1}{L^2} + 2AL + BL^2 \right) + \left( \frac{2}{L} + AL^2 \right) = 0.$$

Так как это соотношение должно выполняться при любом малом  $\Delta x$ , то оба выражения в скобках должны равняться нулю:

$$\frac{1}{L^2} + 2AL + BL^2 = 0, \quad \frac{2}{L} + AL^2 = 0.$$

Отсюда  $A = -\frac{2}{L^3}$ ,  $B = \frac{3}{L^4}$ . Подставляя коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнение, выражающее закон сохранения энергии, получаем:

$$2v^2 + \omega^2 L^2 = \omega^2 L^4 \left( \frac{1}{L^2} - \frac{2\Delta x}{L^3} + \frac{3\Delta x^2}{L^4} \right) + 2g\Delta x,$$

или

$$2v^2 + \omega^2 L^2 = \omega^2 L^2 + 2(g - \omega^2 L)\Delta x + 3\omega^2 \Delta x^2,$$

откуда с учётом условия равновесного скольжения имеем:

$$2v^2 = 3\omega^2 \Delta x^2.$$

Квадрат круговой частоты колебаний определяется, как известно, отношением коэффициентов при  $\Delta x^2$  и при  $v^2$ , поэтому искомая частота равна  $\Omega = \omega\sqrt{3/2}$ .

**1.223\***. Легко видеть, что движение по «восьмёрке» возможно тогда и только тогда, когда частота колебаний шарика в вертикальном направлении  $\omega_{\text{в}}$  в два раза превышает частоту его колебаний в горизонтальном направлении  $\omega_{\text{г}}$ , то есть  $\omega_{\text{в}} = 2\omega_{\text{г}}$ .

Обозначим силы натяжения пружин через  $T$ , а их коэффициенты жёсткости через  $k$ ; при этом  $T = k(l - l_0)$ . Тогда при отклонении шарика в горизонтальном направлении на расстояние  $x \ll l$  на него будет действовать горизонтальная возвращающая сила  $F = -(2T/l)x$ . Поэтому квадрат частоты горизонтальных колебаний равен  $\omega_{\text{г}}^2 = 2T/(ml)$ . Для вертикальных колебаний, очевидно, получаем:  $\omega_{\text{в}}^2 = 2k/m$ .

Поскольку  $\omega_{\text{в}}^2 = 4\omega_{\text{г}}^2$ , то  $\frac{2k}{m} = 4 \cdot \frac{2k(l - l_0)}{ml}$ , или  $1 - (l_0/l) = 1/4$ .

Следовательно,  $l_0 = (3/4)l$ .

**1.224\***. Рассмотрим движение одного кольца, прикрепленного к стержню на расстоянии  $H$  от его нижнего конца. В тот момент, когда горизонтальная скорость кольца при его колебаниях вместе со стержнем равна  $v$ , центростремительное ускорение этого кольца равно  $v^2/H$ , и касательная составляющая силы его давления на стержень  $T = mg - (mv^2/H)$ . Усредняя это равенство по времени за период колебаний и учитывая, что верхний конец стержня совершает гармонические колебания  $x = a \sin \omega t$ , то есть скорость рассматриваемого кольца

изменяется со временем  $t$  по закону  $v = \omega(aH/l) \cos \omega t$ , получаем:

$$\langle T \rangle = mg - \frac{m\langle v^2 \rangle}{H} = mg - \frac{mv_{\max}^2}{2H} = mg - \frac{m(\omega aH/l)^2}{2H} = m \left( g - \frac{\omega^2 a^2 H}{2l^2} \right).$$

Здесь  $v_{\max} = \omega aH/l$  — максимальное значение скорости рассматриваемого кольца при колебаниях, а угловыми скобками обозначена операция усреднения по времени.

Из полученного выражения видно, что при достаточно больших частотах и не слишком малой по сравнению с  $l$  величине  $H$  касательная составляющая силы давления кольца на стержень становится в среднем за период отрицательной, то есть направленной вверх. Следовательно, при  $H > \frac{2gl^2}{\omega^2 a^2}$  кольцо стремится подняться вверх, что непременно и делает после освобождения. Таким образом, кольца, отстоящие от нижнего конца стержня на расстояние, превышающее  $H_0 \approx \frac{2gl^2}{\omega^2 a^2}$ , слетят с верхнего конца стержня через некоторое время после расплавления припоя, а остальные останутся и упадут вниз, к шарниру. Поэтому часть (доля) колец, которая останется на стержне, равна  $\eta = \frac{H_0}{l} \approx \frac{2gl}{\omega^2 a^2}$ .

**1.225.** Запишем уравнение движения шара:  $ma = -kx + F_{\text{тр}}(v)$ , где  $v$  и  $a$  — скорость и ускорение шара соответственно. Отсюда  $F_{\text{тр}} = ma + kx$ . Так как движение маятника, судя по графикам, является колебательным (шар несколько раз проходит через положение равновесия), то для получения искомой зависимости  $F_{\text{тр}}(v)$  достаточно рассмотреть движение в течение одного периода — например, первого, когда координата изменяется от  $x = 50$  см до  $x \approx 20$  см. Используя приведённые графики зависимостей  $v(a)$  и  $a(v)$ , составим таблицу из шести колонок.

В первые две колонки внесём координаты шара и соответствующие им скорости — эту информацию можно извлечь из графика зависимости  $v(x)$ . В третью колонку, пользуясь графиком зависимости  $a(v)$ , впишем значения ускорения, соответствующие имеющимся во второй колонке значениям скорости. В четвёртую и пятую колонки внесём величины  $ma$  и  $kx$ , полученные путём умножения чисел из третьей и первой колонок на  $m$  и  $k$  соответственно. Наконец, в шестую колонку поместим сумму чисел из четвёртой и пятой колонок, то есть величину  $ma + kx$ . При заполнении таблицы переведём все величины в систему единиц СИ.

К решению задачи 1.225.

$x$ , м	$v$ , м/с	$a$ , м/с <sup>2</sup>	$ma$ , Н	$kx$ , Н	$(ma + kx)$ , Н
0,50	0	-25,00	-25,00	25,00	0,00
0,45	-1,50	-19,00	-19,00	22,50	3,50
0,40	-2,00	-16,00	-16,00	20,00	4,00
0,25	-2,75	-6,30	-6,30	12,50	6,20
0,00	-2,75	6,30	6,30	0,00	6,30
-0,10	-2,50	10,00	10,00	-5,00	5,00
-0,15	-2,25	12,00	12,00	-7,50	4,50
-0,225	-1,75	14,75	14,75	-11,25	3,50
-0,275	-1,25	16,30	16,30	-13,75	2,55
-0,30	-0,85	16,70	16,70	-15,00	1,70
-0,32	0,00	16,30	16,30	-16,00	0,30
-0,28	1,00	12,50	12,50	-14,00	-1,50
-0,225	1,50	8,50	8,50	-11,25	-2,75
-0,10	1,85	1,00	1,00	-5,00	-4,00
0,09	1,50	-7,50	-7,50	4,50	-3,00
0,165	1,00	-10,00	-10,00	8,25	-1,75
0,20	0,35	-11,00	-11,00	10,00	-1,00

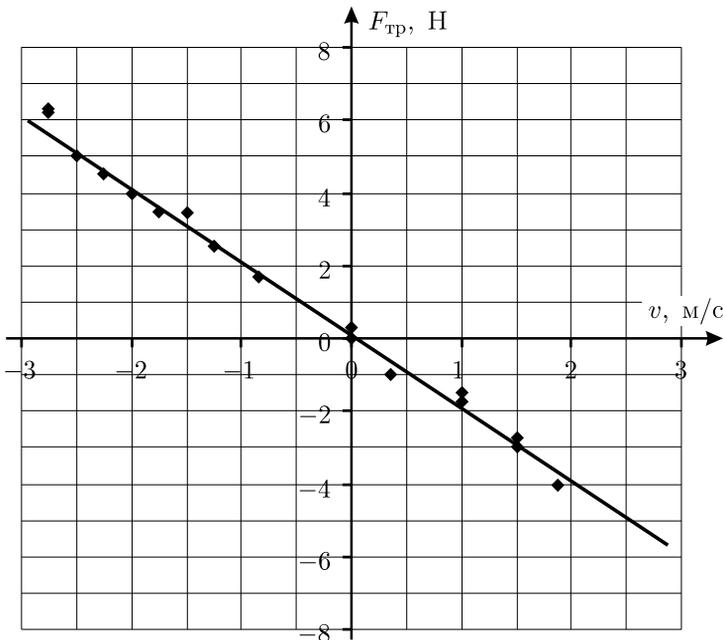


Рис. 1.225.

Согласно написанному нами уравнению движения, в последней колонке таблицы находятся значения действовавшей на маятник силы трения. Используя данные из второй и шестой колонок, построим график зависимости  $F_{\text{тр}}(v)$  (см. рис. 1.225). Мы видим, что сила трения направлена против скорости шара и, по видимому, пропорциональна скорости в первой степени:  $F_{\text{тр}} = -\alpha v$ , где  $\alpha \approx 2 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}$ .

**1.226\***. Запишем уравнение движения грузика в проекции на горизонтальную ось  $X$ , направленную вдоль оси пружины от стенки, используя обычную модель для описания зависимости силы трения скольжения от направления и величины скорости:

$$ma_x = -kx - \mu mg \operatorname{sgn}(v_x).$$

Здесь  $v_x$  и  $a_x$  — проекции скорости и ускорения грузика, а функция  $\operatorname{sgn}(v_x)$  («знак  $v_x$ ») определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn}(v_x) = \begin{cases} +1 & \text{при } v_x > 0, \\ -1 & \text{при } v_x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение движения в зависимости от знака  $v_x$  распадается на два разных уравнения:

$$\begin{aligned} a_x + \frac{k}{m} \left( x + \frac{\mu mg}{k} \right) &= 0 \text{ при } v_x > 0, \\ a_x + \frac{k}{m} \left( x - \frac{\mu mg}{k} \right) &= 0 \text{ при } v_x < 0. \end{aligned}$$

Это — уравнения гармонических колебаний, происходящих с той же частотой  $\omega = \sqrt{k/m}$ , что и в отсутствие трения, но на каждом полупериоде колебаний (при смене знака  $v_x$ ) у получающейся зависимости  $x(t)$  смещается «нуль»: при  $v_x > 0$  — в точку  $x_+ = -\mu mg/k$ , а при  $v_x < 0$  — в точку  $x_- = +\mu mg/k$ . По условию в начальный момент ( $t = 0$ ) у грузика имеется начальное смещение  $x_0$ , а его начальная скорость  $v_{x0} = 0$ . Таким образом, закон движения на каждом полупериоде — косинусоида с соответствующим образом смещённым «нулём». Зона между координатами  $x_-$  и  $x_+$  называется «зоной застоя».

Нарисуем график зависимости  $x(t)$ , считая, что на первом полупериоде колебаний  $x_0 > 0$ , а  $v_x < 0$  (см. рис. 1.226). Поскольку при этом «нуль» косинусоиды находится в точке  $x_-$ , то можно записать:  $x_0 - x_- = x_- - x_1$ , где  $|x_1|$  — амплитуда по истечении первого полупериода колебаний. Таким образом, за один полупериод амплитуда уменьшается на величину

$$\Delta x = x_0 - |x_1| = 2x_- = 2\frac{\mu mg}{k} = \text{const.}$$

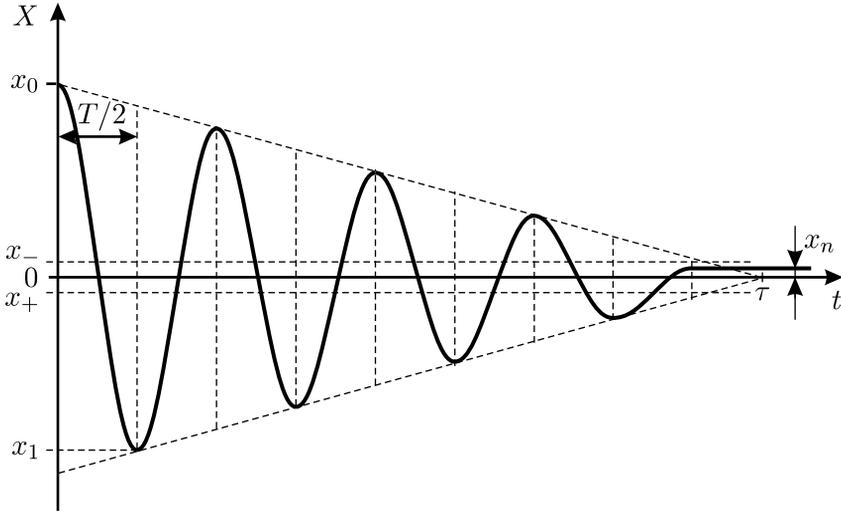


Рис. 1.226.

Аналогичные рассуждения можно провести для любого полупериода колебаний. Поэтому можно утверждать, что с течением времени амплитуда колебаний при наличии сухого трения убывает по линейному закону. Это происходит до тех пор, пока очередная координата максимального отклонения (при которой изменяется знак скорости) не окажется внутри зоны застоя:  $|x_n| \leq \mu mg/k$ . При этом упругая сила уже не сможет преодолеть максимальную силу трения покоя:  $k|x_n| \leq \mu mg$ , и грузик остановится, совершив  $n$  полупериодов колебаний за время  $\tau = n \frac{T}{2} = \frac{n\pi}{\omega} = n\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Для оценки числа  $n$  воспользуемся законом изменения механической энергии. Вначале энергия упругой деформации пружины равна  $kx_0^2/2$ , а в конце, после остановки, она равна  $kx_n^2/2$ , так что работа против силы трения на пути  $S$  равна по величине разности этих энергий:

$$\mu mgS = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_n^2}{2}.$$

Поскольку по условию  $n \gg 1$  и  $x_0 \gg |x_n|$ , то вторым слагаемым в правой части уравнения можно пренебречь, и

$$x_0 \approx \sqrt{\frac{2\mu mgS}{k}}, \quad \text{а} \quad n \approx \frac{x_0}{\Delta x} \approx \sqrt{\frac{kS}{2\mu mg}}.$$

Заметим, что ошибка в определении  $n$ , возникающая за счёт пренебрежения слагаемым  $kx_n^2/2$ , не превышает величины  $\sim \frac{1}{8n} \ll 1$ .

Таким образом, время, через которое грузик остановится, равно

$$\tau \approx \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sqrt{\frac{kS}{2\mu mg}} = \pi \sqrt{\frac{S}{2\mu g}}.$$

В зависимости от величины  $x_0$ , остановка грузика может произойти в любой точке внутри зоны застоя, то есть на расстоянии  $|x_n| \leq \frac{\mu mg}{k} = \frac{\Delta x}{2}$  от положения равновесия, а по времени — на  $\Delta\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$  раньше или позже момента времени  $\tau$ , когда амплитуда колебаний обращается в ноль.

*Замечание.* Время, которое займёт процесс колебаний, можно найти точно (квадратные скобки — обозначение целой части числа):

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2kS}{\mu mg}} \right) - \varepsilon \right], \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**1.227\*.** При малых колебаниях шаров в промежутках между соударениями отклонение от вертикали  $x$  и скорость  $v$  каждого из шаров изменяются со временем  $t$  по гармоническому закону. Рассмотрим сначала интервал времени перед первым соударением. Будем считать, что при  $t = 0$  центры шаров находятся на максимальном удалении  $A = R + \Delta x$  от вертикали, где  $R$  — радиус шара. Так как столкновения частые, то  $\Delta x \ll R$  и можно считать, что  $A \approx R$ . Тогда в промежутках между соударениями  $x = R \cos \omega t$  и  $v = -R\omega \sin \omega t$ , где  $\omega = \sqrt{g/l}$  ( $l$  — длина нити, намного большая  $R$ ). Первое соударение произойдёт через время  $t = \Delta T_0/2$ . Скорость шара непосредственно перед первым столкновением будет равна по величине  $v_0 = R\omega \sin \frac{\omega \Delta T_0}{2} \approx \frac{R\omega^2 \Delta T_0}{2}$ , а сразу после него составит  $v_1 = kv_0$ .

Рассуждая аналогично, можно показать, что скорость шара перед  $(n+1)$ -м соударением равна  $v_n \approx \frac{R\omega^2 \Delta T_n}{2}$ , где  $\Delta T_n$  — промежуток времени между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м соударениями, причём  $v_{n+1} = kv_n$ . Отсюда, последовательно полагая  $n = 1, 2, 3, \dots$ , получим:

$$\Delta T_1 = \frac{v_1}{v_0} \Delta T_0 = k \Delta T_0, \quad \Delta T_2 = \frac{v_2}{v_1} \Delta T_1 = k^2 \Delta T_0, \quad \dots,$$

$$\Delta T_n = \frac{v_n}{v_{n-1}} \Delta T_{n-1} = k^n \Delta T_0, \quad \text{и так далее.}$$

Теперь можно найти длительность интервала времени, которое займут первые  $n$  соударений:

$$\begin{aligned} t_n &= \Delta T_0 + \Delta T_1 + \Delta T_2 + \dots + \Delta T_{n-1} = \Delta T_0 (1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}) = \\ &= \frac{1 - k^n}{1 - k} \Delta T_0 = \frac{\Delta T_0 - \Delta T_n}{1 - k} \end{aligned}$$

(для вычисления последней суммы мы воспользовались формулой для суммы первых  $n$  членов убывающей геометрической прогрессии). Отсюда  $\Delta T_n = \Delta T_0 - (1 - k)t_n$ , и частота соударений  $f_n = \frac{1}{\Delta T_n} = \frac{1}{\Delta T_0 - (1 - k)t_n}$ . При  $n \gg 1$ , когда удары происходят очень часто, промежутки времени  $\Delta T_n$  между соударениями очень малы, и поэтому в последней формуле можно заменить величину  $t_n$  на время  $t$ . Тогда искомый закон роста частоты со временем имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{\Delta T_0 - (1 - k)t}.$$

Заметим, что частота возрастает с течением времени по гиперболическому закону, то есть сначала достаточно медленно, а потом всё быстрее и быстрее. Поэтому, если поднести к сталкивающимся шарам микрофон, подключённый к звукоусилительной системе, то будут слышны отдельные резкие удары, частота которых будет всё быстрее и быстрее увеличиваться, и вскоре будет слышен лишь непрерывный гул с возрастающей частотой.

**1.228.** На приведённом в условии рисунке площадь горизонтального сечения, в котором находится свободная поверхность жидкости, в рассматриваемый момент минимальна. Из этого следует, что малые изменения уровня жидкости не приводят к изменению площади её свободной поверхности. Значит, поскольку расширением сосуда можно пренебречь, то увеличение объёма жидкости на 1% и связанное с ним повышение уровня жидкости  $x$  связаны друг с другом соотношением:  $0,01V = Sx$ . При нагревании плотность жидкости  $\rho$  уменьшается в 1,01 раза. Поэтому для того, чтобы в точке  $M$  сохранилось прежнее давление, должно выполняться следующее соотношение:  $\rho gh = \frac{\rho}{1,01} g(h + x)$ .

Отсюда следует, что заданные в условии задачи параметры должны быть связаны уравнением:  $1,01h = h + 0,01V/S$ . Из него получаем искомое условие:  $h = V/S$ .

**1.229.** Мысленно разрежем сосуд по упомянутому в условии задачи круговому сечению. Сила, с которой газ действует на стенки левой

части сосуда, по третьему закону Ньютона равна по величине и противоположна по направлению силе, с которой эти стенки сосуда действуют на газ. Поскольку газ в левой части сосуда находится в равновесии, то сумма сил, действующих на него со стороны стенок и со стороны газа в правой части сосуда, равна нулю. Таким образом, искомая сила давления газа на стенки левой части сосуда равна силе давления газа, действующей на рассматриваемое круговое сечение со стороны газа в правой части сосуда. Величина этой силы равна  $F = \pi b^2 p$ , а направлена она влево, перпендикулярно данному круговому сечению.

**1.230.** Так как колпачок лёгкий, то искомая сила равна весу жидкости, находящейся непосредственно над ним. Пусть  $V$  — объём этой жидкости. Тогда:

$$F = \rho g V = \rho g \left( \pi R^2 H - \frac{2}{3} \pi R^3 \right) = \rho g \pi R^2 \left( H - \frac{2}{3} R \right).$$

**1.231.** В любой момент времени давление в жидкости на уровне нижнего конца трубки равно  $p + \rho gh$ , где  $p$  — давление воздуха в бутылке,  $h$  — глубина, на которую погружен нижний конец трубки. До вынимания затычки давление воздуха в бутылке было равно атмосферному давлению  $p_0$ . Значит, давление на уровне нижнего конца трубки было равно  $p_0 + \rho gh$ . Ясно, что давление на уровне отверстия в боковой стенке было ещё больше (оно находится глубже нижнего конца трубки), поэтому после вынимания затычки вода начинает вытекать из бутылки, объём воздуха над поверхностью воды увеличивается, и давление воздуха в бутылке постепенно падает. Так будет продолжаться до тех пор, пока давление на уровне нижнего конца трубки не станет равно атмосферному. Как только это случится, через трубку в бутылку станут входить пузырьки воздуха, и вода станет вытекать из отверстия с постоянной скоростью (см. рис. 1.231). Значит, начиная с этого момента справедливо соотношение:  $p_0 = p + \rho gh$ , откуда для момента, когда нижний конец трубки находится на глубине  $h = 5$  см, получаем, что  $p = p_0 - \rho gh = 99\,510$  Па.

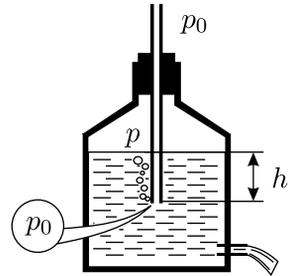


Рис. 1.231.

**1.232.** Пусть после того, как на поршень массой  $M_1$  положили груз массой  $m$ , этот поршень опустился на расстояние  $\Delta h_1$ , а второй поршень поднялся на высоту  $\Delta h_2$  относительно начального положения. При этом перепад уровней жидкости в сосудах будет равен  $\Delta h_1 + \Delta h_2$ , а разность давлений, создаваемая этим перепадом уров-

ней, будет компенсироваться добавочным давлением, которое создаёт груз массой  $m$ , лежащий на первом поршне. Отсюда получаем уравнение:  $\rho g(\Delta h_1 + \Delta h_2) = mg/S_1$ . Здесь  $S_1$  — площадь поршня массой  $M_1$ . Далее, так как объём жидкости под поршнями не изменился, то справедливо соотношение:  $S_1\Delta h_1 = S_2\Delta h_2$ , где  $S_2$  — площадь поршня массой  $M_2$ . Выражая из второго уравнения величину  $\Delta h_1$  и подставляя её в первое уравнение, найдём высоту, на которую поднимется поршень массой  $M_2$ :

$$\Delta h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)}.$$

По условию задачи эта величина равна  $h$ .

Пусть теперь груз массой  $m$  положили на поршень массой  $M_2$ . Проводя аналогичные рассуждения, можно честно найти высоту  $\Delta h'_1$ , на которую при этом поднимется поршень массой  $M_1$ . Однако, зная выражение для  $\Delta h_2$ , ответ можно просто угадать. Действительно, в рассматриваемой системе всё равно, какой поршень считать «первым», а какой — «вторым». Значит, для того, чтобы получить ответ, можно просто перенумеровать все величины в последней формуле, то есть заменить все индексы «1» на индексы «2», и наоборот. В итоге получим

$$\Delta h'_1 = \frac{m}{\rho(S_2 + S_1)} = \Delta h_2 = h.$$

Итак, если положить груз массой  $m$  на поршень массой  $M_2$ , то поршень массой  $M_1$  поднимется относительно начального положения на такую же высоту  $h$ , на какую поднимался поршень массой  $M_2$ , когда груз массой  $m$  клали на поршень массой  $M_1$ .

**1.233.** По условию задачи диаметр трубки достаточно велик для того, чтобы можно было не учитывать капиллярных явлений. При наливании в левое колено трубки большого количества воды ртуть может переместиться настолько, что вода доберётся до низа трубки. Дальнейшее увеличение количества налитой воды не будет приводить к перемещению ртути, так как вода из левого колена через изогнутый участок будет перетекать в правое колено. При этом перетёкшая вода будет располагаться поверх ртути.

Выясним, хватит ли двух литров воды для того, чтобы часть воды перетекла из левого колена в правое. Сечение трубки равно  $S = \pi d^2/4 \approx 0,785 \text{ см}^2$ . Общая длина столбика ртути в этой трубке составляет  $V_0/S \approx 63,7 \text{ см}$ . Максимальное давление, которое может создать столбик ртути такой длины, равно  $p_{\text{рт}} = \rho g V_0/S \approx 84,9 \text{ кПа}$ . Два литра воды плотностью  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$  могут создать в вертикальной трубке максимальное давление  $p_{\text{в}} = \rho_0 g V_1/S \approx 249,7 \text{ кПа}$ . Так как

$p_{\text{в}} > p_{\text{рт}}$ , то это означает, что в процессе наливания воды ртуть сместится настолько, что её верхний уровень в том колене, куда налита вода, совпадёт с верхней точкой самого нижнего поперечного сечения трубки, и часть воды перетечёт в правое колено. Поскольку радиус закругления нижней части трубки по порядку величины сравним с её внутренним диаметром, то длину столбика оставшейся в левом колене ртути можно оценить из следующих соображений: по теореме Пифагора длина горизонтальной части поверхности ртути в этом колене равна  $\sqrt{3^2 - 2^2} \approx 2,2$  см, но с учётом того, что ртутью заполнен не весь этот объём, а примерно  $3/4$  его, в левой части трубки остаётся столбик с эффективной длиной, примерно равной 1,7 см. Поэтому смещение ртути вдоль оси трубки составит:  $L \approx \frac{V_0}{2S} - 1,7 \text{ см} \approx 31,8 \text{ см} - 1,7 \text{ см} \approx 30 \text{ см}$ .

**1.234\***. До открывания крана гидростатическое давление по разные его стороны было различным. В левой части горизонтальной трубки давление было равно  $p_1 = \frac{\rho_{\text{в}}gH}{2}$ , а в правой  $p_2 = \rho_{\text{в}}gH - \frac{\rho_{\text{м}}gH}{2} = \frac{\rho_{\text{в}}gH}{2} \left( 2 - \frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{в}}} \right)$ . Так как  $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{м}}$ , то  $p_2 > p_1$ . Это означает, что после открывания крана часть масла перетечёт по горизонтальной трубке из правого колена в левое и разместится в нём над слоем воды, образовав столбик некоторой высоты  $x$ . (Заметим, что, так как трубка тонкая, то можно считать, что после установления по разные стороны от крана одинаковых давлений в горизонтальной трубке будет находиться только масло.)

После перетекания масла уровень ртути в правом колене поднимется на некоторую величину  $y$ , а в левом колене он опустится на такую же величину. Уровень воды над левым концом горизонтальной трубки понизится на такую же величину  $y$ , как и уровень ртути в левом колене. В свою очередь, столбик масла в правом колене поднимется на величину  $y$  из-за поднятия уровня ртути в правом колене и одновременно опустится на величину  $x$  из-за перетекания части масла в левое колено. В конце концов, новое состояние равновесия будет таким, что по разные стороны от крана в горизонтальной трубке давления будут одинаковыми. Это означает, что

$$\frac{\rho_{\text{в}}gH}{2} + \rho_{\text{м}}gx - \rho_{\text{в}}gy = \rho_{\text{в}}gH - \frac{\rho_{\text{м}}gH}{2} + \rho_{\text{м}}gy - \rho_{\text{м}}gx.$$

Кроме того, ясно, что давление в нижней части U-образной трубки должно остаться таким же, каким оно было до открывания кра-

на, так как сила давления на дно постоянна — она равна суммарному весу всех жидкостей, заполняющих трубку. Это, в частности, означает, что уменьшение давления в левом колене из-за вытекания из него ртути компенсируется давлением, которое создаётся перетёкшим в левое колено маслом:  $\rho_D g y = \rho_M g x$ .

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$x = \frac{\rho_D (\rho_B - \rho_M) H}{2\rho_M (2\rho_D - \rho_B - \rho_M)}.$$

Отсюда искомое понижение уровня масла в правом колене:

$$h = x - y = x \left(1 - \frac{\rho_M}{\rho_D}\right) = \frac{\rho_D - \rho_M}{2\rho_D - (\rho_B + \rho_M)} \cdot \frac{\rho_B - \rho_M}{\rho_M} \cdot \frac{H}{2}.$$

Заметим, что, поскольку,  $\rho_D \gg \rho_M$  и  $\rho_D \gg \rho_B$ , то полученный ответ можно представить в приближённом виде:  $h \approx ((\rho_B - \rho_M)/\rho_M) \cdot (H/4)$ .

**1.235\***. При любом положении рычага действующий на него момент силы тяжести  $mg$  уравновешивается моментом силы реакции штока  $N$ , которая, в силу отсутствия трения, всегда направлена перпендикулярно рычагу (см. рис. 1.235). Вертикальная проекция силы реакции равна силе давления, создаваемого столбом налитой в U-образную трубку жидкости. Правило рычага для исходного горизонтального положения имеет вид:

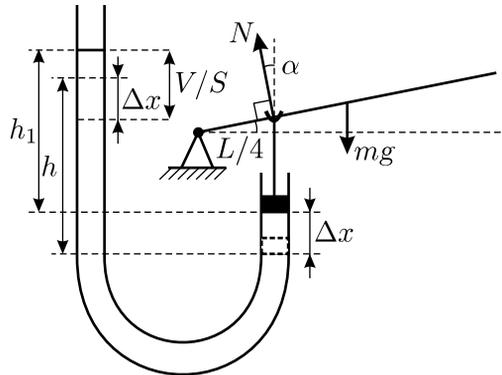


Рис. 1.235.

$$mg \frac{L}{2} = \rho g h S \frac{L}{4},$$

где  $h$  — расстояние от начального уровня жидкости в открытом колене трубки до уровня нижней поверхности поршня (на рисунке пунктиром показано положение поршня в исходном положении).

После доливания в трубку жидкости поршень вместе со штоком сместится вверх, а рычаг повернётся. При этом плечо силы тяжести уменьшится до  $(L \cos \alpha)/2$ , а плечо силы реакции штока увеличится до  $L/(4 \cos \alpha)$ , поскольку шток сохраняет вертикальное положение. При

этом вертикальная составляющая силы реакции  $N \cos \alpha$  станет равной  $\rho g h_1 S$ , где  $h_1$  — расстояние от нового уровня жидкости в открытом колене трубки до нового уровня нижней поверхности поршня. Значит, правило рычага для этого случая имеет вид:

$$mg \frac{L \cos \alpha}{2} = \frac{\rho g h_1 S}{\cos \alpha} \cdot \frac{L}{4 \cos \alpha}.$$

Так как шток жёсткий, то смещение поршня при повороте рычага равно расстоянию, на которое поднялся верхний конец штока:  $\Delta x = (L/4) \operatorname{tg} \alpha$ . При этом на такое же расстояние опустился уровень жидкости в открытом колене трубки. Долитая же в трубку жидкость объёмом  $V$  обеспечила дополнительный подъём разности уровней до высоты  $h_1$ , необходимой для установления равновесия. Следовательно (см. рис. 1.235),

$$h_1 = \frac{V}{S} + h - 2\Delta x = \frac{V}{S} + h - 2 \cdot \frac{L}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Решая полученные уравнения, находим ответ:  $m = \frac{\rho(LS \operatorname{tg} \alpha - 2V)}{4(1 - \cos^3 \alpha)}$ .

**1.236\***. Так как планета вращается вокруг неподвижной оси, и все действующие в системе силы являются центральными, то эта ось является осью симметрии планеты. Рассмотрим любое сечение планеты плоскостью, в которой лежит ось вращения, и будем решать двумерную задачу о поиске границы сечения. Введём прямоугольную систему координат  $OXY$  с началом в центре планеты, ось  $Y$  сонаправим с осью вращения планеты (см. рис. 1.236). Поверхность планеты получится в результате вращения найденной кривой  $y(x)$  вокруг указанной оси.

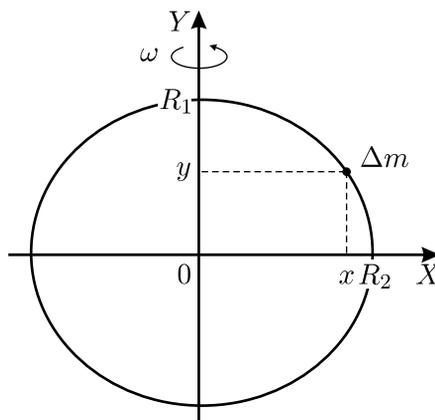


Рис. 1.236.

Перейдём в неинерциальную систему отсчёта, вращающуюся вместе с планетой с угловой скоростью  $\omega$ . В этой системе отсчёта жидкость покоится. Потенциальная энергия любого элемента жидкости массой  $\Delta m$ , лежащего на поверхности планеты и имеющего координаты  $(x, y)$ , складывается из потенциальной энергии в поле силы тяжести

$U_{\text{гр}}$  и потенциальной энергии в поле центробежных сил  $U_{\text{цб}}$ . Поскольку несферичность планеты мала, то можно считать, что создаваемое ею гравитационное поле почти не отличается от поля сферической планеты, и  $U_{\text{гр}} \approx -\frac{G\Delta mM}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где  $G$  — гравитационная постоянная. Для энергии  $U_{\text{цб}}$  имеем:  $U_{\text{цб}} = -\Delta m\omega^2 x^2/2$ .

Так как все точки, лежащие на поверхности планеты, неподвижны, а следовательно, имеют одинаковую энергию, то сумма  $U_{\text{гр}}$  и  $U_{\text{цб}}$  есть величина постоянная при любых  $x$  и  $y$  (иначе говоря, поверхность планеты является эквипотенциалью):

$$-\frac{G\Delta mM}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{\Delta m\omega^2 x^2}{2} = \text{const.}$$

Написанное уравнение представляет собой уравнение искомой границы сечения. Постоянную величину  $\text{const}$  найдём из условия:  $y = R_1$  при  $x = 0$ . Отсюда  $\text{const} = -G\Delta mM/R_1$  (заметим, что  $R_1$  неизвестно). После этого уравнение границы сечения принимает вид:

$$GM \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\omega^2 x^2}{2}.$$

При  $y = 0$  координата  $x$  принимает значение  $x = R_2$  (тоже неизвестное). Тогда из последнего уравнения получаем:

$$GM \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{\omega^2 R_2^3}{2}.$$

Учитывая, что несферичность мала, то есть  $R_1, R_2 \sim R$ , и что  $\frac{R_2 - R_1}{R_1} = \delta$ , окончательно находим:  $\delta \approx \frac{\omega^2 R^3}{2GM}$ .

Заметим, что несферичность попросту равна отношению  $U_{\text{цб}}/U_{\text{гр}}$  при  $x = R, y = 0$ , то есть на экваторе планеты.

Интересно воспользоваться полученной формулой для оценки величины  $\delta_3$  несферичности Земли. Учитывая, что угловая скорость суточного вращения Земли равна  $\omega = 2\pi/T \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ , средний радиус Земли  $R \approx 6370 \text{ км}$ , а ускорение свободного падения на её поверхности  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ , получим:  $\delta_3 = \frac{\omega^2 R}{2g} \approx \frac{1}{580}$ . На самом деле несферичность Земли составляет  $\sim 1/300$ , то есть наша оценка, основанная на модели жидкой планеты, является довольно грубой.

**1.237.** При решении задачи следует рассмотреть два случая:  $\rho < \rho_0$  и  $\rho > \rho_0$ .

В первом случае груз плавает в жидкости, и поскольку её уровень в обоих сообщающихся сосудах одинаков, то давление жидкости на дно сосудов одинаково, и силы давления сосудов на стол также одинаковы.

Во втором случае утонувший груз будет лежать на дне сосуда и давить на него с силой, равной разности силы тяжести  $mg$  и силы Архимеда  $\rho_0 g \cdot m/\rho$ . При этом жидкость по-прежнему будет давить на дно сообщающихся сосудов с одинаковой силой. Поэтому сосуд с грузом будет давить на стол с силой, превышающей силу давления сосуда без груза на величину  $F = mg(1 - (\rho_0/\rho))$ .

**1.238.** Нарисуем график (см. рис. 1.238), вдоль горизонтальной оси которого отложим степень свежести яиц (в неделях), а вдоль вертикальной — концентрацию соли в растворе (в граммах на 0,5 литра воды). Видно, что на графике есть линейный участок, который свидетельствует о том, что в период с двух до восьми недель плотность яиц равномерно уменьшается со временем.

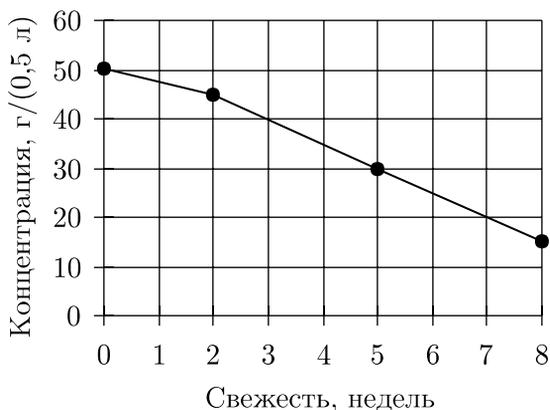


Рис. 1.238.

Далее найдём концентрацию соли в растворе, получившемся после сливания содержимого всех четырёх банок в одну большую ёмкость. Эта ёмкость содержит  $4 \cdot 0,5 \text{ л} = 2$  литра воды и  $50 \text{ г} + 45 \text{ г} + 30 \text{ г} + 15 \text{ г} = 140 \text{ г}$  соли. Следовательно, концентрация соли в получившемся растворе равна  $140 \text{ г}/4 = 35$  грамм на 0,5 литра. Из чертежа видно, что точка графика, соответствующая этой концентрации, лежит на линейном участке графика. Это даёт возможность, используя график, определить свежесть яиц, которые тонут в получившемся растворе — они снесены не более 4 недель назад.

**1.239.** Так как поплавки и рычаг по условию задачи очень лёгкие, то при решении нужно учитывать только действующие в системе выталкивающие силы.

Поскольку поплавки одинаковые, то, пока они оба полностью погружены в жидкость, действующие на них выталкивающие силы также одинаковы.

Кроме того, рассматриваемый рычаг несимметричен — одно плечо у него больше другого. Поэтому после того, как поплавки отпустят, рычаг начнёт поворачиваться — длинное плечо пойдёт вверх. До каких пор будет продолжаться этот процесс? Так как у рычага плечо  $AC$  вдвое короче плеча  $AB$ , то для того, чтобы рычаг мог находиться в равновесии, необходимо, чтобы сила, приложенная к точке  $C$ , была вдвое больше, чем сила, приложенная к точке  $B$ . Поскольку поплавок, привязанный к точке  $C$ , опускается, то действующая на него выталкивающая сила остаётся неизменной. Отсюда следует, что равновесие будет возможно только в том случае, если поплавок, привязанный к точке  $B$ , достигнет поверхности и частично всплывёт, оставаясь погруженным на половину своего объёма (см. рис. 1.239). При этом действующая на него выталкивающая сила уменьшится ровно вдвое. Такое положение поплавок возможно: поскольку по условию задачи  $AC > h$ , то угол поворота рычага не превышает  $30^\circ$ .

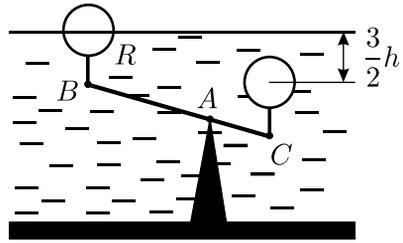


Рис. 1.239.

Итак, в положении равновесия центр поплавок, привязанного к точке  $B$ , будет находиться на поверхности жидкости, то есть на глубине  $H_B = 0$ . Очевидно, что центр этого поплавок при всплытии поднимется на высоту  $h$ . В соответствии с золотым правилом механики центр второго поплавок опустится на глубину  $h/2$  (он привязан к плечу, длина которого вдвое меньше). Значит, в положении равновесия центр поплавок, привязанного к точке  $C$ , будет находиться на глубине

$$H_C = h + \frac{h}{2} = \frac{3}{2}h.$$

**1.240.** Очевидно, что при  $\rho = 0$  глубина погружения шайбы  $H = 0$ . При  $0 < \rho < \rho_1$  шайба будет плавать на поверхности (см. рис. 1.240.1), и условие её плавания запишется в виде:  $\rho_1 g H S = \rho g h S$ , где  $S$  — площадь горизонтального сечения шайбы. Отсюда  $H = \frac{\rho}{\rho_1} h$ .

При  $\rho$  чуть большем, чем  $\rho_1$ , шайба тонет в верхней жидкости, и глубина её погружения  $H$  скачком возрастает до  $h_1$ .

При  $\rho_1 < \rho < \rho_2$  шайба погружается во вторую жидкость (см. рис. 1.240.2.), и глубина её погружения (от поверхности верхней жидкости) составляет  $H = h_1 + \Delta h$ , где  $\Delta h$  — глубина погружения шайбы во вторую жидкость, которая может быть найдена из условия плавания:

$$\rho_1 g(h - \Delta h)S + \rho_2 g \Delta h S = \rho g h S,$$

откуда  $\Delta h = \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h$ , и следовательно,

$$H = h_1 + \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} h.$$

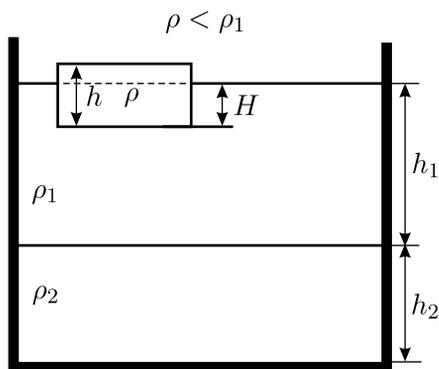


Рис. 1.240.1.

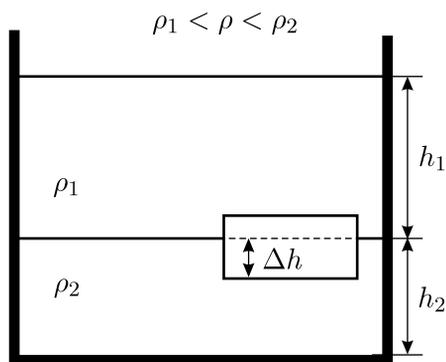


Рис. 1.240.2.

Наконец, при  $\rho$  чуть большем, чем  $\rho_2$ , шайба тонет в нижней жидкости, и глубина её погружения  $H$  скачком возрастает до  $h_1 + h_2$ . Далее с ростом  $\rho$  она будет оставаться постоянной — шайба утонула и лежит на дне.

Зависимость установившейся глубины погружения  $H$  нижней плоскости шайбы от плотности шайбы  $\rho$  приведена на графике (рисунок 1.240.3.)

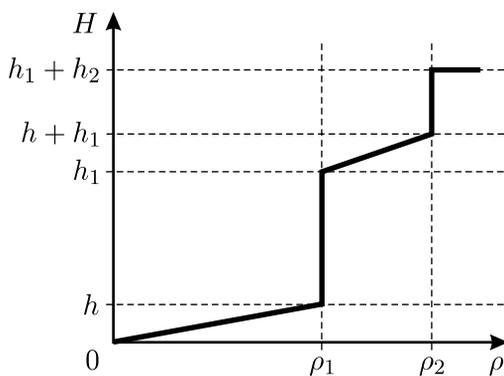


Рис. 1.240.3.

**1.241\***. Исследуем вопрос о том, при каком уровне жидкости сила гидростатического давления, действующая на параллелепипед, будет максимальна.

Разобьём параллелепипед вертикальными плоскостями на много маленьких элементов. Рассмотрим силы давления, действующие на каждый из элементов, в следующих случаях.

1) Жидкость и сверху, и снизу элемента отсутствует. В этом тривиальном случае, очевидно, сила давления равна нулю.

2) Жидкость есть над элементом, но её нет под элементом (см. рис. 1.241.1). В этом случае проекция силы давления на вертикальную ось отрицательна, то есть жидкость стремится прижать рассматриваемый элемент к дну.

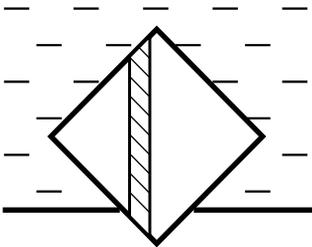


Рис. 1.241.1.

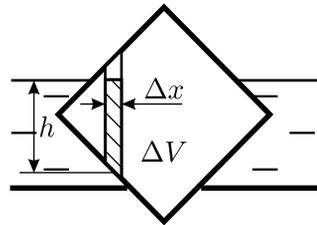


Рис. 1.241.2.

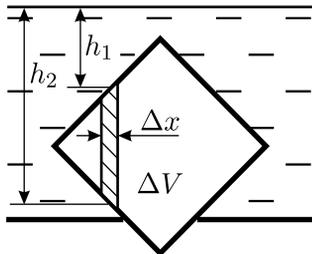


Рис. 1.241.3.

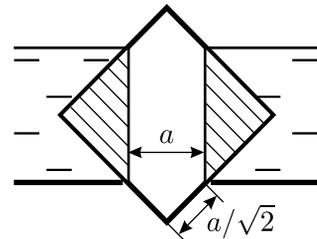


Рис. 1.241.4.

3) Жидкость есть под элементом, но её нет над элементом (см. рис. 1.241.2). В этом случае проекция силы давления на вертикальную ось положительна и равна  $f = \rho g b \Delta x h = \rho g \Delta V$ , где  $h$  и  $\Delta V$  — высота и объём заштрихованной части рассматриваемого элемента.

4) Жидкость есть и под элементом, и над ним (см. рис. 1.241.3). В этом случае проекция на вертикаль силы давления равна  $f = \rho g b \Delta x (h_2 - h_1) = \rho g \Delta V$ , где  $h_1$  и  $h_2$  — расстояния от поверхности жидкости до верхней и нижней граней рассматриваемого элемента соответственно.

Таким образом, из рассмотрения случаев 1 и 2 следует, что если под некоторым элементом пробки нет жидкости, то жидкость может только прижимать пробку к дну сосуда, и минимальное значение вертикальной проекции этой прижимающей силы давления, равное нулю,

достигается тогда, когда жидкости нет и над этим элементом. Если же под некоторым элементом пробки жидкость есть (случаи 3 и 4), то максимальное значение проекции силы на вертикальную ось положительно и равно  $\rho g \Delta V$ , где  $\Delta V$  — объём рассматриваемого элемента (случай 4). Значит, сила давления будет иметь максимально возможное положительное значение тогда, когда жидкость налита в сосуд до уровня, показанного на рисунке 1.241.4. При этом интересующий нас объём  $\Delta V$  (заштрихован на рисунке 1.241.4) равен  $\Delta V = \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 b$ , а максимальная величина выталкивающей силы равна

$$F = \rho g \Delta V = \rho g b \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

Если пробка не будет всплывать при уровне воды, показанном на рисунке 1.241.4, то она не всплывёт и при любом другом уровне. Следовательно, массу пробки можно найти из условия  $Mg > F$ , откуда

$$M > \rho b \left(c - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

**1.242.** В соответствии с «золотым правилом механики» неподвижный блок не даёт выигрыша в силе. Поэтому в положении равновесия силы, действующие на концы нити, должны быть равны. На конец нити, к которому подвешен груз массой  $m$ , всё время действует сила  $P = mg$ . На второй же конец нити, когда груз массой  $M$  плавает в жидкости, действует сила  $F$ , равная разности сил тяжести  $Mg$  и Архимеда  $\rho_2 g V$ , то есть  $F = Mg - \rho_2 g V$ , где  $V$  — объём погруженной в жидкость части тела массой  $M$ . Поэтому условие равновесия системы имеет вид:  $mg = Mg - \rho_2 g V$ . Объём  $V$  может изменяться от 0 (тело не погружено в жидкость) до величины  $M/\rho_1$  (тело полностью погружено в жидкость). Значит, из последнего равенства следует, что величина  $m$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$M \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \leq m \leq M.$$

Найденный ответ справедлив при условии  $\rho_2 \leq \rho_1$ , то есть когда груз массой  $M$  сделан из материала, который не легче жидкости. В случае  $\rho_2 > \rho_1$ , ввиду положительности  $m$ , решение принимает вид:

$$0 \leq m \leq M.$$

Это означает, что если груз массой  $M$  легче жидкости, то он будет плавать в ней до тех пор, пока к другому концу нити не подвешат груз массой, большей  $M$ .

**1.243.** Площадь основания бруска равна  $S_1 = \frac{M}{\rho_o H} \approx 13,9 \text{ см}^2$ .

Масса вытесненной бруском воды (в положении равновесия) равна  $\rho_v h S_1 \approx 27,8 \text{ г}$ . При равновесии весов соблюдается условие:

$$Mg - \rho_v g h S_1 = mg, \quad (1)$$

где  $m$  — масса противовеса. Далее возможны два случая.

1) Если к противовесу добавить массу  $\Delta m = 80 \text{ г}$ , то равновесие нарушится, брусок поднимется и выйдет из воды, так как  $\Delta m > \rho_v h S_1$ . До нарушения равновесия объём воды, находившейся выше нижнего основания бруска, составлял  $(S - S_1)h$ . Эта часть воды после того, как брусок поднимется, растечётся по объёму с площадью  $S$  и высотой  $\Delta l_1$ , то есть  $(S - S_1)h = S \Delta l_1$ . Отсюда  $\Delta l_1 = h - \frac{S_1}{S}h$ . Таким образом, если массу противовеса увеличить на  $\Delta m$ , то уровень воды в стакане опустится на величину

$$\Delta l = h - \Delta l_1 = \frac{S_1}{S}h = \frac{Mh}{\rho_o H S} \approx 1,11 \text{ см}.$$

2) Если от противовеса отнять массу  $\Delta m$ , то брусок опустится, и новое положение равновесия будет достигнуто при глубине погружения бруска, равной  $h + \Delta h$ . При этом условие равновесия имеет вид:

$$Mg - \rho_v g (h + \Delta h) S_1 = (m - \Delta m)g. \quad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получаем:  $\rho_v \Delta h S_1 = \Delta m$ , откуда  $\Delta h = \frac{\Delta m}{\rho_v S_1} \approx 5,76 \text{ см}$ . Таким образом,  $h + \Delta h \approx 7,76 \text{ см} < H = 10 \text{ см}$ , то есть брусок не утонет. Отношение изменения уровня воды  $\Delta l$  и глубины погружения бруска  $\Delta h$  равно, как нетрудно видеть, отношению площадей бруска  $S_1$  и сосуда  $S$ . Поэтому, если массу противовеса уменьшить на  $\Delta m$ , то уровень воды в стакане поднимется на

$$\Delta l = \frac{S_1}{S} \Delta h = \frac{\Delta m}{\rho_v S} = 3,2 \text{ см}.$$

**1.244\***. Поскольку подвижный блок даёт выигрыш в силе в два раза, то сила натяжения нити вдвое меньше веса груза  $Mg$ . В состоянии равновесия разность уровней воды в коленях трубки  $h$  определяется из условия:  $\rho ghS = \frac{Mg}{2}$  и равна, таким образом,  $h = \frac{M}{2\rho S}$  (см. рис. 1.244). После увеличения массы груза на  $m$  разность уровней увеличится на  $\Delta h = \frac{m}{2\rho S}$ . Пусть теперь после увеличения массы груза долили воду массой  $m$  в открытое колено трубки, и полное (по сравнению с начальным) повышение уровня воды в узком колене составило величину  $y$ . Тогда, поскольку при навешивании дополнительного груза разность уровней воды в коленях трубки увеличилась на  $\Delta h$ , в открытом широком колене уровень воды должен повыситься по сравнению с исходным на  $y - \Delta h$ . При этом изменение объёма воды равно  $nS(y - \Delta h) + Sy = m/\rho$ . Отсюда

$$y = \frac{\frac{m}{\rho S} + n\Delta h}{n+1} = \frac{\frac{m}{\rho S} + n\frac{m}{2\rho S}}{n+1} = \frac{m}{\rho S} \cdot \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

Груз, очевидно, опустится вниз на расстояние

$$H = \frac{y}{2} = \frac{m}{\rho S} \cdot \frac{n+2}{4(n+1)} = \frac{m}{3\rho S}.$$

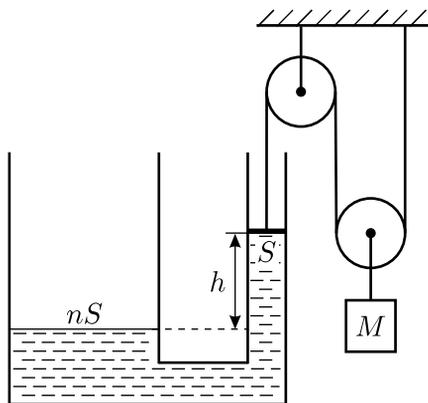


Рис. 1.244.

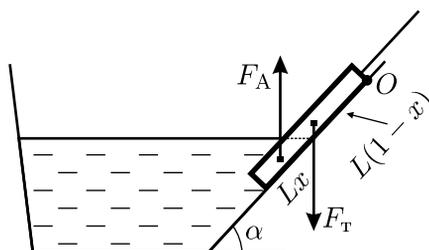


Рис. 1.245.

**1.245.** Пусть  $L$  — длина карандаша,  $S$  — площадь его поперечного сечения,  $\alpha$  — угол при основании наклонной плоскости, образующей стенку ванны (см. рис. 1.245). Предположим, что нижний конец карандаша перестал давить на стенку ванны тогда, когда в воду погрузилась

$x$ -я часть карандаша (отметим, что  $0 < x < 1$ ). В этот момент карандаш опирается на стенку только верхним концом (точка  $O$ ), и на него, помимо силы реакции опоры и силы натяжения нити, действуют сила тяжести  $F_T = \rho_K g S L$ , приложенная к середине карандаша, и сила Архимеда  $F_A = \rho_B g S L x$ , приложенная к середине его погруженной части. Карандаш будет находиться в равновесии, если сумма действующих на него моментов сил, вычисленных относительно оси, проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка, будет равна нулю. Плечо силы тяжести в рассматриваемый момент равно  $(L \cos \alpha)/2$ , плечо силы Архимеда равно  $\left(L - \frac{Lx}{2}\right) \cos \alpha$ . Значит, условие равновесия карандаша имеет вид

$$\rho_K g S L \cdot \frac{L \cos \alpha}{2} - \rho_B g S L x \cdot \frac{L \cos \alpha}{2} \cdot (2 - x) = 0.$$

С учётом того, что  $\rho_K/\rho_B = 3/4$ , полученное уравнение можно переписать следующим образом:

$$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0.$$

Оно имеет два корня, из которых наложенному на  $x$  ограничению удовлетворяет только один:  $x = 1/2$ . Значит, для того, чтобы нижний конец карандаша перестал касаться стенки ванны, его нужно погрузить в воду больше, чем наполовину.

**1.246.** Средняя плотность стержня  $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2} = 1,25 \text{ г/см}^3$  больше плотности воды  $\rho_0 = 1,0 \text{ г/см}^3$ , поэтому плавать он не может, и после наливания воды в бассейн должен опираться более тяжёлым концом на дно. При этом тяжёлая половина стержня будет погружена в воду полностью, а лёгкая может быть погружена лишь частично (см. рис. 1.246).

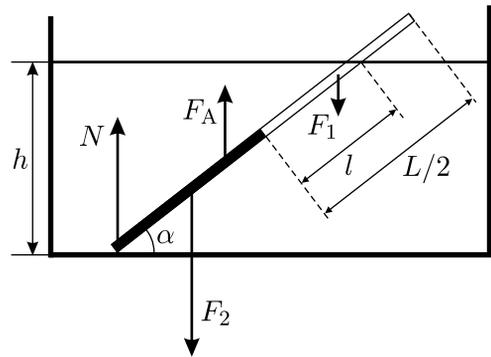


Рис. 1.246.

Обозначим длину той части лёгкой половины стержня, которая находится под водой, через  $l$ , площадь поперечного сечения стержня — через  $S$ , и найдём все силы, действующие на стержень. Это —

сила реакции со стороны дна  $N$ , силы тяжести  $F_1 = (1/2)LS\rho_1g$  и  $F_2 = (1/2)LS\rho_2g$ , действующие на лёгкую и тяжёлую половины стержня соответственно, и сила Архимеда  $F_A = \rho_0gS\left(\frac{L}{2} + l\right)$ . Отметим, что силы тяжести  $F_1$  и  $F_2$  приложены к центрам масс соответствующих половин стержней, то есть к их серединам, а сила Архимеда  $F_A$  приложена к центру масс вытесненного объёма жидкости, то есть к середине погруженной части стержня.

Запишем условие равенства нулю суммы моментов всех сил, вычисленных относительно оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку касания стержня с дном бассейна:

$$\frac{LS\rho_1g}{2} \cdot \frac{3L \cos \alpha}{4} + \frac{LS\rho_2g}{2} \cdot \frac{L \cos \alpha}{4} - \rho_0gS \left(\frac{L}{2} + l\right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + l\right) \cos \alpha = 0.$$

Поскольку  $\cos \alpha$  в этом уравнении сокращается, то величина  $l$  не зависит от уровня налитой в бассейн воды, а определяется только соотношением плотностей частей стержня и воды. Из рисунка видно, что глубина бассейна  $h$  связана с длинами  $L$  и  $l$  соотношением  $h = \left(\frac{L}{2} + l\right) \sin \alpha$ .

Выражая отсюда величину  $l$  и подставляя её в уравнение моментов, получаем уравнение для определения  $h$ , из которого с учётом того, что  $\alpha = 45^\circ$ , находим ответ:

$$h = \frac{L \sin \alpha}{2} \sqrt{\frac{3\rho_1 + \rho_2}{\rho_0}} = \frac{L\sqrt{7}}{4} \approx 0,66 \text{ м.}$$

Заметим, что если и дальше продолжать наливать воду в бассейн, то угол наклона стержня будет возрастать, и при  $h \geq L\sqrt{14}/4 \approx 0,93$  м он будет стоять на дне бассейна в вертикальном положении.

**1.247\***. Груз массой  $M$ , помещённый в центр льдины, заставляет её почти полностью погрузиться в воду, и при этом смещение центра масс льдины в вертикальном направлении составляет, очевидно, одну десятую часть её толщины  $H$ . Груз массой  $m$ , если его поместить в центр льдины, заставит её погрузиться на  $\Delta h_1 = \frac{m}{M} \cdot \frac{H}{10}$ . Если теперь переместить этот груз на середину ребра прямоугольной льдины, имеющего длину  $l$ , то смещение её центра масс по отношению к уровню воды практически не изменится и останется равным  $\Delta h_1$ , а сама льдина наклонится от горизонтального положения на некоторый угол  $\alpha$ . Сумма сил и сумма моментов сил, действующих на льдину, в положении равновесия равны нулю, а её край с грузом  $m$  находится на уровне

воды. Обозначим длину ребра льдины, соседнего с ребром, на котором лежит груз, через  $L$ . Поскольку по условию  $H \ll L$ , а края льдины не погрузились под воду, то угол наклона льдины мал:  $\alpha \ll 1$ . При таком наклоне суммарная сила, действующая на льдину со стороны воды, практически не изменяется, но на льдину со стороны воды начинает действовать момент выталкивающих сил, поскольку с одной стороны от центра масс нижняя поверхность льдины дополнительно погружается в воду, а с другой — поднимается. Для вычисления этого момента относительно центра льдины масс необходимо просуммировать моменты сил, действующих на полоски нижней (подводной) части льдины, расположенные на расстояниях  $-L/2 \leq x \leq L/2$  от центра масс. На полоску шириной  $\Delta x$  и длиной  $l$ , погружившуюся дополнительно на глубину  $\alpha x$ , действует дополнительная выталкивающая сила  $\rho g \alpha x l \Delta x$ , так что её момент равен  $\rho g \alpha l x^2 \Delta x$ , а искомый суммарный момент выталкивающих сил равен  $\alpha \rho g l L^3 / 12$ . Здесь  $\rho$  — это плотность воды.

Этот момент выталкивающих сил, действующий на льдину со стороны воды, уравнивает момент силы относительно центра масс льдины, действующий на неё со стороны груза массой  $m$  и равный, очевидно,  $mgL/2$ . Таким образом, в положении равновесия должно выполняться соотношение:  $\alpha \rho g l L^3 / 12 = mgL/2$ . Отсюда находим связь между  $m$ ,  $\alpha$  и величиной  $\Delta h_2$  дополнительного опускания края льдины за счёт её наклона:  $\Delta h_2 = \alpha L / 2 = 3m / (\rho l L)$ .

Вместе с опусканием центра масс по вертикали на величину  $\Delta h_1$  общее вертикальное смещение края льдины с лежащим на нём грузом не должно быть больше, чем  $H/10$ . Запишем это условие в виде неравенства:

$$\Delta h_1 + \Delta h_2 = \frac{mH}{10M} + \frac{3m}{\rho l L} < \frac{H}{10}.$$

Учтём, что  $M = \rho S l H / 10$ . Отсюда найдём, что на краю льдины в середине её ребра можно разместить груз массой  $m < M/4$ .

Заметим, что такой груз можно положить на середину любого из верхних рёбер льдины, так как их длины  $l$  и  $L$  входят в полученное неравенство в виде произведения.

**1.248\***. Когда балку положили на брусья (см. рис. 1.248.1), они немного погрузились в воду, причём очевидно, что дополнительные глубины их погружения  $\Delta h_{1,2,3}$  пропорциональны искомым

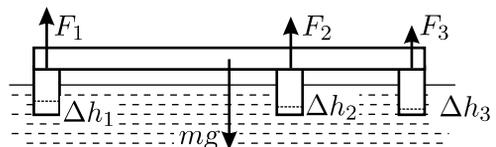


Рис. 1.248.1.

силам давления балки на брусья:  $F_{1,2,3} = \rho g S \Delta h_{1,2,3}$ , где  $\rho$  — плотность воды,  $S$  — площадь продольного сечения брусьев. Запишем условия равновесия балки. Сумма сил и сумма моментов сил, например, относительно оси, проходящей параллельно брусьям через левый конец балки, должны быть равны нулю:

$$mg = F_1 + F_2 + F_3, \quad F_2 l + F_3 L = \frac{mgL}{2}.$$

Этих уравнений недостаточно для того, чтобы найти силы  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ . Ещё одно — недостающее — уравнение можно получить, используя то обстоятельство, что балка является жёсткой и лежит почти горизонтально. Из рисунка 1.248.2 видно, что связь между величинами  $\Delta h_i$  при этих условиях имеет вид:  $\operatorname{tg} \alpha \approx \frac{\Delta h_1 - \Delta h_2}{l} = \frac{\Delta h_1 - \Delta h_3}{L}$ .

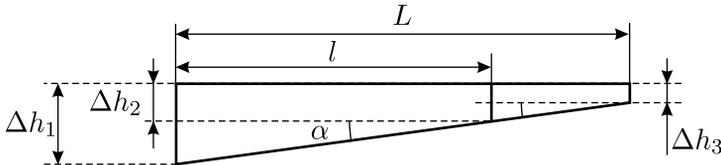


Рис. 1.248.2.

Поскольку  $F_i \sim \Delta h_i$ , то отсюда

$$\frac{F_1 - F_2}{l} = \frac{F_1 - F_3}{L}.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$F_1 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{L^2 + 2l^2 - lL}{L^2 + l^2 - lL}; \quad F_2 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{L^2}{L^2 + l^2 - lL}; \quad F_3 = \frac{mg}{4} \cdot \frac{2(L^2 + l^2) - 3lL}{L^2 + l^2 - lL}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $l = L/2$  из полученных формул следует, что  $F_1 = F_2 = F_3 = mg/3$ , то есть если второй брус лежит точно под серединой балки, то нагрузка на брусья распределяется равномерно.

**1.249.** Так как плотность бревна равна плотности воды, то в конечном состоянии равновесия бревно окажется полностью погруженным в воду. Вначале, после отпускания бревна, под действием силы тяжести оно приобретёт некоторую скорость, затем по инерции пройдёт под водой какое-то расстояние, постепенно тормозясь, и в конце концов остановится на некоторой глубине под поверхностью воды.

Пусть центр масс бревна при погружении опустился на расстояние  $h$ . Тогда потенциальная энергия бревна уменьшилась на величину  $\Delta U_1 = mgh$ , где  $m = \rho L a^2$  — масса бревна. При этом бревном был вытеснен на поверхность объём воды в форме прямоугольного параллелепипеда массой  $m$ . Можно считать, что эта вода «раскатлась» по поверхности тонким слоем, то есть её центр масс поднялся на высоту  $(h - (a/2))$ , а её потенциальная энергия увеличилась на  $\Delta U_2 = mg(h - (a/2))$ . Искомое количество теплоты равно разности этих двух величин:

$$\Delta Q = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{mga}{2} = \frac{\rho g L a^3}{2}.$$

**1.250.** Из условия неразрывности струи и несжимаемости жидкости следует, что  $v_1 D^2 = v_2 d^2$ , где  $v_1$  и  $v_2$  — скорости струи воды при выходе из трубы и на уровне верха ведра соответственно. Из закона сохранения энергии для некоторой массы воды  $m$  при её падении от трубы до ведра следует, что  $\frac{mv_1^2}{2} + mgH = \frac{mv_2^2}{2}$ . Из написанных уравнений получаем:  $v_1 = d^2 \sqrt{\frac{2gH}{D^4 - d^4}}$ .

Расход воды  $q$  у источника, выраженный в вёдрах (объёма  $V$ ) в час ( $T$ ), равен:

$$q = \frac{\pi D^2 v_1 T}{4V} = \frac{\pi D^2 d^2 T}{4V} \sqrt{\frac{2gH}{D^4 - d^4}} \approx 3200 \text{ вёдер в час.}$$

**1.251\***. Так как действующая на баржу выталкивающая сила равна весу вытесненной ею воды, то при заполнении баржи сила, действующая со стороны воды, находящейся вне баржи, будет расти пропорционально количеству затекшей воды. Покажем, что при погружении баржи разность уровней воды внутри и вне баржи не будет изменяться со временем.

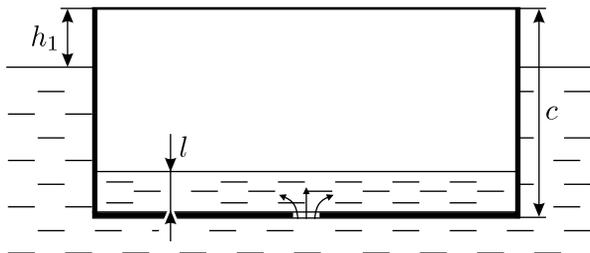


Рис. 1.251.

Обозначим массу баржи, не заполненной водой, через  $m$ . Тогда условие плавания баржи, в которой нет воды, имеет вид:  $mg = \rho gab(c - h)$ . Пусть теперь баржа погрузилась так, что высота её бортов над поверхностью воды стала равна  $h_1$ , а толщина слоя воды внутри баржи стала равна  $l$  (см. рис. 1.251). Тогда условие плавания принимает вид  $mg + \rho gabl = \rho gab(c - h_1)$ . Из записанных соотношений получаем:

$$c - h_1 - l = c - h,$$

то есть пока баржа плавает, разность уровней воды внутри и вне её в любой момент времени постоянна и равна разности высоты баржи и начальной высоты её борта над уровнем воды. Следовательно, вода будет поступать в баржу с постоянной скоростью, которую можно рассчитать при помощи уравнения Бернулли.

Примем уровень поверхности воды в водоёме за нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда для трубки тока, которая начинается на уровне воды в водоёме и заканчивается на срезе отверстия в трюме, можно записать:  $p_0 = (p_0 + \rho gl) - \rho g(c - h_1) + \frac{\rho v^2}{2}$ , где  $p_0$  — атмосферное давление,  $\rho$  — плотность воды,  $v$  — скорость воды в момент её затекания в баржу. Из двух последних уравнений, полагая  $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ , имеем:  $v = \sqrt{2g(c - h)} \approx 5 \text{ м/с}$ .

Баржа затонет тогда, когда её борта сравняются с поверхностью воды, то есть уровень воды над дном баржи достигнет величины  $h$ . В этот момент внутри баржи будет содержаться объём воды  $V = abh = Sv\Delta t$ , где  $S = \pi d^2/4$  — площадь отверстия,  $\Delta t$  — искомое время, за которое объём воды в барже станет равен  $V$ . Отсюда, с учётом выражений для  $S$  и  $v$ , окончательно находим:

$$\Delta t = \frac{4abh}{\pi d^2 \sqrt{2g(c - h)}} \approx 7,6 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 2111 \text{ час.} \approx 88 \text{ сут.} \approx 3 \text{ мес.}$$

**1.252.** Так как объём ведра составляет  $H \cdot \pi D^2/4 \approx 24,7$  л, а ежесекундно в него поступает  $V = 1$  л воды, то за время  $t = 1$  час = 3600 с уровень воды в ведре должен практически установиться на постоянной высоте. Обозначим эту высоту через  $h$  и предположим, что ведро не переполняется, то есть  $h < H$ . Поскольку площадь поперечного сечения ведра значительно больше, чем площадь дырки, через которую вытекает вода, то скорость её вытекания можно оценить при помощи формулы Торричелли:  $u \approx \sqrt{2gh}$ . В установившемся режиме объём воды, ежесекундно вливающейся в ведро из крана, равен объёму

воды, ежесекундно вытекающей через дырку, поэтому  $V = Su$ . Отсюда  $h = V^2/(2gS^2) \approx 32$  см  $< H$ , то есть ведро действительно не переполняется. Следовательно, искомый объём воды в ведре через 1 час будет равен

$$V = h \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^2 V^2}{8gS^2} \approx 22,5 \text{ л.}$$

**1.253\***. Пусть вода внутри трубы движется со скоростью  $v$ , а давление в ней равно  $p$ . Тогда уравнение Бернулли для текущей по трубе воды имеет вид:  $p + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}$ .

Поскольку воду можно считать несжимаемой жидкостью, и пузырьков в ней немного, то справедливо уравнение неразрывности струи:  $Sv = S_0v_0$ .

Давление внутри пузырька равно давлению внутри воды. Будем считать, что при вытекании струи из отверстия находящиеся в ней пузырьки расширяются изотермически, изменяя свой объём от  $V$  до  $V_0$ . Тогда в соответствии с уравнением Менделеева — Клапейрона:  $pV = p_0V_0$ . Из этих уравнений получаем:  $\frac{V_0}{V} = 1 + \frac{\rho v_0^2}{2p_0} \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right)$ . Так как объём пузырька пропорционален кубу его радиуса, то отношение радиусов пузырьков воздуха у выходного отверстия и внутри трубы

$$\frac{r_0}{r} = \sqrt[3]{\frac{V_0}{V}} = \sqrt[3]{1 + \frac{\rho v_0^2}{2p_0} \left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right)}.$$

**1.254.** Пуля, двигаясь в воздухе, приводит в движение со скоростью, примерно равной её собственной, воздух в объёме, через который она только что пролетела. За малый промежуток времени пуля проходит некоторый путь  $L$ . Объём воздуха, «заметённого» пулей, примерно равен произведению сечения пули на пройденный ею путь, а масса равна произведению этого объёма на плотность воздуха:  $M = \rho L \pi d^2 / 4$ .

Движущийся со скоростью  $u$  воздух приобретает кинетическую энергию  $W = Mu^2/2$ . Эта энергия равна работе, которую совершает пуля, преодолевая сопротивление воздуха:  $A = F_c L$ , где  $F_c$  — сила сопротивления. Отсюда можно легко получить оценку отношения силы сопротивления воздуха к силе тяжести для пули:

$$\frac{F_c}{mg} = \frac{A}{mgL} = \frac{W}{mgL} = \frac{\rho u^2 \pi d^2}{8mg} \approx 70.$$

Отметим, что сила сопротивления воздуха превышает вес пули почти в 100 раз!

## Молекулярная физика

**2.1.** Воздух вблизи поверхности суши или океана прогревается сильнее всего у экватора, где солнечные лучи падают на Землю практически вертикально. Тёплый и влажный воздух легче холодного, поэтому он стремится подняться вверх. Следовательно, именно здесь появляются восходящие потоки воздуха (см. рис. 2.1), которые растекаются к более высоким широтам, постепенно отдавая тепло — в основном, за счёт излучения. Охладившийся воздух опускается к поверхности Земли в районе  $30^\circ$  северной и южной широты и далее движется обратно к экватору, образуя систему постоянно дующих в определённых направлениях ветров — пассатов. Заметим, что вращение Земли существенно влияет на процесс движения воздушных масс к экватору, так что они отклоняются к западу.

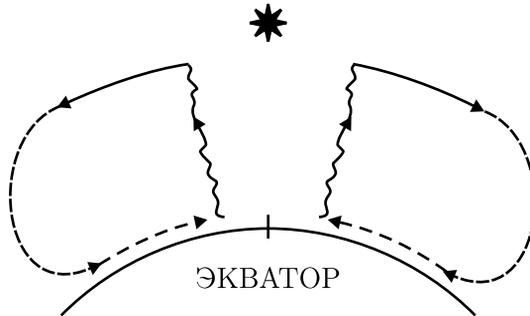


Рис. 2.1.

**2.2.** При нагревании и воздух и вода расширяются. Если трубка не запаяна, то этому расширению ничто не препятствует. Пузырёк воздуха в маленьком сосуде при расширении вытесняет часть воды, архимедова сила увеличивается, и сосуды всплывают. При охлаждении всё происходит наоборот.

Если же трубка запаяна, то общий объём воды и воздуха остаётся практически неизменным, поскольку тепловое расширение стекла намного меньше, чем у воды. Сжимаемость воды существенно меньше сжимаемости воздуха, следовательно, в данном случае при нагревании вода будет расширяться, а пузырьки воздуха — сжиматься. Поэтому при нагревании запаянного термоскопа сосуды с воздухом в нём тонут, а при охлаждении — всплывают.

**2.3.** Продукты сгорания и прогревшийся воздух поднимаются от костра вверх, а их место внизу заполняется холодным воздухом, который со всех сторон «подсасывается» к костру. Эти потоки воздуха,

обтекающие человека с боков, образуют завихрения (см. рис. 2.3), в которые и втягивается дым. Таким образом, столб дыма от костра как бы «притягивается» к человеку и лезет ему в глаза, с какой бы стороны от костра он ни находился.

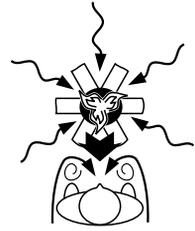


Рис. 2.3.

**2.4.** Рассмотрим процесс коррозии. Пусть в некоторый момент времени шарик имел радиус  $R$  и площадь поверхности  $S$ , и пусть за маленький промежуток времени  $\Delta t$  радиус шарика вследствие коррозии уменьшился на величину  $\Delta R$ . Тогда объём растворённого за это время алюминия будет равен  $S\Delta R$ , его масса составляет  $\rho S\Delta R$ . С другой стороны, масса растворённого за время  $\Delta t$  алюминия равна  $GS\Delta t$ , где  $G = 10^{-4}$  г/(см<sup>2</sup> · ч) — количество граммов металла, растворяющегося за один час с одного квадратного сантиметра поверхности. Приравняем полученные выражения:

$$\rho S\Delta R = GS\Delta t.$$

Отсюда скорость уменьшения радиуса шарика:

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{G}{\rho}.$$

Мы видим, что радиус шарика уменьшается с постоянной скоростью. Теперь можно получить ответ задачи. Ясно, что шарик растворится полностью тогда, когда изменение его радиуса  $\Delta R$  станет равно половине его начального диаметра. Тогда из последней формулы получаем:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho d}{2G} = \frac{2,7 \text{ (г/см}^3\text{)} \cdot 1 \text{ см}}{2 \cdot 10^{-4} \text{ г/(см}^2 \cdot \text{ч)}} = 13500 \text{ часов} = \\ &= 562,5 \text{ суток} \approx 18,5 \text{ месяцев.} \end{aligned}$$

**2.5\*.** Каждый атом железа, находящийся в одной из вершин куба, одновременно принадлежит восьми элементарным ячейкам, а в центре грани куба — двум ячейкам. Атом же, находящийся в центре куба, принадлежит только одной ячейке. Следовательно, на одну элементарную ячейку кубической объёмноцентрированной решётки приходится  $i_\alpha = 8 : 8 + 1 = 2$  атома, а на одну элементарную ячейку кубической гранцентрированной решётки  $i_\gamma = 8 : 8 + 6 : 2 = 4$  атома. Если плотность железа в  $k$ -й фазе обозначить через  $\rho_k$ , то концентрация атомов в этой фазе будет равна  $n_k = N_k/V = \rho_k N_A/A$ , где  $N_k$  — число атомов

решётки в  $k$ -м состоянии,  $V$  — объём образца железа в данном состоянии,  $N_A$  — число Авогадро,  $A$  — атомная масса железа. Объём  $V_k$  кубической элементарной ячейки железа в  $k$ -м состоянии равен отношению  $V$  к числу  $N$  элементарных ячеек решётки в данном состоянии:  $V_k = a_k^3 = \frac{V}{N} = \frac{N_k}{n_k N} = \frac{i_k}{n_k}$ , так как  $N_k/N$  — это как раз число атомов, приходящееся на одну ячейку решётки в  $k$ -м состоянии. По условию задачи,  $\varepsilon \approx \frac{\rho_\alpha - \rho_\gamma}{\rho_\alpha} = 1 - \frac{\rho_\gamma}{\rho_\alpha}$ . Поэтому отношение постоянных решёток железа в  $\alpha$ - и  $\gamma$ - фазах равно

$$\frac{a_\alpha}{a_\gamma} = \sqrt[3]{\frac{V_\alpha}{V_\gamma}} = \sqrt[3]{\frac{i_\alpha \cdot n_\gamma}{i_\gamma \cdot n_\alpha}} = \sqrt[3]{\frac{\rho_\gamma}{2\rho_\alpha}} \approx \sqrt[3]{\frac{1 - \varepsilon}{2}} \approx 0,788.$$

**2.6.** Обозначим исходные температуры горячей и холодной воды в калориметрах через  $t_\Gamma$  и  $t_x$  соответственно. Рассчитаем, какая температура  $t_1$  установится в «холодном» калориметре после переливания в него горячей воды массой  $\Delta m$ . Из уравнения теплового баланса имеем:

$$Cm(t_1 - t_x) = C\Delta m(t_\Gamma - t_1).$$

Здесь  $m$  — исходная масса воды, находившейся в каждом из калориметров,  $C$  — удельная теплоёмкость воды. Из этого уравнения находим:

$$t_1 = \frac{mt_x + \Delta mt_\Gamma}{m + \Delta m} = \frac{kt_\Gamma + t_x}{k + 1},$$

где введено обозначение  $k = \frac{\Delta m}{m} < 1$ .

Далее найдём, какая температура  $t_2$  установится в «горячем» калориметре после переливания в него массы воды  $\Delta m$  из «холодного» калориметра. Из уравнения теплового баланса имеем:

$$C(m - \Delta m)(t_\Gamma - t_2) = C\Delta m(t_2 - t_1).$$

Отсюда:

$$t_2 = \frac{(m - \Delta m)t_\Gamma + \Delta mt_1}{m} = kt_1 + (1 - k)t_\Gamma = \frac{kt_x + t_\Gamma}{1 + k}.$$

Тогда после одного переливания туда-обратно разность температур в калориметрах составит

$$t_2 - t_1 = (t_\Gamma - t_x) \frac{1 - k}{1 + k}.$$

Ясно, что для того, чтобы получить разность температур в калориметрах ( $t_4 - t_3$ ) после второго переливания туда-обратно, нужно в последней формуле заменить  $t_r$  на  $t_2$  и  $t_x$  на  $t_1$ :

$$t_4 - t_3 = (t_2 - t_1) \frac{1 - k}{1 + k} = (t_r - t_x) \frac{(1 - k)^2}{(1 + k)^2}.$$

Таким образом, понятно, что при каждом переливании туда-обратно разность температур изменяется в  $\frac{1 - k}{1 + k}$  раз. В нашем случае

$$t_r - t_x = 10 \text{ }^\circ\text{C}, \Delta m = 50 \text{ г}, m = 200 \text{ г}, \text{ откуда } k = 0,25, \text{ и } \frac{1 - k}{1 + k} = 0,6.$$

С учётом этого окончательно имеем: разность температур после первого переливания туда-обратно будет равна  $10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,6 = 6 \text{ }^\circ\text{C}$ , после второго переливания  $10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,6^2 = 3,6 \text{ }^\circ\text{C}$ , после третьего переливания  $10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,6^3 \approx 2,2 \text{ }^\circ\text{C}$ , после четвёртого  $10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,6^4 \approx 1,3 \text{ }^\circ\text{C}$ , после пятого  $10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 0,6^5 \approx 0,8 \text{ }^\circ\text{C}$ . Значит, для того, чтобы разность температур воды в калориметрах стала меньше  $1 \text{ }^\circ\text{C}$ , достаточно сделать пять переливаний.

**2.7.** Прежде всего, нужно придумать модель, которую можно применить для описания процесса охлаждения кофе при помощи мороженого. Предположим, что мороженое по своим свойствам близко ко льду, то есть имеет примерно одинаковые с ним удельную теплоёмкость и удельную теплоту плавления, и столь же небольшую теплопроводность. Предположим также, что для охлаждения кофе до требуемой температуры в него нужно будет положить мороженое ложечкой несколько раз. Будем считать, что при опускании в мороженое ложечка охлаждается до температуры брикета, а при опускании в кофе — нагревается до температуры напитка. Ввиду малой теплопроводности мороженого от ложечки прогревается только тонкий его слой, и при следующем заборе мороженого из того же места брикета отданная ложечкой теплота будет забрана обратно. В этом случае перенос теплоты ложечкой можно не учитывать. Но возможен и другой способ, когда мороженое берётся каждый раз из нового места брикета, и ложечка отдаёт ему тепло. Теперь можно пытаться решить задачу «в лоб», определяя температуру кофе после каждого следующего забора мороженого из брикета и размешивания кофе. Однако, в задаче не спрашивается, сколько ложек мороженого нужно положить в кофе, а требуется лишь оценить необходимую массу мороженого. Поэтому попытаемся сначала решить задачу в первом приближении. Запишем уравнение теплового баланса для системы, состоящей из чашки, ложки, кофе и мороженого. Энергия,

выделяющаяся при охлаждении кофе от температуры  $T_1$  до температуры  $T_3$ , равна  $m_1 C_B (T_1 - T_3)$ . Она идёт на нагрев фарфоровой чашки от комнатной температуры  $T_K$  до температуры  $T_3$ , на нагрев искомой массы мороженого  $m_2$  от температуры  $T_2$  до температуры  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , на плавление и дальнейший нагрев этой массы от температуры  $T_0$  до температуры  $T_3$ , а также, если забор мороженого осуществляется каждый раз из нового места брикета, — на нагрев серебряной ложки, которая может помещаться в мороженое и в кофе по нескольку раз, нагреваясь на разное количество градусов, поскольку кофе постепенно охлаждается. Чтобы не рассматривать весь процесс детально (ведь мы ищем оценку), предположим, что ложечка погружается в мороженое и в кофе  $n$  раз и каждый раз нагревается на некоторую среднюю разность температур кофе и мороженого  $\Delta T_{\text{ср}}$ . Учитывая всё это, получаем уравнение:

$$m_1 C_B (T_1 - T_3) = m_{\text{ф}} C_{\text{ф}} (T_3 - T_K) + \\ + m_2 (C_{\text{л}} (T_0 - T_2) + \lambda + C_B (T_3 - T_0)) + m_{\text{лож}} C_c n \Delta T_{\text{ср}}.$$

Выразим отсюда искомую массу мороженого  $m_2$  и подставим числовые значения известных величин:

$$m_2 = \frac{m_1 C_B (T_1 - T_3) - m_{\text{ф}} C_{\text{ф}} (T_3 - T_K) - m_{\text{лож}} C_c n \Delta T_{\text{ср}}}{C_{\text{л}} (T_0 - T_2) + \lambda + C_B (T_3 - T_0)} = \\ = \frac{28350 - 2000 - 3,45 \cdot n \Delta T_{\text{ср}}}{554} \text{ г.}$$

Из полученного соотношения видно, что последнее слагаемое числителя, которое описывает вклад в энергообмен серебряной ложки, имеет примерно одинаковый порядок со вторым слагаемым, описывающим нагрев фарфоровой чашки, и что оба они намного меньше первого слагаемого, отвечающего за охлаждение кофе. Действительно, предположим, что мороженое забирают ложечкой только один раз ( $n = 1$ ). Среднюю разность температур мороженого и кофе можно считать примерно равной  $\Delta T_{\text{ср}} \approx 80^\circ\text{C}$ . Тогда последнее слагаемое равно 276 Дж, и для массы мороженого  $m_2$  находим:

$$m_2 \approx \frac{26350 - 3,45 \cdot 80 \cdot 1}{554} \text{ г} \approx 47 \text{ г.}$$

Полученный результат означает, что ложечка слабо влияет на процесс охлаждения кофе, так как на её нагревание затрачивается очень небольшое количество тепла. Понятно также, что оценка средней разности температур  $\Delta T_{\text{ср}}$  и числа заборов мороженого  $n$  почти не

влияет на ответ. В самом деле, предположим, что мы клали мороженое в кофе в пять приёмов, то есть будем считать, что в ложечку помещается около 10 граммов мороженого. Тогда для массы мороженого  $m_2$  получим

$$m_2 \approx \frac{26350 - 1380}{554} \text{ г} \approx 45 \text{ г},$$

то есть новое значение отличается от найденного ранее всего на два грамма (или примерно на 4%). После всего сказанного становится ясно, что при получении оценочного результата вклад ложки можно вообще не рассматривать, то есть можно не включать соответствующее слагаемое в уравнение теплового баланса — ответ от этого практически не изменится.

**2.8.** Обозначим искомую температуру горячей воды через  $T_+$ , а массу горячей воды, поступающей в единицу времени в калориметр, через  $\mu$ . Тогда температура  $T$  воды в калориметре в момент времени  $t$  определяется из уравнения теплового баланса:

$$Cm_0(T - T_0) = C\mu t(T_+ - T),$$

где  $C$  — удельная теплоёмкость воды. Записывая это уравнение для двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ , когда температура воды в калориметре равна  $T_1$  и  $T_2$  соответственно, получим:

$$m_0(T_1 - T_0) = \mu t_1(T_+ - T_1),$$

$$m_0(T_2 - T_0) = \mu t_2(T_+ - T_2).$$

Разделив второе уравнение этой системы на первое, получим уравнение для определения  $T_+$ :

$$\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} \cdot \frac{t_1}{t_2} = \frac{T_+ - T_2}{T_+ - T_1}.$$

Отсюда

$$T_+ = \frac{T_2(T_1 - T_0)t_2 - T_1(T_2 - T_0)t_1}{(T_1 - T_0)t_2 - (T_2 - T_0)t_1}.$$

Из приведённого в условии графика видно, что, например, в момент времени  $t_1 = 200$  с температура  $T_1 = 30$  °С, а в момент времени  $t_2 = 500$  с температура  $T_2 = 40$  °С. Подставляя эти числа в полученную формулу, найдём, что температура горячей воды равна  $T_+ = 80$  °С.

**2.9.** Будем считать монету цилиндром с площадью основания  $S$  и высотой  $h$ . При её остывании до температуры  $T_1 = 0$  °С выделяется

количество тепла  $Q = C\rho Sh(T_2 - T_1)$ , которое достаточно для того, чтобы расплавить лёд объёмом  $Sx$ , где  $x$  — глубина, на которую погрузится монета:  $Q = \lambda\rho_0 Sx$ . Отсюда

$$\frac{x}{h} = \frac{C}{\lambda} \frac{\rho}{\rho_0} (T_2 - T_1) = 0,55,$$

то есть монета погрузится в лёд на 55% своей толщины.

Заметим, что если считать, что вода, выплавленная и нагретая монетой, растекается по поверхности льда и плавит его в стороне от монеты, то глубина её погружения в лёд получится немного меньше:  $x/h \approx 0,48$ .

**2.10.** По условию задачи шарик погружается в воду наполовину. Это означает, что он коснётся дна. При этом сразу после перетекания объём воды в левом сосуде окажется на  $V/2 = 50 \text{ см}^3$  меньше, чем в правом (см. рис. 2.10). Поскольку уровни воды в сосудах первоначально также были одинаковы, то из левого сосуда в правый должен перетечь объём воды, равный  $V/4 = 25 \text{ см}^3$ , с массой  $m_1 = \rho_v V/4 = 25 \text{ г}$ . Когда лёд растает, масса воды по сравнению с начальной увеличится на величину  $\rho_l V$ . Поэтому из левого сосуда в правый всего должно перетечь  $\rho_l V/2 = 45 \text{ г}$  воды, из которых 25 г перетекает на первом этапе — сразу после опускания в левый сосуд льда. Следовательно, при таянии льда из левого сосуда в правый дополнительно перетечёт масса воды  $m_2 = \rho_l \frac{V}{2} - \rho_v \frac{V}{4} = 20 \text{ г}$ .

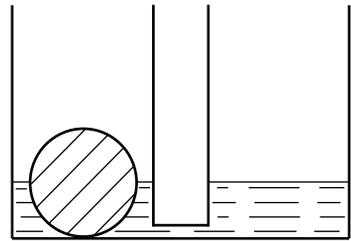


Рис. 2.10.

**2.11.** За время  $\Delta t$  в сосуд втекает масса воды  $\Delta m = q\Delta t$ , имеющей температуру  $T_1$ . Она плавит лёд и нагревает получившуюся воду до температуры  $T$ . Втекающая вода отдаёт количество тепла

$$Q_1 = C\Delta m(T_1 - T) = Cq\Delta t(T_1 - T),$$

а при плавлении льда и нагревании получившейся воды поглощается количество тепла

$$Q_2 = \lambda\Delta m_1 + C\Delta m_1(T - T_0),$$

где  $\Delta m_1$  — масса растаявшего за время  $\Delta t$  льда. Из уравнения теплового баланса следует, что  $Q_1 = Q_2$ , откуда

$$\Delta m_1 = \frac{Cq\Delta t(T_1 - T)}{\lambda + C(T - T_0)}.$$

Из сосуда за время  $\Delta t$  вытекает вода, которая в него за это время втекла, и, дополнительно, вода, получившаяся при плавлении льда. Следовательно, расход вытекающей из сосуда воды равен

$$q' = \frac{\Delta m + \Delta m_1}{\Delta t} = q \left( 1 + \frac{T_1 - T}{T - T_0 + (\lambda/C)} \right) \approx 1,2 \text{ г/с.}$$

**2.12.** Так как груз со льдом сначала тонут, то действующая на них сразу после опускания в воду сила тяжести больше силы Архимеда:

$$(m + M)g > \rho_{\text{в}}g \left( \frac{m}{\rho_{\text{с}}} + \frac{M}{\rho_{\text{л}}} \right).$$

Отсюда

$$m > \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}}{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}} M = \frac{(1 - 0,9) \text{ г/см}^3 \cdot 11 \text{ г/см}^3}{(11 - 1) \text{ г/см}^3 \cdot 0,9 \text{ г/см}^3} \cdot 1 \text{ кг} = \frac{11}{90} \text{ кг} \approx 0,122 \text{ кг},$$

то есть минимально возможная масса груза равна  $m_{\text{min}} \approx 122 \text{ г}$ .

Через достаточно большое время погруженный в воду лёд нагревается до температуры  $0^\circ\text{C}$ . При этом на него намерзает дополнительная масса льда, равная

$$\Delta M = \frac{C_{\text{л}}M(t_0 - t)}{\lambda}.$$

Так как после окончания процесса намерзания груз и привязанный к нему лёд массой  $M + \Delta M$  всплывают, то

$$(m + M + \Delta M)g < \rho_{\text{в}}g \left( \frac{m}{\rho_{\text{с}}} + \frac{M + \Delta M}{\rho_{\text{л}}} \right),$$

откуда

$$\begin{aligned} m < \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}}{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}} (M + \Delta M) &= \left( 1 + \frac{C_{\text{л}}(t_0 - t)}{\lambda} \right) \frac{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}}{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}} M = \\ &= \left( 1 + \frac{C_{\text{л}}(t_0 - t)}{\lambda} \right) m_{\text{min}} = \left( 1 + \frac{2,1 \text{ Дж/г} \cdot 30^\circ\text{C}}{340 \text{ Дж/г}} \right) \cdot \frac{11}{90} \text{ кг} \approx 0,145 \text{ кг}, \end{aligned}$$

то есть максимально возможная масса груза равна  $m_{\text{max}} \approx 145 \text{ г}$ .

**2.13.** После того, как в переохлаждённую воду бросили сосульку, в воде начался процесс кристаллизации. Так как после его окончания в бутылке осталась вода, то конечная температура системы равна  $0^\circ\text{C}$ . Из условия задачи следует, что в лёд превратилась масса воды, равная

$m_0 - m_2$ . При этом выделилось количество теплоты  $\lambda(m_0 - m_2)$ . Эта теплота пошла на нагрев сосульки и имевшейся вначале воды от температуры  $T$  до  $0\text{ }^\circ\text{C}$ , то есть на величину  $\Delta T = 0\text{ }^\circ\text{C} - T$ . Запишем уравнение теплового баланса:

$$\begin{aligned} \lambda(m_0 - m_2) &= C_1 m_0 \Delta T + C_2 m_1 \Delta T = \\ &= (C_1 m_0 + C_2 m_1) \Delta T = -(C_1 m_0 + C_2 m_1)(T - 0\text{ }^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

Отсюда для температуры  $T$  получаем:

$$\begin{aligned} T &= 0\text{ }^\circ\text{C} + \frac{\lambda(m_2 - m_0)}{C_1 m_0 + C_2 m_1} = \\ &= \frac{3,4 \cdot 10^5 \text{ (Дж/кг)} \cdot (0,9 \text{ кг} - 1 \text{ кг})}{4200 \text{ (Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C))} \cdot 1 \text{ кг} + 2100 \text{ (Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C))} \cdot 0,1 \text{ кг}} \approx -7,7\text{ }^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

**2.14.** Построим график зависимости температуры воды в калориметре  $T$  от времени  $t$ . Известно, что он должен состоять из горизонтального (плавление льда) и наклонного (нагрев образовавшейся воды) участков. Имеющиеся данные позволяют однозначно восстановить зависимость температуры от времени, которое будем отсчитывать от момента включения нагревателя (см. рис. 2.14).

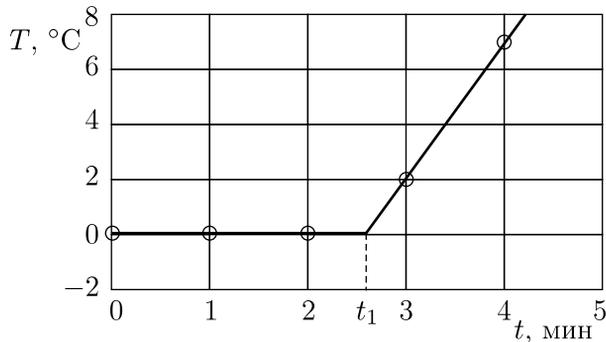


Рис. 2.14.

Из графика можно найти, сколько времени продолжалось таяние льда. Действительно, зависимость температуры воды от времени после того, как весь лёд растаял, даётся формулой

$$T = at + b.$$

Мы знаем, что при  $t = 3$  мин  $T = 2$  °С, а при  $t = 4$  мин  $T = 7$  °С. Отсюда

$$2 = 3a + b, \quad 7 = 4a + b.$$

Решая полученную систему, находим:  $a = 5$ ,  $b = -13$ , и

$$T = 5t - 13.$$

Время таяния льда  $t_1$  определяется по точке пересечения этой наклонной прямой с прямой  $T = 0$ . Отсюда

$$t_1 = \frac{13}{5} = 2,6 \text{ мин} = 156 \text{ с.}$$

Из уравнения теплового баланса найдём начальную массу льда:

$$m = \frac{Nt_1}{\lambda} \approx 22,9 \text{ г.}$$

После того, как лёд растает, вся получившаяся вода массой  $(m + M)$ , где  $M$  — масса воды, изначально бывшей в калориметре, нагревается на  $\Delta T = 5$  °С за  $t_2 = 1$  мин = 60 с. Значит,

$$C(m + M)\Delta T = Pt_2,$$

и начальная масса воды:

$$M = \frac{Nt_2}{C\Delta T} - m \approx 120,0 \text{ г.}$$

**2.15.** Из первого участка графика следует, что в течение времени  $\Delta t_1 = 60$  с происходит процесс нагрева льда и находящегося в твёрдом состоянии вещества от  $T_1 = -40$  °С до  $T_2 = -20$  °С. Если мощность нагревателя равна  $N$ , то уравнение теплового баланса для этого процесса имеет вид:

$$m(C_{\text{л}} + C)(T_2 - T_1) = N\Delta t_1,$$

где  $m = 1$  кг — масса льда (она равна массе вещества). Далее, в течение времени  $\Delta t_2 = 100$  с (второй участок графика) происходит плавление вещества при  $T_2 = -20$  °С. При этом

$$\lambda m = N\Delta t_2.$$

Наконец, в течение времени  $\Delta t_3 = 80$  с (третий участок графика) происходит нагрев льда и расплавленного вещества от температуры  $T_2 = -20$  °С до температуры  $T_3 = 0$  °С, и

$$m(C_{\text{л}} + C_1)(T_3 - T_2) = N\Delta t_3.$$

Из полученных уравнений находим:

$$\lambda = (C_{\text{л}} + C)(T_2 - T_1) \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = 10^5 \text{ Дж/кг},$$

$$C_1 = (C_{\text{л}} + C) \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_2} \cdot \frac{\Delta t_3}{\Delta t_1} - C_{\text{л}} = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}.$$

**2.16.** Для плавления льда при температуре  $T_1 = 0 \text{ °C}$  требуется сжечь массу бензина  $m_2$ , которую можно определить из уравнения теплового баланса:  $m\lambda = \alpha m_2 q$ , откуда

$$m_2 = \frac{m\lambda}{\alpha q} = \frac{1 \text{ кг} \cdot 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}}{0,8 \cdot 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}} \approx 9,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 9,2 \text{ г}.$$

Для нагревания воды массой  $2m$  до температуры  $T_2 = 100 \text{ °C}$  требуется сжечь массу бензина  $m_3$ , которую также можно определить из уравнения теплового баланса:  $2mC(T_2 - T_1) = \alpha m_3 q$ , откуда

$$m_3 = \frac{2mC(T_2 - T_1)}{\alpha q} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \text{ кг} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)} \cdot 100 \text{ °C}}{0,8 \cdot 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}} \approx 22,8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 22,8 \text{ г}.$$

Масса оставшегося бензина равна

$$m_4 = m_1 - m_2 - m_3 = 50 \text{ г} - 9,2 \text{ г} - 22,8 \text{ г} \approx 18,0 \text{ г}.$$

Теплота сгорания оставшегося бензина пойдёт на испарение воды массой  $M$ , причём  $ML = \alpha m_4 q$ . Отсюда

$$M = \frac{\alpha m_4 q}{L} = \frac{0,8 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 4,6 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}}{2,3 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}} \approx 0,288 \text{ кг}.$$

Масса оставшейся после испарения воды равна  $M_1 = 2m - M = 1,712 \text{ кг}$ . Объём оставшейся воды при  $100 \text{ °C}$  составляет  $V_1 = M_1/\rho = 1,783 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 1,783 \text{ л}$ . Площадь дна кубического сосуда объёмом  $V = 3 \text{ литра}$  равна  $S = \left(\sqrt[3]{V}\right)^2 \approx 2,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$ . Следовательно, уровень оставшейся в сосуде воды равен

$$h = \frac{V_1}{S} = \frac{2mL - \alpha m_1 q + m\lambda + 2mC(T_2 - T_1)}{\rho L \left(\sqrt[3]{V}\right)^2} = \frac{1,783 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{2,08 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} \approx$$

$$\approx 0,0857 \text{ м} = 8,57 \text{ см}.$$

**2.17.** Для того, чтобы сообщить определённое количество теплоты дому (печке, трубам и пр.) и одновременно перевести в парообразное состояние некоторое количество воды, которая содержится в мокрых дровах, требуется сжечь мокрых дров больше, чем сухих. Из трубы дым выходит с температурой, несколько превышающей  $100^\circ\text{C}$ . Для простоты примем температуру на улице равной  $0^\circ\text{C}$ , а температуру выходящего дыма равной  $100^\circ\text{C}$ . Тогда при сжигании массы  $m_0 = 1$  кг мокрых дров нагревается на  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$  и испаряется масса воды

$$m = m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{7} \text{ кг.}$$

При этом сгорает сухая древесина массой

$$M = m_0 - m = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{6}{7} \text{ кг.}$$

На нагревание и испарение массы воды  $m$  затрачивается количество теплоты

$$Q_1 = m(C\Delta T + L) = m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} (C\Delta T + L) \approx 0,39 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

При сгорании массы  $M$  древесины выделяется количество теплоты

$$Q_2 = Mq = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} q \approx 8,57 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Следовательно, на отопление дома при сгорании массы  $m_0 = 1$  кг мокрых дров уходит количество теплоты

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_2 - Q_1 = m_0 \frac{\rho_1}{\rho_2} q - m_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} (C\Delta T + L) = \\ &= \frac{m_0}{\rho_2} (\rho_1 q - (\rho_2 - \rho_1)(C\Delta T + L)) \approx 8,18 \cdot 10^6 \text{ Дж,} \end{aligned}$$

то есть удельная теплота сгорания мокрых дров равна

$$q_3 = \frac{Q_3}{m_0} \approx 8,18 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг.}$$

Поэтому для того, чтобы протопить дом, потребуется либо масса  $M_1 = 20$  кг сухих дров, либо масса мокрых дров

$$M_2 = \frac{M_1 q}{q_3} = \frac{M_1 q \rho_2}{\rho_1 q - (\rho_2 - \rho_1)(C\Delta T + L)} \approx 24,5 \text{ кг.}$$

**2.18.** Понятно, что описанный в условии процесс будет проходить в два этапа: сначала вся вода остынет от  $20^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$ , уменьшив свою температуру на величину  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ , а затем половина воды превратится в лёд при постоянной температуре  $0^\circ\text{C}$ . Таким образом, вода отдаст количество теплоты  $Q_1 = CM\Delta T$  на первом этапе и количество теплоты  $Q_2 = \lambda M/2$  на втором этапе. Отданное водой тепло пойдёт на испарение кипящего жидкого азота. Тогда, если  $m$  — масса испарившегося азота, то уравнение теплового баланса имеет вид:

$$Q_1 + Q_2 = CM\Delta T + \frac{\lambda M}{2} = Lm.$$

Отсюда искомая масса азота:

$$m = \frac{(C\Delta T + (\lambda/2)) M}{L} = 1,27 \text{ кг.}$$

**2.19.** За промежуток времени  $\Delta t$  за счёт испарения с поверхности чая образуется объём пара  $SV\Delta t$  массой  $\Delta m = \rho SV\Delta t$ . На его образование будет затрачено количество тепла  $\Delta Q = L\Delta m = L\rho SV\Delta t$ , которое отнимается от чая, вызывая его охлаждение на  $\Delta T = \Delta Q/(mC) = L\rho SV\Delta t/(mC)$ . Отсюда скорость охлаждения чая составит

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{L\rho SV}{mC} = \frac{2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0,58 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot 0,1 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{0,2 \text{ кг} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}} \approx 0,5 \frac{^\circ\text{C}}{\text{с}}.$$

Таким образом, чай будет остывать приблизительно на один градус за две секунды, то есть довольно быстро: через десять секунд его температура станет равной лишь  $95^\circ\text{C}$ , а это уже совсем не кипятком. Значит, любители горячего чая правы!

*Примечание:* это, конечно, «оценка сверху»; реальная скорость остывания будет ниже.

**2.20.** Кастрюля с молоком нагреется от  $99^\circ\text{C}$  до  $100^\circ\text{C}$  за следующие  $\Delta t_0 = 0,5$  мин, после чего молоко начнёт кипеть и испаряться. При этом плёнка не будет выпускать пары наружу. Ясно, что молоко убежит тогда, когда пары займут весь объём кастрюли.

Оценим массу  $\Delta m$  молока, испарившегося к этому моменту. Пренебрежём объёмом находящегося в кастрюле жидкого молока и будем считать, что пары молока являются идеальным газом. Тогда  $\Delta m = \frac{\mu p V}{RT}$ . Учитывая, что  $\mu = 18$  г/моль,  $p = 10^5$  Па (кипение происходит при атмосферном давлении, массой плёнки можно пренебречь) и

$T = 373 \text{ К}$ , получим  $\Delta m \approx 0,9 \text{ г}$ . На испарение этого количества молока требуется  $Q_2 = L\Delta m = 2070 \text{ Дж}$  тепла. По условию задачи  $m = 200 \text{ г}$  жидкого молока нагревается на  $\Delta T = 1$  градус за  $\Delta t_1 = 0,5$  минуты. При этом молоко получает количество тепла  $Q_1 = Cm\Delta T = 840 \text{ Дж}$ . Следовательно, при испарении молоко получит количество тепла  $Q_2$  в течение времени  $\Delta t_2 = Q_2\Delta t_1/Q_1 \approx 1,2$  минуты после закипания.

Значит, молоко начнёт уходить через время  $\Delta t = \Delta t_0 + \Delta t_2 \approx \approx 1,7$  минуты после того, как температура кастрюли станет равной  $99^\circ\text{С}$ .

**2.21\***. После открывания клапана давление в скороварке упадёт, и вода будет кипеть, остывая при этом от  $T_1 = 120^\circ\text{С}$  до  $T_2 = 100^\circ\text{С}$ . Количество теплоты, необходимое для испарения, будет отниматься от остывающей воды. Пусть за малый промежуток времени испарилась небольшая масса воды  $\Delta m_i$ , а температура воды при этом уменьшилась на  $\Delta T_i$ . Тогда уравнение теплового баланса имеет вид:

$$Cm_i\Delta T_i = L\Delta m_i,$$

где  $m_i$  — масса воды, которая была в скороварке при испарении массы  $\Delta m_i$ . Отсюда

$$\Delta T_i = \frac{L}{C} \cdot \frac{\Delta m_i}{m_i},$$

и

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{L}{C} \sum_i \frac{\Delta m_i}{m_i}.$$

Сумму в последней формуле можно точно вычислить при помощи интегрирования, а можно ограничиться лишь её оценкой. Пусть  $M_0 = 3 \text{ кг}$  — начальная масса воды в скороварке,  $M_{\text{ост}}$  — масса воды, оставшейся в скороварке после окончания процесса кипения. Заметим, что  $\sum_i \Delta m_i = M_0 - M_{\text{ост}}$  — масса выкипевшей воды. Тогда

$$T_1 - T_2 = \frac{L}{C} \sum_i \frac{\Delta m_i}{m_i} > \frac{L}{CM_0} \sum_i \Delta m_i = \frac{L}{C} \cdot \frac{M_0 - M_{\text{ост}}}{M_0},$$

откуда

$$M_{\text{ост}} > M_0 \left( 1 - \frac{C(T_1 - T_2)}{L} \right) \approx 2,886 \text{ кг}.$$

Это нижняя оценка для массы оставшейся в скороварке воды.

Аналогично можно получить для  $M_{\text{ост}}$  оценку сверху:

$$T_1 - T_2 = \frac{L}{C} \sum_i \frac{\Delta m_i}{m_i} < \frac{L}{C} \cdot \frac{\sum_i \Delta m_i}{M_0 - \sum_i \Delta m_i} = \frac{L}{C} \cdot \frac{M_0 - M_{\text{ост}}}{M_{\text{ост}}},$$

откуда

$$M_{\text{ост}} < M_0 \frac{L}{L + C(T_1 - T_2)} \approx 2,890 \text{ кг.}$$

Видно, что верхняя и нижняя оценки очень близки. Поэтому можно принять в качестве ответа среднее арифметическое из них:  $M_{\text{ост}} \approx 2,888 \text{ кг}$ . Следует отметить, что точный ответ  $M_{\text{точн}} \approx 2,8876 \text{ кг}$ , полученный при помощи интегрирования, отличается от найденной нами величины менее чем на 0,02%.

**2.22\***. Теплоёмкость упала скачком потому, что при температуре  $T_1$  вся жидкая вода внутри калориметра испарилась. При этом водяной пар в калориметре был насыщенным. Следовательно, масса испарившейся воды  $m = V\rho_{\text{н}}(T_1)$ , где  $\rho_{\text{н}}(T_1)$  — плотность насыщенных паров воды при температуре  $T_1$ . Из графика следует, что  $\rho_{\text{н}}(T_1) \approx 9,7 \text{ г/м}^3$ . Поэтому  $m \approx 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ г}$ .

Рассмотрим далее процесс нагрева калориметра при температуре, чуть меньшей  $T_1$ . Пусть находящиеся в калориметре вода массы  $m_{\text{в}}$  и пар массы  $m_{\text{п}}$  получили небольшое количество тепла  $\Delta Q$ . При этом температура внутри калориметра повысилась на величину  $\Delta T$ , а часть воды массы  $\Delta m_{\text{п}}$  превратилась в пар. Тогда уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\Delta Q = (m - m_{\text{п}})C_{\text{в}}\Delta T + 3R\frac{m_{\text{п}}}{\mu}\Delta T + L\Delta m_{\text{п}},$$

где  $\mu = 18 \text{ г/моль}$  — молярная масса воды,  $C_{\text{в}}$  — удельная теплоёмкость воды. При температуре  $T_1$  вся вода переходит в пар, и поэтому первое слагаемое в написанном уравнении обращается в ноль. Следовательно, теплоёмкость системы непосредственно перед фазовым переходом равна:

$$C_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{3RV\rho_{\text{н}}(T_1)}{\mu} + LV\frac{\Delta\rho_{\text{н}}}{\Delta T}.$$

Находя из графика величину  $\Delta\rho_{\text{н}}/\Delta T \approx 0,6 \text{ г/(м}^3 \cdot \text{°C)}$ , получим, что  $C_1 \approx 1,5 \text{ кДж/°C}$ .

При  $T > T_1$  вся вода в калориметре находится в газообразном состоянии. Поэтому искомая теплоёмкость  $C_2$  представляет собой теплоёмкость  $m/\mu$  молей водяного пара:

$$C_2 = \frac{3RV\rho_{\text{н}}(T_1)}{\mu} \approx 0,013 \text{ кДж/°C.}$$

**2.23.** Во время нагрева первого литра воды часть энергии, пропорциональная разности времён  $t_1 - t_2$ , идёт на разогрев конфорки. Так

как через время  $t_1$  вода закипает, то это означает, что к этому моменту времени конфорка полностью разогрелась, и далее всё выделяемое ею тепло будет идти только на нагрев второго литра воды. Поэтому мощность конфорки

$$N = \frac{C\rho V\Delta T}{t_2},$$

а запасённая в ней тепловая энергия

$$Q = N(t_1 - t_2) = C\rho V\Delta T \frac{t_1 - t_2}{t_2}.$$

Здесь  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  — плотность воды,  $\Delta T \approx 100 \text{ }^\circ\text{C}$ . После выключения конфорки вся запасённая в ней энергия пойдёт на испарение воды массой

$$m = \frac{Q}{L} = \frac{C\rho V\Delta T}{L} \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_2} \approx 91 \text{ г}.$$

**2.24.** Соль заставляет снег растаять, и дороги покрываются солёной жижей. Известно, что теплота испарения вещества из твёрдой фазы (снега) больше, чем из жидкой (воды). Это объясняется тем, что теплота испарения из твёрдой фазы равна сумме теплот плавления и испарения из жидкой фазы. Поэтому плотность насыщенных паров над солёной жижей значительно выше, чем над снегом, и влажность воздуха в городе становится гораздо выше, чем за городом. Это и вызывает ощущение более пронизывающего холода, так как при повышенной влажности человек мёрзнет сильнее. Действительно, при влажности, близкой к 100%, в воздухе появляются капельки воды — туман. Попадая на теплую поверхность кожи лица, рук или в лёгкие, эти капельки испаряются, отнимая от организма большое количество теплоты. Известно, например, что зимой в Якутии, где воздух сухой и погода безветренная, мороз в  $-50 \text{ }^\circ\text{C}$  переносится легче, чем  $-20 \text{ }^\circ\text{C}$  в Петербурге при высокой влажности и с ветром — тут запросто можно обморозить нос и уши. А в тумане даже при плюсовой температуре не следует находиться долго — можно получить воспаление лёгких.

**2.25\*.** Для удобства будем называть разность температур чая и окружающей среды просто температурой  $T$ . Тогда если чай в стакане до переливания имел некоторую температуру  $T_1$ , а после переливания в холодный стакан остыл до температуры  $T_2$ , то справедливо уравнение теплового баланса:

$$C(T_1 - T_2) = C_0 T_2,$$

откуда

$$T_2 = \frac{C}{C_0 + C} T_1.$$

Таким образом, температура чая после переливания пропорциональна его температуре до переливания:  $T_2 = \beta T_1$ , причём коэффициент пропорциональности  $\beta = \frac{C}{C_0 + C} < 1$ .

Поскольку, согласно условию задачи, теплоотдача стакана с чаем пропорциональна введённой нами температуре  $T$ , то скорость изменения температуры стакана с чаем:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\alpha T,$$

где  $\alpha > 0$  — постоянный коэффициент пропорциональности, а  $\Delta t$  — малый промежуток времени. Это уравнение можно переписать в виде:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{T(t)} = -\alpha \Delta t,$$

откуда видно, что отношение  $B(\Delta t) = \frac{T(t + \Delta t)}{T(t)}$  не зависит от  $T$ , даже если  $\Delta t$  — не малый, а конечный промежуток времени.

В частности, в качестве  $\Delta t$  можно выбрать промежуток времени от  $t = 0$  (начало остывания) до  $t = t_k$  (момент времени, к которому чай остынет до нужной температуры  $T_k$ ).

Рассмотрим далее процессы 1 и 2 охлаждения чая (см. рис. 2.25). В первом процессе температура вначале падает от  $T_0$  до  $\beta T_0$  за счёт переливания чая в холодный стакан, а затем уменьшается за счёт теплоотдачи ещё в  $B(t_k)$  раз и достигает значения

$$T^{(1)}(t_k) = T_k = B(t_k)\beta T_0.$$

Во втором процессе к моменту времени  $t_k$  чай за счёт теплоотдачи остынет до температуры  $T' = B(t_k)T_0$ , а затем, после переливания в холодный стакан, его температура уменьшится ещё в  $\beta$  раз и станет равной:

$$T^{(2)}(t_k) = \beta T' = \beta B(t_k)T_0 = T^{(1)}(t_k) = T_k.$$

Таким образом, время остывания чая до нужной температуры в обоих процессах одинаково, то есть чай можно переливать из одного стакана в другой в любой момент времени от  $t = 0$  до  $t = t_k$ .

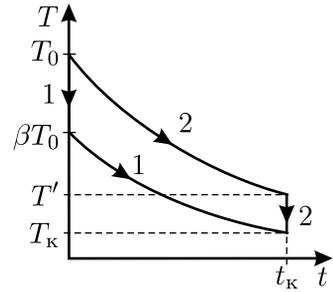


Рис. 2.25.

**2.26.** Очевидно, что скорость остывания чайника зависит от разности температур чайника и окружающего его воздуха. Из приведённых в условии задачи данных следует, что эта зависимость — прямо пропорциональная:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \alpha(T_{\text{ср}} - T_0),$$

где  $T_{\text{ср}}$  — средняя температура чайника за время остывания  $\Delta t$ . Действительно, выразим из написанного уравнения коэффициент  $\alpha$  и вычислим его, используя данные из условия задачи:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta T_1 / \Delta t_1}{T_{\text{ср}1} - T_{01}} = \frac{5 \text{ }^\circ\text{C} / 5 \text{ мин}}{97,5 \text{ }^\circ\text{C} - 20 \text{ }^\circ\text{C}} \approx 0,01290 \text{ мин}^{-1},$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta T_2 / \Delta t_2}{T_{\text{ср}2} - T_{02}} = \frac{5 \text{ }^\circ\text{C} / 4,2 \text{ мин}}{92,5 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C}} \approx 0,01287 \text{ мин}^{-1},$$

то есть с хорошей точностью  $\alpha_1 \approx \alpha_2$ . Поэтому искомое время:

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta T_3}{\alpha(T_{\text{ср}3} - T_{03})} \approx 3,6 \text{ мин} = 3 \text{ мин } 36 \text{ сек.}$$

Ответ может быть записан и в общем виде. С учётом того, что  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T_3$ , можно получить:

$$\Delta t_3 = \frac{T_{\text{ср}1} - T_{01}}{T_{\text{ср}3} - T_{03}} \Delta t_1 \approx 3,6 \text{ мин.}$$

**2.27.** Будем считать тарелки цилиндрическими. Обозначим радиус и высоту большой тарелки через  $R$  и  $H$ , а радиус и высоту маленькой тарелки через  $r$  и  $h$ . Пусть масса супа в большой тарелке равна  $M$ , а его объём  $V$ . Тогда масса супа в маленькой тарелке  $m = M/n = M/8$ .

Подобие тарелок означает, что их радиусы  $R$  и  $r$  и глубины  $H$  и  $h$  отличаются друг от друга в одно и то же число раз  $N$ :

$$r = \frac{R}{N}, \quad h = \frac{H}{N}.$$

Значит, объёмы большой и маленькой тарелок  $V$  и  $v$  и массы супа в них связаны соотношением:

$$\frac{M}{m} = \frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = N^3 = n,$$

откуда  $N = \sqrt[3]{n} = 2$ , то есть маленькая тарелка по размерам вдвое меньше большой.

По условию задачи, для каждой из тарелок теплоотдача происходит с поверхности супа в соответствии с законом

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \alpha S(T - T_0),$$

где  $\Delta Q$  — количество теплоты, отдаваемое за время  $\Delta t$  с поверхности площадью  $S$ ;  $T$  и  $T_0$  — начальная температура супа и температура окружающей среды;  $\alpha$  — постоянный коэффициент пропорциональности. С другой стороны, известно, что при остывании супа на  $\Delta T$  градусов он отдаёт количество теплоты  $\Delta Q = CM\Delta T$ , где  $C$  — удельная теплоёмкость супа. Значит, справедливо равенство

$$\frac{CM\Delta T}{\Delta t} = \alpha S(T - T_0).$$

Учитывая, что площадь поверхности тарелки пропорциональна квадрату её радиуса ( $S \sim R^2$ ), а масса супа пропорциональна его объёму ( $M \sim R^2H$ ), для скорости остывания супа получаем:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha S}{CM}(T - T_0) \sim \frac{\alpha R^2}{CR^2H}(T - T_0) \sim \frac{T - T_0}{H}.$$

Таким образом, мы установили, что при одинаковой разности начальной температуры супа и температуры окружающей среды скорость остывания супа обратно пропорциональна глубине тарелки, то есть для большой тарелки, высота которой  $H = Nh = \sqrt[3]{n} \cdot h = 2h$ , скорость охлаждения будет вдвое меньше, чем для маленькой. Отсюда следует, что время охлаждения маленькой тарелки будет в  $\sqrt[3]{n} = 2$  раза меньше, чем большой, то есть суп из маленькой тарелки можно будет есть через

$$t' = \frac{t}{\sqrt[3]{n}} = 10 \text{ минут.}$$

**2.28.** Пусть  $T$  — установившаяся температура воды в ванне. За время  $\Delta t$  в ванну поступает масса  $m\Delta t$  нагретой воды. Она перемешивается с водой, которая уже была в ванне, и остывает от температуры  $T_1$  до температуры  $T$ , отдавая количество тепла  $Q = Cm\Delta t(T_1 - T)$ . Оно, в свою очередь, должно равняться количеству тепла  $Q = k(T - T_0)\Delta t$ , отдаваемому ванной в окружающую среду. Отсюда

$$Cm(T_1 - T) = k(T - T_0),$$

и

$$T = \frac{CmT_1 + kT_0}{Cm + k} \approx 29^\circ\text{C}.$$

**2.29.** Оценку времени замерзания можно получить следующим образом. Будем предполагать, что количество теплоты  $q$ , отдаваемое в единицу времени морозильнику, одинаково для процесса остывания от  $T_3 = +2^\circ\text{C}$  до  $T_4 = 0^\circ\text{C}$  и для процесса замерзания воды при  $0^\circ\text{C}$ . Обозначая через  $M$  массу воды, получаем:

$$qt_2 = CM(T_3 - T_4).$$

Время замерзания воды  $t_3$  определим из соотношения

$$qt_3 = \lambda M.$$

Из записанных уравнений находим:

$$t_3 = \frac{\lambda M}{q} = \frac{\lambda t_2}{C(T_3 - T_4)} = \frac{340 \frac{\text{кДж}}{\text{кг}} \cdot 9 \text{ мин}}{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 2^\circ\text{C}} \approx 360 \text{ мин} = 6 \text{ часов}.$$

Более точную оценку времени замерзания можно получить, если исследовать зависимость скорости теплоотдачи от разности температур. При охлаждении от температуры  $T_1 = +29^\circ\text{C}$  до  $T_2 = +25^\circ\text{C}$  скорость теплоотдачи в расчёте на единицу массы

$$\frac{q_1}{M} = \frac{C(T_1 - T_2)}{t_1} = \frac{4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot 4^\circ\text{C}}{6 \text{ мин}} = 2800 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{мин}},$$

а при охлаждении от  $T_3 = +2^\circ\text{C}$  до  $T_4 = 0^\circ\text{C}$

$$\frac{q_2}{M} = \frac{C(T_3 - T_4)}{t_2} = \frac{4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 2^\circ\text{C}}{9 \text{ мин}} = \frac{2800}{3} \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{мин}},$$

то есть в 3 раза меньше. Это связано с тем, что в первом случае разность средней температуры воды и температуры в морозильной камере равна  $\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 = 39^\circ\text{C}$ , а во втором случае эта разность равна

$\frac{T_3 + T_4}{2} - T_0 = 13^\circ\text{C}$ , то есть также в 3 раза меньше. Таким образом, скорость теплоотдачи пропорциональна разности температур кастрюли с водой и морозильной камеры. В процессе замерзания воды эта разность будет в

$$\frac{\frac{T_3 + T_4}{2} - T_0}{T_4 - T_0} = \frac{13}{12}$$

раз меньше, чем при охлаждении воды от  $T_3 = +2\text{ }^\circ\text{C}$  до  $T_4 = 0\text{ }^\circ\text{C}$ . Поэтому время замерзания будет во столько же раз больше:

$$t_3 = \frac{\lambda t_2}{C(T_3 - T_4)(T_4 - T_0)} \left( \frac{T_3 + T_4}{2} - T_0 \right) \approx 6,5 \text{ час.}$$

**2.30.** Количество тепла  $\Delta Q$ , поступающее к сосульке из внешней среды за небольшой промежуток времени  $\Delta t$ , пропорционально площади её боковой поверхности  $S$  и этому промежутку  $\Delta t$ . Это тепло идёт на плавление льда при неизменной его температуре  $0\text{ }^\circ\text{C}$ , то есть  $\Delta Q = \Delta m \lambda$ , где  $\lambda$  — удельная теплота плавления льда. Масса  $\Delta m$  растаявшего за время  $\Delta t$  льда равна  $\rho S \Delta h$ , где  $\rho$  — плотность льда, а толщина растаявшего слоя  $\Delta h$  пропорциональна изменению длины сосульки  $\Delta l$ , поскольку сосулька тает с поверхности, сохраняя свою форму. Получаем, что

$$\Delta Q = \Delta m \lambda = \rho S \Delta h \lambda \sim \rho S \Delta l \lambda \sim S \Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} \sim \frac{1}{\rho \lambda} = \text{const.}$$

Таким образом, длина сосульки убывает с постоянной скоростью. Поэтому сосулька длиной  $L$  растает за время

$$t' = \frac{L}{l} t = 6 \text{ часов.}$$

**2.31\***. В кубах разного размера изменение температуры со временем будет происходить подобным образом, но с различной скоростью. Пусть  $a$  — длина ребра куба, а  $x < a$  — расстояние от поверхности термомостата. Тогда функция, описывающая зависимость температуры  $T$  от координаты  $x$  и времени  $t$  в малом и большом кубах, будет одинакова, если в качестве её аргументов взять отношения  $x/a$  и  $t/\tau$ , где  $\tau$  — некоторое характерное время прогревания данного куба. Очевидно, что это характерное время обратно пропорционально скорости нарастания температуры в соответствующих точках кубов.

Разобьём малый и большой кубы на одинаковое количество маленьких кубиков. При этом если длина ребра у маленького кубика, на которые разбит малый куб, равна  $\Delta x$ , то у кубика в большом кубе длина ребра будет равна  $2\Delta x$ . Рассмотрим процесс нагревания маленьких кубиков, занимающих подобные положения внутри малого и большого кубов, то есть находящихся на расстояниях, соответственно,  $x/a$  и

$x/(2a)$  от граней, касающихся термостата, в те (разные!) моменты времени, когда их температуры одинаковы. Одинаковыми будут при этом и разности температур  $\Delta T$  между соответствующими гранями кубиков. Количество тепла  $\Delta Q$ , распространяющееся через кубик за счёт теплопроводности и частично остающееся в кубике, пропорционально площади грани кубика ( $\Delta x^2$  или  $4\Delta x^2$ ), величине промежутка времени  $\Delta t$  и отношению  $\Delta T$  к «толщине» кубика ( $\Delta x$  или  $2\Delta x$ ). Это тепло идёт на нагревание кубика, масса которого пропорциональна его объёму ( $\Delta x^3$  или  $8\Delta x^3$ ), то есть на увеличение его температуры на величину  $\delta T$ :

$$\Delta Q \sim \Delta x^2 \cdot \Delta t \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x} \sim \Delta x^3 \cdot \delta T$$

(уравнение записано для маленького кубика). Отсюда следует, что скорость изменения температуры  $\delta T/\Delta t \sim \Delta x^{-2}$ , то есть в большом кубике с размером ребра  $2\Delta x$  она будет в 4 раза меньше, чем в маленьком, а характерное время прогревания большого куба (а с ним и время достижения температуры  $T_2$  в центре куба) будет в 4 раза больше, чем у малого куба.

**2.32\***. Лёд на поверхности озера образуется из-за оттока тепла от воды через толщу льда. Процесс этот достаточно медленный, поэтому будем считать, что внутри льда в любой момент времени существует стационарное — линейное — распределение температуры по толщине. Кроме того, будем пренебрегать малым количеством тепла, выделяющимся за счёт постепенного охлаждения нарастающего слоя льда, по сравнению с теплотой кристаллизации воды. Пусть в некоторый момент времени  $t$  слой льда имеет толщину  $x$ . Тогда количество теплоты  $\Delta Q$ , проходящее за малый промежуток времени  $\Delta t$  через ледяной цилиндр с площадью основания  $S$ , равно

$$\Delta Q = \eta \frac{\Delta T}{x} S \Delta t,$$

где  $\Delta T$  — постоянная разность температур между водой и воздухом,  $\eta$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности. Эта теплота отнимается от небольшого слоя воды, непосредственно примыкающего к льду и превращающегося при замерзании в слой льда толщиной  $\Delta x$ :

$$\Delta Q = \lambda \Delta m = \lambda \rho S \Delta x,$$

где  $\rho$  — плотность льда,  $\lambda$  — удельная теплота замерзания воды. При-

равнивая записанные выражения, получим, что

$$x\Delta x = \Delta \left( \frac{x^2}{2} \right) = \frac{T_0\eta}{\lambda\rho} \Delta t,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{2T_0\eta}{\lambda\rho} t},$$

то есть толщина слоя льда увеличивается пропорционально корню квадратному из времени, прошедшего с момента, когда мороз «ударил».

Следовательно, если за время  $\tau_1 = 1$  сутки на озере наростёт слой льда толщиной  $d_1 = 3$  см, то слой толщиной  $d_2 = 10$  см нарастёт за время

$$\tau_2 = \tau_1 \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \approx 11 \text{ суток.}$$

Заметим, что наращивание слоя льда можно осуществить гораздо быстрее, если насверлить в нём лунки и с помощью насосов поливать водой из озера поверхность льда, находящуюся при низкой температуре. Именно так во время блокады Ленинграда строили «дорогу жизни» на Ладожском озере.

**2.33.** Будем считать, что температуры  $T_1$  и  $T_2$  не очень сильно отличаются от 273 К. Тогда в случае а) средняя длина свободного пробега молекул во много раз меньше размеров сосуда. Поэтому частота  $f$  ударов молекул о стенку пропорциональна концентрации  $n$  и скорости  $v$  движения молекул в тонком слое, прилегающем к рассматриваемой стенке:

$$f_{1,2} \sim n_{1,2}v_{1,2} \sim n_{1,2}\sqrt{T_{1,2}}.$$

Так как давление, оказываемое газом на стенки сосуда, должно быть одинаковым, то  $n_1T_1 = n_2T_2$ , откуда  $\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ .

Для того, чтобы рассмотреть случай б), оценим среднюю длину свободного пробега молекул  $L$  при давлении  $p = 10^{-9}$  атм. Так как  $L \sim \frac{1}{p}$ , то  $\frac{L}{L_0} = \frac{p_0}{p}$ , где  $L_0 = 10^{-5}$  см. Отсюда получаем  $L \sim 10^4$  см. Это намного больше, чем расстояние между стенками кубического сосуда объёмом 1 литр, которое равно 10 см. Поэтому количество молекул, ударяющихся при давлении  $p$  в каждую из стенок за некоторый промежуток времени, будет одним и тем же, и  $f_1/f_2 = 1$ .

**2.34.** Пусть на единицу площади подложки в единицу времени попадает  $n$  атомов серебра. Для оценки примем, что все атомы летят перпендикулярно подложке с одинаковой скоростью  $v$ . Удары атомов о подложку можно считать абсолютно неупругими (серебро осаждается). Тогда давление  $p$ , оказываемое на подложку, равно  $p = nmv$ , где  $m = \mu/N_A$  — масса атома серебра,  $N_A$  — число Авогадро. Скорость атома можно оценить при помощи формулы:  $v \approx \sqrt{2E/m}$ .

Пусть за время  $\Delta t$  на участок подложки площадью  $S$  падает  $N$  атомов, и при этом осаждается масса  $M$  серебра. Тогда объём осадившегося слоя равен  $\Delta V = \frac{M}{\rho} = \frac{mN}{\rho}$ , а его толщина равна  $\Delta x = \frac{\Delta V}{S} = \frac{mN}{\rho S}$ . Учитывая, что  $n = \frac{N}{S\Delta t}$ , для скорости роста толщины слоя серебра получим:

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{m}{\rho} \cdot \frac{N}{S\Delta t} = \frac{nm}{\rho} = \frac{p}{\rho v} = \frac{p}{\rho} \sqrt{\frac{\mu}{2EN_A}} \approx 9 \cdot 10^{-9} \text{ м/с.}$$

Видно, что подложка растёт достаточно медленно — каждую секунду её толщина увеличивается примерно на  $9 \cdot 10^{-9}$  м. Такие маленькие длины принято выражать в единицах, называемых ангстремами (обозначается Å):  $1 \text{ Å} = 10^{-10}$  м. Следовательно,  $u \approx 90 \text{ Å/с}$ .

**2.35\*.** Длину свободного пробега  $L$  молекулы газа при температуре  $T$  и давлении  $p$  можно оценить при помощи формулы  $L \simeq \frac{kT}{\pi p \cdot (2a)^2}$ , где  $a$  — радиус молекулы,  $k$  — постоянная Больцмана. Приняв для оценки  $a \sim 10^{-10}$  м,  $T \sim 300$  К, получим, что для газа в рассматриваемом манометре  $L \sim 0,3$  см, то есть порядка расстояния от проволоки до стенки трубки прибора. Поэтому молекулы газа в трубке практически не соударяются между собой, а взаимодействуют только с нагретой проволокой и со стенками трубки.

Будем считать, что после соударения с проволокой молекула имеет энергию, соответствующую температуре проволоки, а после соударения со стенкой — соответствующую температуре стенки. Температура проволоки зависит от теплоотдачи с её поверхности, которая, в свою очередь, пропорциональна числу ударов молекул о единицу площади этой поверхности, происходящих в единицу времени:  $f \sim nv \sim p\sqrt{T/\mu}$ , где  $n$  — концентрация молекул,  $v$  — их среднеквадратичная скорость,  $\mu$  — молярная масса газа. При одинаковых температурах проволоки в опытах с гелием и с неоном можно записать:  $\frac{p_{\text{He}}}{\sqrt{\mu_{\text{He}}}} = \frac{p_{\text{Ne}}}{\sqrt{\mu_{\text{Ne}}}}$ .

Поэтому при измерении давления неона с помощью данного манометра необходимо увеличить приведённые в таблице данные для гелия в  $\sqrt{\mu_{Ne}/\mu_{He}} = \sqrt{5} \approx 2,2$  раза.

**2.36\*.** При указанных в условии задачи температуре, молярной массе и давлении молекулы движутся со средними скоростями  $v \sim \sqrt{3RT/\mu} \approx 337$  м/с. Значит, за время своей жизни  $\tau$  возбуждённая молекула пролетает расстояние  $L = v\tau \approx 3,4 \cdot 10^{-1}$  м. Объём, в котором летящая молекула может за это время столкнуться с другими молекулами, по порядку величины равен  $V \approx 4LS$ . Концентрация невозбуждённых молекул в сосуде перед началом освещения равна

$$n = \frac{p_0 N_A}{RT} \approx 2,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрация же возбуждённых молекул составляет

$$n_b = \tau N \cdot 10^6 \approx 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Одна возбуждённая молекула за своё время жизни  $\tau$  могла бы столкнуться с другими возбуждёнными молекулами  $\nu_1$  раз, причём  $\nu_1 = V n_b = 4v\tau S n_b$ . Значит, всего за это время в одном кубическом метре происходит

$$\nu = \nu_1 n_b / 2 = 2v\tau S n_b^2 \approx 0,68 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$$

столкновений между возбуждёнными молекулами. Коэффициент  $1/2$  появляется в последней формуле из-за того, что столкновения парные, то есть в каждом участвуют две молекулы. При каждом таком столкновении одна молекула исчезает, то есть скорость убывания концентрации

$$\beta = \frac{\nu}{\tau} = 2v S n_b^2 \approx 6,8 \cdot 10^{13} \frac{1}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}.$$

Давление в сосуде уменьшится на  $\varepsilon = 1\%$  тогда, когда на такую же величину уменьшится концентрация молекул  $n$ . Это произойдёт через время  $t = \varepsilon n / \beta$ . С учётом полученных выше выражений для  $n$ ,  $n_b$ ,  $\beta$  и  $v$ , окончательно находим:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\varepsilon n}{\beta} = \frac{\varepsilon \frac{p_0 N_A}{RT}}{2\sqrt{3RT/\mu} \cdot S\tau^2 N^2 \cdot 10^{12}} = \\ &= \frac{\varepsilon p_0 N_A \sqrt{\mu}}{2 \cdot 10^{12} \cdot \tau^2 N^2 S \sqrt{3R^3 T^3}} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 46 \text{ суток.} \end{aligned}$$

Следует отметить, что ответ носит оценочный характер, то есть время вычислено по порядку величины. Это связано с тем, что в расчётах более правильно использовать не среднюю, а среднюю относительную скорость движения молекул. Однако ввиду того, что эти скорости отличаются друг от друга не очень сильно (примерно в 1,4 раза), полученную оценку можно считать вполне удовлетворительной.

**2.37.** В условии сказано, что коробка лёгкая. Значит, её массой можно пренебречь. Пусть в некоторый момент времени после начала нагнетания жидкости расстояние от её поверхности до крышки цилиндра равно  $H_1$ , а до крышки коробки —  $h_1$  (см. рис. 2.37). Поскольку коробка считается невесомой, то давления воздуха внутри и вне коробки всё время одинаковы. Так как температура газа в процессе нагнетания жидкости постоянна, то справедливы соотношения, следующие из закона Бойля — Мариотта:  $p_0 H = p_1 H_1$  и  $p_0 h = p_1 h_1$ , где  $p_0$  — исходное давление воздуха,  $p_1$  — давление в рассматриваемый момент времени. Из написанных уравнений имеем:  $H_1 = p_0 H / p_1$  и  $h_1 = p_0 h / p_1$ . Отсюда

$$h_1 = \frac{h}{H} H_1 < H_1.$$

Этот результат справедлив при любом давлении  $p_1$  и не зависит от него. Значит, всплывающая коробка никогда не упрётся в крышку цилиндра.

**2.38.** При погружении на искомую глубину  $H$  средняя плотность человека должна сравняться с плотностью воды, то есть его объём должен стать равным  $m/\rho = 80$  л, где  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воды. Уменьшение объёма тела на величину  $\Delta v = V - m/\rho = 2$  л происходит практически только за счёт сжатия воздуха в лёгких. При этом объём воздуха в лёгких становится равным  $v - \Delta v = 3$  л. Так как сжатие происходит изотермически, то можно применить закон Бойля — Мариотта:

$$p_0 v = (p_0 + \rho g H)(v - \Delta v),$$

где  $p_0 = 10^5$  Па — атмосферное давление. Таким образом, спортсмен сможет всплыть, не совершая никаких движений, с глубины, немного меньшей

$$H = \frac{p_0}{\rho g} \cdot \frac{\Delta v}{v - \Delta v} = \frac{p_0}{\rho g} \cdot \frac{\rho V - m}{m - \rho(V - v)} \approx 7 \text{ м.}$$

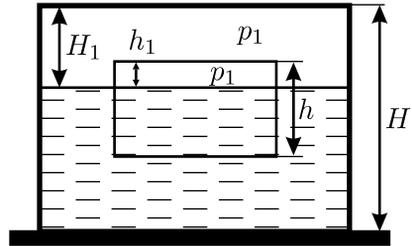


Рис. 2.37.

**2.39.** После охлаждения давление воздуха в сосуде изменится, во-первых, из-за понижения его температуры от  $+30^\circ\text{C}$  до  $-30^\circ\text{C}$ , и, во-вторых, из-за уменьшения занимаемого им объёма от  $V - V_1$  до некоторого  $V'$  (объём уменьшится вследствие расширения замёрзшей воды). Из закона Клапейрона имеем:

$$\frac{p_0(V - V_1)}{T_1} = \frac{pV'}{T_2},$$

где через  $T_1$  и  $T_2$  обозначены температуры газа до и после охлаждения, выраженные в градусах Кельвина. Конечный объём газа  $V'$  может быть найден из условия равенства масс воды и льда:

$$V' = V - V_{\text{льда}} = V - \frac{\rho_1}{\rho_2} V_1.$$

С учётом последнего соотношения получаем:

$$p = p_0 \cdot \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{V - V_1}{V - (\rho_1 V_1 / \rho_2)} \approx 1,44 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

В заключение поясним, для чего в условии сказано, что поверх воды налит тонкий слой машинного масла. Это необходимо для того, чтобы вода не испарялась — в противном случае нам бы пришлось учитывать при расчётах влажность воздуха.

**2.40.** Объём пластиковой бутылки зависит от разности внешнего и внутреннего давлений. Если внутри бутылки давление больше наружного — атмосферного, то объём бутылки  $V_1 = 1$  л, а если внутреннее давление меньше атмосферного, то бутылка сжимается, и её

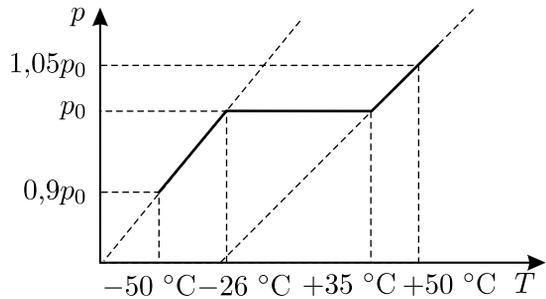


Рис. 2.40.

объём уменьшается примерно до 0 л. Таким образом, общий объём двух сосудов — стеклянного и пластикового — может при атмосферном давлении  $p_0 = 1 \cdot 10^5$  Па иметь любую величину в пределах от  $V_2 = 4$  л до  $V_1 + V_2 = 5$  л. Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что общее количество газа  $\nu$  в обоих сосудах может быть найдено по формуле

$$\nu = \frac{1}{R} \left( \frac{p_1 V_1}{T_0} + \frac{p_2 V_2}{T_0} \right),$$

где индексы 1 и 2 относятся к бутылке и стеклянному сосуду соответственно,  $T_0 = -50^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 2 \cdot 10^5$  Па,  $p_2 = 0,4 \cdot 10^5$  Па.

Определим температуры  $T_1$  и  $T_2$ , при которых давление воздуха внутри сосудов равно атмосферному, а объёмы равны  $V_2 = 4$  л и  $V_1 + V_2 = 5$  л. Так как количество газа  $\nu$  в сосудах неизменно, то

$$\frac{p_0 V_2}{T_1} = \frac{p_1 V_1}{T_0} + \frac{p_2 V_2}{T_0}, \quad \frac{p_0 (V_1 + V_2)}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{T_0} + \frac{p_2 V_2}{T_0}.$$

Отсюда легко найти:  $T_1 \approx 247$  К ( $-26^\circ\text{C}$ ),  $T_2 \approx 308$  К ( $+35^\circ\text{C}$ ).

Значит, после соединения бутылок при температуре  $T_0 = -50^\circ\text{C}$  давление в них будет равно

$$p' = \frac{1}{V_2} (p_1 V_1 + p_2 V_2) = \frac{T_0}{T_1} p_0 \approx 0,9 p_0,$$

то есть меньше атмосферного, и поэтому в диапазоне температур от  $-50^\circ\text{C}$  до  $-26^\circ\text{C}$  общий объём системы равен  $V_2 = 4$  л, и давление нарастает пропорционально абсолютной температуре:  $p = \frac{\nu R}{V_2} T$ . В диапазоне от  $-26^\circ\text{C}$  до  $+35^\circ\text{C}$  давление не меняется и равно атмосферному давлению  $p_0$ , а объём системы увеличивается от  $V_2 = 4$  л до  $V_1 + V_2 = 5$  л. И, наконец, в диапазоне от  $+35^\circ\text{C}$  до  $+50^\circ\text{C}$  давление снова растёт пропорционально абсолютной температуре:  $p = \frac{\nu R}{V_1 + V_2} T$ , но скорость роста меньше, чем на участке от  $-50^\circ\text{C}$  до  $-26^\circ\text{C}$ . По достижении температуры  $T_3 = +50^\circ\text{C}$  давление в бутылках будет равно

$$p'' = \frac{T_3}{V_1 + V_2} \cdot \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{T_0} = \frac{T_3}{T_2} p_0 \approx 1,05 p_0.$$

Получающийся график зависимости  $p(T)$  приведён на рисунке 2.40. Отметим, что продолжения наклонных участков этого графика проходят через точку  $p = 0$  Па,  $T = 0$  К  $\approx -273^\circ\text{C}$ .

**2.41.** Так как массы гелия в каждой из частей сосуда пропорциональны объёмам этих частей, то из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что давления в левой и правой частях сосуда будут равны, соответственно,  $p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}$  и  $p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}$ , где  $T_1$  и  $T_2$  — температуры в левой и в правой частях сосуда,  $\mu = 4$  г/моль — молярная масса гелия. Отсюда при максимальной разности давлений между частями сосуда

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{mR(T_1 - T_2)}{\mu V}$$

поток тепла через мембрану в правую часть сосуда будет равен

$$q = W(T_1 - T_2) = \frac{W\mu V \Delta p}{mR}.$$

Поскольку массы гелия в левой и правой частях сосуда относятся, как 1 : 2, то для поддержания постоянной разности температур между частями сосуда в его левую часть от нагревателя в единицу времени должно поступать количество теплоты

$$Q = q + \frac{q}{2} = \frac{3q}{2} = \frac{3W\mu V \Delta p}{2mR} \approx 0,36 \text{ Дж},$$

то есть максимальная мощность нагревателя равна 0,36 Вт.

**2.42.** В установившемся режиме система будет двигаться вправо с ускорением, определяемым из соотношения

$$(M_1 + M_2 + \mu)a = F_1 - F_2.$$

Поскольку  $\mu \ll M_1, M_2$ , то можно считать, что  $a = \frac{F_1 - F_2}{M_1 + M_2}$ , а давление  $p$  газа всюду постоянно и определяется из условия  $M_1 a = -pS + F_1$ . Отсюда

$$p = \frac{M_2 F_1 + M_1 F_2}{(M_1 + M_2)S},$$

объём газа равен

$$V = \frac{\nu RT}{p} = \frac{RTS(M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2},$$

где  $\nu = 1$  моль, и установившееся расстояние между поршнями равно

$$x = \frac{V}{S} = \frac{\nu RT(M_1 + M_2)}{M_2 F_1 + M_1 F_2}.$$

**2.43.** Поскольку процесс проходит при постоянном давлении  $p_0$ , то удельная теплота плавления льда постоянна. Так как в сосуде установилась температура  $T_0$ , равная температуре замерзания воды, то это означает, что часть воды (или вся вода) превратилась в лёд. При этом гелий нагрелся и увеличил свой объём на величину

$$\Delta V = \frac{\nu R(T_0 - T)}{p_0}.$$

Масса  $m$  воды, превратившейся в лёд, может быть найдена из уравнения теплового баланса и первого начала термодинамики:

$$\Delta Q = \lambda m = \frac{3}{2}\nu R(T_0 - T) + p_0 \Delta V = \frac{5}{2}\nu R(T_0 - T),$$

откуда

$$m = \frac{5\nu R(T_0 - T)}{2\lambda}.$$

Замёрзшая вода расширилась, и увеличение её объёма составило

$$\Delta V_1 = \frac{m}{\rho_{\text{л}}} - \frac{m}{\rho_{\text{в}}} = m \frac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} = \frac{5\nu R(T_0 - T)(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{2\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}}.$$

Пусть поршень сместился на расстояние  $h$ . Тогда  $Sh = \Delta V + \Delta V_1$ , и

$$\begin{aligned} h &= \frac{\nu R(T_0 - T)}{p_0 S} + \frac{5\nu R(T_0 - T)(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{2\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}S} = \\ &= \frac{\nu R(T_0 - T)}{Sp_0} \left( 1 + \frac{5p_0(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{2\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что при подстановке всех численных значений выражение  $\frac{5p_0(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})}{2\lambda\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}}$  оказывается равным приблизительно  $10^{-4}$ , то есть реально

можно им пренебречь и считать, что  $h \approx \frac{\nu R(T_0 - T)}{Sp_0}$ .

**2.44.** В начальный момент времени давление в цилиндре

$$p = \frac{\nu_1 RT_1}{V_1} = \frac{\nu_2 RT_2}{V_2},$$

где  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — число молей газа в каждой из частей цилиндра. Отсюда

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{T_1 V_2}{T_2 V_1}, \quad p(V_1 + V_2) = R(\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2).$$

После выравнивания температур конечная температура  $T'$  и давление  $p'$  связаны соотношением

$$p'(V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2)RT',$$

поскольку суммарный объём сохраняется. Отсюда

$$\frac{p'}{p} = \frac{(\nu_1 + \nu_2)T'}{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2} = \frac{T_2 V_1 + T_1 V_2}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)} T'.$$

Температура  $T'$  находится из закона сохранения энергии: внутренняя энергия идеального газа не зависит от объёма и равна  $U = C_V T$ . Поэтому  $C_{V_1} T_1 + C_{V_2} T_2 = (C_{V_1} + C_{V_2}) T'$ . Отсюда

$$\frac{p'}{p} = \frac{T_2 V_1 + T_1 V_2}{T_1 T_2 (V_1 + V_2)} \cdot \frac{C_{V_1} T_1 + C_{V_2} T_2}{C_{V_1} + C_{V_2}}.$$

**2.45.** В исходном состоянии сила упругости пружины была уравновешена разностью сил давления газов, находящихся по разные стороны от поршня:

$$\frac{\nu RT}{(3l/2) - x} - \frac{\nu RT}{(l/2) + x} = -kx,$$

где  $k$  — жёсткость пружины. Отсюда жёсткость пружины:

$$k = \frac{\nu RT}{x} \left( \frac{1}{(l/2) + x} - \frac{1}{(3l/2) - x} \right).$$

После того, как в поршне проделали отверстие, давления по разные стороны от поршня стали одинаковыми, и удлинение пружины стало равным нулю. При этом потенциальная энергия  $E = kx^2/2$ , которая была запасена в сжатой пружине, пошла на изменение внутренней энергии газа:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot 2\nu R \Delta T.$$

Отсюда искомое изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{kx^2}{6\nu R} = \frac{x}{6} \left( \frac{1}{(l/2) + x} - \frac{1}{(3l/2) - x} \right) T = \frac{2x}{3} \cdot \frac{l - 2x}{(l + 2x)(3l - 2x)} T.$$

**2.46\*.** Обозначим площадь цилиндра через  $S$ , массу поршня через  $m$ , объём цилиндра через  $2V$ , а количество содержащегося в нём газа — через  $2\nu$ . Тогда для газа в исходном состоянии справедливо уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$pV = \nu RT.$$

Пусть после освобождения поршня он перешёл в положение равновесия, опустившись на расстояние  $h$ . При этом температура газа увеличилась на величину  $\Delta T$ , давление в нижней части цилиндра возросло по сравнению с исходным на некоторую величину  $\Delta p_1$ , а в верхней — уменьшилось на некоторую величину  $\Delta p_2$ . После опускания поршня уравнение Менделеева — Клапейрона для порций газа, находящихся под поршнем и над ним, имеет вид:

$$(p + \Delta p_1)(V - Sh) = \nu R(T + \Delta T),$$

$$(p - \Delta p_2)(V + Sh) = \nu R(T + \Delta T).$$

Так как поршень после опускания находится в равновесии, то

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p = \frac{mg}{S}.$$

При опускании поршня изменение его потенциальной энергии в поле силы тяжести  $mgh$  пошло на изменение внутренней энергии газов  $(3/2) \cdot 2\nu \cdot R\Delta T$ . Следовательно,  $mgh = 3\nu R\Delta T$ , откуда

$$h = 3\nu R\Delta T / (mg).$$

Решим полученную систему, состоящую из пяти уравнений. Для этого выразим из первого уравнения объём  $V$ , из четвертого — площадь  $S$ , и преобразуем второе и третье уравнения с учётом пятого:

$$(p + \Delta p_1) \left( \frac{T}{p} - \frac{3\Delta T}{\Delta p} \right) = T + \Delta T, \quad (p - \Delta p_2) \left( \frac{T}{p} + \frac{3\Delta T}{\Delta p} \right) = T + \Delta T.$$

Деля эти уравнения на выражения  $\left( \frac{T}{p} \mp \frac{3\Delta T}{\Delta p} \right)$  и затем вычитая получившиеся уравнения друг из друга, получим:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 + \Delta p_2 &= (T + \Delta T)p\Delta p \left( \frac{1}{T\Delta p - 3p\Delta T} - \frac{1}{T\Delta p + 3p\Delta T} \right) = \\ &= \frac{(T + \Delta T)6p^2\Delta T\Delta p}{T^2(\Delta p)^2 - 9p^2(\Delta T)^2} = \Delta p. \end{aligned}$$

Преобразовывая последнее соотношение, получим квадратное уравнение относительно искомой величины  $\Delta T$ :

$$15p^2(\Delta T)^2 + 6p^2T\Delta T - T^2(\Delta p)^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = 36p^4T^2 + 60p^2T^2(\Delta p)^2 = 36p^4T^2 \left( 1 + \frac{5}{3} \cdot \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2 \right),$$

а интересующий нас положительный корень:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{1}{30p^2} \left( -6p^2T + 6p^2T \sqrt{1 + \frac{5}{3} \cdot \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2} \right) = \\ &= \frac{T}{5} \left( \sqrt{1 + \frac{5}{3} \cdot \left( \frac{\Delta p}{p} \right)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

**2.47.** Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона,

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad \text{или} \quad \rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

На участке 1–2 объём  $V \sim T$ , то есть на этом участке давление  $p = \text{const}$  (процесс изобарный), и с ростом температуры плотность газа падает. Поэтому на  $\rho p$ -диаграмме этот участок изображается вертикальным отрезком 1–2 (см. рис. 2.47). Участок 2–3 — изохора  $V = \text{const}$ , а следовательно,  $\rho = \text{const}$ , и при уменьшении температуры давление падает. Поэтому на  $\rho p$ -диаграмме этот участок изображается горизонтальным отрезком 2–3. Наконец, на участке 3–1 температура  $T$  постоянна — это изотерма. Значит,  $\rho \sim p$ , и на  $\rho p$ -диаграмме этот участок изображается наклонным отрезком 3–1, продолжение которого проходит через начало координат.

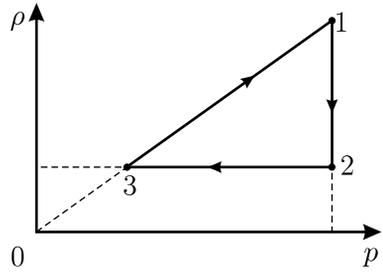


Рис. 2.47.

**2.48.** Рассмотрим процесс медленного нагревания или охлаждения газа под поршнем, который прикреплен к пружине жёсткостью  $k$ . Из условия равновесия поршня имеем  $k(x - x_0) = pS$ , где  $p$  — давление газа,  $x$  — координата нижней поверхности поршня, отсчитанная вверх от дна цилиндра,  $x_0$  соответствует недеформированной пружине. Отсюда с учётом того, что  $V = Sx$ , получаем:  $p = \frac{k}{S^2}(V - Sx_0)$ . Таким образом, графиком процесса на  $pV$ -диаграмме является прямая с угловым коэффициентом  $\frac{\Delta p}{\Delta V} = \frac{k}{S^2}$ , откуда

$$k = S^2 \frac{\Delta p}{\Delta V}.$$

Удлинение пружины  $\Delta x$  в зависимости от  $p$  равно

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{pS}{k} = \frac{p}{S} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}.$$

Из этих формул для участков 1–2, 2–3 и 3–1 циклического процесса с использованием  $pV$ -диаграммы получаем ответ.

Жёсткости пружин:

$$k_{12} = S^2 \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}; \quad k_{23} = S^2 \frac{p_3 - p_2}{V_3 - V_2}; \quad k_{31} = S^2 \frac{p_3 - p_1}{V_3 - V_1}.$$

Удлинения пружин:

$$\begin{aligned}\Delta x_{12}^{\text{нач}} &= \frac{p_1(V_2 - V_1)}{S(p_2 - p_1)}; & \Delta x_{12}^{\text{кон}} &= \frac{p_2(V_2 - V_1)}{S(p_2 - p_1)}; \\ \Delta x_{23}^{\text{нач}} &= \frac{p_2(V_3 - V_2)}{S(p_3 - p_2)}; & \Delta x_{23}^{\text{кон}} &= \frac{p_3(V_3 - V_2)}{S(p_3 - p_2)}; \\ \Delta x_{31}^{\text{нач}} &= \frac{p_3(V_3 - V_1)}{S(p_3 - p_1)}; & \Delta x_{31}^{\text{кон}} &= \frac{p_1(V_3 - V_1)}{S(p_3 - p_1)}.\end{aligned}$$

**2.49\***. Согласно уравнению Менделеева — Клапейрона, концентрация  $n$  атомов гелия определяется его температурой  $T$  и давлением  $p$ :  $n = \frac{p}{kT}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Отсюда следует, что на  $Tp$ -диаграмме из двух прямых, проходящих через начало координат, большей концентрации атомов соответствует прямая, идущая под меньшим углом к оси  $p$ . Поэтому в показанной на рисунке 2.49 диаграмме данного процесса, построенной в приведённых координатах  $\tau = T/T_0$  и  $\pi = p/p_0$ , концентрация атомов максимальна в точке  $B$  и минимальна в точке  $A$ . Из чертежа следует, что  $n_{\max} = \frac{p_B}{kT_B} = \frac{p_0 \operatorname{ctg} \beta}{kT_0}$ , где  $\beta$  — угол наклона касательной  $BO$  к оси  $\pi$  на приведённой диаграмме. Так как  $\triangle ACO = \triangle BCO$ , то угол между касательной  $AO$  и осью  $\tau$  на приведённой диаграмме также равен  $\beta$ , и  $n_{\min} = \frac{p_A}{kT_A} = \frac{p_0 \operatorname{tg} \beta}{kT_0}$ .

Поэтому искомое отношение:  $x = \frac{n_{\min}}{n_{\max}} = \operatorname{tg}^2 \beta$ .

Минимальная приведённая температура  $\tau_{\min} = T_m/T_0$  гелия и радиус  $r$  окружности, соответствующей на диаграмме данному процессу, связаны соотношением  $r = 1 - \tau_{\min}$ . Так как  $\triangle CBO$  прямоугольный и его гипотенуза  $OC = \sqrt{2}$ , то  $\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{2}}$ . Кроме того, из диаграммы

видно, что  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ . Учитывая всё это, получаем:

$$x = \operatorname{tg}^2 \beta = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \left( \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \right)^2 = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} =$$

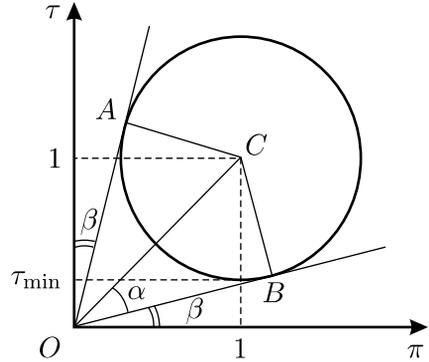


Рис. 2.49.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - r\sqrt{2 - r^2}}{1 + r\sqrt{2 - r^2}} = \frac{1 - (1 - \tau_{\min})\sqrt{2 - (1 - \tau_{\min})^2}}{1 + (1 - \tau_{\min})\sqrt{2 - (1 - \tau_{\min})^2}} = \\
 &= \frac{1 - (1 - \tau_{\min})\sqrt{1 + 2\tau_{\min} - \tau_{\min}^2}}{1 + (1 - \tau_{\min})\sqrt{1 + 2\tau_{\min} - \tau_{\min}^2}}.
 \end{aligned}$$

**2.50.** Процесс опускания поршня на расстояние  $\Delta x_1$  происходит быстро, и поэтому может считаться адиабатическим. Кроме того, поскольку  $\Delta x_1 \ll H$ , то давление  $p$  газа при этом изменилось мало, и его можно считать постоянным. Поэтому первое начало термодинамики для этого процесса можно записать в виде:  $C_V \nu \Delta T \approx pS \Delta x_1$ , где  $\nu$  — число молей газа,  $S$  — площадь поршня,  $\Delta T$  — увеличение температуры газа,  $C_V$  — искомая молярная теплоёмкость.

При дальнейшем опускании поршня происходит остывание газа до первоначальной температуры  $T$  при постоянном давлении  $p$ . Из уравнения Менделеева — Клапейрона получаем:

$$\frac{S(H - \Delta x_1)}{T + \Delta T} = \frac{S(H - \Delta x_1 - \Delta x_2)}{T}.$$

Отсюда  $\Delta x_2/H \approx \Delta T/T$ , поскольку  $\Delta x_1, \Delta x_2 \ll H$  и  $\Delta T \ll T$ .

Из записанных соотношений и уравнения Менделеева — Клапейрона  $pSH = \nu RT$  следует, что

$$C_V \approx \frac{pS \Delta x_1}{\nu \Delta T} = \frac{pS}{\nu T} \cdot \frac{T}{\Delta T} \cdot \Delta x_1 \approx \frac{pSH}{\nu T} \cdot \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} R = \frac{5}{2} R.$$

Следовательно, идеальный газ в цилиндре — двухатомный.

**2.51\*.** Поместим начало координатной оси  $X$  в место трубки, соответствующее положению равновесия шарика. Тогда уравнение движения шарика будет иметь вид:  $ma = S \Delta p$ , где  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$  — ускорение шарика,  $\Delta p$  — отклонение от равновесного давления  $p_0 + \frac{mg}{S}$ , возникающее в бутылке при смещении шарика на расстояние  $x$  от положения равновесия. Найдём величину  $\Delta p$ , считая, что процесс колебаний шарика происходит без теплообмена газа в бутылке с внешней средой, то есть является адиабатическим.

Так как теплообмен отсутствует, то первое начало термодинамики, записанное для газа, имеет вид:  $\Delta U = -p \Delta V$ , где  $\Delta U$  и  $\Delta V$  — изменения внутренней энергии и объёма газа при смещении шарика на расстояние  $x$ . Для одноатомного газа, с учётом уравнения Менделеева —

Клапейрона,  $U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV$ . Поэтому  $\Delta U = \frac{3}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p$ , и подставляя  $\Delta U$  в первое начало термодинамики, получаем:  $\Delta p = -\frac{5}{3}p\frac{\Delta V}{V}$ .

Подставим найденное  $\Delta p$  в уравнение движения шарика, учитывая, что  $\Delta V = Sx$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{5S^2px}{3mV} = -\frac{5S^2}{3mV} \left( p_0 + \frac{mg}{S} \right) x.$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение гармонических колебаний, квадрат круговой частоты которых равен коэффициенту при  $x$  в правой части:  $\omega_0^2 = \frac{5S^2}{3mV} \left( p_0 + \frac{mg}{S} \right)$ . Отсюда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{3mV}{5S^2(p_0 + (mg/S))}}.$$

Заметим, что числовой коэффициент, входящий в выражение для  $\Delta p$ , представляет собой показатель адиабаты  $\gamma$ , который для одноатомного газа равен  $5/3$ . Его можно выразить из полученного нами ответа задачи:  $\gamma = \frac{4\pi^2mV}{T^2S^2(p_0 + (mg/S))}$ . Видно, что в правую часть

последней формулы входят легко и весьма точно измеряемые величины — масса шарика, объём бутылки, площадь поперечного сечения трубки, период колебаний шарика и атмосферное давление. Таким образом, описанный в условии задачи прибор можно использовать для измерения показателя адиабаты у газов (не обязательно одноатомных), заполняя бутылку исследуемым газом и измеряя период колебаний шарика. Этот метод был предложен в 1928 г. немецким физиком Рухардтом (E. Rüchardt) и носит его имя. Современные модификации метода Рухардта позволяют измерять показатель адиабаты у различных газов с точностью до десятых долей процента.

**2.52.** При увеличении давления на поршень газ в левой части цилиндра сжимается, и вся теплоизолированная система нагревается. При этом температура газа в левой и правой частях цилиндра будет одинакова, поскольку перегородка теплопроводящая, а процесс медленный. В этом процессе газ в левой части цилиндра будет отдавать тепло газу в правой части цилиндра, так как над газом в правой части работа не совершается, и его температура  $T$  может подниматься только за счёт теплопередачи. Для нагрева идеального одноатомного газа массой  $m_2$  на температуру  $\Delta T$  необходимо затратить количество теплоты

$\Delta Q_2 = \frac{3}{2} \frac{m_2}{\mu} R \Delta T$ , где  $\mu$  — молярная масса газа. Это тепло отводится

от левой части газа массой  $m_1$ :  $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2 = -\frac{3}{2} \frac{m_2}{\mu} R \Delta T$ . Поэтому теплоёмкость газа в левой части цилиндра в рассматриваемом процессе отрицательна и равна  $C = \frac{\Delta Q_1}{\Delta T} = -\frac{3}{2} \frac{m_2}{\mu} R$ , а молярная теплоёмкость равна

$$C_\mu = \frac{C}{m_1/\mu} = -\frac{3}{2} \frac{m_2}{m_1} R.$$

Теплоёмкость получилась отрицательной, потому что в данном процессе газ в левой части цилиндра отдаёт тепло, но его температура при этом повышается.

**2.53.** В процессе 1–2 по условию  $p \sim T$ . Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что  $V = RT/p = \text{const}$ . Таким образом, процесс 1–2 является изохорным, и для одного моля идеального одноатомного газа теплоёмкость  $C_V = 3R/2$ .

В процессе 2–3 по условию  $p \sim \sqrt{T}$ . Поэтому  $V = RT/p \sim \sqrt{T}$ , и таким образом,  $p \sim V$ . Изобразив этот процесс на  $pV$ -диаграмме (см. рис. 2.53), заметим, что газ в нём поглощает тепло. Это тепло идёт на изменение внутренней энергии газа  $\Delta U$  и совершение им работы  $\Delta A$ . Обозначим давления и объёмы в состояниях 2 и 3 через  $(p_2, V_2)$  и  $(p_3, V_3)$ , соответственно. Тогда количество теплоты  $\Delta Q$ , которое поглощает газ в процессе 2–3, можно найти из первого начала термодинамики:

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \Delta U + \Delta A = \frac{3}{2} R(T_3 - T_2) + \frac{1}{2} (p_3 + p_2)(V_3 - V_2) = \\ &= \frac{3}{2} R(T_3 - T_2) + \frac{1}{2} (RT_3 - RT_2 + p_2 V_3 - p_3 V_2). \end{aligned}$$

При преобразовании выражения в скобках учтено, что, в соответствии с уравнением Менделеева — Клапейрона,  $p_2 V_2 = RT_2$  и  $p_3 V_3 = RT_3$ .

Поскольку изображающая процесс прямая проходит через начало координат диаграммы, то  $p_2/V_2 = p_3/V_3$ . С учётом этого выражение для количества теплоты принимает вид:  $\Delta Q = 2R(T_3 - T_2)$ . Таким образом, мы доказали, что количество теплоты, сообщённой газу в данном процессе, пропорционально разности температур, которые газ имеет в начальном и конечном состояниях, и коэффициент пропорциональ-

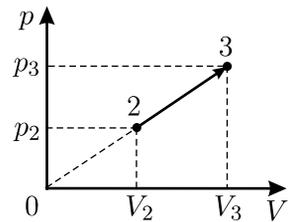


Рис. 2.53.

ности равен  $2R$ . Следовательно, молярная теплоёмкость газа в процессе 2–3 постоянна и равна  $2R$ .

**2.54.** Суммарное количество тепла, полученное и отданное газом, может быть найдено из первого начала термодинамики:  $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ . Обозначим через  $\nu$  число молей газа, изменение его температуры за время процесса — через  $\Delta T$ , и найдём изменение внутренней энергии газа  $\Delta U$  и совершённую им работу  $\Delta A$ , которая равна площади под графиком на  $pV$ -диаграмме:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{3}{2}p_1(V_2 - V_1),$$

$$\Delta A = p_1(V_2 - V_1) - \frac{1}{2}\pi(p_1 - p_0)\frac{V_2 - V_1}{2}.$$

Подставляя эти выражения в первое начало термодинамики, получим ответ:

$$\Delta Q = \left( \left( \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4} \right) p_1 + \frac{\pi}{4} p_0 \right) (V_2 - V_1).$$

Отметим, что при вычислении работы площадь полуокружности следует искать, перемножая величины, имеющие соответствующие размерности. Это можно понять, представив, что мы изменили на  $pV$ -диаграмме масштаб одной из осей. Тогда график, изображающий процесс, превратится из полуокружности в участок эллипса, и при вычислении площади нужно будет вместо формулы  $S = \pi r^2$ , где  $r$  — радиус окружности, использовать формулу  $S = \pi ab$ , где  $a$  и  $b$  — размеры полуосей эллипса. В этом случае размерность будет учтена автоматически.

**2.55.** Для того, чтобы жидкость вытеснялась из трубки медленно, газ также нужно нагревать очень медленно, регулируя количество подводимого тепла так, чтобы вытекающая жидкость в течение всего процесса не приобретала кинетическую энергию. При этом всё сообщаемое газу тепло будет уходить на изменение его внутренней энергии и на совершение им работы при расширении.

В начальном состоянии газ в сосуде находится под атмосферным давлением  $p_0$  и имеет некоторую температуру  $T_0$ . Пренебрежём объёмом и высотой столба жидкости, находящейся в полукруглом участке трубки. Тогда длина трубки равна  $V_0/S$ . Следовательно, в конечном состоянии объём газа увеличится до величины  $V_1 = 3V_0/2$ , его давление станет равно  $p_1 = p_0 + \rho g \frac{V_0/S}{2}$ , а температура изменится до неко-

торой величины  $T$ . Запишем уравнение Клапейрона для начального и конечного состояний газа:

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{\rho g V_0}{2S}\right) \cdot \frac{3V_0}{2}}{T}.$$

Отсюда, с учётом уравнения состояния  $p_0 V_0 = \nu R T_0$ , получим:

$$T - T_0 = \frac{T_0}{p_0 V_0} \left( \frac{3p_0 V_0}{2} + \frac{3\rho g V_0^2}{4S} - p_0 V_0 \right) = \frac{1}{\nu R} \left( \frac{p_0 V_0}{2} + \frac{3\rho g V_0^2}{4S} \right).$$

Таким образом, в течение процесса температура газа увеличится, и его внутренняя энергия возрастёт на величину

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R (T - T_0) = \frac{3p_0 V_0}{4} + \frac{9\rho g V_0^2}{8S}.$$

Найдём теперь работу, совершаемую газом при расширении. Она пойдёт на увеличение потенциальной энергии жидкости и на совершение работы против силы атмосферного давления. Примем уровень основания трубки за начало отсчёта потенциальной энергии. Тогда в начальном состоянии потенциальная энергия находящейся в трубке жидкости равна

$$E_1 = \rho V_0 g \cdot \frac{V_0}{4S}.$$

После того, как половина жидкости вытечет из трубки (а это означает, что она будет вытеснена на высоту  $\frac{V_0}{2S}$ ), потенциальная энергия жидкости станет равна

$$E_2 = \frac{\rho V_0}{2} g \frac{V_0/S}{4} + \frac{\rho V_0}{2} g \frac{V_0/S}{2} = \frac{3\rho g V_0^2}{8S}.$$

Работа против постоянной силы атмосферного давления, совершённая при вытеснении жидкости из трубки, равна  $A_0 = p_0 \frac{V_0}{2}$ . Следовательно, полная работа, совершаемая газом при расширении, равна

$$\Delta A = E_2 - E_1 + A_0 = \frac{3\rho g V_0^2}{8S} - \frac{\rho g V_0^2}{4S} + \frac{p_0 V_0}{2} = \frac{\rho g V_0^2}{8S} + \frac{p_0 V_0}{2}.$$

Искомое количество теплоты теперь можно определить при помощи первого начала термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A = \frac{5}{4} V_0 \left( p_0 + \frac{\rho g V_0}{S} \right).$$

**2.56\*.** Нарисуем  $pV$ -диаграмму и обозначим состояния с температурами  $T_1$  и  $T_2$  точками «1» и «2» соответственно (см. рис. 2.56). Проведём через эти точки изотермы и адиабаты и обозначим точки их пересечения «3» и «4». Из условия задачи следует, что процесс  $1 \rightarrow 2$ , в течение которого температура не убывает, а тепло не отводится от газа, возможен. Это означает, что точка 2 лежит справа от адиабаты, проходящей через точку 1. При этом график произвольного процесса  $1 \rightarrow 2$ , для которого, однако, выполняются условия задачи, лежит внутри цикла  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

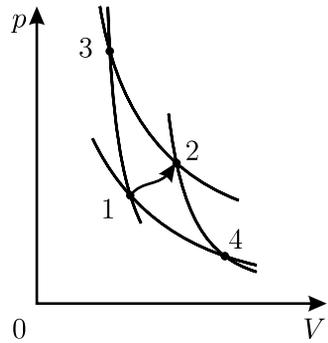


Рис. 2.56.

Обозначим через  $Q_{12}$ ,  $Q_{132}$  и  $Q_{142}$  количества теплоты, сообщаемые газу в процессах  $1 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$  соответственно. Рассмотрим процесс  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . В нём газ сначала получает тепло  $Q_{132}$ , потом отдаёт тепло  $Q_{12}$ , совершая при этом работу  $Q_{132} - Q_{12}$ , которая равна площади фигуры, ограниченной на диаграмме линиями «1-3», «3-2» и «2-1». Так как эта площадь неотрицательна, то  $Q_{132} \geq Q_{12}$ .

Рассмотрим аналогичным образом процесс  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ . Работа, которую совершает газ в этом процессе, также неотрицательна и равна  $Q_{12} - Q_{142}$ , откуда  $Q_{12} \geq Q_{142}$ .

Из полученных неравенств имеем:

$$Q_{142} \leq Q_{12} \leq Q_{132}.$$

Поскольку процесс  $1 \rightarrow 2$  — произвольный (из числа удовлетворяющих условию задачи), то из данного неравенства следует, что минимальное количество теплоты  $Q_1$ , которое может передаваться газу в таком процессе, равно  $Q_{142}$ . Максимальное же количество теплоты  $Q_2$ , которое может передаваться газу в данном процессе, из тех же соображений равно  $Q_{132}$ .

Таким образом, для того, чтобы получить ответ задачи, нужно рассмотреть цикл Карно  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ . Его КПД равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_{142}}{Q_{132}} = 1 - \frac{T_1}{T_2},$$

откуда, с учётом того, что  $Q_{142} = Q_1$  и  $Q_{132} = Q_2$ , находим:

$$Q_{\max} = Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1.$$

**2.57\***. Прежде всего, отметим, что хотя получаемое газом суммарное количество теплоты равно нулю и конечная температура газа равна начальной, газ не обязательно вернётся в прежнее состояние, то есть точки 1 и 7 на диаграмме состояния не обязательно совпадут. Поэтому на  $pV$ -диаграмме график этого процесса может быть и незамкнутым (см. рис. 2.57).

График процесса на этой диаграмме состоит из изотермы 1–2 (температура  $T_1$ , газ получает количество теплоты  $Q_1$ ), адиабаты 2–3 (температура газа возрастает от  $T_1$  до  $T_3$ , теплообмен отсутствует), изотермы 3–4 (температура  $T_3$ , газ получает количество теплоты  $Q_3$ ), адиабаты 4–5 (температура газа убывает от  $T_3$  до  $T_2$ ), изотермы 5–6 (температура  $T_2$ , газ отдаёт количество теплоты  $Q_1 + Q_3$ ) и адиабаты 6–7 (температура газа убывает от  $T_2$  до  $T_1$ ).

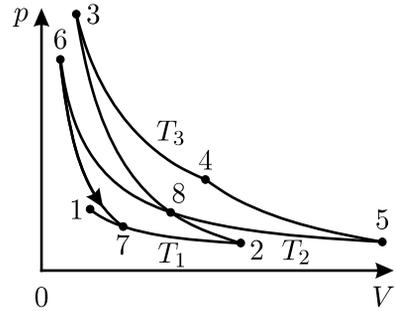


Рис. 2.57.

Обозначим на графике цифрой 8 точку пересечения адиабаты 2–3 и изотермы 5–6. Тогда замкнутый процесс  $8 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 8$  будет являться циклом Карно. В соответствии с формулой для КПД такого цикла, количество теплоты, отданное газом на изотермическом участке 5–8, равно  $Q_3 \frac{T_2}{T_3}$ . Следовательно, на изотермическом участке 8–6 газ

отдаёт количество теплоты, равное  $Q_1 + Q_3 - Q_3 \frac{T_2}{T_3}$ .

При  $V_7 > V_1$  процесс  $6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 6$  замкнут и является циклом Карно, проводимым в «обратную» сторону, то есть холодильным циклом. При этом на участке 7–2 газ получает количество теплоты, равное  $\frac{T_1}{T_2} \left( Q_1 + Q_3 - Q_3 \frac{T_2}{T_3} \right)$ , и в рассматриваемом случае замкнутого цикла оно должно быть меньше  $Q_1$ . Следовательно, объём газа увеличивается ( $V_7 > V_1$ ), если

$$\frac{Q_1 + Q_3}{T_2} - \frac{Q_3}{T_3} < \frac{Q_1}{T_1}, \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} > 0.$$

Далее,  $V_7 = V_1$ , если

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} = 0,$$

и  $V_7 < V_1$  при

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} < 0.$$

**2.58\***. Пусть  $v$  — скорость движения катера относительно воды,  $u$  — скорость выбрасываемой из движителя воды относительно катера,  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$  — масса воды, проходящей через движитель в единицу времени. Так как катер движется вперёд, то, очевидно,  $u > v$ , то есть попавшая в движитель вода ускоряется. Поэтому полезная мощность, развиваемая движителем, связана с созданием силы тяги

$$F_T = \Delta m \frac{u - v}{\Delta t} = \mu(u - v).$$

и равна:

$$N_{\text{пол}} = F_T v = \mu(u - v)v.$$

При этом мощность, затрачиваемая движителем, равна изменению кинетической энергии воды, проходящей через него в единицу времени:

$$N_{\text{зат}} = \frac{\mu(u^2 - v^2)}{2}.$$

Тогда для КПД движителя имеем:

$$\eta_{\text{движ}} = \frac{N_{\text{пол}}}{N_{\text{зат}}} = \frac{2v}{u + v}.$$

С учётом уравнения неразрывности струи воды, проходящей через движитель,

$$vS_1 = uS_2,$$

для КПД движителя окончательно получаем:

$$\eta_{\text{движ}} = \frac{2S_2}{S_1 + S_2}.$$

Поскольку требуется найти нижнюю границу максимальной температуры в цилиндрах двигателя, то его КПД может быть оценен как КПД двигателя, работающего по циклу Карно:

$$\eta_{\text{двиг}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

КПД двигательной установки в целом равен произведению КПД двигателя и движителя:

$$\eta = \eta_{\text{двиг}} \cdot \eta_{\text{движ}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \frac{2S_2}{S_1 + S_2}.$$

Отсюда искомая температура:

$$T_1 = \frac{2T_2S_2}{2S_2 - \eta(S_1 + S_2)}.$$

**2.59\***. Рассмотрим сначала исходный цикл и выразим сообщаемое газу количество теплоты через другие параметры системы. Из первого начала термодинамики ( $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ ) следует, что теплота сообщается газу на участках 1–2 и 2–3. Значит, количество теплоты, сообщённое газу за один цикл:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2).$$

Выразим температуру  $T_2$  через  $T_1$ . Для этого рассмотрим участки 1–2 и 3–4 и запишем для них закон Шарля:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4},$$

причём  $p_2 = p_3$ ,  $p_1 = p_4$ ,  $T_2 = T_4$ . Отсюда последовательно получаем:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \frac{p_1}{T_2} = \frac{p_2}{T_3}, \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}, \quad T_2 = \sqrt{T_1 T_3},$$

откуда с учётом того, что  $T_3 = 16T_1$ , находим, что  $T_2 = 4T_1$ . Теперь количество теплоты  $Q$  также можно выразить через  $T_1$ :

$$Q = \frac{3}{2}\nu R(4T_1 - T_1) + \frac{5}{2}\nu R(16T_1 - 4T_1) = \frac{69}{2}\nu RT_1.$$

Рассмотрим далее цикл 2–3–4–A–B–C–2. Теплота  $Q_1$  сообщается газу на участках C–2, 2–3 и A–B. Очевидно, что  $Q_1 = Q - Q_{1C} + Q_{AB}$ , где  $Q_{1C} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_1)$ , а  $Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A)$ . Для того, чтобы сравнить  $Q_1$  и  $Q$ , выразим  $T_A$ ,  $T_B$  и  $T_C$  через  $T_1$ . По аналогии с циклом 1–2–3–4 и с учётом того, что  $T_B = T_2 = 4T_1$ , можно утверждать, что в цикле 1–C–B–A–1

$$T_A = \sqrt{T_1 T_B} = \sqrt{T_1 T_2} = 2T_1 = T_C.$$

Подставив найденные значения температур в выражение для  $Q_1$ , получим:

$$Q_1 = \frac{69}{2}\nu RT_1 - \frac{3}{2}\nu R(2T_1 - T_1) + \frac{3}{2}\nu R(4T_1 - 2T_1) = \frac{72}{2}\nu RT_1.$$

Учитывая, что  $\nu RT_1 = \frac{2}{69}Q$ , приходим к окончательному ответу:

$$Q_1 = \frac{24}{23}Q.$$

**2.60\***. Обозначим давления, объёмы и температуры, которые газ имеет в состояниях 1, 2 и 3, так, как показано на рисунке 2.60. Тогда для каждого из этих состояний можно записать уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$\begin{aligned} p_1 V_1 &= \nu RT_1, \\ p_2 V_2 &= \nu RT_2, \\ p_3 V_3 &= \nu RT_3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\nu$  — количество молей газа. Кроме того, из условия задачи следует, что справедливы соотношения:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} = \frac{p_3}{V_3}, \quad (2)$$

$$V_2 = \frac{V_1 + V_3}{2}, \quad (3)$$

$$p_2 = \frac{p_1 + p_3}{2}. \quad (4)$$

Сначала получим несколько вспомогательных формул. Из (1) и (2) следует:

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{\nu RT_1}{V_1^2} = \frac{p_2}{V_2} = \frac{\nu RT_2}{V_2^2} = \frac{p_3}{V_3} = \frac{\nu RT_3}{V_3^2}.$$

Отсюда:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad \frac{V_3}{V_1} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}. \quad (5)$$

Деля правую и левую части (3) на  $V_1$ , с учётом двух последних уравнений имеем:

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \frac{1 + (V_3/V_1)}{2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{\frac{T_3}{T_1}} \right),$$

откуда

$$T_2 = \frac{1}{4} \left( \sqrt{T_1} + \sqrt{T_3} \right)^2. \quad (6)$$

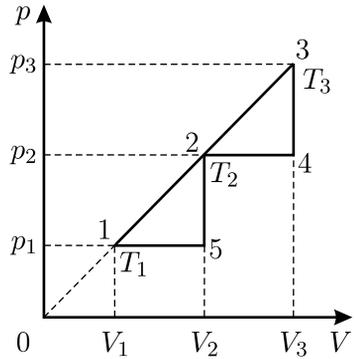


Рис. 2.60.

Теперь приступим к нахождению КПД. В данном цикле газ получает теплоту от нагревателя на участке 1–2–3. В соответствии с первым началом термодинамики:

$$\Delta Q_{\text{н}} = \Delta U_{13} + \Delta A_{123} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 + p_3)(V_3 - V_1).$$

С учётом (1) и (2) это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta Q_{\text{н}} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \frac{1}{2}(p_1 V_3 - \nu RT_1 + \nu RT_3 - p_3 V_1) = 2\nu R(T_3 - T_1). \quad (7)$$

Далее найдём количество теплоты, которое газ отдаёт холодильнику на участке 3–4–2–5–1. Это количество теплоты равно (по абсолютной величине)

$$\Delta Q_{\text{х}} = \Delta U_{13} + \Delta A_{15243} = \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + p_1(V_2 - V_1) + p_2(V_3 - V_2).$$

С учётом (1) и (5) выражение для  $\Delta Q_{\text{х}}$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{х}} &= \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + p_1 V_2 - \nu RT_1 + p_2 V_3 - \nu RT_2 = \\ &= \frac{3}{2}\nu R(T_3 - T_1) + \nu RT_1 \frac{V_2}{V_1} - \nu RT_1 + \nu RT_2 \frac{V_3}{V_2} - \nu RT_2 = \\ &= \frac{\nu R}{2}(3T_3 - 5T_1 - 2T_2 + 2\sqrt{T_1 T_2} + 2\sqrt{T_2 T_3}). \end{aligned}$$

Наконец, последнее выражение, с учётом (6), приводится к виду:

$$\Delta Q_{\text{х}} = \frac{\nu R}{4}(7T_3 - 9T_1 + 2\sqrt{T_1 T_3}). \quad (8)$$

КПД данного цикла можно найти, используя (7) и (8):

$$\eta = 1 - \frac{\Delta Q_{\text{х}}}{\Delta Q_{\text{н}}} = 1 - \frac{\nu R(7T_3 - 9T_1 + 2\sqrt{T_1 T_3})}{4 \cdot 2\nu R(T_3 - T_1)} = \frac{T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3}{8(T_3 - T_1)}.$$

Заметим, что  $T_3$  и  $T_1$  — это максимальная и минимальная температуры газа в данном цикле. Поскольку по условию задачи  $T_3/T_1 = n$ , то

$$\eta = \frac{1 - 2\sqrt{T_3/T_1} + T_3/T_1}{8((T_3/T_1) - 1)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1 - 2\sqrt{n} + n}{n - 1} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{(\sqrt{n} - 1)^2}{n - 1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}.$$

При  $n = 4$  получаем  $\eta = 1/24 \approx 4,17\%$ .

Заметим, что при вычислении КПД можно вместо количества теплоты  $\Delta Q_x$  искать работу  $A$ , совершаемую газом в данном цикле. Она численно равна площади фигуры 1–2–3–4–2–5–1:

$$A = \frac{\nu R}{4}(T_1 - 2\sqrt{T_1 T_3} + T_3).$$

Однако, этот способ решения задачи несколько более трудоёмок.

**2.61.** Введём ряд вспомогательных обозначений для объёма, давления и температуры газа (см. рис. 2.61). По определению, КПД цикла есть отношение полезной работы  $A$ , совершаемой рабочим телом, к количеству теплоты  $Q$ , отобранному рабочим телом от нагревателя. Совершённая газом работа численно равна площади цикла:

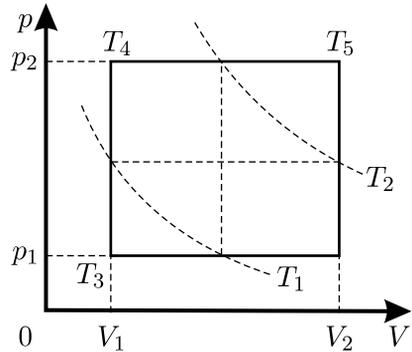


Рис. 2.61.

$$\begin{aligned} A &= (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = \\ &= p_2 V_2 - p_2 V_1 - p_1 V_2 + p_1 V_1 = p_1 V_1 \left( \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} - \frac{p_2}{p_1} - \frac{V_2}{V_1} + 1 \right). \end{aligned}$$

Из первого начала термодинамики следует, что в нашем случае газ поглощал тепло на левой изохоре и верхней изобаре. В изохорическом процессе газ не совершал работы, и всё поглощённое им тепло  $Q_1$  шло на увеличение внутренней энергии газа, которую можно выразить через введённые вспомогательные значения давлений и объёмов, воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона:

$$Q_1 = \frac{3}{2} \nu R (T_4 - T_3) = \frac{3}{2} (p_2 - p_1) V_1.$$

В изобарическом процессе часть полученного газом тепла уходила на увеличение внутренней энергии газа, а за счёт остатка совершалась работа:

$$Q_2 = \frac{3}{2} \nu R (T_5 - T_4) + p_2 (V_2 - V_1) = \frac{5}{2} p_2 (V_2 - V_1).$$

Таким образом, полное количество теплоты, полученное газом от нагревателя, равно

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 + \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1) = \\ &= \frac{3}{2}p_1V_1 \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + \frac{5}{2}p_2V_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для газа в состояниях, соответствующих серединам изохор и изобар:

$$\begin{aligned} \frac{p_1 + p_2}{2}V_1 &= \nu RT_1, & \frac{p_1 + p_2}{2}V_2 &= \nu RT_2, \\ p_1 \frac{V_1 + V_2}{2} &= \nu RT_1, & p_2 \frac{V_1 + V_2}{2} &= \nu RT_2. \end{aligned}$$

Деля друг на друга уравнения, записанные в каждой из строк, получим:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Используя эти соотношения, найдём КПД цикла:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{A}{Q} = \frac{p_1V_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \frac{V_2}{V_1} - \frac{p_2}{p_1} - \frac{V_2}{V_1} + 1 \right)}{\frac{3}{2}p_1V_1 \left( \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + \frac{5}{2}p_2V_1 \left( \frac{V_2}{V_1} - 1 \right)} = \\ &= \frac{\left( \frac{T_2}{T_1} \right)^2 - 2\frac{T_2}{T_1} + 1}{\frac{3}{2} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \frac{5}{2} \frac{T_2}{T_1} \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)} = \frac{\frac{T_2}{T_1} - 1}{\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \frac{T_2}{T_1}} = \frac{2(T_2 - T_1)}{3T_1 + 5T_2}. \end{aligned}$$

**2.62.** В рассматриваемом процессе газ отдаёт количество теплоты  $Q^-$  на участке 2–3 и получает количество теплоты  $Q^+$  на участках 1–2 и 3–4. На участке 4–1 над рабочим телом совершается работа без теплообмена с внешней средой. Обозначим через  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) температуры в состояниях с номерами  $i$ . Из первого начала термодинамики, поскольку газ одноатомный, с учётом уравнения Менделеева — Клапейрона получаем:

$$Q^- = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_3) = \frac{3}{2}V_2(p_1 - p_3),$$

$$\begin{aligned}
 Q^+ &= \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + p_1(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_3) + p_3(V_4 - V_2) = \\
 &= \frac{5}{2}p_1(V_2 - V_1) + \frac{5}{2}p_3(V_4 - V_2).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\eta = 1 - \frac{Q^-}{Q^+} = 1 - \frac{3V_2(p_1 - p_3)}{5(p_1(V_2 - V_1) + p_3(V_4 - V_2))} \approx 0,133 = 13,3\%.$$

**2.63\***. В данном процессе газ получает тепло на участках  $AB$  и  $BC$ , а отдаёт тепло на участках  $CD$  и  $DA$  (см. рис. 2.63). Используя первое начало термодинамики и уравнение Менделеева — Клапейрона, найдём количество теплоты, полученное газом на участках  $AB$  и  $BC$ :

$$Q_{AB} = \frac{3}{2}\nu R(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1,$$

$$Q_{BC} = \frac{3}{2}\nu R(T_C - T_B) + p_2(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1).$$

Работа, совершаемая газом за цикл, равна:

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Отсюда для величины  $1/\eta$ , где  $\eta$  — КПД, имеем:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\eta} &= \frac{Q_{AB} + Q_{BC}}{A} = \frac{\frac{3}{2}(p_2 - p_1)V_1 + \frac{5}{2}p_2(V_2 - V_1)}{(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)} = \\
 &= \frac{\frac{3}{2}\Delta p V_1 + \frac{5}{2}\Delta V p_1 + \frac{5}{2}\Delta p \Delta V}{\Delta p \Delta V} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \frac{V_1}{\Delta V} + \frac{5}{2} \frac{p_1}{\Delta p}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta p = p_2 - p_1$ ,  $\Delta V = V_2 - V_1$ . Видно, что максимальное значение КПД (минимальное значение  $1/\eta$ ) достигается при  $V_1 \ll \Delta V$ ,  $p_1 \ll \Delta p$ . Графически это означает, что точка  $A$  цикла прижимается к началу координат  $pV$ -диаграммы. В пределе получаем:

$$\frac{1}{\eta} \rightarrow \frac{5}{2}, \quad \text{и} \quad \eta_{\max} = \frac{2}{5} = 40\%.$$

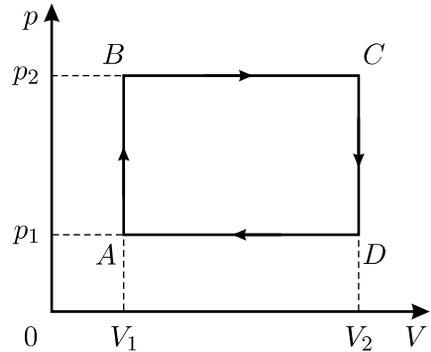


Рис. 2.63.

**2.64\*.** Изобразим цикл на  $pV$ -диаграмме (см. рис. 2.64). При нагрузке и разгрузке поршня описанная система не обменивается теплотой с окружающей средой. Значит, процессы нагрузки (1–2) и разгрузки (3–4) являются адиабатическими. При испарении и конденсации воды её температура остаётся постоянной. Значит, процессы испарения (2–3) и конденсации (4–1) являются изотермическими. Таким образом, рассматриваемый цикл представляет собой не что иное, как цикл Карно, КПД которого равен

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{T' - T}{T'} \approx \frac{\Delta T}{T}.$$

Здесь  $T$  и  $T'$  — температуры кипения воды при атмосферном и повышенном давлениях соответственно,  $A$  — работа, которую совершает рабочее тело (вода и пар) за цикл,  $Q^+$  — теплота, сообщаемая системе. При написании приближённого

равенства использовался тот факт, что  $\Delta T = T' - T$  мало и, следовательно,  $T' \approx T$ .

Пусть в начале процесса вода имела объём  $V_{ж}$ , а после испарения пар занимал объём  $V_{п}$ . Тогда, учитывая, что  $V_{ж} \ll V_{п}$ , для совершаемой в цикле работы получим:

$$A \approx \Delta p(V_{п} - V_{ж}) \approx \Delta p V_{п},$$

где  $\Delta p = Mg/S$ . Заметим, что  $\Delta p \approx 10^4 \text{ Н/м}^2 \approx 0,1 \text{ атм} \ll p_0 = 1 \text{ атм}$ . Именно это обстоятельство даёт нам возможность считать цикл, изображённый на  $pV$ -диаграмме, почти прямоугольным. Принимая во внимание, что сообщаемая системе теплота  $Q^+$  расходуется на испарение воды, то есть  $Q^+ = Qm$ , и что  $V_{п} = mv_{п}$ , для искомой разности температур  $\Delta T$  окончательно находим:

$$\Delta T \approx \frac{TA}{Q^+} = \frac{TMgv_{п}}{SQ} \approx 2,8 \text{ К}.$$

**2.65.** Поскольку давление в точке  $A$  меньше давления насыщенных паров при температуре  $T_A = 300 \text{ К}$ , то всё вещество находится в газообразном состоянии. Если бы вещество не конденсировалось, то давление  $p$  и температура  $T$  этого вещества в соответствии с уравнением

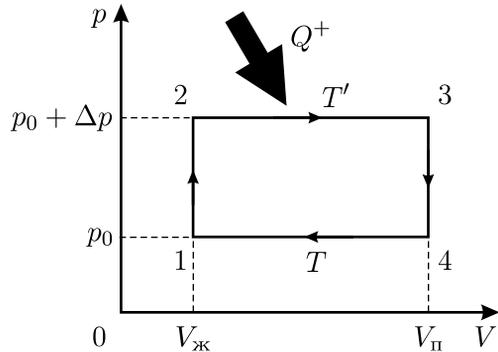


Рис. 2.64.

Менделеева — Клапейрона были бы связаны прямо пропорциональной зависимостью  $p = \beta T$ . В условиях, когда вещество из пара переходит в конденсированное состояние, линейная зависимость давления от температуры при понижении температуры справедлива только до момента начала конденсации, который соответствует точке пересечения графика, приведённого на рисунке 2.65, с прямой линией  $p = \beta T$ , проходящей через начало координат и точку  $A$ .

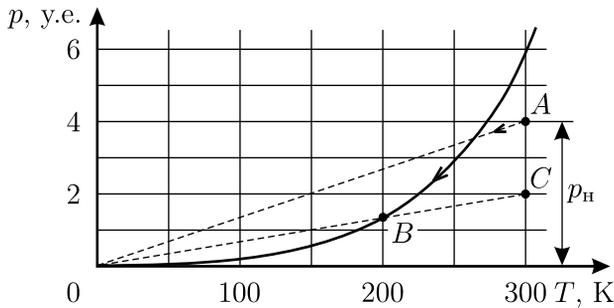


Рис. 2.65.

Если, как это требуется по условию задачи, сконденсировалась половина имеющегося вещества, то это состояние будет соответствовать некоторой точке  $B$  на кривой зависимости давления насыщенного пара от температуры. Эту точку можно найти путём следующих рассуждений. Если всё сконденсировавшееся вещество удалить, то давление в системе останется равным давлению насыщенного пара в точке  $B$ . Если теперь нагревать оставшийся пар до начальной температуры  $T_A = 300$  К, то его давление, очевидно, будет линейно возрастать до величины вдвое меньшей, чем было начальное давление  $p_n$ , поскольку количество вещества в системе уменьшилось вдвое. Отсюда следует графический способ нахождения температуры, соответствующей точке  $B$ . Поставим на  $pT$ -диаграмме вспомогательную точку  $C$ , соответствующую начальной температуре  $T_A = 300$  К и давлению  $p_n/2$ . Проведём через точку  $C$  и начало координат прямую. Эта прямая пересечёт график зависимости давления насыщенного пара от температуры в искомой точке  $B$ , соответствующей в нашем случае температуре  $T \approx 200$  К.

**2.66.** Плотность насыщенных паров воды при атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па и температуре  $T_0 = 100$  °С равна  $\rho_0 = \mu p_0 / (RT) \approx 580$  г/м<sup>3</sup>. Здесь  $\mu = 18$  г/моль — молярная масса воды. Поэтому в начальном состоянии в цилиндре объёмом  $V = lS = 1000$  см<sup>3</sup> находится 0,58 г насыщенного пара из общего количества 0,8 г воды в случае а) и из 1,6 г — в случае б).

После перевода цилиндра в вертикальное положение пар под поршнем в нижней части цилиндра будет конденсироваться, а вода в верхней части — испаряться. В случае б), очевидно, наверху останется вода и её насыщенные пары, а внизу весь пар сконденсируется. Таким образом, в случае б) поршень опустится до дна цилиндра, и его смещение составит 50 см.

В случае а) вся вода в верхней части цилиндра испарится, пар в ней станет ненасыщенным, а его давление  $p$  — ниже атмосферного. В нижней части цилиндра после конденсации части пара давление останется равным  $p_0$ . Разность давлений в нижней и верхней частях цилиндра должна обеспечивать равновесие поршня, на который действует сила тяжести:  $(p_0 - p)S = Mg$ . Отсюда  $p = p_0 - (Mg/S) \approx \approx (10^5 - 2 \cdot 10^3)$  Па  $\approx p_0$ . При этом расстояние от поршня до верхнего торца цилиндра будет равно  $h \approx \frac{mRT}{\mu Sp_0} \approx 69$  см, то есть смещение поршня составит 19 см.

**2.67.** Парциальное давление  $p$  паров воды в цилиндре при температуре  $T$  описывается уравнением Менделеева — Клапейрона  $p(T) \cdot V = \nu RT$ , где  $\nu$  — число молей водяного пара в объёме  $V$ . Поэтому при охлаждении до точки росы цилиндра с закреплённым поршнем, то есть при постоянном объёме  $V = V_0$ , справедливо равенство:  $\frac{p_n(T_1)}{p(T_0)} = \frac{T_1}{T_0}$ . Отсюда давление паров воды в исходном состоянии

$p(T_0) = p_n(T_1) \frac{T_0}{T_1} \approx 1,069 p_n(T_1)$ . Если охлаждать цилиндр при постоянном давлении, то парциальное давление паров воды также будет постоянно:  $p_n(T_2) = p(T_0) = p_n(T_1) \frac{T_0}{T_1}$ , и

$$p_n(T_2) - p_n(T_1) = \left( \frac{T_0}{T_1} - 1 \right) p_n(T_1) \approx 0,069 p_n(T_1) \approx 0,66 \text{ мм рт. ст.}$$

Здесь, как следует из графика, приведённого в условии задачи (стр. 89),  $p_n(T_1) \approx 9,5$  мм рт. ст. Используя тот же график, находим:  $T_2 - T_1 \approx 1,0$  °С, откуда  $T_2 \approx 11,5$  °С.

**2.68.** Как только пустую пробирку  $A$  погружают в сосуд с эфиром, начинается его испарение внутрь пробирки. Этот процесс и приводит к появлению пузырьков, выходящих из пробирки  $A$ , поскольку суммарное давление воздуха и паров эфира в ней должно поддерживаться равным атмосферному давлению  $p_0$  (давлением столба жидкого эфира, не превышающим в нашем случае нескольких мм рт. ст., можно

пренебречь). Пузырьки перестанут выходить, когда прекратится испарение эфира внутри пробирки  $A$ , то есть давление паров эфира там станет равным давлению насыщенных паров  $p_n$ . При этом суммарное давление в пробирке  $A$  будет равным  $p_0 = p_n + p_v$ , где  $p_v$  — давление оставшегося в пробирке воздуха. Аналогичное условие должно выполняться и в пробирке  $B$ . Если вначале воздух, находящийся в пробирке  $A$ , занимал объём  $V_0$ , то в конце процесса он будет занимать, помимо всей пробирки  $A$ , ещё и объём  $2V_0 \cdot x$  в пробирке  $B$ . Пользуясь законом Бойля — Мариотта, можем записать:  $p_0 V_0 = p_v V_0(1 + 2x)$ , откуда находим:  $p_v = \frac{p_0}{1 + 2x}$ . Теперь легко определить и давление насыщенных

паров эфира:  $p_n = p_0 - p_v = \frac{2x}{1 + 2x} p_0 = \frac{4}{7} p_0 \approx 430$  мм рт. ст.

**2.69.** При указанной температуре (а её по условию задачи поддерживают постоянной) давление насыщенных паров воды  $p_n$  много меньше, чем атмосферное давление, поэтому массой молекул воды можно пренебречь по сравнению с массой других газов, составляющих воздух. Масса газа в каждом сосуде пропорциональна произведению давления и объёма (в соответствии уравнением Менделеева — Клапейрона). До открывания крана в обоих сосудах масса газа была одинакова и пропорциональна произведению  $p_1 V_1 = p_2 V_2 = 20$  атм  $\times$  л. После открывания крана в сосудах достаточно быстро установится одинаковое давление. Суммарный объём равен теперь 30 литрам, суммарная масса пропорциональна  $p_1 V_1 + p_2 V_2 = 40$  атм  $\times$  л. В соответствии с законом Бойля — Мариотта  $p_1 V_1 + p_2 V_2 = (V_1 + V_2) p_3$ . Отсюда установившееся давление равно  $p_3 = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 1,33$  атм. При этом из десятилитрового сосуда в двадцатилитровый сосуд перейдёт часть содержимого. Давление при постоянной температуре пропорционально концентрации молекул. Концентрация молекул в сосуде объёмом 20 литров уменьшилась в  $\frac{p_1}{p_3} = \frac{2 \text{ атм}}{1,33 \text{ атм}} \approx 1,5$  раза. Вместе с молекулами кислорода и азота, из которых в основном состоит воздух, из сосуда объёмом 10 литров в сосуд объёмом 20 литров при быстром установлении давления «перемиграли» и молекулы воды, поэтому их концентрация тоже уменьшилась во столько же раз. Относительная влажность воздуха  $r = p/p_n$  при постоянной температуре пропорциональна концентрации молекул воды. Поэтому в малом сосуде влажность вначале уменьшится до величины  $r_{\min} = r_1 \frac{p_3}{p_1} \approx 13,3\%$ .

Со временем в результате диффузии в обоих сосудах установится одинаковая концентрация молекул воды. До открывания крана общее количество молекул воды было пропорционально величине  $(V_1 r_1 + V_2 r_2)$ . После установления равновесного распределения молекул воды их общее количество останется тем же и будет пропорционально  $(V_1 + V_2) r_3$ . Величина  $r_3$  и будет максимальной относительной влажностью воздуха в сосуде объёмом 10 литров:

$$(V_1 + V_2) r_3 = (V_1 r_1 + V_2 r_2).$$

Отсюда

$$r_3 = r_{\max} = \frac{V_1 r_1 + V_2 r_2}{V_1 + V_2} \approx 33,3\%.$$

Таким образом, после открывания крана относительная влажность воздуха в меньшем сосуде вначале, при выравнивании давлений в сосудах, уменьшится от  $r_1 = 20\%$  до  $r_{\min} \approx 13,3\%$ , а затем во время процесса диффузии возрастёт до максимального значения  $r_{\max} \approx 33,3\%$ .

**2.70.** При данной температуре с единицы плоской поверхности чистой жидкости за единицу времени вылетает определённое количество молекул. В закрытом сосуде устанавливается такое давление пара этого вещества (насыщенный пар!), что из пара на поверхность жидкости возвращается такое же количество молекул в единицу времени. Если мы имеем дело с раствором с объёмной концентрацией  $n = 40\%$ , то на единице поверхности такого раствора находится только  $40\%$  от количества молекул, соответствующего чистой жидкости. Предположим, что вероятность покинуть поверхность раствора для каждой молекулы на этой поверхности не изменилась. Значит, покидают поверхность и возвращаются на неё за единицу времени тоже  $40\%$  от того количества молекул, что было у чистого вещества. Это рассуждение относится ко всем компонентам раствора. Следовательно, давление насыщенного пара над раствором складывается из  $40\%$  давления насыщенных паров спирта и  $60\%$  давления насыщенных паров воды при данной температуре. Давление над жидкостью внутри закрытой бутылки при температуре  $T_2$  создаётся воздухом, объём которого при нагревании от  $T_1 = 273$  К до  $T_2 = 350$  К не изменяется, парами воды и парами спирта. Так как по условию задачи чистый спирт кипит при температуре  $T_2$ , то давление его насыщенных паров при этой температуре равно атмосферному давлению  $p_0$ , и общее давление над жидкостью будет равно:

$$p_{\text{общ}} = p_0 \frac{T_2}{T_1} + n p_0 + (1 - n) p \approx 1,9 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

**2.71.** В начальный момент масса водяного пара  $M_{\text{пара}}$  очень мала по сравнению с массой воды в сосуде  $m$ . Массу пара можно найти из уравнения Менделеева — Клапейрона, учитывая, что молярная масса воды  $\mu_{\text{воды}} = 18$  г/моль, а соответствующая нормальным условиям температура  $T_1 = 273$  К:

$$M_{\text{пара}} = \frac{\mu_{\text{воды}} p V}{RT_1} \approx 0,15 \text{ г} \ll m = 9 \text{ г}.$$

Поэтому можно считать, что вся вода вначале находилась в жидком состоянии. После разгона сосуда объёмом  $V = 31$  литр при установившейся температуре внутри него содержится  $m = 9$  г водяного пара при влажности  $r = 50\%$ . Если бы при этой же температуре водяной пар был насыщенным, то в том же объёме находилось бы  $m/r = 18$  г водяного пара, то есть 1 моль.

Известно, что вода при атмосферном давлении кипит при  $100^\circ\text{C}$ , то есть давление насыщенных паров воды при температуре  $T_2 = 373$  К равно  $p_{\text{атм}} = 10^5$  Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона находим, что при давлении  $10^5$  Па и температуре  $373$  К один моль водяного пара (18 г) занимает объём

$$V = \frac{RT_2}{p_{\text{атм}}} \approx 31 \text{ л},$$

откуда следует, что в сосуде установилась температура, равная как раз  $T_2 = 373$  К.

В условии сказано, что стенки сосуда являются очень жёсткими, а это означает, что объём сосуда не изменяется. Стенки сосуда совершенно не проводят тепло, то есть энергия, которыми обладали воздух и вода, не теряется в результате теплопередачи. Перейдём в систему отсчёта, движущуюся поступательно со скоростью  $u$ . В этой системе отсчёта сосуд сначала имел скорость  $u$ , а затем резко остановился. Воздух и вода имели, как целое, кинетическую энергию  $\frac{Mu^2}{2}$  и некоторую внутреннюю энергию. После остановки сосуда суммарная энергия воды и воздуха осталась прежней, но теперь вода и воздух как целое не движутся, так что кинетическая энергия движения воды и воздуха, как целого, превратилась во внутреннюю энергию.

Из уравнения Менделеева — Клапейрона находим, что масса воздуха в сосуде равна

$$M_{\text{возд}} = \frac{\mu p_{\text{атм}} V}{RT_1} \approx 39,6 \text{ г}.$$

Суммарная масса воды и воздуха  $M = m + M_{\text{возд}} = 48,6$  г. Изменение внутренней энергии можно подсчитать по частям. Воздух при постоянном объёме нагрелся на  $100$  °С. На это потребовалось количество тепла  $Q_1 = M_{\text{возд}} c_V (T_2 - T_1) \approx 2850$  Дж. Изменение внутренней энергии воды определяется только конечным и начальным состояниями системы и не зависит от процесса перехода. Поэтому можно считать, что сначала воду нагрели до  $100$  °С, а затем перевели её в парообразное состояние. На нагревание воды пошло количество тепла  $Q_2 = mC(T_2 - T_1) \approx 3780$  Дж. На парообразование пошло количество теплоты  $Q_3 = mL \approx 22500$  Дж.

Таким образом, общее изменение внутренней энергии равно кинетической энергии, которую имели вода и воздух:

$$\Delta E = \frac{Mu^2}{2} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \approx 29130 \text{ Дж},$$

откуда

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta E}{M}} \approx 1100 \text{ м/с}.$$

**2.72.** Искомая сила  $F$ , действующая на каждую из пластин со стороны капли, складывается из силы поверхностного натяжения, направленной перпендикулярно поверхности пластины в сторону капли и равной  $\sigma\pi D$ , и силы давления жидкости  $p \cdot \pi D^2/4$ , направленной в противоположную сторону. Давление  $p$  жидкости внутри капли можно найти, рассматривая условия равновесия цилиндрической боковой поверхности капли (см. рис. 2.72). На малую часть этой поверхности площадью  $\Delta S$ , ограниченную двумя дугами окружностей с углами  $\Delta\varphi$  длиной  $\Delta\varphi \cdot D/2$  и двумя образующими цилиндра длиной  $h$ , действует суммарная сила поверхностного натяжения, равная силе давления жидкости:  $\sigma h \cdot \Delta\varphi = p\Delta S = p \cdot h \cdot \Delta\varphi \cdot D/2$ , откуда  $p = 2\sigma/D$ .

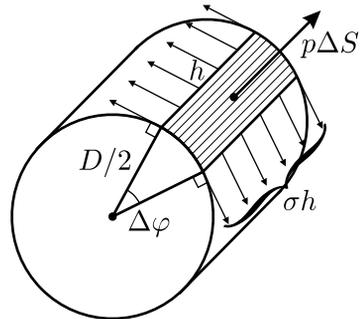


Рис. 2.72.

Окончательно получаем, что искомая сила равна по величине

$$F = \sigma\pi D - \frac{2\sigma}{D} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\sigma\pi D}{2}$$

и направлена в сторону капли перпендикулярно каждой из пластин.

Обратим внимание на следующую ошибку, часто допускаемую при решении подобных задач: в расчётах не учитывается сила давления жидкости, и поэтому сила  $F$  получается вдвое большей!

**2.73\***. Вначале рассмотрим неподвижную сферическую каплю радиусом  $R$ , не соприкасающуюся ни с какой поверхностью и находящуюся в невесомости. Если мысленно рассеять каплю плоскостью, то сила, действующая на отсечённую часть со стороны остальной части капли, должна равняться нулю. Эта сила, как и в [предыдущей задаче](#), складывается из силы поверхностного натяжения и силы давления, возникающей за счёт искривления поверхности жидкости. Проще всего давление  $p$  внутри капли искать, рассекая каплю диаметральной плоскостью. При этом получаем, что суммарная сила поверхностного натяжения действует перпендикулярно этой плоскости в направлении другой части капли и равна  $2\pi R\sigma$ , а сила давления «отталкивает» отрезанную часть капли и равна  $\pi R^2 \cdot p$ . Приравнявая эти силы, получим, что  $p = 2\sigma/R$ . Заметим, что под цилиндрической поверхностью жидкости (см. решение задачи [2.72](#)) давление было вдвое меньше.

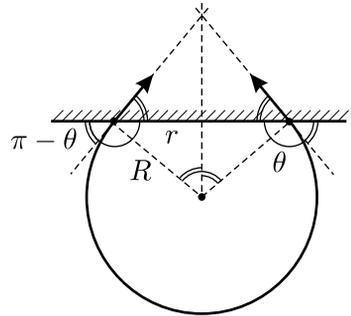


Рис. 2.73.1.

Теперь рассмотрим условия равновесия капли, прилипшей к потолку. Из сказанного выше ясно, что при наличии силы тяжести форма капли не может оставаться сферической — иначе она сразу оторвется от потолка! Под действием силы тяжести капля вытягивается вниз, и её кривизна в верхней части уменьшается так, чтобы сумма сил поверхностного натяжения, давления и тяжести равнялась нулю. Вблизи точек контакта капли с потолком форма поверхности вместо сферической становится конической, а дополнительное давление под такой искривлённой поверхностью, очевидно, уменьшается вдвое. Для оценки массы отрывающейся капли будем считать, что её форма всё же близка к сферической, а отрыв происходит, когда «сила притяжения» (то есть сумма сил поверхностного натяжения и давления), удерживающая каплю на потолке, становится равной весу капли  $mg$ .

Если краевой угол смачивания  $\theta > \pi/2$  (несмачивание или плохое смачивание, см. рис. 2.73.1), то сила притяжения, равная, по аналогии с задачей [2.72](#),

$$2\pi r\sigma \sin \theta - \pi r^2 \cdot \frac{\sigma}{R} = \pi\sigma R \sin^2 \theta$$

(здесь учтено, что  $r = R \sin \theta$ ), должна быть порядка  $mg = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$ , где

$\rho$  — плотность воды. Отсюда  $R \approx \sqrt{\frac{3\sigma}{4\rho g}} \sin \theta$ , а

$$m \approx \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \rho \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{3/2} \sin^3 \theta,$$

то есть очень быстро убывает при  $\theta \rightarrow \pi$ .

Другая ситуация возникает, если краевой угол смачивания  $\theta < \pi/2$  (частичное или полное смачивание, см. рис. 2.73.2).

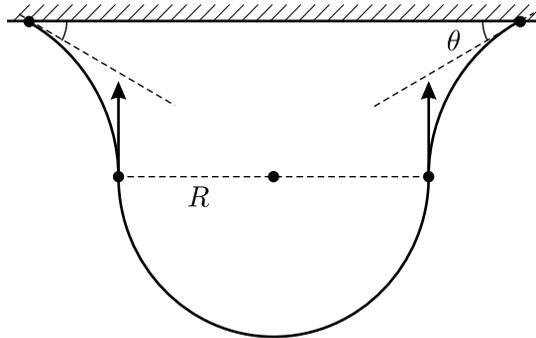


Рис. 2.73.2.

В этом случае кривизна поверхности капли в верхней части, контактирующей с потолком, ещё меньше (поверхность может быть даже вогнутой!), а отрыв капли происходит по «перетяжке», где поверхность цилиндрическая. Условие отрыва имеет вид:  $\pi \sigma R = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho g$ , откуда

$$R = \sqrt{\frac{3\sigma}{2\rho g}}, \quad \text{и} \quad m \approx \sqrt{\frac{3}{2}}\pi \rho \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{3/2} \approx 0,1 \text{ г.}$$

Таким образом, в этом случае масса оторвавшейся капли не зависит от краевого угла  $\theta$ .

Отметим, что полученные результаты являются оценочными.

**2.74.** Введём какой-нибудь характерный размер капли, по которому можно полностью определить её размеры, если известна форма капли. Например, выберем в качестве такого размера «высоту» капли  $H$ .

Форма капли заданного объёма  $V$ , который пропорционален  $H^3$ , определяется условием минимума суммарной потенциальной энергии

капли, которая складывается из энергии  $E_1$ , связанной с наличием поверхностного натяжения жидкости, и энергии  $E_2$ , связанной с наличием поля силы тяжести:  $E_1 \sim \sigma H^2$ ,  $E_2 \sim \rho g H^4$ .

Одна из составляющих суммарной энергии пропорциональна  $V/H$ , а другая — произведению  $V \cdot H$ . Отношение этих составляющих  $E_1/E_2$  для капель одинаковой формы, должно быть одинаково, поскольку именно соотношением этих энергий и определяется форма капли. Поэтому должно выполняться следующее соотношение:

$\frac{\sigma_{\text{в}} H_{\text{в}}^2}{\rho_{\text{в}} g H_{\text{в}}^4} = \frac{\sigma_{\text{р}} H_{\text{р}}^2}{\rho_{\text{р}} g H_{\text{р}}^4}$ . Отсюда следует, что  $\frac{H_{\text{р}}^2}{H_{\text{в}}^2} = \frac{\sigma_{\text{р}} \rho_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}} \rho_{\text{р}}}$ . Отношение масс капли ртути и капли воды, таким образом, равно

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{р}}}{M_{\text{в}}} &= \frac{\rho_{\text{р}} H_{\text{р}}^3}{\rho_{\text{в}} H_{\text{в}}^3} = \frac{\rho_{\text{р}}}{\rho_{\text{в}}} \cdot \left( \frac{\sigma_{\text{р}} \rho_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}} \rho_{\text{р}}} \right)^{3/2} = \left( \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{р}}} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{\sigma_{\text{р}}}{\sigma_{\text{в}}} \right)^{3/2} = \\ &= \left( \frac{1}{13,6} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{0,46}{0,07} \right)^{3/2} \approx 0,271 \cdot 16,85 \approx 4,6. \end{aligned}$$

**2.75.** Частота малых колебаний капли воды может зависеть только от коэффициента поверхностного натяжения воды  $\sigma$  и массы капли  $m$ . В соответствии с правилом размерностей и по аналогии с задачей о колебаниях груза на пружине получаем:  $\omega \sim \sqrt{\sigma/m}$ . Заметим, что коэффициент поверхностного натяжения в данном случае определяет величину возвращающей силы, то есть играет роль коэффициента жёсткости из задачи о колебаниях груза на пружине, и имеет с ним одинаковую размерность. Далее, учитывая, что  $m \sim \rho r^3$ , окончательно получаем:

$$\omega \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho r^3}} \approx 93,5 \text{ рад/с}, \quad \text{или} \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} \approx 15 \text{ Гц}.$$

Полученный ответ справедлив с точностью до числового коэффициента, имеющего порядок единицы.

**2.76\*.** За счёт сил поверхностного натяжения вода в зазоре между стенкой кюветы и бруском поднимается на высоту  $h$  (см. рис. 2.76), которая определяется из условия:  $\rho g h l d = 2\sigma l$ , где  $\rho$  — плотность воды.

Отсюда  $h = \frac{2\sigma}{\rho g d}$ . Давление в зазоре на высоте  $x$  над поверхностью воды равно  $p_{\text{атм}} - \rho g x$ , а в воздухе справа от бруска на той же высоте — атмосферному давлению  $p_{\text{атм}}$ . Поэтому на малую часть бруска, находящуюся между высотами  $x$  и  $x + \Delta x$ , действует направленная к

стенке кюветы сила  $\Delta F = \rho g x \cdot l \Delta x = \rho g l \Delta(x^2/2)$ . Отсюда полная сила, действующая на брусок, направлена к стенке кюветы и по величине равна

$$F = \frac{\rho g l h^2}{2} = \frac{2\sigma^2 l}{\rho g d^2}.$$

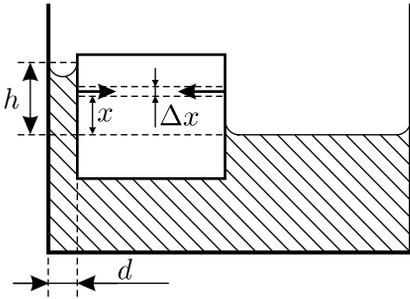


Рис. 2.76.

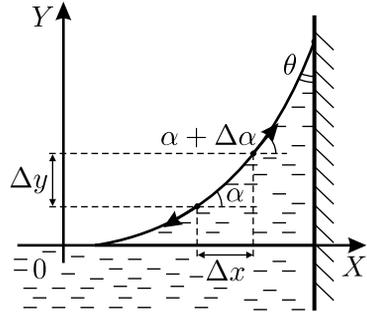


Рис. 2.77.

**2.77\***. Запишем условия равновесия столбика жидкости вблизи стенки сосуда (см. рис. 2.77). Направим ось  $X$  горизонтально, к стенке, а ось  $Y$  — вертикально вверх, причём начало отсчёта по этой оси совместим с поверхностью жидкости в сосуде вдали от стенки. Пусть верхушка рассматриваемого столбика жидкости имеет координату  $y$ , ширина столбика равна  $\Delta x$ , а толщина равна единице. Обозначим через  $\alpha$  угол наклона поверхности жидкости на верху столбика, а через  $\Delta\alpha$  — приращение этого угла на ширине столбика. Тогда условие равновесия столбика будет иметь вид:  $\rho g y \Delta x = \sigma (\sin(\alpha + \Delta\alpha) - \sin \alpha)$ . Приращение координаты  $y$  на ширине столбика равно  $\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} \alpha$ . Из этих двух уравнений, учитывая малость  $\Delta\alpha$ , имеем:  $\rho g y \Delta y = \sigma \sin \alpha \Delta\alpha$ , откуда  $\rho g \Delta(y^2/2) = \sigma \Delta(-\cos \alpha)$ . Поскольку угол  $\alpha$  изменяется в пределах от 0 до  $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ , для высоты подъёма жидкости  $h$  у вертикальной стенки сосуда получаем:

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma(1 - \sin \theta)}{\rho g}}.$$

Заметим, что этот результат можно получить и из рассмотрения условий равновесия той части жидкости у стенки, которая возвышается над уровнем поверхности вдали от стенки. Если толщина этой части по-прежнему равна единице, то в направлении оси  $X$  на данную часть жидкости действуют силы поверхностного натяжения  $-\sigma$  и  $\sigma \sin \theta$ , а также сила давления, которую можно найти следующим образом. На высоте  $y$

над нулевым уровнем давление вблизи стенки меньше атмосферного на величину  $\rho gy$ , поэтому среднее давление для высоты подъёма жидкости у стенки  $h$  равно  $\rho g \frac{h}{2}$ , а суммарная сила давления на эту часть жидкости направлена вправо и равна  $\rho g \frac{h}{2} \cdot h$ . Таким образом, условие равновесия выделенной части жидкости имеет вид:  $\sigma \sin \theta - \sigma + \rho g \frac{h^2}{2} = 0$ , откуда получаем прежнее выражение для  $h$ .

**2.78\*.** Невесомая нить, ограничивающая плоскую невесомую плёнку жидкости, должна иметь форму дуги окружности. Если эта дуга касается стены и стержня (см. рис. 2.78.1), то есть углы между ними и нитью равны нулю, то длина дуги, очевидно, не может быть меньше  $\frac{\pi}{2} \cdot L$ . Значит, этот вариант примыкания нити к стене и стержню не удовлетворяет условию задачи, и нить должна составлять со стеной и стержнем в точках закрепления её концов ненулевые и одинаковые углы  $\alpha$  (см. рис. 2.78.2).

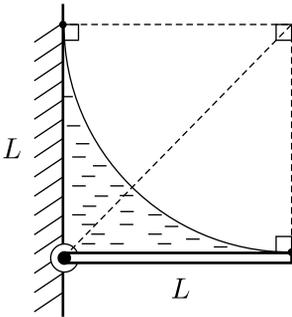


Рис. 2.78.1.

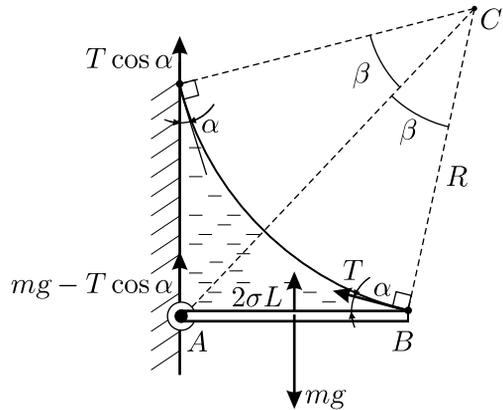


Рис. 2.78.2.

Выяснив, как выглядит плёнка, перейдём к нахождению длины нити. Так как плёнка имеет две поверхности, то сила поверхностного натяжения, действующая с её стороны на стержень, равна  $2\sigma L$ . Так как стержень неподвижен, то сумма моментов действующих на него сил должна быть равна нулю:

$$mg \cdot \frac{L}{2} - 2\sigma L \cdot \frac{L}{2} - TL \sin \alpha = 0.$$

Здесь  $T$  — сила натяжения нити. Выразим её из записанного уравнения:

$$T = \frac{mg - 2\sigma L}{2 \sin \alpha}.$$

Заметим, что для равновесия стержня в горизонтальном положении необходимо выполнение условия  $mg > 2\sigma L$ .

Далее, сумма вертикальных составляющих сил, действующих на всю систему со стороны стены, очевидно, равна  $mg$ . Вертикальная составляющая силы, действующей со стороны стены на нить, равна  $T \cos \alpha$ . Значит, вертикальная составляющая силы, действующей со стороны стены на стержень, равна  $mg - T \cos \alpha$  (она приложена к точке крепления стержня к шарниру). С учётом этого обстоятельства, запишем условие равенства нулю суммы вертикальных составляющих сил, действующих на стержень:

$$mg - (mg - T \cos \alpha) - 2\sigma L - T \sin \alpha = 0.$$

Отсюда, привлекая выражение для  $T$ , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}.$$

Обозначим шарнир буквой  $A$ , точку крепления нити к стержню —  $B$ , центр окружности, дугу которой образует нить —  $C$ . Тогда

$$\angle CAB = \frac{\pi}{4} \text{ (из соображений симметрии),}$$

$$\angle ACB = \beta = \pi - \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

и по теореме синусов:

$$\frac{R}{\sin \pi/4} = \frac{L}{\sin \beta},$$

где  $R$  — радиус окружности. Отсюда:

$$R = \frac{L \sin \pi/4}{\sin((\pi/4) - \alpha)} = \frac{L}{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}\right)}.$$

Наконец, в соответствии с определением радианной меры угла,  $2\beta = \frac{l}{R}$ , где  $l$  — искомая длина нити. В итоге получаем:

$$l = 2R\beta = \sqrt{2} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{mg - 2\sigma L}{mg + 2\sigma L}\right)} L.$$

Это выражение можно упростить, устранив в знаменателе композицию прямой и обратной тригонометрических функций.

Приведём другое оригинальное решение задачи, позволяющее сразу получить ответ в более простой тригонометрической форме<sup>1</sup>.

Со стороны плёнки на нить действует сила поверхностного натяжения  $F = 2\sigma\sqrt{2}L$ , направленная перпендикулярно отрезку, соединяющему закреплённые концы нити ( $\sqrt{2}L$  — длина этого отрезка). Кроме силы поверхностного натяжения на нить действуют только силы реакции точек закрепления (равные по величине и противоположные по направлению силе натяжения нити  $T$  в этих точках). Сумма проекций сил реакции на вышеуказанный отрезок равна 0, а на перпендикулярное к этому отрезку направление (в плоскости плёнки)  $2T \sin \beta$ . Так как нить находится в равновесии, то

$$2T \sin \beta = 2\sigma\sqrt{2}L, \quad \text{откуда} \quad T = \frac{\sqrt{2}\sigma L}{\sin \beta}. \quad (1)$$

Вертикальная составляющая силы натяжения нити, действующей на конец стержня, равна  $T \sin \alpha = T \sin \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right)$ . Из условия равенства нулю суммы моментов сил относительно середины стержня следует, что на стержень действует такая же вертикальная составляющая силы со стороны шарнира (суммарный момент сил поверхностного натяжения относительно середины стержня, очевидно, равен нулю; также нулю равен и суммарный момент сил тяжести). Следовательно, условие равновесия стержня по вертикали имеет вид:

$$\begin{aligned} mg &= 2T \sin \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right) + 2\sigma L = \\ &= 2T \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos \beta - \cos \frac{\pi}{4} \sin \beta \right) + 2\sigma L = \\ &= 2T \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta \right) + 2\sigma L = \\ &= \sqrt{2}T (\cos \beta - \sin \beta) + 2\sigma L \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для  $T$  из формулы (1), получим

$$mg = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma L}{\sin \beta} (\cos \beta - \sin \beta) + 2\sigma L =$$

<sup>1</sup>Это решение на олимпиаде предложил В. А. Белов, тогда, в 1995/1996 учебном году, ученик 10 класса школы № 4 города Королёв Московской области.

$$= 2\sigma L(\operatorname{ctg} \beta - 1) + 2\sigma L = 2\sigma L \operatorname{ctg} \beta, \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{mg}{2\sigma L}.$$

Из геометрических соображений  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{R \cos \beta}{L/\sqrt{2}}$  (из прямоугольного треугольника с гипотенузой  $BC$  и катетами, один из которых лежит на отрезке  $AC$ , а другой является перпендикуляром к этому отрезку, проведённым из точки  $B$ ). Таким образом,

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{mg}{2\sigma L} = \frac{R \cos \beta}{L/\sqrt{2}} \quad \text{откуда} \quad \cos \beta = \frac{mgL/\sqrt{2}}{2\sigma LR} = \frac{mg}{2\sqrt{2}\sigma R}.$$

Из того же треугольника

$$\sin \beta = \frac{L/\sqrt{2}}{R} = \frac{L}{\sqrt{2}R}.$$

Выразим  $R$  через параметры, данные в условии:

$$\begin{aligned} 1 &= \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \left( \frac{L}{\sqrt{2}R} \right)^2 + \left( \frac{mg}{2\sqrt{2}\sigma R} \right)^2 = \\ &= \frac{L^2}{2R^2} + \frac{(mg)^2}{8\sigma^2 R^2} = \frac{1}{R^2} \left( \frac{L^2}{2} + \frac{(mg)^2}{8\sigma^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$R = \sqrt{\frac{L^2}{2} + \frac{(mg)^2}{8\sigma^2}} = \sqrt{\frac{(2\sigma L)^2 + (mg)^2}{8\sigma^2}}.$$

В соответствии с определением радианной меры угла

$$\begin{aligned} l &= 2R\beta = 2R \arccos \frac{mg}{2\sqrt{2}\sigma R} = \\ &= 2\sqrt{\frac{(2\sigma L)^2 + (mg)^2}{8\sigma^2}} \arccos \left( \frac{mg}{2\sqrt{2}\sigma \sqrt{\frac{(2\sigma L)^2 + (mg)^2}{8\sigma^2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \sqrt{(2\sigma L)^2 + (mg)^2} \arccos \frac{mg}{\sqrt{(2\sigma L)^2 + (mg)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}L}{2\sigma L} \sqrt{(2\sigma L)^2 + (mg)^2} \arccos \frac{mg}{\sqrt{(2\sigma L)^2 + (mg)^2}} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2}L \sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2\sigma L}\right)^2} \arccos \left( \frac{\frac{mg}{2\sigma L}}{\sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2\sigma L}\right)^2}} \right).$$

*Замечание.* Вводя обозначение  $Z = \frac{mg}{2\sigma L}$ , полученный ответ можно переписать в форме

$$l = \sqrt{2}L \cdot \sqrt{1 + Z^2} \arccos \frac{Z}{\sqrt{1 + Z^2}}.$$

Ответ, полученный в результате решения первым способом, также можно выразить через  $Z$ :

$$l = \sqrt{2}L \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{Z-1}{Z+1}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{Z-1}{Z+1} \right)}.$$

Приравняв эти выражения, получим

$$\frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{Z-1}{Z+1}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{Z-1}{Z+1} \right)} = \sqrt{1 + Z^2} \arccos \frac{Z}{\sqrt{1 + Z^2}}.$$

Это равенство верно для всех значений  $Z$ , допустимых по условию задачи. То есть ответы, полученные первым и вторым способом, на самом деле одинаковы и отличаются только формой записи (хотя на первый взгляд это не совсем очевидно). Таким образом, решая задачу двумя разными способами, мы попутно получили интересное тригонометрическое тождество (но доказали его пока что только для значений  $Z$ , которые имеют физический смысл в рассмотренной нами задаче).

**2.79\*.** Покажем, что суммарная сила, действующая на всю нить со стороны мыльной плёнки, равна нулю. Действительно, если бы на месте замкнутого нитяного кольца находилась мыльная плёнка, то она была бы в положении равновесия. По условию задачи массой мыльной плёнки можно пренебречь. Поэтому указанная суммарная сила и равна нулю.

Поскольку углы, образованные касательными к кускам нити вблизи узелков, равны  $120^\circ$ , и сумма сил, действующих на каждый узелок, равна нулю, то силы натяжения всех кусков нити вблизи узелков

одинаковы. Обозначим их величины через  $F$ . Силы натяжения наклонных кусков нити, прикрепленных к проволочному каркасу, вблизи узелков по условию составляют углы  $30^\circ$  с горизонтом (см. рис. 2.79). Поэтому их суммарная проекция на вертикаль равна  $2F \sin 30^\circ = F$ . Эта проекция компенсирует силу тяжести, действующую на два куска нити между узелками.

Пусть общая длина нити равна  $l$ . Тогда куски нити, выгнутые вверх и вниз, имеют длины, равные, соответственно,  $2l/7$  и  $3l/7$ , и массы  $2M/7$  и  $3M/7$ . Поэтому масса кусков нити между узелками равна  $5M/7$ . Отсюда получаем, что  $F = 5Mg/7$ .

Каждый кусок нити находится в равновесии. Условие равновесия, например, куска нити длиной  $2l/7$ , выгнутого вверх, предполагает, что сумма всех сил, действующих на этот кусок, равна нулю. Докажем, что сила, действующая на этот кусок со стороны мыльной плёнки, равна  $2\sigma L$  и направлена вверх. Для этого мысленно соединим невесомым жёстким стержнем узелки нитей и натянем мыльную плёнку на площадку, ограниченную этим стержнем и верхним участком нитяного кольца. Стержень для поддержания его равновесия необходимо тянуть вниз с силой, равной  $2\sigma L$  (коэффициент 2 в формуле возникает потому, что у мыльной плёнки две поверхности).

Стержень, в свою очередь, с такой же силой действует на натянутый нами участок плёнки. Поскольку этот участок плёнки невесом, то плёнка ровно с такой же силой тянет верхний кусок нити вниз. На нить с двух сторон, сверху и снизу, действуют силы поверхностного натяжения плёнки, и их сумма равна нулю. Если вновь убрать мысленно натянутый участок плёнки, то сила, действовавшая с его стороны на нить, исчезнет. Останется только сила, действующая на кусок нити сверху и равная  $2\sigma L$ , что и требовалось доказать.

Запишем условие равновесия данного куска нити. Вниз на него действуют сила тяжести  $2Mg/7$ , и сумма проекций сил натяжения, равная  $2F \sin 30^\circ = F$ , а вверх — сила поверхностного натяжения, равная, как мы только что доказали,  $2\sigma L$ . Поэтому  $\frac{2Mg}{7} + F - 2\sigma L = 0$ .

Подставляя в это уравнение найденную выше величину  $F = 5Mg/7$ , находим  $M = 2\sigma L/g \approx 0,32$  г.

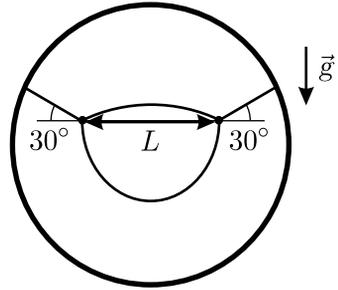


Рис. 2.79.

## Электричество и магнетизм

**3.1.** Предположим, что груз немного смещается из положения равновесия так, что стержень маятника составляет с вертикалью малый угол  $\alpha$  (см. рис. 3.1). Если возникающий при этом суммарный момент сил, действующих на стержень, стремится вернуть его в исходное положение, то наинизшее положение маятника является устойчивым. Запишем условие устойчивости маятника, имея в виду, что момент силы упругости  $T$  относительно точки  $O$  равен нулю:

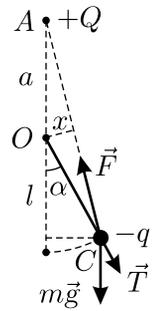


Рис. 3.1.

$$mgl \sin \alpha > \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0|AC|^2} \cdot x,$$

где  $|AC| \approx a + l$  — расстояние между зарядами  $q$  и  $Q$  после отклонения маятника на малый угол,  $x$  — плечо силы  $F$  электростатического взаимодействия зарядов. Поскольку, как видно из рисунка,  $\frac{x}{a} \approx \frac{l \sin \alpha}{a + l}$ , условие устойчивости принимает вид:

$$mg > \frac{qQa}{4\pi\epsilon_0(a + l)^3}.$$

**3.2.** Будем решать задачу при помощи метода размерностей. В формулу, выражающую силу притяжения заряда к кубу, должны входить величина заряда  $Q$ , расстояние от заряда до вершины куба  $a$  (эта же величина — длина ребра куба) и электрическая постоянная  $\epsilon_0$ . Данные величины имеют следующие размерности:  $[Q] = [\text{Кл}]$ ,  $[a] = [\text{м}]$ ,  $[\epsilon_0] = \left[ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \right]$ . Из данных величин можно составить только одну един-

ственную комбинацию, имеющую размерность силы  $[\text{Н}]$ :  $F = \alpha \frac{Q^2}{\epsilon_0 a^2}$ , где  $\alpha$  — безразмерный постоянный коэффициент. Эта формула справедлива для любых размеров куба и для любых величин заряда, расположенного относительно куба так, как описано в условии задачи. Следовательно, тот же заряд, расположенный на расстоянии  $b$  от каждой из вершин одной из граней куба с длиной ребра  $b$ , будет притягиваться к нему с силой

$$\tilde{F} = \alpha \frac{Q^2}{\epsilon_0 b^2} = F \frac{a^2}{b^2}.$$

**3.3.** Густота силовых линий пропорциональна напряжённости электростатического поля. Мерой густоты является количество силовых линий, проходящих через единицу площади (поток вектора напряжённости). Как видно из рисунка в условии задачи (см. рисунок 3.3), одна силовая линия вблизи точки  $A$  приходится на три деления шкалы, а вблизи точки  $B$  — на одно деление шкалы.

Так как электростатическое поле симметрично относительно оси  $OZ$ , то через малую единичную площадку, ориентированную перпендикулярно вертикали, вблизи точки  $A$  проходит в 9 раз меньше силовых линий, чем через такую же площадку вблизи точки  $B$ . Поэтому напряжённость электростатического поля в точке  $B$  в 9 раз больше, чем в точке  $A$ , и кулоновские силы, действующие на заряд в этих точках, отличаются в такое же количество раз. Сила кулоновского взаимодействия, пропорциональная величине заряда, в обоих случаях уравнивается одной и той же силой тяжести  $mg$ . Следовательно, заряд шарика при переходе из точки  $A$  в точку  $B$  уменьшился в 9 раз.

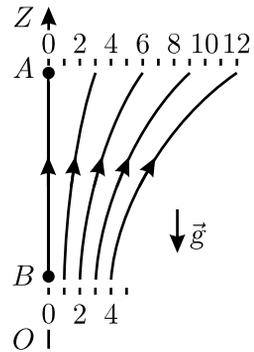


Рис. 3.3.

**3.4.** При больших значениях времени  $t$  движущийся заряд находится очень далеко от точки наблюдения, и поэтому электрическое поле создаётся только неподвижным зарядом  $Q_1$ . Величина напряжённости поля при этом равна  $E_0$  (см. рис. 3.4.1), причём в соответствии с законом Кулона  $E_0 = \frac{|Q_1|}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ , откуда  $|Q_1| = 4\pi\epsilon_0 d^2 E_0$ . Этот заряд может быть как положительным, так и отрицательным — знак из условия задачи определить нельзя. Движущийся заряд  $Q_2$ , по условию задачи, имеет такие же величину и знак, как заряд  $Q_1$ .

Из графика видно, что в момент времени  $t = 0$  напряжённость электрического поля в точке наблюдения обращается в ноль. Кроме того, график симметричен относительно оси ординат. Поскольку заряды по условию задачи одинаковы, то это возможно лишь в том случае, когда заряд  $Q_2$  движется вдоль прямой линии и в момент времени  $t = 0$  находится на минимальном расстоянии  $d$  от точки наблюдения на прямой, проходящей через эту точку и неподвижный заряд  $Q_1$ . При этом заряды располагаются симметрично по разные стороны от точки наблюдения, и расстояние между ними составляет  $2d$ .

Для того, чтобы найти скорость движущегося заряда  $v$ , найдём величину поля в точке наблюдения через малое время  $\Delta t$  после того,

как поле было равно нулю (для определённости будем считать заряды отрицательными). За время  $\Delta t$  движущийся заряд сместился на расстояние  $v\Delta t$ , а поле возросло (см. рис. 3.4.2) на величину

$$\Delta E \approx 2E_0 \sin \frac{\alpha}{2} \approx E_0 \alpha \approx E_0 \frac{v\Delta t}{d}.$$

Таким образом, величина напряжённости поля в точке наблюдения при малых временах возрастает пропорционально времени. Отношение  $\Delta E/\Delta t$  равно угловому коэффициенту касательной к графику, проведённой в точке, соответствующей моменту времени  $t = 0$ . Из графика видно, что эта касательная, выходящая из начала координат, проходит через точку с координатами  $(t_0, E_0)$ . Следовательно,  $\Delta E/\Delta t = E_0 v/d = E_0/t_0$ . Отсюда  $v = d/t_0$ .

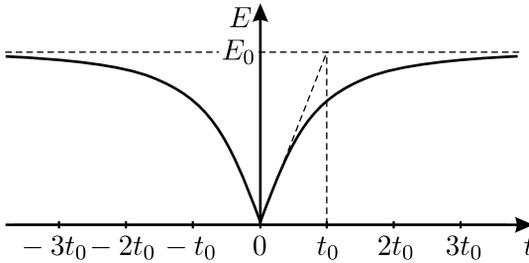


Рис. 3.4.1.

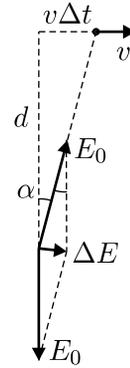


Рис. 3.4.2.

**3.5.** Будем решать задачу методом размерностей. Так как сила взаимодействия бусинок равна  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2}$ , то их ускорение пропорционально  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{mr^2}$ . Поэтому время разлёта бусинок  $t_0$  однозначно определяется двумя параметрами:  $r_0$  и  $\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_0 m}$ . Эти параметры имеют следующие размерности:  $[r_0] = \text{м}$ ,  $[\alpha] = \text{м}^3/\text{с}^2$ . Из двух параметров такой размерности можно составить единственную комбинацию  $\tau$ , имеющую размерность времени:  $\tau = (r_0^3/\alpha)^{1/2}$ . Таким образом, время  $t$ , за которое начальное расстояние между бусинками удвоится, зависит от величины  $r_0$  следующим образом:  $t = \text{const} \cdot \tau = \text{const} \cdot (r_0^3/\alpha)^{1/2}$ . Значит, при увеличении расстояния  $r_0$  в  $k$  раз время  $t$  увеличится в  $k^{3/2}$  раз, то есть  $t_1 = k^{3/2} \cdot t_0$ .

**3.6\*.** Рассмотрим случай, когда заряды располагаются в вершинах треугольника (см. рис. 3.6.1). Для этого рассмотрим какой-либо заряд, например,  $q_1$ . Сумма сил, действующих на этот заряд, равна нулю (заряд неподвижен). Со стороны нити на этот заряд действуют две одинаковые по модулю силы натяжения  $T$ , направленные вдоль сторон треугольника  $q_2q_1q_3$ . Следова-

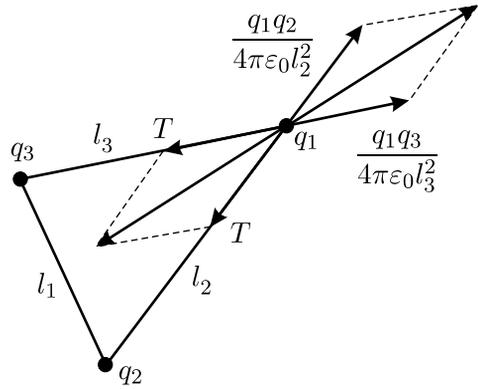


Рис. 3.5.1.

тельно, равнодействующая этих сил направлена по биссектрисе угла  $q_2q_1q_3$ . Тогда равнодействующая сил электростатического взаимодействия заряда  $q_1$  с зарядами  $q_2$  и  $q_3$  также должна быть направлена по биссектрисе этого угла, но в другую сторону. А поскольку эти силы также направлены вдоль сторон треугольника  $q_2q_1q_3$ , то они должны быть равны по модулю между собой и каждая из них должна быть равна  $T$ . Обозначим через  $l_1$  расстояние между зарядами  $q_2$  и  $q_3$ , через  $l_2$  — расстояние между зарядами  $q_2$  и  $q_1$ , и через  $l_3$  — расстояние между зарядами  $q_3$  и  $q_1$ . Учитывая сказанное выше, получаем:

$$\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0l_2^2} = \frac{q_1q_3}{4\pi\epsilon_0l_3^2}, \quad \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0l_2^2} = \frac{q_2q_3}{4\pi\epsilon_0l_1^2}, \quad (1)$$

откуда  $q_1l_1^2 = q_2l_3^2 = q_3l_2^2$ . Отсюда, с учётом соотношения  $l_1 + l_2 + l_3 = l$ , получаем:

$$l_1 = \frac{l}{1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_1}{q_3}}}; \quad l_2 = \frac{l}{1 + \sqrt{\frac{q_3}{q_1}} + \sqrt{\frac{q_3}{q_2}}}; \quad l_3 = \frac{l}{1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} + \sqrt{\frac{q_2}{q_3}}}.$$

Теперь, зная, например, расстояние  $l_1$  между зарядами  $q_2$  и  $q_3$ , можно вычислить силу электростатического взаимодействия между ними. Эта сила, как мы уже выяснили, равна силе натяжения нити  $T$ :

$$\begin{aligned} T = F_{23} &= \frac{q_2q_3}{4\pi\epsilon_0l_1^2} = \frac{q_2q_3}{4\pi\epsilon_0l^2} \left( 1 + \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} + \sqrt{\frac{q_1}{q_3}} \right)^2 = \\ &= \frac{(\sqrt{q_2q_3} + \sqrt{q_1q_3} + \sqrt{q_1q_2})^2}{4\pi\epsilon_0l^2}. \end{aligned}$$

Ответ формально получен. Но необходимо учесть, что в процессе решения все алгебраические преобразования были сделаны именно «формально». Мы нигде не учли, что длины сторон треугольника не могут быть произвольными, они обязательно связаны соотношениями («неравенство треугольника»):

$$\left\{ \begin{array}{l} l_1 + l_2 > l_3; \\ l_1 + l_3 > l_2; \\ l_2 + l_3 > l_1, \end{array} \right. \quad \text{откуда} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 + l_2 + l_3 > 2l_3; \\ l_1 + l_2 + l_3 > 2l_2; \\ l_1 + l_2 + l_3 > 2l_1, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 < l/2; \\ l_2 < l/2; \\ l_3 < l/2. \end{array} \right.$$

Отсюда, с учётом полученных ранее выражений для  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \sqrt{q_1/q_2} + \sqrt{q_1/q_3} > 2; \\ 1 + \sqrt{q_3/q_1} + \sqrt{q_3/q_2} > 2; \\ 1 + \sqrt{q_2/q_1} + \sqrt{q_2/q_3} > 2, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{q_1q_3} + \sqrt{q_1q_2} > \sqrt{q_2q_3}; \\ \sqrt{q_1q_3} + \sqrt{q_2q_3} > \sqrt{q_1q_2}; \\ \sqrt{q_1q_2} + \sqrt{q_2q_3} > \sqrt{q_1q_3}. \end{array} \right.$$

Эти соотношения также можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{q_2}} + \frac{1}{\sqrt{q_3}} > \frac{1}{\sqrt{q_1}}; \quad \frac{1}{\sqrt{q_2}} + \frac{1}{\sqrt{q_1}} > \frac{1}{\sqrt{q_3}}; \quad \frac{1}{\sqrt{q_3}} + \frac{1}{\sqrt{q_1}} > \frac{1}{\sqrt{q_2}}. \quad (2)$$

Возникает вопрос: а что же случится, если эти условия окажутся невыполненными, и где допущена «ошибка» в приведённом выше формальном решении?

Немного подумав, можно сообразить, что заряды могут располагаться не только в вершинах треугольника, но и вдоль прямой линии (см. рис. 3.6.2). На первый взгляд такие варианты расположения зарядов кажутся неустойчивыми. Но, оказывается, это не так. В самом деле, хотя бы одно устойчивое положение равновесие у системы должно быть! Но если соотношение между зарядами таково, что система вообще не может существовать в виде треугольника, то остаются только варианты расположения зарядов «в линию», и хотя бы один из этих трёх вариантов обязательно должен быть устойчивым.

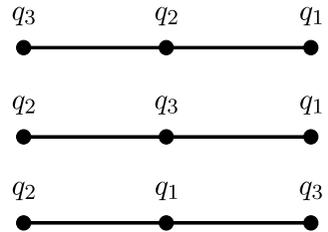


Рис. 3.6.2.

«Ошибка» же мы допустили, записывая соотношения (1). Первое из них представляет собой условие равновесия заряда  $q_1$  по двум *различным* направлениям ( $q_1-q_2$  и  $q_1-q_3$ ). А если же эти направления

совпадают, то (1) не следует из предыдущих рассуждений и может оказаться неверным. Действительно, если не выполнено условие (2), то (1) также не выполняется, и дальнейшие формальные алгебраические преобразования в этом случае приводят к не имеющему физического смысла результату, в чём мы и убедились.

Найдём силу натяжения нити в случае расположения зарядов «в линию». Рассмотрим, например, случай, показанный в верхней части рисунка 3.6.2.

Из условия равновесия заряда  $q_2$  получаем:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x_1^2} = \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 x_2^2}, \quad x_1 + x_2 = \frac{l}{2},$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — расстояния между  $q_1$  и  $q_2$  и между  $q_2$  и  $q_3$  соответственно. Решая эту систему, находим:  $x_1 = \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{q_3/q_1}}$ . Запишем условие равновесия заряда  $q_1$  ( $T_1$  — сила натяжения нити в рассматриваемом случае):

$$2T_1 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 (l/2)^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x_1^2}.$$

Отсюда, с учётом выражения для  $x_1$ , находим силу натяжения нити:

$$T = T_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left( q_1 q_3 + (\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_2 q_3})^2 \right).$$

Остальные два варианта рассматриваются полностью аналогично.

Для полноты решения осталось рассмотреть вопрос об устойчивости равновесия в различных вариантах расположения зарядов (в условии задачи это не требуется, участникам олимпиады предлагалось найти только силу натяжения нити).

Прежде всего покажем, что у рассмотренной в задаче системы не может быть двух и более положений устойчивого равновесия.

Данная система имеет две степени свободы. В качестве таких степеней свободы (параметров или «координат» системы) можно выбрать, например, длины отрезков  $l_1$  и  $l_2$  (а  $l_3$  определяется условием  $l_1 + l_2 + l_3 = l$  и поэтому самостоятельной степенью свободы не является).

Если у системы есть более одного положения устойчивого равновесия, то на координатной плоскости  $(l_1, l_2)$  «вокруг» каждого из них должна быть своя «область притяжения» (область отклонений от равновесных значений  $l_1$  и  $l_2$ , при которых система стремится восстановить эти равновесные значения — свои для каждой области). Понятно, что эти области должны отделяться друг от друга границами, все точки которых соответствуют неустойчивым положениям равновесия, из которых система может «свалиться» в одну из «областей

притяжения». Но в нашей системе количество возможных положений равновесия конечно: один «треугольник», если он существует, а также три варианта, показанные на рис. 3.6.2. Поэтому построить из них «границы» (линии на плоскости  $(l_1, l_2)$ ) не получится.

Значит, у нашей системы имеется ровно одно положение устойчивого равновесия. Очевидно, потенциальная энергия электростатического взаимодействия зарядов в этом положении будет минимальной по сравнению с другими возможными вариантами расположения зарядов в данной системе.

Далее отметим, что если конфигурация «треугольник» (рис 3.6.1) возможна, то она обязательно является устойчивой. В самом деле, в этом случае все три силы попарного взаимодействия между зарядами равны (как это было выяснено на соответствующем этапе решения задачи). Для того, чтобы из этого «треугольника» получить какое-нибудь другое расположение зарядов, какие-то расстояния между зарядами придётся уменьшить (увеличив энергию системы), а какие-то расстояния между зарядами увеличатся (при этом энергия системы, наоборот, уменьшится). Суммарное изменение расстояний при этом будет нулевым, так как длина нити  $l$  не меняется. Но сила взаимодействия между зарядами убывает с расстоянием. Поэтому при уменьшении расстояния между зарядами увеличение энергии системы будет больше, чем уменьшение энергии в результате увеличения расстояния между другими зарядами. Следовательно, потенциальная энергия системы в равновесном положении «треугольник» минимальна по сравнению с любым другим расположением зарядов, поэтому этот «треугольник» и является положением устойчивого равновесия (если «треугольник» существует, то он является единственным, так как длины его сторон  $l_1, l_2$  и  $l_3$  однозначно определяются из решения).

Если соотношение зарядов  $q_1, q_2, q_3$  таково, что заряды не могут располагаться в вершинах треугольника, то понятно, что возможных положений равновесия всего 3 (рис. 3.6.2); одно из них — устойчивое, а два других — неустойчивые. Устойчивой будет та конфигурация, в которой меньший заряд находится между большими (две другие комбинации зарядов не обладают минимальной потенциальной энергией — эту энергию можно уменьшить, меняя соответствующие заряды местами).

**3.7\*.** Пусть частица сместилась на малое расстояние  $r \ll R$  в направлении оси  $X$ , начало которой находится в центре сферы (см. рис. 3.7). Найдём силу  $\Delta F$ , действующую на эту частицу со стороны тонкого кольца, вырезанного из сферы параллельными плоскостями  $x = h$  и  $x = h + \Delta h$ . Площадь поверхности этого кольца равна

$$\Delta S = 2\pi R \sin \alpha \cdot \frac{\Delta h}{\sin \alpha} = 2\pi R \Delta h,$$

его заряд

$$\Delta Q = Q \cdot \frac{\Delta S}{4\pi R^2} = \frac{Q \Delta h}{2R}.$$

Из приведённого в условии задачи закона взаимодействия зарядов и принципа суперпозиции находим, что сила  $\Delta F$  направлена параллельно оси  $x$  и равна

$$\Delta F = -\frac{kqQ\Delta Q(h-r)}{(R^2 - h^2 + (h-r)^2)^{\frac{3-\alpha}{2}}} = -\frac{kqQ\Delta h}{2R}(h-r)(R^2 - 2hr + r^2)^{\frac{\alpha-3}{2}}.$$

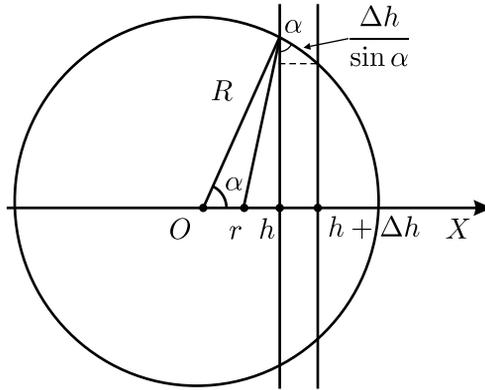


Рис. 3.7.

При малых  $r$ , используя приближённую формулу  $(1+x)^n \approx 1+nx$  при  $n = (\alpha-3)/2$  и пренебрегая слагаемыми  $\sim r^2$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Delta F &\approx -\frac{kqQ\Delta h}{2R^{4-\alpha}}(h-r)\left(1 - \frac{2hr}{R^2}\right)^{\frac{\alpha-3}{2}} \approx -\frac{kqQ\Delta h}{2R^{4-\alpha}}(h-r)\left(1 - \frac{(\alpha-3)hr}{R^2}\right) \approx \\ &\approx -\frac{kqQ}{2R^{4-\alpha}}\left(h-r - \frac{(\alpha-3)h^2r}{R^2}\right)\Delta h. \end{aligned}$$

Так как величина  $h$  изменяется в пределах от  $-R$  до  $R$ , то

$$\sum \Delta h = 2R, \quad \sum h\Delta h = 0, \quad \sum h^2\Delta h = \frac{2}{3}R^3.$$

Поэтому полная сила, действующая на заряд, равна

$$F = \sum \Delta F = -\frac{kqQ}{2R^{4-\alpha}}\left(-2rR - \frac{(\alpha-3)r}{R^2} \cdot \frac{2}{3}R^3\right) = \frac{k\alpha qQ}{3R^{3-\alpha}}r.$$

Таким образом, при  $r \ll R$  сила  $F \sim r$ . При  $\alpha qQ < 0$  эта сила является возвращающей, то есть частица будет вести себя, как груз на

пружине с жёсткостью  $\kappa = \frac{k|\alpha q Q|}{3R^{3-\alpha}}$ , и будет совершать вблизи центра сферы малые колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\kappa}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mR^{3-\alpha}}{k|\alpha q Q|}}$ .

При  $\alpha q Q > 0$  сила  $F$ , возникающая при смещении частицы, будет стремиться ещё больше удалить её от центра сферы. Поэтому при таком условии состояние равновесия заряженной частицы в центре сферы будет неустойчивым. Наконец, при  $\alpha = 0$ , что соответствует закону Кулона, сила  $F$  внутри равномерно заряженной по поверхности сферы обратится в ноль. При этом частица в любом месте внутри сферы будет находиться в состоянии равновесия.

**3.8\*.** Представим сначала, что полуплоскости имеют конечный размер  $b$  в направлении, перпендикулярном их краям. Изобразим вид рассматриваемой системы сбоку (см. рис. 3.8) и проведём через точку  $M$  две плоскости  $MM_1$  и  $MM_2$ , перпендикулярные плоскости чертежа, так, чтобы они составляли друг с другом малый угол и проходили через обе заряженные полуплоскости. Плоскости  $MM_1$  и  $MM_2$  вырежут в заряженных полуплоскостях две узкие полоски  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$ . Известно, что длинная узкая полоска создаёт на расстоянии  $r$  от себя электрическое поле с напряжённостью  $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ ,

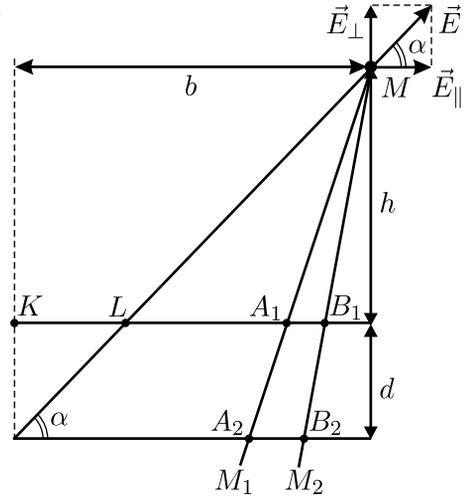


Рис. 3.8.

где заряд единицы длины полоски  $\lambda = \sigma\Delta h$  ( $\Delta h = |AB|$  — ширина полоски). Поэтому верхняя полоска  $A_1B_1$  создаёт в точке  $M$  поле  $\Delta E_1 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|A_1B_1|}{|A_1M|}$ , причём вектор  $\Delta\vec{E}_1$  направлен от  $A_1B_1$ . Аналогичным образом, нижняя полоска  $A_2B_2$  создаёт в точке  $M$  поле с напряжённостью  $\Delta E_2 = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|A_2B_2|}{|A_2M|}$ , но вектор  $\Delta\vec{E}_2$  направлен к  $A_2B_2$ . Из

подобия треугольников  $MA_1B_1$  и  $MA_2B_2$  следует, что  $\frac{|A_1B_1|}{|A_1M|} = \frac{|A_2B_2|}{|A_2M|}$ .

Поэтому поля этих полосок взаимно компенсируют друг друга.

Такие рассуждения справедливы для всех пар полосок, вырезанных плоскостями  $MM_1$  и  $MM_2$  из верхней и нижней полуплоскостей, за исключением самой дальней от точки  $M$  полоски  $KL$ , принадлежащей верхней полуплоскости. Из чертежа видно, что для неё не найдётся парной полоски на нижней полуплоскости. Поэтому искомая напряжённость поля  $E$  в точке  $M$  будет равна напряжённости, создаваемой полоской  $KL$  в этой точке :  $E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|KL|}{|LM|}$ . Так как

$$|KL| = \frac{bd}{h+d} \approx \frac{bd}{h} \ll b; \quad |LM| = \sqrt{h^2 + (b - |KL|)^2} \approx \sqrt{h^2 + b^2},$$

то  $E = \frac{\sigma bd}{2\pi\epsilon_0 h \sqrt{h^2 + b^2}}$ .

Для того, чтобы выяснить, чему равна напряжённость поля в точке  $M$  в случае бесконечных полуплоскостей, разложим вектор  $\vec{E}$  на две компоненты  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$  — параллельную и перпендикулярную полуплоскостям, и сделаем предельный переход  $b \rightarrow \infty$ :

$$E_{\parallel} = E \cos \alpha \approx \frac{\sigma b^2 d}{2\pi\epsilon_0 h (h^2 + b^2)} \rightarrow \frac{\sigma d}{2\pi\epsilon_0 h},$$

$$E_{\perp} = E \sin \alpha \approx \frac{\sigma b d}{2\pi\epsilon_0 (h^2 + b^2)} \rightarrow 0.$$

Следовательно, вектор напряжённости электростатического поля, создаваемого рассматриваемой системой в точке  $M$ , направлен параллельно полуплоскостям, а напряжённость поля равна  $E_{\parallel} = \frac{\sigma d}{2\pi\epsilon_0 h}$ .

**3.9\***. Выберем на оси цилиндров точку, расположенную вблизи их торца, и построим произвольно ориентированную коническую поверхность с вершиной в этой точке и малым телесным углом (см. рис. 3.9).

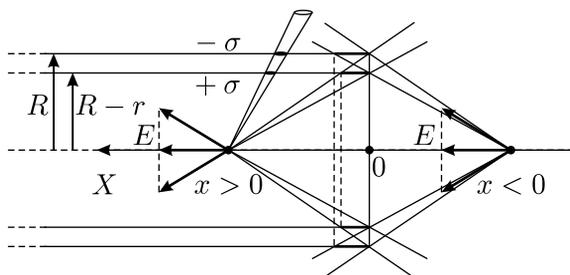


Рис. 3.9.

Если данная поверхность пересекает и положительно, и отрицательно заряженный цилиндр, то «вырезаемые» из них этой конической поверхностью заряды пропорциональны соответствующей поверхностной плотности зарядов на цилиндрах, квадратам расстояний до этих зарядов и некоторой одинаковой функции, зависящей только от параметров телесного угла. Указанные заряды создают в выбранной точке нулевое суммарное поле, поскольку оно пропорционально величинам этих зарядов и обратно пропорционально квадратам расстояний от зарядов до этой точки. Не скомпенсированными окажутся только участки положительно заряженного внутреннего цилиндра в форме кольца вблизи торца цилиндра, если точка наблюдения расположена внутри цилиндров (считаем, что при этом  $x > 0$ , то есть ось  $X$  направлена внутрь цилиндров, а начало отсчёта находится на их торце). Если же  $x < 0$ , то есть точка наблюдения находится вне цилиндров, то не скомпенсированными окажутся участки отрицательно заряженного внешнего цилиндра, также имеющие форму кольца (см. рис. 3.9). Заметим, что другой торец цилиндров согласно условию задачи находится очень далеко, и полем от него можно пренебречь.

Поле кольца радиусом  $R$ , имеющего равномерно распределённый по длине заряд  $Q$ , на оси кольца на расстоянии  $x$  от его плоскости направлено вдоль оси и равно, как нетрудно видеть,

$$E = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad \text{Ширина положительно заряженного кольца}$$

(при  $x > 0$ ) равна, как видно из рисунка,  $\frac{r}{R} \cdot x$ , а ширина отрица-

тельно заряженного кольца (при  $x < 0$ ) равна  $\frac{r}{R-r} \cdot (-x) \approx \frac{r}{R} \cdot (-x)$ ,

поскольку  $r \ll R$ . Заряды колец равны, соответственно,

$$Q_+ = \sigma \cdot 2\pi(R-r) \cdot \frac{r}{R} \cdot x \approx 2\pi\sigma \cdot rx,$$

$$Q_- \approx -\sigma \cdot 2\pi R \cdot \frac{r}{R} \cdot (-x) = 2\pi\sigma \cdot rx.$$

Заметим, что отрицательный знак  $Q_-$  при такой записи получается автоматически, за счёт того, что в данном случае  $x < 0$ . Объединяя оба выражения для любых значений  $x$ , можно записать:  $Q \approx 2\pi\sigma \cdot rx$ . Подставляя это значение  $Q$  в выражение для напряжённости поля заряженного кольца, получаем для проекции вектора напряжённости электрического поля на ось  $X$  вблизи торца цилиндров:

$$E \approx \frac{\sigma rx^2}{2\epsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

**3.10.** Поскольку в условии сказано, что при колебаниях процесс повторяется, то потерями энергии можно пренебречь. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии: в крайних положениях, когда шарик останавливается, суммы его потенциальной энергии в поле силы тяжести и энергии электрического поля, имеющегося в системе, должны быть одинаковы.

Электрическое поле в пространстве справа от пластины, как нетрудно показать, совпадает с полем, которое создавалось бы в отсутствие пластины двумя зарядами:  $+q$  и  $-q$ , расположенными зеркально симметрично по отношению к поверхности пластины (такой подход к решению задачи называется «методом электростатических изображений»). Действительно, суммарный потенциал, создаваемый двумя такими зарядами в каждой точке плоскости симметрии системы, равен нулю, и таким образом, в эту плоскость можно поместить тонкую заземлённую пластину. Все силовые линии заряда  $+q$  при этом будут замыкаться на её правой поверхности, индуцированный заряд на которой, очевидно, будет равен  $-q$ . Если теперь удалить заряд  $-q$ , находящийся слева от пластины, и снять индуцированный заряд  $+q$  с левой поверхности пластины, то справа от неё поле не изменится, а поле слева исчезнет. Поэтому все точки пространства слева от тонкой пластины будут иметь одинаковый потенциал, и это пространство можно заполнить проводником, что не скажется на поле справа.

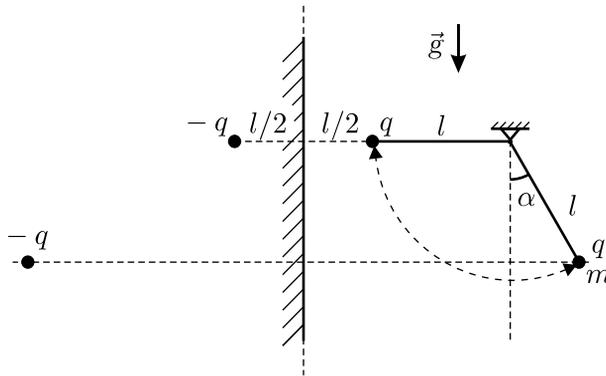


Рис. 3.10.

Поскольку поле справа от пластины совпадает с полем, создаваемым двумя точечными зарядами  $+q$  и  $-q$ , расположенными на соответствующем расстоянии  $r$  друг от друга, а слева от пластины поле отсутствует, то энергия электрического поля, имеющегося в нашей системе, равна половине электростатической энергии взаимодействия этих заря-

дов:  $W_{\text{эл}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r}$ . В начальном положении расстояние  $r$  равно (см. рис. 3.10)  $r_1 = 2 \cdot (1,5l + l \sin \alpha)$ , а в конечном положении  $r_2 = l$ . Отсчитывая потенциальную энергию в поле силы тяжести от начального положения шарика, запишем закон сохранения энергии:

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(3l + 2l \sin \alpha)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{l} + mgl \cos \alpha.$$

Отсюда

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left( 1 - \frac{1}{3 + 2 \sin \alpha} \right) = mgl^2 \cos \alpha,$$

и

$$q = 2l \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \cos \alpha \cdot \frac{3 + 2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}.$$

**3.11.** Воспользуемся для решения задачи методом изображений (см. [решение предыдущей задачи](#)). Суть этого метода фактически сводится к тому, что мы мысленно размещаем в пространстве набор фиктивных точечных зарядов таким образом, чтобы потенциалы всех проводников при этом остались прежними.

При этом поле, создаваемое всеми (реальными и фиктивными) зарядами в пространстве, свободном от проводников, будет в точности совпадать с полем, которое создают там реальные заряды вместе с зарядами, наведёнными на поверхностях проводников. Следовательно, для расчёта системы можно будет воспользоваться законом Кулона, что существенно облегчит вычисления. В рассматриваемой задаче потенциал полуплоскостей равен нулю, поскольку проводники уходят на бесконечность. Из соображений симметрии следует, что в данной системе наведённые заряды можно заменить тремя фиктивными зарядами (одним положительным  $+q$  и двумя отрицательными  $-q$ ), размещёнными за проводником так, как показано на рисунке 3.11. Действительно, при таком расположении зарядов все точки поверхности проводника находятся на одинаковых расстояниях от соответствующих пар разноимённых зарядов, что и обеспечивает равенство нулю потенциала проводящей поверхности.

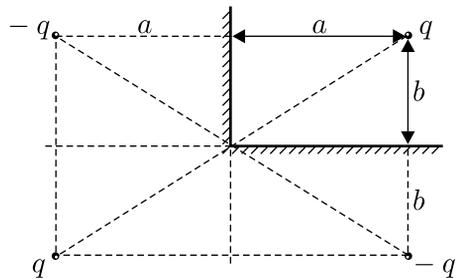


Рис. 3.11.

Поскольку электрическое поле в реальной системе существует только в правом верхнем квадранте (см. рисунок), то полная энергия взаимодействия зарядов в этой системе  $W$  может быть найдена, как  $1/4$  от суммы энергий взаимодействия, взятой по всем парам зарядов:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( 2 \cdot \left( -\frac{q^2}{2a} \right) + 2 \cdot \left( -\frac{q^2}{2b} \right) + 2 \cdot \frac{q^2}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \\ &= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

**3.12.** Направим ось  $X$  вдоль струны в направлении движения бусинки (см. рис. 3.12).

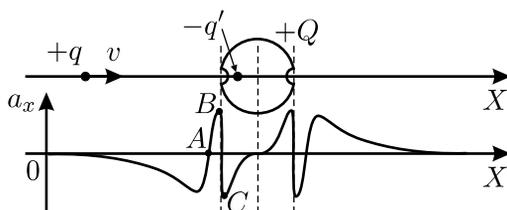


Рис. 3.12.

Так как ускорение бусинки прямо пропорционально действующей на неё силе ( $a_x = F_x/m$ ), то для решения задачи достаточно определить, как изменяется сила взаимодействия бусинки с шаром. Для ответа на этот вопрос воспользуемся методом изображений (см. решения задач 3.10 и 3.11). Из соображений симметрии ясно, что фиктивный точечный заряд-изображение  $q'$ , к действию которого сводится влияние наведённых на поверхности шара зарядов, будет располагаться внутри шара на оси  $X$ , и поэтому интересующая нас сила и ускорение также направлены вдоль оси  $X$ . Знак заряда  $q'$  будет противоположен знаку заряда бусинки  $q$ , который для определённости можно считать, например, положительным. Таким образом, взаимодействие бусинки с шаром можно представить, как суперпозицию отталкивания бусинки от положительного заряда шара  $+Q$ , который можно считать расположенным в центре шара, и притяжения бусинки к заряду-изображению  $q'$ . При движении бусинки из бесконечности (в положительном направлении оси  $X$ ) к поверхности шара величина  $|q'|$  будет возрастать, начиная с нулевого значения, а само изображение  $q'$  будет смещаться в сторону бусинки — от центра шара к его периферии. Поэтому при больших расстояниях между бусинкой и поверхностью шара будет преобладать

сила отталкивания бусинки от заряда  $Q$  (проекция этой силы на ось  $X$  отрицательна).

По мере приближения бусинки к шару сила притяжения бусинки к заряду  $q'$  будет играть всё большую роль. На некотором расстоянии между бусинкой и шаром сила их взаимодействия обратится в ноль (точка  $A$  на графике). При дальнейшем приближении бусинки к шару начнёт преобладать сила притяжения бусинки к заряду  $q'$  (проекция силы сменит знак). Величина этой силы притяжения будет возрастать до момента, когда бусинка влетит в отверстие (точка  $B$ ). Как известно, равномерно распределённый по поверхности шара заряд не создаёт внутри шара электрического поля. Следовательно бусинка, оказавшись внутри шара, будет только притягиваться к своему изображению  $q'$ , которое, как следует из соображений симметрии, окажется снаружи шара. Поэтому при пролёте бусинки через отверстие действующая на неё сила очень быстро, практически скачком, изменит знак (точка  $C$ ). При дальнейшем движении бусинки к центру шара изображение будет удаляться в бесконечность, причём  $|q'|$  будет уменьшаться. Поэтому сила притяжения бусинки к  $q'$  также будет уменьшаться и обратится в ноль, когда бусинка окажется в центре шара. Далее, ввиду центральной симметрии системы, события будут повторяться, но проекция ускорения на ось  $X$  на каждом из участков движения бусинки изменит знак на противоположный по сравнению с движением на соответствующем участке по другую сторону от центра шара.

**3.13.** Так как заземляющий сферу проводник является тонким и длинным, то можно пренебречь электрическим полем этого проводника и считать, что кольцо со сферой настолько удалены от других тел, что их влиянием можно пренебречь. В силу сказанного и с учётом того, что сфера расположена симметрично относительно кольца, можно считать, что заряд  $Q$  распределён по кольцу равномерно.

Разобьём кольцо на малые элементы, каждый из которых можно считать точечным зарядом величины  $\Delta Q$ . Как известно, поверхность нулевого потенциала поля, создаваемого двумя не равными по величине и противоположными по знаку точечными зарядами, имеет вид сферы, окружающей меньший по модулю заряд. Следовательно, поле, создаваемое точечным зарядом  $\Delta Q$ , находящимся на расстоянии  $R$  от центра заземлённой сферы, и зарядами, имеющимися на заземлённой сфере радиуса  $r < R$ , вне сферы должно совпадать с полем точечных зарядов  $\Delta Q$  и  $-\Delta q$  при определённых величине и расположении последнего. Из соображений симметрии следует, что заряд  $-\Delta q$  должен находиться на прямой, соединяющей центр данной сферы и заряд  $\Delta Q$ . Кроме того,

очевидно, что заряд  $-\Delta q$  должен находиться внутри сферы. Если расстояние от заряда  $-\Delta q$  до центра сферы равно  $\rho$ , то, поскольку все точки сферы имеют нулевой потенциал, должны выполняться соотношения:

$$\frac{\Delta Q}{R-r} - \frac{\Delta q}{r-\rho} = 0, \quad \frac{\Delta Q}{R+r} - \frac{\Delta q}{r+\rho} = 0.$$

Отсюда  $\rho = \frac{r^2}{R}$  и  $\Delta q = \frac{r}{R}\Delta Q$ .

Приведённые рассуждения справедливы для любого элемента кольца. Из сказанного следует, что поле вне сферы в рассматриваемой задаче эквивалентно полю двух коаксиальных колец — радиуса  $R$  с зарядом  $Q$  и радиуса  $\rho$  с зарядом  $-q = -\sum \Delta q = -\frac{r}{R}\sum \Delta Q = -\frac{r}{R}Q$ . Поскольку потенциал поля кольца радиуса  $R$  с равномерно распределённым по нему общим зарядом  $Q$  на оси кольца на расстоянии  $x$  от его плоскости равен  $\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$ , то искомый потенциал:

$$\varphi(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{cases} 0 & \text{при } |x| < r; \\ \frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{r}{\sqrt{r^4+x^2R^2}} & \text{при } |x| \geq r. \end{cases}$$

**3.14.** Обозначим через  $v_{\min}$  минимальную скорость, которую нужно сообщить первой бусинке для того, чтобы она могла приблизиться ко второй бусинке на минимально возможное расстояние  $a$ . Тогда в момент наибольшего сближения скорости бусинок будут одинаковы и равны  $u$ . Запишем для данной системы законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_{\min} = 2mu, \quad \frac{mv_{\min}^2}{2} = 2 \cdot \frac{mu^2}{2} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Отсюда  $v_{\min} = \frac{q}{\sqrt{\pi\epsilon_0 ma}}$ . Первая бусинка обгонит вторую, если ей сообщить по направлению ко второй бусинке скорость большую, чем  $v_{\min}$ .

**3.15.** Сначала найдём скорости шариков в момент перед ударом. Так как массы шариков одинаковы, то эти скорости также будут одинаковы. Запишем закон сохранения энергии для начального состояния и момента времени перед ударом:  $mv^2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{2r} \right)$ , где  $v$  — скорости шариков перед ударом. Так как массы шариков одинаковы, то после абсолютно упругого удара они обменяются скоростями, то есть их скорости окажутся одинаковыми, равными по модулю  $v$  и направленными

в противоположные стороны. Значит, суммарная кинетическая энергия шариков останется равна  $mv^2$ . В то же время, поскольку в результате пробоя заряды шариков станут одинаковыми и равными  $(q_1 + q_2)/2$ , то потенциальная энергия их взаимодействия изменится. Конечная скорость шариков после удара может быть найдена из закона сохранения энергии, записанного для момента времени сразу после удара и конечного состояния системы, когда шарики разлетятся на бесконечно большое расстояние и потенциальная энергия взаимодействия обратится в ноль:

$$mu^2 - mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 + q_2}{2} \right)^2 \frac{1}{2r},$$

где  $u$  — искомая конечная скорость, одинаковая для обоих шариков. Из записанных уравнений получаем:

$$u = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m} \left( \frac{(q_1 - q_2)^2}{8r} + \frac{q_1 q_2}{l} \right)}.$$

Заметим, что при столкновении шариков часть энергии системы рассеивается. Это происходит при электрическом пробое, в процессе которого энергия расходуется на нагрев шариков и уносится в виде электромагнитных волн. Поэтому данную задачу нельзя решать, записывая закон сохранения энергии для начального и конечного состояний всей системы.

**3.16.** Разрезанное кольцо можно представить как суперпозицию целого кольца, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда  $\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ , и прикреплённого к нему в точке  $A$  точечного заряда  $q = -\lambda l = -\frac{Ql}{2\pi R}$ . После включения электрического поля кольцо начнёт поворачиваться вокруг оси так, что точка  $A$  будет двигаться в направлении точки  $B$ , которая лежит на линии, проходящей

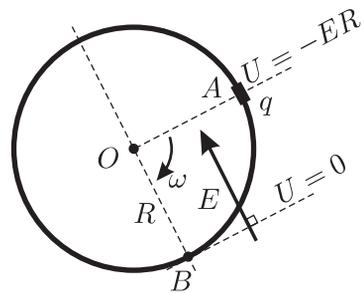


Рис. 3.16.

через точку  $O$  параллельно силовым линиям  $\vec{E}$  (см. рис. 3.16). В этой точке угловая скорость кольца будет максимальной. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии плоскость, проходящую через точку  $B$  перпендикулярно к силовым линиям. Так как потенциал  $\varphi$  в однородном электростатическом поле линейно убывает с расстоянием при

движении в направлении вдоль силовых линий, то закон сохранения механической энергии для вращения кольца можно записать в виде:

$$\frac{mv^2}{2} = q(\varphi_A - \varphi_B) = -\frac{Ql}{2\pi R} \cdot (-ER) = \frac{QlE}{2\pi},$$

где  $v$  — максимальная линейная скорость точек кольца. Отсюда иско-  
мая максимальная угловая скорость кольца  $\omega = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{QlE}{\pi m R^2}}$ .

**3.17\***. Пусть  $SABC$  — правильная пирамида, образованная пересечением четырёх бесконечных заряженных плоскостей,  $SH$  — её высота,  $SD$  — высота боковой грани  $CSB$  (см. рис. 3.17.1). Поле, создаваемое каждой плоскостью, однородно, направлено по нормали к данной плоскости и по модулю равно  $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ . Так как пирамида правильная, то внутри пирамиды сумма проекций всех четырёх векторов напряжённости на плоскость основания  $ABC$  равна нулю, а сумма проекций векторов напряжённости на высоту пирамиды  $SH$  равна  $E_x = E - 3E \sin \alpha$ . Здесь  $\alpha$  — угол между высотой пирамиды  $SH$  и высотой любой из боковых граней пирамиды, ось  $X$  направлена вдоль  $SH$ .

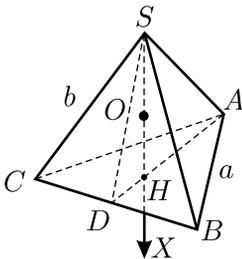


Рис. 3.17.1.

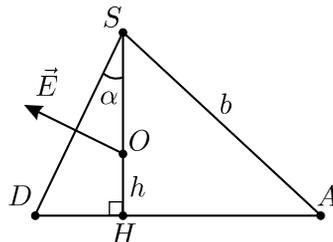


Рис. 3.17.2.

На рисунке 3.17.2 показан треугольник  $ASD$ , полученный в результате сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $AS$  и высоту  $SD$  противолежащей ему боковой грани. Вектор  $\vec{E}$  показывает напряжённость поля, создаваемого плоскостью, в которой лежит грань  $BCS$ , точка  $O$  определяет положение заряда  $q$ . Аналогичный рисунок можно нарисовать для каждой из трёх боковых граней пирамиды. Из геометрических соображений следует, что

$$\sin \alpha = \frac{DH}{DS} = \frac{\frac{1}{3} \cdot DA}{DS} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4b^2 - a^2}},$$

то есть

$$E_x = E(1 - 3 \sin \alpha) = E \left( 1 - \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \right).$$

Значит, в зависимости от соотношения между стороной основания  $a$  и боковым ребром  $b$ , возможны три случая:

а)  $E_x > 0$  — реализуется при  $\sqrt{3}a < \sqrt{4b^2 - a^2}$ , откуда следует условие  $b > a$ . В этом случае шарик после того, как его отпустят, ударится о плоскость основания пирамиды. Так как поле однородно, то на шарик после его отпускания действует постоянная сила  $F_x = qE_x$ . Из закона сохранения энергии получаем:  $\frac{mv^2}{2} = F_x h = qE_x h$ , откуда

$$v = \sqrt{\frac{\sigma q h}{m \varepsilon_0} \left( 1 - \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \right)} \quad \text{при } b > a.$$

б)  $E_x = 0$  — реализуется при  $a = b$ . В этом случае поле внутри пирамиды отсутствует, и шарик не будет двигаться, то есть  $v = 0$ .

в)  $E_x < 0$  — реализуется при  $\sqrt{3}a > \sqrt{4b^2 - a^2}$ , откуда следует условие  $b < a$ . В этом случае шарик ударится о вершину пирамиды и закон сохранения энергии можно записать в виде:

$$\frac{mv^2}{2} = -qE_x(SH - h).$$

С учётом того, что  $SH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$  и  $b > \frac{a}{\sqrt{3}}$  (см. рис. 3.17.2), получаем:

$$v = \sqrt{\frac{\sigma q}{m \varepsilon_0} \left( \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - h \right) \left( \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{4b^2 - a^2}} - 1 \right)} \quad \text{при } \frac{a}{\sqrt{3}} < b < a.$$

**3.18.** Представим, что капля ртути растекается по поверхности пластины достаточно медленно, так, что тепло не выделяется. Пусть образовавшийся при растекании слой жидкости имеет площадь  $\Delta S$ , которая намного превышает площадь поверхности исходной капли. При этом поверхностная энергия жидкости увеличивается на  $\Delta W_1 = 2\sigma \Delta S$ , а энергия заряженного конденсатора возрастает на

$$\Delta W_2 = \frac{\Delta C U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \Delta S U^2}{2d},$$

где  $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$  — ёмкость получившегося при растекании капли плоского конденсатора,  $U$  — искомое напряжение батареи. При дозарядке конденсатора батарея перемещает заряд  $\Delta q = \Delta C U$  и при этом совершает работу  $\Delta A = \Delta q U = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta S U^2/d$ . Применяя закон сохранения энергии  $\Delta W_1 + \Delta W_2 = \Delta A$ , получим:  $U = 2 \sqrt{\frac{\sigma d}{\varepsilon_0 \varepsilon}}$ .

**3.19\***. Так как потенциал заземлённой проводящей оболочки равен нулю, то поле в пространстве вне оболочки отсутствует. Поэтому поверхностная плотность заряда одной половины оболочки, находящейся вблизи первой полусферы, равна  $-\sigma_1$ , а поверхностная плотность заряда другой половины оболочки, находящейся вблизи второй полусферы, равна  $-\sigma_2$ . Следовательно, каждая из полусфер является обкладкой конденсатора, причём роль второй обкладки для неё играет соответствующая половина оболочки. Так как радиус оболочки близок к радиусу сферы, то поля в зазорах между полусферами и половинами оболочки можно считать однородными, а два получившихся конденсатора — плоскими.

Рассмотрим первый конденсатор. Напряжённость поля внутри него равна  $E = \sigma_1/\varepsilon_0$ , а сила притяжения, действующая на единицу площади обкладки, составляет  $f = \sigma_1 \cdot \frac{E}{2} = \frac{\sigma_1^2}{2\varepsilon_0}$ . Величина  $f$  имеет смысл давления электростатического поля на поверхность заряженной полусферы. Поэтому полная сила, действующая на полусферу со стороны соответствующей половины оболочки, равна  $F_1 = fS = \frac{\pi R^2 \sigma_1^2}{2\varepsilon_0}$ , где  $S = \pi R^2$  — площадь основания полусферы (аналогичный подход используется также в решении задачи 2.73). Сила  $\vec{F}_1$ , очевидно, направлена в сторону оболочки перпендикулярно плоскости, разделяющей полусферы. Сила  $\vec{F}_2$ , действующая со стороны оболочки на вторую полусферу, может быть найдена при помощи аналогичных рассуждений: она равна по величине  $F_2 = \frac{\pi R^2 \sigma_2^2}{2\varepsilon_0}$  и направлена противоположно силе  $\vec{F}_1$ . Таким образом, суммарная сила электростатического происхождения, действующая на сферу, равна по величине

$$F = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \frac{\pi R^2}{2\varepsilon_0} \cdot |\sigma_2^2 - \sigma_1^2|$$

и направлена перпендикулярно плоскости, разделяющей полусферы, в сторону полусферы с большей плотностью заряда.

Если рассматриваемая оболочка будет изолированной, то, поскольку внутри металла электростатическое поле равно нулю, заряды на её внутренней поверхности будут такими же, как в случае заземлённой оболочки. Поэтому суммарная сила  $F$ , действующая на внутреннюю сферу, не изменится. При этом на внешней поверхности оболочки появится заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду на внутренней поверхности оболочки, и в пространстве вне оболочки появится электрическое поле. Но, поскольку области пространства внутри и вне проводящей оболочки независимы друг от друга в смысле происходящих в них электрических явлений, то наличие поля снаружи от оболочки никак не будет влиять на поле внутри неё.

**3.20.** Так как плоскость бесконечна, то её потенциал совпадает с потенциалом бесконечно удалённых точек, то есть может быть принят равным нулю. Значит, можно считать плоскость заземлённой и решать эту задачу с использованием метода изображений. Согласно этому методу, поле между шариком и плоскостью эквивалентно полю, которое создаётся двумя одинаковыми разноимённо заряженными шариками, расположенными так, что второй шарик является зеркальным отражением первого в плоскости (см. решение задачи 3.10). Пренебрегая эффектами взаимной электрической индукции, то есть перераспределением зарядов на шарике под действием поля другого шарика (это можно сделать ввиду того, что размеры шариков малы по сравнению с расстоянием до плоскости), найдём разность потенциалов между поверхностью положительно заряженного шарика и плоскостью:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{L} \right) - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{2L-R} - \frac{1}{L} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{2L-R} \right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R} \cdot \frac{1 - (R/L)}{2 - (R/L)} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}.\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $R \ll L$ , и пренебрегли отношением  $R/L$  по сравнению со слагаемыми порядка единицы. Для получения ответа воспользуемся определением ёмкости:  $C = \frac{Q}{\Delta\varphi} \approx 4\pi\varepsilon_0 R$ . Отметим, что ответ совпадает с выражением для ёмкости уединённого шара.

**3.21\***. Если бы бугорка не было, то заряд  $Q$ , равномерно распределённый по поверхности проводящей сферы, создавал бы в её центре потенциал  $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ , и ёмкость сферы была бы равна  $C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R$ .

Однако из-за наличия бугорка часть заряда находится не на расстоянии  $R$  от центра, а на немного большем расстоянии. В результате потенциал  $\varphi$  изменяется на малую величину  $\Delta\varphi$ . Для того, чтобы оценить  $\Delta\varphi$ , примем, что на бугорке находится малый заряд  $q$ , и будем считать, что он находится на расстоянии порядка  $r$  от поверхности сферы. Тогда

$$\Delta\varphi \sim \frac{q}{4\pi\epsilon_0(R+r)} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \approx -\frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Для оценки величины заряда бугорка  $q$  рассмотрим напряжённость электрического поля вблизи центра бугорка, которая должна обращаться в нуль. Заряды на сфере создают в этой точке поле с напряжённостью  $E_1 \simeq \frac{Q}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 R^2}$ , а заряды на бугорке — с напряжённостью

$E_2 \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ . Из условия  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$  находим:  $q \simeq \frac{Qr^2}{2R^2}$  (этот результат имеет следующий физический смысл: поверхностные плотности зарядов на сфере и на бугорке одинаковы по порядку величины). Окончательно для изменения ёмкости сферы, обусловленного наличием бугорка, получаем:

$$\Delta C = \frac{Q}{\varphi + \Delta\varphi} - \frac{Q}{\varphi} \approx -\frac{Q}{\varphi^2} \Delta\varphi \simeq 2\pi\epsilon_0 \frac{r^3}{R^2}.$$

**3.22.** Пусть  $V, V', Q, Q'$  — объёмы и заряды пирамид  $SABCD$  и  $SA'B'C'D'$  соответственно. Так как пирамиды подобны и их заряд пропорционален объёму, а объём — кубу высоты, то  $V/V' = Q/Q' = H^3/h^3$ . До того, как часть исходной пирамиды отрезали, потенциал  $\varphi_0$  в точке  $S$  складывался из потенциала  $\varphi'$  пирамиды  $SA'B'C'D'$  и потенциала  $\varphi''$  оставшейся части  $ABCD A'B'C'D'$ , то есть  $\varphi_0 = \varphi' + \varphi''$ . Потенциал, создаваемый в точке  $S$  каждой из пирамид, прямо пропорционален их заряду и обратно пропорционален их характерному линейному размеру. Поэтому  $\frac{\varphi_0}{\varphi'} = \frac{Q/H}{Q'/h} = \frac{H^2}{h^2}$ . Из двух последних уравнений получаем:

$$\varphi'' = \varphi_0 - \varphi' = \left(1 - \frac{h^2}{H^2}\right) \varphi_0.$$

**3.23.** При прикладывании к шару диска плашмя заряды равномерно распределяются по поверхности диска, и плотности зарядов на поверхностях шара и диска оказываются одинаковыми. При отрыве от шара диск каждый раз уносит заряд, величина которого во столько

раз меньше заряда шара, во сколько раз площадь одной стороны диска меньше площади поверхности шара:  $\frac{q}{Q} = \frac{\pi r^2}{4\pi R^2} = \frac{1}{40000}$ . Здесь  $q$  и  $Q$  — заряды диска и шара соответственно. Из написанного отношения следует, что после каждого касания с шара уносится  $1/40000$  часть его заряда.

Потенциал уединённого шара пропорционален его заряду. Поэтому для того, чтобы уменьшить потенциал шара на  $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$  В, что составляет  $1/1000$  часть от его первоначального потенциала, нужно на такую же часть уменьшить его заряд. Величина заряда, уносимого каждый раз диском, много меньше исходного заряда шара, ввиду чего можно приближённо считать, что уносимый заряд постоянен (на самом деле, он равен  $\frac{1}{40000}Q$ , а  $Q$  после каждого касания немного уменьшается). Тогда, унося с шара каждый раз по  $1/40000$  части исходного заряда, мы уменьшим заряд (а значит, и потенциал) на  $1/1000$  часть за

$$n = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)/\varphi_1}{r^2/(4R^2)} = 40 \text{ касаний.}$$

**3.24.** Ясно, что для получения максимально возможного напряжения нужно зарядить оба конденсатора и соединить их последовательно с батареей. Если многократно проделать такую процедуру: зарядить до напряжения батареи конденсатор меньшей ёмкости  $C_1 = 2$  мкФ, соединить его последовательно с батареей, и зарядить от них конденсатор большей ёмкости  $C_2 = 3$  мкФ, то напряжение на этом конденсаторе  $C_2$  будет стремиться к величине  $2\mathcal{E}$ . Затем к последовательно соединённым батарее и заряженному описанным способом конденсатору ёмкости  $C_2$  можно последовательно подключить заряженный до напряжения батареи  $\mathcal{E}$  конденсатор меньшей ёмкости. В результате получим разность потенциалов  $U = 4\mathcal{E} = 4$  В. Однако эта величина не является максимально возможной!

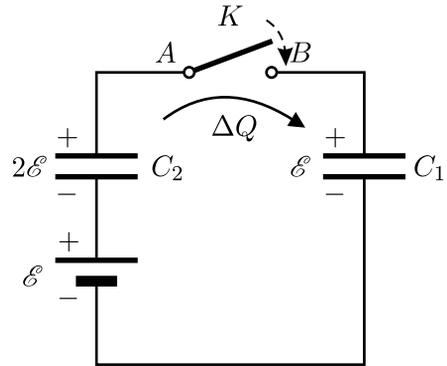


Рис. 3.24.

Последняя операция, с помощью которой можно получить ещё большую разность потенциалов, такова: подключим последовательно

соединённые батарею и заряженный до напряжения  $2\mathcal{E}$  конденсатор большей ёмкости параллельно с заряженным от батареи конденсатором меньшей ёмкости (см. рис. 3.24). При этом после замыкания ключа  $K$  по цепи протечёт заряд  $\Delta Q$ , и снижение разности потенциалов на конденсаторе большей ёмкости будет меньше, чем повышение разности потенциалов на конденсаторе меньшей ёмкости. Заряд  $\Delta Q$  можно найти из условия выравнивания потенциалов точек  $A$  и  $B$  цепи:

$$\mathcal{E} + 2\mathcal{E} - \frac{\Delta Q}{C_2} = \mathcal{E} + \frac{\Delta Q}{C_1}, \quad \text{откуда} \quad \Delta Q = \frac{2\mathcal{E}C_1C_2}{C_1 + C_2}.$$

Затем вновь соединим батарею и конденсаторы последовательно друг с другом. В этом случае получится максимальная разность потенциалов:

$$U_{\max} = \mathcal{E} + 2\mathcal{E} - \frac{\Delta Q}{C_2} + \mathcal{E} + \frac{\Delta Q}{C_1} = 4\mathcal{E} + 2\mathcal{E} \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2} = 2\mathcal{E} \frac{C_1 + 3C_2}{C_1 + C_2} = 4,4 \text{ В}.$$

**3.25\***. Прежде всего, понятно, что максимально возможная ёмкость будет у батареи тогда, когда все маленькие конденсаторы будут соединены параллельно. Вопрос состоит только в том, как проводить процедуру зарядки и соединения маленьких конденсаторов. Можно, например, сначала соединить все маленькие конденсаторы параллельно, а затем присоединить получившуюся батарею параллельно к большому конденсатору. В этом случае разность потенциалов между обкладками конденсаторов после соединения будет равна:

$$\Delta\varphi = \frac{Q}{C + N \cdot (C/N)} = \frac{Q}{2C},$$

а заряд, который приобретёт батарея, будет равен  $q' = Q/2$ . Здесь учтено, что ёмкость маленького конденсатора в  $N = 1000$  раз меньше ёмкости большого конденсатора:  $C_1 = C/N$ . Таким образом, при этом способе зарядки заряд большого конденсатора просто делится пополам.

Однако, можно сначала заряжать маленькие конденсаторы, а потом собирать из них батарею. Ясно, что заряжать конденсаторы нужно так, чтобы заряд каждого был по возможности максимальным. Поэтому бессмысленно подсоединять к большому конденсатору несколько параллельно соединённых маленьких конденсаторов — выгоднее сначала подсоединить их по отдельности, а потом уже соединить их параллельно. Также очевидно, что невыгодно подсоединять к большому конденсатору несколько последовательно соединённых маленьких конденсаторов — ведь снимаемый с большого конденсатора заряд пропорционален ёмкости, а при последовательном соединении конденсаторов ёмкость батареи получается меньше, чем исходная

ёмкость любого из составляющих её элементов. Значит, самый выгодный способ создания батареи — по очереди подсоединять к большому конденсатору все маленькие конденсаторы, а уже затем собрать из них батарею.

Найдём разность потенциалов  $\Delta\varphi^{(1)}$  между обкладками большого конденсатора и его заряд  $Q^{(1)}$  после того, как к нему будет подсоединён первый маленький незаряженный конденсатор:

$$\Delta\varphi^{(1)} = \frac{Q}{C + (C/N)}, \quad Q^{(1)} = C\Delta\varphi^{(1)} = \frac{Q}{1 + (1/N)}.$$

Аналогично, заряд большого конденсатора после подключения к нему второго маленького незаряженного конденсатора:

$$Q^{(2)} = C\Delta\varphi^{(2)} = \frac{Q^{(1)}}{1 + (1/N)} = \frac{Q}{(1 + (1/N))^2}.$$

Продолжая эту процедуру далее, получим, что после подключения  $N$ -го маленького незаряженного конденсатора большой конденсатор будет иметь заряд:

$$Q^{(N)} = \frac{Q}{(1 + (1/N))^N}.$$

Заметим, что поскольку  $N$  достаточно велико, то справедливо следующее приближённое равенство:  $\left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx e \approx 2,72$ , где число  $e$  — основание натуральных логарифмов. Итак, после всех манипуляций на большом конденсаторе окажется заряд  $Q/e$ , а на маленьких конденсаторах — суммарный заряд

$$q = Q(1 - e^{-1}) \approx 0,63Q.$$

Заметим, что заряд получившейся батареи больше, чем заряд, оставшийся на большом конденсаторе.

**3.26.** Из закона сохранения заряда следует, что заряды, образовавшиеся на всех конденсаторах, примерно одинаковы (по порядку величины). Однако разность потенциалов между обкладками конденсатора  $1000C$ , ввиду его большой ёмкости, очень мала по сравнению с разностями потенциалов между обкладками других конденсаторов. Поэтому в нулевом приближении можно считать, что вместо конденсатора  $1000C$  в схеме имеется проводящая перемычка. Тогда схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке 3.26.

Пусть  $U_1$  — напряжение на конденсаторах  $C$  и  $2C$ ,  $U_2$  — напряжение на конденсаторах  $3C$  и  $4C$ . Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд, находящийся на соединённых друг с другом обкладках конденсаторов, равен нулю, то есть

$$3CU_2 + 4CU_2 = CU_1 + 2CU_1,$$

откуда  $U_2 = \frac{3}{7}U_1$ . Учитывая, что  $\mathcal{E} = U_1 + U_2$ , для напряжений  $U_1$  и  $U_2$  получаем:  $U_1 = 0,7\mathcal{E}$ ,  $U_2 = 0,3\mathcal{E}$ .

Теперь, после того, как мы оценили величины напряжений на маленьких конденсаторах, можно вернуться к исходной схеме и оценить накопленный конденсаторами заряд. Заряд на конденсаторе с ёмкостью  $3C$  приблизительно равен  $q_1 \approx 3CU_2 = 0,9\mathcal{E}C$ . Заряд на конденсаторе с ёмкостью  $C$  приблизительно равен  $q_2 \approx CU_1 = 0,7\mathcal{E}C$ . Таким образом, заряд, накопленный конденсатором  $1000C$ , приблизительно равен  $q \approx q_1 - q_2 = 0,2\mathcal{E}C$ . Отметим, что полученная нами оценка величины заряда  $q$  очень близка к точному ответу  $q = \frac{\mathcal{E}C}{5,012}$ , который можно

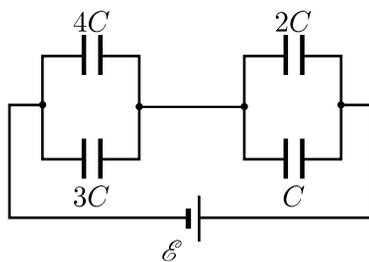


Рис. 3.26.

получить, аккуратно проведя все необходимые вычисления. Видно, что оценочный результат отличается от точного не более, чем на 0,2%.

**3.27.** Пусть после того, как в конденсатор внесли пластины, напряжённость электрического поля около его обкладок вне диэлектрика стала равна  $E$ . Тогда напряжённость поля внутри диэлектрических пластин стала равна  $E' = E/\varepsilon$ , а разность потенциалов между каждой из обкладок и металлической пластиной  $\varphi' = \frac{d}{3}E' = \frac{Ed}{3\varepsilon}$ . Поскольку исходный конденсатор с вставленной в него металлической пластиной можно рассматривать, как два последовательно соединённых конденсатора, заряженных до разности потенциалов  $\varphi'$  каждый, то разность потенциалов между обкладками исходного конденсатора равна просто  $2\varphi'$ . С другой стороны, исходный конденсатор подключён к источнику постоянного напряжения с ЭДС, равной  $\mathcal{E}$ . Поэтому  $\mathcal{E} = 2\varphi' = \frac{2Ed}{3\varepsilon}$ . Отсюда  $E = \frac{3\varepsilon\mathcal{E}}{2d}$ .

Так как сила притяжения обкладок друг к другу пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля, то  $\frac{F}{F_0} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2$ .

Здесь  $E_0 = \mathcal{E}/d$  — напряжённость электрического поля между обкладками конденсатора до того, как в него были вставлены пластины,  $F$  — искомая сила. Принимая во внимание выражение для  $E$ , получим ответ:

$$F = F_0 \left( \frac{3\varepsilon}{2} \right)^2.$$

**3.28.** После соединения обкладок конденсатора проводником заряды будут перетекать с одной пластины на другую до тех пор, пока их потенциалы не станут одинаковыми. Потенциалы пластин выровняются тогда, когда с заряженной пластины на незаряженную перетечёт заряд  $Q/2$ , вследствие чего поле в пространстве между пластинами исчезнет. Поле снаружи конденсатора при этом не изменится. Следовательно, в процессе перетекания заряда в виде тепла выделится энергия, которая была запасена в электростатическом поле, имевшемся в пространстве между пластинами до их соединения проводником. Это поле создавалось пластиной с зарядом  $Q$ . Заметим, что точно такое же поле было бы между обкладками этого конденсатора, если бы на них находились заряды  $Q/2$  и  $-Q/2$ . Энергия, запасённая в конденсаторе, в этом случае была бы равна

$$W = \frac{(Q/2)^2}{2C} = \frac{Q^2}{8C}.$$

Так как величина запасённой в конденсаторе энергии определяется величиной поля между его обкладками, то такая же энергия была запасена в пространстве между заряженной зарядом  $Q$  и незаряженной пластинами до соединения их проводником. Именно эта энергия выделится в проводнике в виде тепла. Отметим, что в ответ не вошло значение сопротивления проводника  $R$ , поскольку при достаточно большом сопротивлении количество выделившегося в проводнике тепла и в самом деле не зависит от  $R$ , как и в классической задаче про разряд конденсатора через резистор. Если же сопротивление  $R$  не очень велико, то в процессе разряда через проводник будет течь значительный ток, и возникшее электромагнитное поле унесёт заметную часть энергии, которая уже не сможет выделиться в проводнике.

**3.29.** Введём для ёмкостей имеющихся в схеме конденсаторов следующие обозначения:  $C_1 = 1$  мкФ,  $C_2 = 2$  мкФ,  $C_3 = 3$  мкФ,  $C_4 = 4$  мкФ. Время установления равновесия в данной системе может быть оценено по порядку величины как произведение сопротивления  $R$  на суммарную ёмкость всех конденсаторов:

$\tau \sim R(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) = 1$  с. Следовательно, через 10 секунд после замыкания ключа все процессы зарядки конденсаторов закончатся, и токи через все участки цепи, в том числе через резистор, прекратятся. Поэтому напряжение на резисторе станет равным нулю, и исходную схему можно будет заменить эквивалентной, которая показана на рисунке 3.29.1. Ёмкость эквивалентной батареи конденсаторов, получившейся при такой замене, равна

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1 + C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4}} = 2,1 \text{ мкФ},$$

заряд этой батареи  $q = C\mathcal{E} = 4,2 \cdot 10^{-4}$  Кл, а запасённая в ней энергия  $W = C\mathcal{E}^2/2 = 4,2 \cdot 10^{-2}$  Дж.

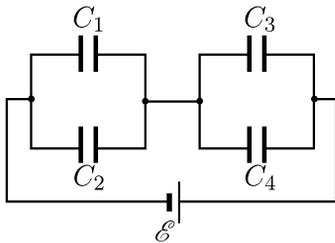


Рис. 3.29.1.

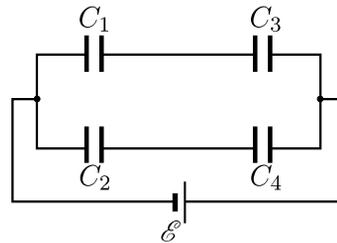


Рис. 3.29.2.

Найдём теперь тепло, выделившееся на резисторе. Для этого рассмотрим процесс зарядки конденсаторов более подробно. Так как внутреннее сопротивление источника намного меньше сопротивления резистора, то после замыкания ключа сначала за короткий промежуток времени  $\Delta t_1 \ll \tau$  происходит зарядка всех конденсаторов, причём утечкой заряда через  $R$  при этом можно пренебречь (первый этап зарядки). Следовательно, для указанного небольшого промежутка времени  $\Delta t_1$  непосредственно после замыкания ключа исходную схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке 3.29.2. Ёмкость такой эквивалентной батареи равна

$$C' = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} + \frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} = \frac{25}{12} \text{ мкФ} \approx 2,083 \text{ мкФ},$$

её заряд к концу первого этапа зарядки  $q' = C'\mathcal{E} = 4,17 \cdot 10^{-4}$  Кл, а запасённая в батарее к концу первого этапа энергия  $W' = C'\mathcal{E}^2/2 = 4,17 \cdot 10^{-2}$  Дж. Далее в течение промежутка времени  $\Delta t_2 \sim \tau$  происходит медленная перезарядка конденсаторов через резистор  $R$  (второй этап зарядки). К концу этого этапа, как было

показано выше, заряд батареи конденсаторов становится равным  $q$ , а запасённая в батарее энергия принимает значение  $W$ . Согласно закону сохранения энергии, выделившаяся на резисторе теплота  $Q_R$  равна разности совершённой источником работы по перемещению зарядов и разницы энергий, запасённой в конденсаторах на различных этапах зарядки:

$$\begin{aligned} Q_R &= (q - q')\mathcal{E} - (W - W') = \\ &= (C - C')\mathcal{E}^2 - \frac{(C - C')\mathcal{E}^2}{2} = \frac{(C - C')\mathcal{E}^2}{2} \approx 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Отметим, что эта теплота, так же, как и в [предыдущей задаче](#), не зависит от величины сопротивления  $R$ .

**3.30.** Описанная в условии задачи схема эквивалентна изображённой на рисунке 3.30, где  $C_0 = 4\pi\epsilon_0 r$  — ёмкость конденсатора, образованного проводящим шаром и землёй. До замыкания ключа в системе была запасена энергия  $W_1 = Q^2/(2C_0)$ . После замыкания ключа заряд  $Q$  распределится между конденсаторами пропорционально их ёмкостям: заряд конденсатора  $C$  будет равен  $q = CQ/(C + C_0)$ , а заряд конденсатора  $C_0$  будет равен  $q_0 = C_0Q/(C + C_0)$ . Поэтому после замыкания ключа в конденсаторах будет запасена энергия

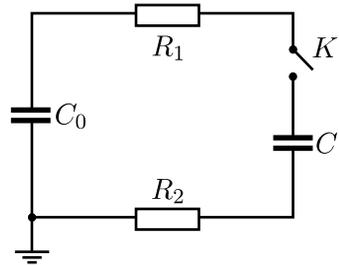


Рис. 3.30.

$$W_2 = \frac{q^2}{2C} + \frac{q_0^2}{2C_0} = \frac{Q^2}{2(C + C_0)}.$$

Значит, после замыкания ключа в системе выделится количество теплоты

$$Q = W_2 - W_1 = \frac{CQ^2}{2C_0(C + C_0)}.$$

Поскольку резисторы  $R_1$  и  $R_2$  соединены последовательно, то теплота  $Q$  распределится между ними пропорционально величинам их сопротивлений:

$$\begin{aligned} Q_{R_1} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{CQ^2}{2C_0(C + C_0)} = \\ &= \frac{R_1 C Q^2}{8\pi\epsilon_0 r (R_1 + R_2)(C + 4\pi\epsilon_0 r)}, \end{aligned}$$

$$Q_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{CQ^2}{2C_0(C + C_0)} =$$

$$= \frac{R_2 C Q^2}{8\pi\epsilon_0 r (R_1 + R_2)(C + 4\pi\epsilon_0 r)}.$$

**3.31\***. Нарисуем эквивалентную схему соединения конденсаторов до переключения ключа (см. рис. 3.31) и обозначим заряды конденсаторов через  $q_1/2$ ,  $q_1/2$  и  $q_2$  — так, как показано на рисунке. Пусть суммарный заряд на обкладках 1, 2 и 3 равен  $q$  до переключения и  $q'$  после переключения ключа. Тогда

$$q_1 - q_2 = q, \quad \frac{q_1}{2C} + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E}.$$

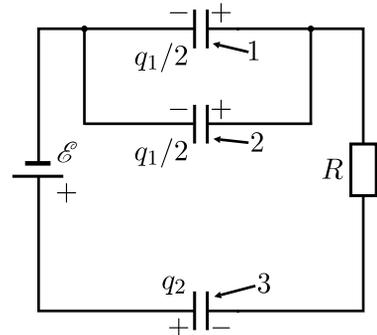


Рис. 3.31.

Отсюда

$$q_1 = \frac{2(C\mathcal{E} + q)}{3}, \quad q_2 = \frac{2C\mathcal{E} - q}{3}.$$

До переключения ключа  $q = 0$ , и  $q_1 = q_2 = 2C\mathcal{E}/3$ . После переключения ключа, очевидно,  $q' = -q_2 = -2C\mathcal{E}/3$ . Поэтому

$$q'_1 = \frac{2(C\mathcal{E} + q')}{3} = \frac{2}{9}C\mathcal{E}, \quad q'_2 = \frac{2C\mathcal{E} - q'}{3} = \frac{8}{9}C\mathcal{E}.$$

Следовательно, после переключения ключа через батарею протечёт заряд

$$\Delta q_2 = q'_2 - q_2 = 2C\mathcal{E}/9,$$

а источник при этом совершит работу

$$A = \Delta q_2 \cdot \mathcal{E} = 2C\mathcal{E}^2/9.$$

Энергия, запасённая в конденсаторах до переключения ключа, равна

$$W_1 = 2 \cdot \frac{(q_1/2)^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C} = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2,$$

а после переключения ключа

$$W_2 = 2 \cdot \frac{(q'_1/2)^2}{2C} + \frac{q_2'^2}{2C} = \frac{11}{27}C\mathcal{E}^2,$$

Поэтому количество теплоты, которое выделится в схеме после переключения ключа из левого положения в правое, равно

$$Q = A - (W_2 - W_1) = \frac{4}{27} C \mathcal{E}^2.$$

**3.32\*.** Эквивалентные схемы для положений ключа 1 и 2 изображены на рисунке 3.32. Будем обозначать заряды конденсаторов и напряжения на них через  $q_{ij}$  и  $U_{ij}$ , причём первый индекс  $i$  будет обозначать номер конденсатора, а второй индекс  $j$  — номер положения ключа.

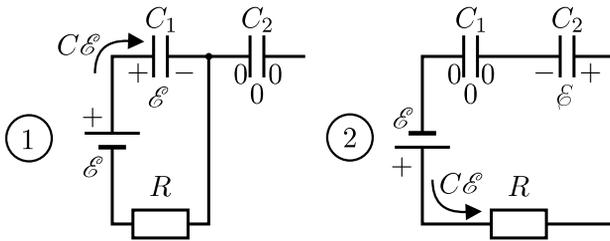


Рис. 3.32.

Из эквивалентных схем следует, что в положении 1 конденсатор  $C_1$  всякий раз заряжается до напряжения  $U_{11} = \mathcal{E}$ , приобретая заряд  $q_{11} = C\mathcal{E}$ . Кроме того, в положении 2 заряд, находящийся на проводнике между конденсаторами  $C_1$  и  $C_2$ , сохраняется. Рассмотрим последовательно несколько циклов переключений 1–2.

Первый цикл: В положении ключа 1 конденсатор  $C_2$  не заряжен,  $q_{21} = 0$ ,  $U_{21} = 0$ . После переключения ключа в положение 2 происходит перезарядка конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$  до таких напряжений  $U_{12}$  и  $U_{22}$ , что  $U_{22} - U_{12} = \mathcal{E}$ , где положительными считаются такие величины  $U_{12}$ , которые совпадают по полярности с  $U_{11}$ , и такие  $U_{22}$ , полярность которых совпадает с той, что показана на рисунке в положении 2. Заряды при этом связаны следующими соотношениями:

$$q_{12} = CU_{12}, \quad q_{22} = CU_{22}, \quad q_{22} - q_{12} = C\mathcal{E}, \quad q_{12} + q_{22} = q_{11} + q_{21}$$

(последнее соотношение следует из сохранения в процессе перезарядки заряда, находящегося на проводнике между конденсаторами  $C_1$  и  $C_2$ ). Из этой системы уравнений получаем:

$$q_{22} = \frac{q_{11} + q_{21} + C\mathcal{E}}{2} = \frac{C\mathcal{E} + C\mathcal{E} + q_{21}}{2} = C\mathcal{E} + \frac{q_{21}}{2} = C\mathcal{E}$$

для первого цикла, так как заряд  $q_{21}$  был равен нулю. Значение  $q_{22}$  после первого цикла равно  $q_{21}$  для второго цикла, и так далее. Поэтому после второго цикла

$$q_{22} = C\mathcal{E} + \frac{C\mathcal{E}}{2} = \frac{3}{2}C\mathcal{E},$$

после третьего

$$q_{22} = C\mathcal{E} + \frac{3}{4}C\mathcal{E} = \frac{7}{4}C\mathcal{E},$$

после четвёртого

$$q_{22} = C\mathcal{E} + \frac{7}{8}C\mathcal{E} = \frac{15}{8}C\mathcal{E},$$

и так далее.

Таким образом, после каждого цикла номера  $n$  заряд  $q_{22}$  возрастает на  $\Delta q_{22} = \frac{C\mathcal{E}}{2^{n-1}}$ , стремясь, очевидно, к установившемуся значению  $2C\mathcal{E}$ . При этом после  $n$ -го цикла  $q_{22}$  отличается от  $2C\mathcal{E}$  на величину  $\Delta q_{22} = \frac{C\mathcal{E}}{2^{n-1}}$ . По условию это отличие должно быть меньше или равно 0,1%:

$$\frac{\Delta q_{22}}{2C\mathcal{E}} = \frac{C\mathcal{E}}{2 \cdot 2^{n-1}C\mathcal{E}} = \frac{1}{2^n} \leq 0,001,$$

откуда  $2^n \geq 1000$ . Этому неравенству удовлетворяют  $n \geq 10$ , когда  $2^n \geq 2^{10} = 1024$ .

Следовательно, для того, чтобы заряд на конденсаторе  $C_2$  отличался от своего установившегося значения не более, чем на 0,1%, нужно произвести не менее  $n = 10$  циклов переключений.

**3.33.** Представим, что стержень отклонился от вертикали на малый угол, и средняя пластина при этом сместилась на небольшое расстояние  $x$ . Сумма силы натяжения стержня и силы тяжести равна  $mg\frac{x}{L}$ , и она возвращает пластину к положению равновесия. Суммарная электростатическая сила, действующая на среднюю пластину со стороны крайних пластин, равна

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d-x} \right)^2 S - \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{U}{d+x} \right)^2 S \approx \frac{\varepsilon_0 U^2}{2 d^3} S \cdot 4x = \varepsilon_0 \frac{U^2}{d^3} S \cdot 2x.$$

Эта сила отталкивает среднюю пластину от положения равновесия. Поэтому исходное положение средней пластины будет неустойчивым в

случае, если  $\varepsilon_0 \frac{U^2}{d^3} \cdot 2S > \frac{mg}{L}$ , или  $U > \sqrt{\frac{mgd^3}{2\varepsilon_0 LS}}$ . При выполнении этого условия средняя пластина притянется к одной из крайних, и произойдёт пробой конденсатора.

**3.34\***. В процессе колебаний заряд пластин не изменяется, а эффективная площадь обкладок плоского конденсатора ёмкостью  $C$  изменяется в пределах от  $a^2$  до  $a(a-x)$ , поскольку заряд концентрируется только на частях пластин, находящихся напротив друг друга. Энергия конденсатора

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 a(a-x)}$$

увеличивается с ростом  $x$ , поэтому возникает возвращающая сила, которую можно найти из энергетических соображений. Поскольку работа возвращающей силы может совершаться только за счёт уменьшения энергии конденсатора, то, приравняв эту работу для малого перемещения  $\Delta x > 0$  изменению энергии конденсатора, взятому со знаком «минус» (это и означает «за счёт»), получаем:

$$\begin{aligned} \Delta A = F\Delta x = -\Delta W = W_1 - W_2 = \\ = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 a^2} \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{x + \Delta x}{a}} \right) \approx -\frac{Q^2 d \Delta x}{2\varepsilon\varepsilon_0 a^3 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2}. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\Delta x \ll x$ . Поскольку  $x \ll a$ , вторым слагаемым в скобках в знаменателе можно пренебречь, так что для силы находим:

$$F \approx -\frac{Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 a^3}.$$

Получилось, что возвращающая сила в первом приближении постоянна по модулю, не зависит от смещения  $x$  и всегда направлена к положению равновесия! Таким образом, колебания пластины не будут гармоническими.

При переходе верхней пластины через положение равновесия возвращающая сила изменяет знак, сохраняя свою величину. На самом деле в данной системе при изменении знака  $x$  сила не может изменяться скачком. Само возникновение возвращающей силы связано с краевыми эффектами в конденсаторе, так что изменение знака силы в действительности происходит в диапазоне смещений порядка расстояния

между пластинами  $d$ , которое, согласно условию, значительно меньше начального смещения пластины  $x$ . Поэтому при дальнейшем расчёте движения верхней пластины можно считать, что оно происходит под действием постоянной по модулю силы. При этом отклонённая и отпущенная без начальной скорости пластина будет двигаться к положению равновесия с постоянным по величине ускорением

$$w = \frac{|F|}{m} = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon\varepsilon_0 a^3 m}.$$

Положение равновесия будет достигнуто через время

$$\tau = \sqrt{\frac{2x}{w}} = \sqrt{\frac{4\varepsilon\varepsilon_0 a^3 m x}{Q^2 d}} = \frac{2a}{Q} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a m x}{d}}.$$

Период колебаний, то есть время возврата пластины в исходное положение, очевидно, будет в четыре раза больше:

$$T = 4\tau = \frac{8a}{Q} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 a m}{d}} x.$$

Отметим, что у данной системы период колебаний зависит от их амплитуды.

**3.35.** В рамках классической электронной теории электропроводности считается, что в металле свободные электроны, участвуя в хаотическом тепловом движении, ускоряются электрическим полем, сталкиваются с ионами кристаллической решётки и движутся с небольшой средней, так называемой «дрейфовой» скоростью.

Поскольку на каждый атом меди приходится один свободный электрон, то их концентрация в проводе равна числу атомов меди в единице объёма:  $n = \rho N_A / \mu$ . Заряд, протекающий через сечение провода за время  $\Delta t$ , равен  $\Delta q = n \cdot Sv\Delta t \cdot |e|$ , где  $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — величина заряда электрона,  $v$  — искомая средняя скорость движения электронов. Отсюда с учётом того, что  $I = \Delta q / \Delta t$ , получаем:

$$v = \frac{I\mu}{\rho S|e|N_A} \approx 0,075 \text{ мм/с}.$$

Заметим, что согласно современным представлениям, электроны, подчиняющиеся квантовому принципу запрета Паули, заполняют в пространстве импульсов все состояния с энергиями, меньшими так называемой «энергии Ферми», и проводимость обеспечивается лишь

малой долей свободных электронов вблизи «поверхности Ферми», но эти электроны движутся с очень большими, «фермиевскими» скоростями. Однако рассмотрение квантовой теории электропроводности металлов выходит за рамки школьной программы.

**3.36\***. Рассмотрим столкновение свободного электрона с атомом газа. Будем считать, что электрон до столкновения движется с некоторой характерной скоростью  $v$ , атом покоится, и что столкновение лобовое и абсолютно упругое (по условию акты ионизации атомов неона происходят очень редко). Тогда законы сохранения импульса и энергии можно записать в виде:

$$m_e v = m_e v' + M u', \quad \frac{m_e v^2}{2} = \frac{m_e v'^2}{2} + \frac{M u'^2}{2},$$

где  $v'$  и  $u'$  — скорости электрона и атома после столкновения. Отсюда

$$v' = \frac{m_e - M}{m_e + M} v$$

(после столкновения намного более лёгкий электрон изменяет направление своего движения), и уменьшение кинетической энергии электрона при лобовом столкновении составляет

$$\Delta W = \frac{m_e(v^2 - v'^2)}{2} = \frac{m_e v^2}{2} \cdot \frac{4Mm_e}{(m_e + M)^2} \approx \frac{m_e v^2}{2} \cdot \frac{4m_e}{M} \ll \frac{m_e v^2}{2}.$$

Последнее неравенство означает, что скорость движения электрона между соударениями изменяется в очень небольших пределах, то есть всё время близка к  $v$ . Таким образом, можно считать, что  $v$  — это средняя скорость хаотического движения электронов в плазме газового разряда. Поскольку при нелобовых соударениях уменьшение кинетической энергии электрона будет, очевидно, лежать в пределах от 0 до  $\Delta W$ , то можно считать, что среднее уменьшение кинетической энергии электрона при столкновении с атомом неона составляет

$$\frac{\Delta W}{2} \approx \frac{m_e v^2}{2} \cdot \frac{2m_e}{M}.$$

Будем считать, что между ударами электрон движется под действием электрического поля равноускоренно с ускорением  $a = eE/m_e$  в течение промежутка времени  $\tau = l/v$ . Тогда за это время электрическое поле совершает над электроном работу

$$\Delta A = eE \cdot \frac{a\tau^2}{2} = \frac{(eEl)^2}{2m_e v^2}.$$

В установившемся режиме среднее уменьшение кинетической энергии электрона  $\frac{\Delta W}{2}$ , происходящее при соударении, должно на каждом интервале между соударениями компенсироваться работой  $\Delta A$  сил электрического поля:

$$\frac{m_e v^2}{2} \cdot \frac{2m_e}{M} = \frac{(eEl)^2}{2m_e v^2}.$$

Отсюда средняя кинетическая энергия движения электронов

$$W = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{|e|El}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{M}{m_e}}.$$

Соответствующая этой энергии «температура» электронов может быть оценена при помощи соотношения  $W \sim \frac{3}{2}kT_e$ , откуда

$$T_e \sim \frac{|e|El}{3\sqrt{2}k} \sqrt{\frac{M}{m_e}} \approx 5,6 \cdot 10^4 \text{ К.}$$

**3.37.** Найдём энергию, которую может передать электрон атому меди при столкновении с ним. Максимальная энергия передаётся, очевидно, при лобовом соударении. Вводя для скоростей электрона и атома такие же обозначения, как и при решении [предыдущей задачи](#), запишем аналогичным образом законы сохранения импульса и энергии, и найдём из них импульс, который приобретает атом меди массой  $M_{\text{Cu}} = 64m_p$  вследствие соударения:

$$p = m_e(v - v') = \frac{2M_{\text{Cu}}m_e v}{m_e + M_{\text{Cu}}} \approx 2m_e v.$$

Так как электрон ускоряется разностью потенциалов  $U$ , то  $|e|U = m_e v^2/2$ . С учётом этого  $p = 2\sqrt{2m_e|e|U}$ , и приобретаемая атомом меди энергия

$$E_1 = \frac{p^2}{2M_{\text{Cu}}} = \frac{m_e}{16m_p} |e|U \approx 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ эВ.}$$

Поскольку  $E_1 \ll E_0$ , то пучок электронов, ускоряемый данной разностью потенциалов, не может вызывать распыление атомов меди с поверхности пластинки.

Несколько иначе обстоит дело, если с атомом меди сталкивается однозарядный ион аргона, масса которого  $M_{\text{Ar}} = 40m_p$  близка к  $M_{\text{Cu}}$ .

С помощью аналогичных вычислений можно показать, что при таком столкновении атому меди передаётся энергия

$$E_2 = \frac{4M_{\text{Cu}}M_{\text{Ar}}}{(M_{\text{Cu}} + M_{\text{Ar}})^2} |e|U = \frac{160}{169} |e|U \approx |e|U = 1000 \text{ эВ}.$$

Так как  $E_2 \gg E_0$ , то ионный пучок может вырывать атомы меди из пластинки, вызывая их распыление.

**3.38.** В соответствии с законом сохранения электрического заряда после включения «электронной пушки» рассматриваемый шарообразный космический корабль будет заряжаться положительно. Из-за этого вокруг корабля возникнет и будет постепенно нарастать электрическое поле. Если потенциал шара достигнет значения  $\varphi = W/|e| = 90 \text{ кВ}$ , то вылетающие из пушки электроны не смогут удалиться от поверхности корабля, вследствие чего увеличение его заряда и рост напряжённости поля в пространстве прекратятся. Это случится, когда заряд шара станет равным  $q = 4\pi\epsilon_0 R\varphi$ , то есть через время  $t = q/I = 4\pi\epsilon_0 R\varphi/I = 10 \text{ с}$  после включения пушки. Следовательно, через  $\tau = 1 \text{ мин} > t$  напряжённость поля у поверхности корабля будет равна

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\varphi}{R} = \frac{W}{|e|R} = 9 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

**3.39.** Пусть  $Q_1, Q_2, Q_3$  — заряды шаров после их подсоединения к цепи. Поскольку шары были изначально не заряжены и заряд на электрической цепи и соединительных проводниках мал, то  $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ . Найдём разность потенциалов между точками 1 и 2, а также между точками 2 и 3 цепи:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \rho} = \frac{\mathcal{E}}{2}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 \rho} - \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\mathcal{E}}{2}.$$

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$Q_2 = 0; \quad Q_1 = -Q_3 = 2\pi\epsilon_0 r \mathcal{E}.$$

**3.40.** Из условия следует, что при замыкании одного выключателя на все лампочки должно подаваться напряжение, меньшее напряжения в сети. При замыкании же второго выключателя на три лампочки должно подаваться полное напряжение сети, а три остальные лампочки должны либо отключаться от сети, либо подключаться к сети так, чтобы напряжение между их контактами было равно нулю. Поэтому ясно,

что нужно собрать две одинаковые схемы, состоящие из трёх параллельно соединённых лампочек каждая, а затем соединить эти две схемы друг с другом и подключить к источнику напряжения. Это можно сделать двумя способами (соответствующие схемы приведены на рисунках 3.40.1 и 3.40.2).

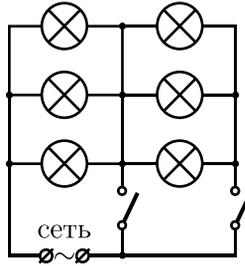


Рис. 3.40.1.

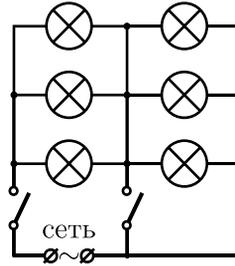


Рис. 3.40.2.

**3.41.** Три возможные схемы соединения элементов изображены на рисунках 3.41.1 — 3.41.3. Авторы предлагают читателям попытаться придумать другие схемы, удовлетворяющие условию задачи.

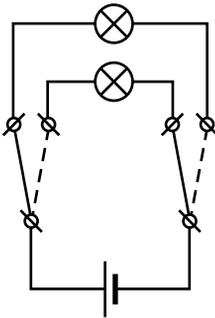


Рис. 3.41.1.

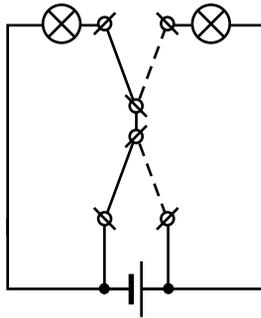


Рис. 3.41.2.

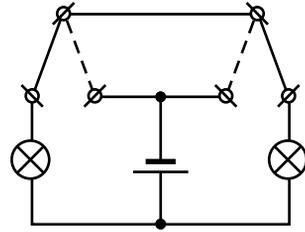


Рис. 3.41.3.

**3.42.** Приведённую в условии схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 3.42. Получившаяся эквивалентная цепь представляет собой мостовую схему, состоящую из одинаковых резисторов с сопротивлениями  $R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 10$  Ом. Так как схема симметрична, то разность потенциалов между её точками  $A$  и  $B$  равна нулю. Поэтому ток через сопротивление  $R_5$  также равен нулю.

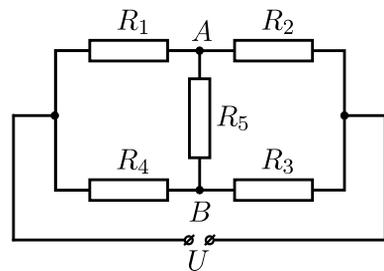


Рис. 3.42.

Для того, чтобы определить общее сопротивление цепи, заметим, что сила тока, текущего через резисторы  $R_1$  и  $R_2$ , равна  $\frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{2R}$ . Такой же ток течёт через резисторы  $R_4$  и  $R_3$ . Следовательно, ток, текущий через источник напряжения, равен  $I_{\text{общ}} = U/R$ , а общее сопротивление цепи составляет  $R_{\text{общ}} = U/I_{\text{общ}} = R = 10 \text{ Ом}$ .

**3.43.** Заметим, что рассматриваемая схема симметрична и переходит сама в себя при последовательном отражении относительно вертикальной и затем горизонтальной осей чертежа. Следовательно, токи, текущие через горизонтально расположенные резисторы с сопротивлениями 2 Ома, одинаковы (обозначим эти токи через  $I$ ). По этой же причине одинаковы токи, текущие через вертикально расположенные резисторы с сопротивлениями 2 Ома (обозначим их через  $J$ ). Тогда распределение токов в схеме будет таким, как показано на рисунке 3.43.

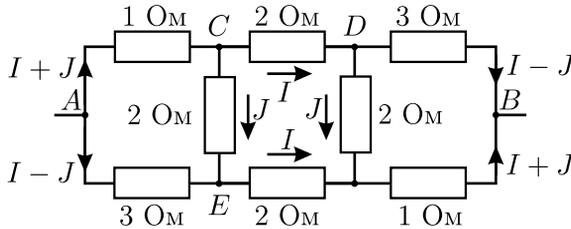


Рис. 3.43.

Обозначим напряжение между точками  $A$  и  $B$  через  $U_0$ . Тогда из закона Ома для участка цепи получим:

$$1 \text{ Ом} \cdot (I + J) + 2 \text{ Ом} \cdot J = 3 \text{ Ом} \cdot (I - J) \quad \text{для участка } ACE,$$

$$1 \text{ Ом} \cdot (I + J) + 2 \text{ Ом} \cdot I + 3 \text{ Ом} \cdot (I - J) = U_0 \quad \text{для участка } ACDB.$$

Отсюда  $J = \frac{I}{3}$ ,  $I = \frac{3U_0}{16 \text{ Ом}}$ , и искомое общее сопротивление цепи

$$R = \frac{U_0}{2I} = \frac{8}{3} \text{ Ом}.$$

**3.44.** Обозначим сопротивление лампочки через  $R$ , а искомое напряжение на ней — через  $U$ . Исходную электрическую цепь с незамкнутым ключом можно изобразить в эквивалентном виде, показанном на рисунке 3.44.1. Тогда напряжение на участке цепи, содержащем

параллельное соединение, равно  $U_1 = U + 90 \cdot (U/R)$ , сила текущего через этот участок тока составляет  $(U/R) + (U_1/180)$ , и закон Ома для данной схемы даёт:

$$U + 90 \cdot \frac{U}{R} + 90 \cdot \left( \frac{U}{R} + \frac{U + 90 \cdot (U/R)}{180} \right) = 54.$$

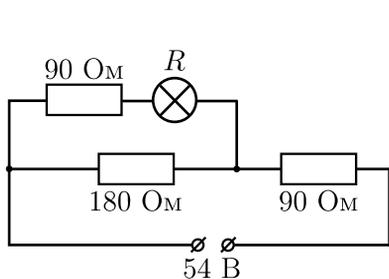


Рис. 3.44.1.

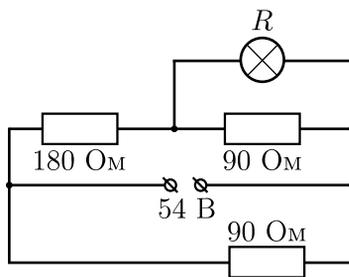


Рис. 3.44.2.

После замыкания ключа цепь можно перерисовать так, как показано на рисунке 3.44.2. Из него видно, что напряжение на верхнем участке цепи, содержащем два резистора и лампочку, составляет 54 В. Закон Ома для этого участка цепи имеет вид:

$$U + 180 \cdot \left( \frac{U}{R} + \frac{U}{90} \right) = 54.$$

Решая полученные уравнения, найдём, что сопротивление лампочки равно  $R = 30$  Ом, а напряжение на ней  $U = 6$  В.

**3.45\***. Понятно, что лампочка (36 В/40 Вт) должна быть подключена к источнику напряжения последовательно с некоторым количеством соединённых в различных комбинациях лампочек (3,5 В/0,28 А) — в противном случае будет невозможно обеспечить подачу на неё напряжения 36 В. По условию задачи падение напряжения на лампе может отличаться от номинального не более чем на 1%, то есть для лампочки, рассчитанной на 36 В, оно может варьироваться в пределах от 35,64 В до 36,36 В, а для лампочки, рассчитанной на 3,5 В — от 3,465 В до 3,535 В. При последовательном подключении лампочки (36 В/40 Вт) и лампочек (3,5 В/0,28 А) на долю последних придётся от 183,64 В до 184,36 В. Поэтому для того, чтобы лампочки (3,5 В/0,28 А) горели нормально, их цепочка должна включать в себя от  $183,64/3,535 \approx 51,95$  ламп до  $184,36/3,465 \approx 53,21$  ламп, то есть реально — 52 или 53 лампы.

Легко видеть, что для нормальной работы схемы недостаточно последовательно подключить к лампе (36 В/40 Вт) одну цепочку из 52 или 53 ламп (3,5 В/0,28 А). Действительно, сила тока через лампу (3,5 В/0,28 А) может составлять от 0,2772 А до 0,2828 А, а через лампу (36 В/40 Вт) — от 1,1 А до 1,122 А. Поэтому для нормальной работы схемы необходимо последовательно соединить лампу (36 В/40 Вт) с несколькими параллельно включёнными цепями из ламп (3,5 В/0,28 А), причём количество цепей может варьироваться от  $1,1/0,2828 \approx 3,890$  до  $1,122/0,2772 \approx 4,048$ , то есть реально количество цепей должно быть равно четырём. Значит, возможны следующие случаи:

- 1) все четыре цепи состоят из 52 ламп (3,5 В/0,28 А);
  - 2) все четыре цепи состоят из 53 ламп (3,5 В/0,28 А);
  - 3) часть цепей состоит из 52, а часть — из 53 ламп (3,5 В/0,28 А).
- Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1) Прежде всего вычислим сопротивления  $R$  лампы (36 В/40 Вт) и  $r$  лампы (3,5 В/0,28 А):

$$R = \frac{(36 \text{ В})^2}{40 \text{ Вт}} = 32,4 \text{ Ом}, \quad r = \frac{3,5 \text{ В}}{0,28 \text{ А}} = 12,5 \text{ Ом}.$$

Сопротивление одной цепи из 52 ламп равно  $52r$ , четырёх параллельно соединённых одинаковых цепей —  $52r/4$ , всей цепи —  $R + (52r/4)$ , а напряжение на лампе (36 В/40 Вт) в соответствии с законом Ома составляет

$$U_R = \frac{220R}{R + (52r/4)} \approx 36,57 \text{ В},$$

то есть отличается от номинального более чем на 1%. Таким образом случай 1) не удовлетворяет условиям задачи.

2) Аналогично случаю 1), можно показать, что напряжение на лампе (36 В/40 Вт) составляет

$$U_R = \frac{220R}{R + (53r/4)} \approx 35,995 \text{ В},$$

то есть оно удовлетворяет условию задачи. Напряжение же на каждой из ламп (3,5 В/0,28 А) в этом случае равно

$$U_r = \frac{220 - U_R}{53} \approx 3,472 \text{ В},$$

что также лежит в пределах 1% от номинала. Таким образом, случай 2) возможен. При таком способе включения (4 параллельные цепи из

53 последовательно соединённых лампы (3,5 В/0,28 А) последовательно соединены с лампой (36 В/40 Вт) условия задачи выполняются, и количество ламп (3,5 В/0,28 А) составляет 212 штук.

3) Пусть часть цепей состоит из 52, а часть — из 53 лампы (3,5 В/0,28 А). В соответствии с законом Ома, сила тока в участке цепи прямо пропорциональна падению напряжения на этом участке и обратно пропорциональна его сопротивлению. Так как напряжение на всех параллельно включённых цепях одинаково, и они состоят из одинаковых ламп, то отношение сил тока  $I_{52}$  и  $I_{53}$ , текущих в цепях из 52 и 53 лампы соответственно, равно обратному отношению числа ламп в этих цепях:  $I_{52}/I_{53} = 53/52$ . Ранее было показано, что сила тока, текущего через лампу (3,5 В/0,28 А), может лежать в пределах от 0,2772 А до 0,2828 А. Значит, сила тока  $I_{52}$ , текущего через цепочку из 52 лампы, может лежать в пределах от  $0,2772 \cdot (53/52) \approx 0,2825$  А до 0,2828 А, а тока  $I_{53}$ , текущего через цепочку из 53 лампы — от 0,2772 А до  $0,2828 \cdot (52/53) \approx 0,2775$  А. Теперь можно по отдельности рассмотреть три возможных варианта построения цепи.

а) Параллельно соединены 1 цепь из 53 лампы и 3 цепи по 52 лампы. В этом случае ток через лампу (36 В/40 Вт) будет лежать в пределах от  $0,2772 + 3 \cdot 0,2825 \approx 1,1247$  А до  $0,2775 + 3 \cdot 0,2828 \approx 1,1259$  А. Но ранее было показано, что сила тока через лампу (36 В/40 Вт) должна лежать в пределах от 1,1 А до 1,122 А. Поэтому такой вариант соединения не удовлетворяет условиям задачи.

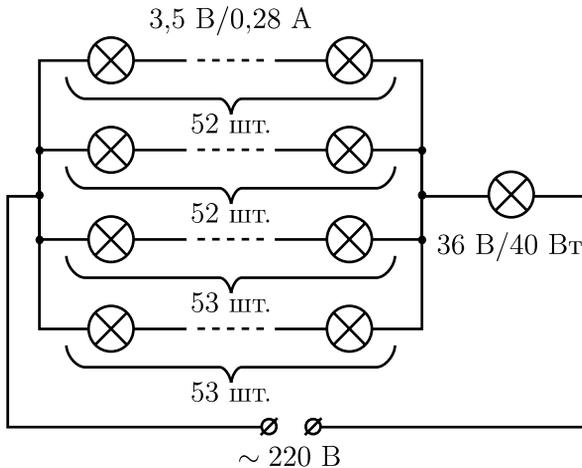


Рис. 3.45.

б) Параллельно соединены 2 цепи по 52 лампы и 2 цепи по 53 лам-

пы. Сила тока, текущего через лампу (36 В/40 Вт), будет находиться в интервале от  $2 \cdot 0,2825 + 2 \cdot 0,2772 \approx 1,1194$  А до  $2 \cdot 0,2828 + 2 \cdot 0,2775 \approx 1,1206$  А, то есть попадает в ранее найденный допустимый интервал. Значит, этот вариант соединения подходит. Для его реализации необходимо использовать 210 ламп (3,5 В/0,28 А).

в) Параллельно соединены 1 цепь из 52 ламп и 3 цепи по 53 лампы. При таком варианте соединения ток через лампу (36 В/40 Вт) будет лежать в пределах от  $0,2825 + 3 \cdot 0,2772 \approx 1,1141$  А до  $0,2828 + 3 \cdot 0,2775 \approx 1,1153$  А, то есть также лежит в допустимых пределах. Значит, этот способ соединения ламп также подходит, и для его осуществления нужно израсходовать 211 ламп (3,5 В/0,28 А).

В результате проведённого рассмотрения получаем ответ задачи: цепь, удовлетворяющую условию задачи и включающую в себя минимальное количество лампочек на 3,5 В, следует собирать следующим образом (см. рис. 3.45). Нужно параллельно соединить друг с другом четыре цепи, две из которых включают в себя по 52 последовательно соединённые лампочки (3,5 В/0,28 А), а две другие — по 53 последовательно соединённые лампочки (3,5 В/0,28 А). Затем к этой схеме нужно последовательно подключить лампочку (36 В/40 Вт). При этом в гирлянде будет задействовано 210 лампочек на 3,5 В.

**3.46.** Пусть  $\mathcal{E}$  — ЭДС батарейки,  $r$  — её внутреннее сопротивление,  $x$  — искомое сопротивление неизвестного резистора. Запишем для каждого из трёх описанных в условии задачи случаев закон Ома для полной цепи:

$$\mathcal{E} = I(r + R), \quad \mathcal{E} = \frac{3}{4}I(r + R + x), \quad \mathcal{E} = \frac{6}{5}I\left(r + \frac{Rx}{R + x}\right).$$

Полученная система уравнений сводится к квадратному уравнению  $x^2 + Rx - 2R^2 = 0$  относительно  $x$ . Решая его, находим, что  $x = R$ .

Отметим, что данную задачу нельзя решать в предположении, что у источника отсутствует внутреннее сопротивление. Действительно, при этом получается система из трёх уравнений с двумя неизвестными, которая не имеет решений.

**3.47.** Пусть сопротивление переменного резистора  $R = 0$ . Тогда схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке 3.47.1. Полное сопротивление такой цепи равно  $r_1 = 2R_1R_2/(R_1 + R_2)$ , а текущий через миллиамперметр ток равен

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{U(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}.$$

Если сопротивление переменного резистора, напротив, очень велико, то схему можно перерисовать так, как показано на рисунке 3.47.2. Сопротивление этой цепи равно  $r_2 = \frac{R_1 + R_2}{2}$ , а ток, текущий через миллиамперметр, равен

$$I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{2U}{R_1 + R_2}.$$

Исключая из полученной системы уравнений, например, величину  $R_2$ , приходим к квадратному уравнению, позволяющему определить  $R_1$ :

$$I_1 I_2 R_1^2 - 2U I_1 R_1 + U^2 = 0.$$

Отсюда

$$R_1 = \frac{U}{I_1 I_2} \left( I_1 \pm \sqrt{I_1(I_1 - I_2)} \right),$$

и

$$R_2 = \frac{2U}{I_2} - R_1 = \frac{U}{I_1 I_2} \left( I_1 \mp \sqrt{I_1(I_1 - I_2)} \right).$$

Заметим, что формулы получились симметричными — выражения для  $R_1$  и  $R_2$  переходят друг в друга при замене знака перед квадратным корнем. Это связано с тем, что исходная схема включения резисторов также симметрична.

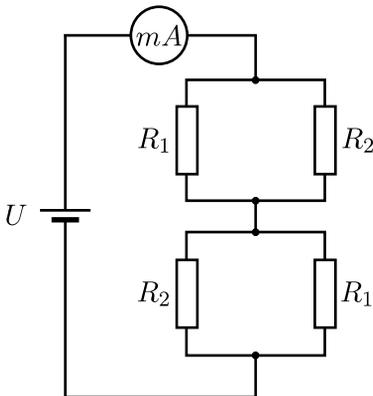


Рис. 3.47.1.

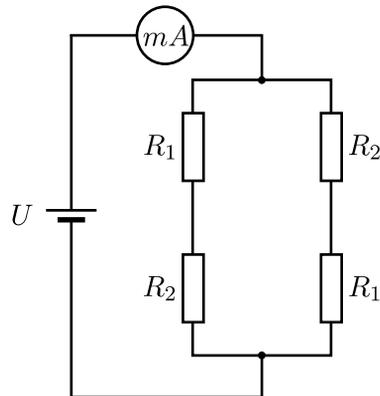


Рис. 3.47.2.

Из графика, приведённого в условии на правом рисунке, видно, что  $I_1 = 1 \cdot 10^{-3}$  А,  $I_2 = 0,75 \cdot 10^{-3}$  А. Подставляя эти значения в полученные формулы и выбирая в первой перед корнем знак «+», а во

второй — знак «-», найдём:  $R_1 = 6$  кОм,  $R_2 = 2$  кОм. При противоположном выборе знаков получится  $R_1 = 2$  кОм,  $R_2 = 6$  кОм.

**3.48.** Прежде всего, найдём потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  точек 1 и 2 электрической схемы при произвольных значениях сопротивлений  $R$  и  $r$  в отсутствие диода. Пусть на схему подано постоянное напряжение  $U$ , и при этом потенциал минусовой клеммы равен нулю. Тогда

$$\varphi_1 = \frac{Ur}{r+R}, \quad \varphi_2 = \frac{UR}{r+R}.$$

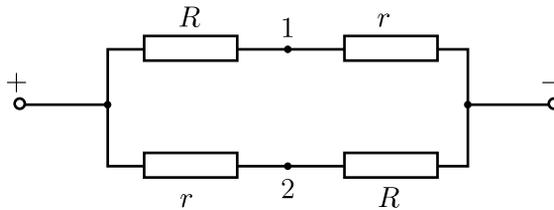


Рис. 3.48.1.

Значит, при  $r < R$  потенциал точки 1 ниже потенциала точки 2. В этом случае после включения в цепь диода он не будет проводить ток, и схема эквивалентна изображённой на рисунке 3.48.1. Её сопротивление равно

$$R_1 = \frac{r+R}{2}.$$

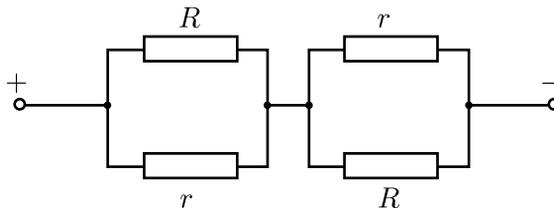


Рис. 3.48.2.

При  $r > R$  потенциал точки 1 выше потенциала точки 2. Поэтому диод будет проводить ток, и схема эквивалентна изображённой на рисунке 3.48.2. Её сопротивление равно

$$R_2 = \frac{2rR}{r+R}.$$

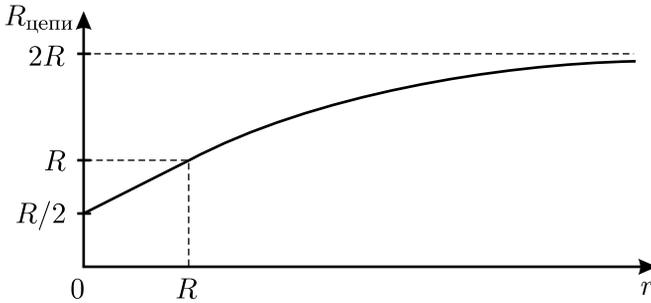


Рис. 3.48.3.

Таким образом, искомая зависимость сопротивления цепи от сопротивления  $r$  имеет вид:

$$R_{\text{цепи}} = \begin{cases} \frac{r + R}{2} & \text{при } r < R; \\ \frac{2rR}{r + R} & \text{при } r > R. \end{cases}$$

График этой зависимости представлен на рисунке 3.48.3. Следует отметить, что в точке  $r = R$  график не имеет излома.

**3.49\***. Так как сопротивления амперметров намного меньше сопротивлений резисторов, то можно считать потенциалы точек, к которым подключены амперметры, почти одинаковыми. Тогда схему можно переписать так, как показано на рисунке 3.49.1.

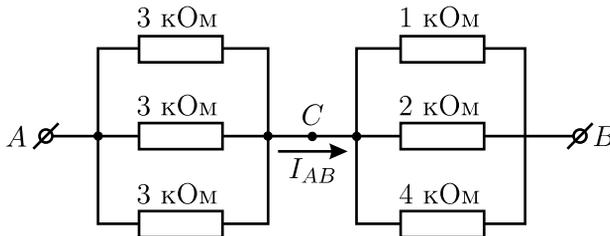


Рис. 3.49.1.

$$\begin{aligned} & \text{В ней сопротивление между точками } A \text{ и } C \text{ равно } R_{AC} = \\ & = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ кОм, а между точками } C \text{ и } B \text{ сопротивление } R_{CB} = \\ & = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right)^{-1} = \frac{4}{7} \text{ кОм.} \end{aligned}$$

Поэтому сопротивление между точками  $A$  и  $B$  равно  $R_{AB} = \frac{11}{7}$  кОм, и суммарный ток в цепи равен  $I_{AB} = \frac{U}{R_{AB}} = 2,1$  мА. При этом напряжение между точками  $A$  и  $C$  равно  $U_{AC} = I_{AB}R_{AC} = 2,1$  В, а между точками  $C$  и  $B$  напряжение  $U_{CB} = I_{AB}R_{CB} = 1,2$  В. Поэтому токи, текущие через каждый из резисторов с сопротивлением 3 кОм, равны  $I_3 = 0,7$  мА, а через остальные резисторы с сопротивлениями 1 кОм, 2 кОм и 4 кОм текут токи  $I_1 = 1,2$  мА,  $I_2 = 0,6$  мА и  $I_4 = 0,3$  мА, соответственно.

Перерисуем теперь исходную схему ещё раз — теперь уже с учётом амперметров (см. рис. 3.49.2).

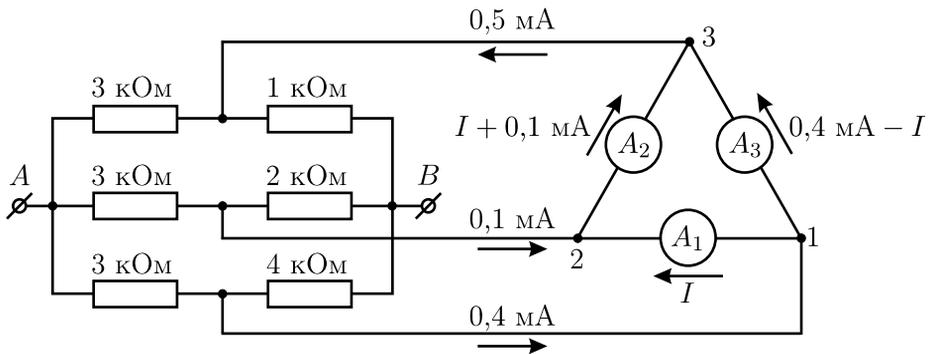


Рис. 3.49.2.

В каждой из точек соединения проводов сумма токов должна равняться нулю. Поэтому в точку между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 1 кОм должен втекать ток, равный  $I_1 - I_3 = 0,5$  мА, из точки между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 2 кОм должен вытекать ток, равный,  $I_3 - I_2 = 0,1$  мА, а из точки между резисторами с сопротивлениями 3 кОм и 4 кОм должен вытекать ток  $I_3 - I_4 = 0,4$  мА. Обозначим ток, текущий через амперметр  $A_1$ , через  $I$ . Тогда, из тех же соображений, ток через амперметр  $A_2$  будет равен  $I + 0,1$  мА, а ток через амперметр  $A_3$  будет составлять  $0,4$  мА  $- I$ . Обозначим малое сопротивление каждого амперметра через  $R$  и найдём разность потенциалов между точками 1 и 3 схемы:

$$U_{13} = (0,4 \text{ мА} - I)R = U_{12} + U_{23} = IR + (I + 0,1 \text{ мА})R.$$

Отсюда получаем:  $3I = 0,3$  мА, и  $I = 0,1$  мА. Поэтому ток через второй амперметр равен  $I + 0,1$  мА = 0,2 мА, а ток через третий амперметр составляет  $0,4$  мА  $- I = 0,3$  мА.

**3.50\***. Сопротивление резисторов  $1000R$  и  $2000R$  намного превышает сопротивление остальных резисторов. Поэтому в первом приближении токами, текущими через резисторы  $1000R$  и  $2000R$ , можно пренебречь по сравнению с другими токами в цепи, то есть считать, что резисторов  $1000R$  и  $2000R$  в схеме просто нет. Тогда исходная схема сведётся к более простой (см. рис. 3.50.1).

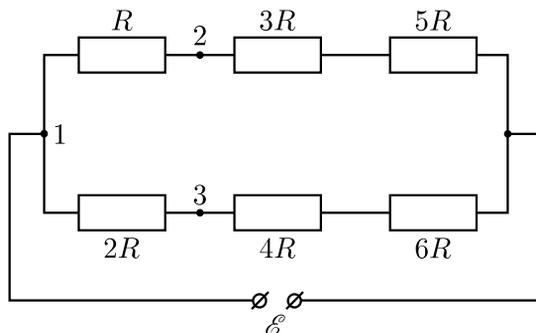


Рис. 3.50.1.

Обозначим через  $I_1$  ток, текущий в упрощённой схеме через резисторы  $R$ ,  $3R$  и  $5R$ , а через  $I_2$  — ток, текущий через резисторы  $2R$ ,  $4R$  и  $6R$ . Тогда

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + 3R + 5R} = \frac{\mathcal{E}}{9R}; \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{2R + 4R + 6R} = \frac{\mathcal{E}}{12R}.$$

Для напряжения между точками схемы 1 и 2, а также между точками 1 и 3 (см. рис. 3.50.1) имеем:

$$U_{12} = RI_1 = \mathcal{E}/9; \quad U_{13} = 2RI_2 = \mathcal{E}/6.$$

Значит, напряжение между точками схемы 2 и 3 равно

$$U_{23} = U_{13} - U_{12} = \mathcal{E}/18.$$

Из-за малости токов, текущих через резисторы  $1000R$  и  $2000R$ , напряжение между точками 2 и 3 в упрощённой схеме практически совпадает с напряжением между этими же точками в исходной схеме. Значит, в качестве оценки для величины тока, текущего через резистор  $1000R$ , можно взять величину

$$I_{1000R} = \frac{U_{23}}{1000R} = \frac{\mathcal{E}}{18000R}.$$

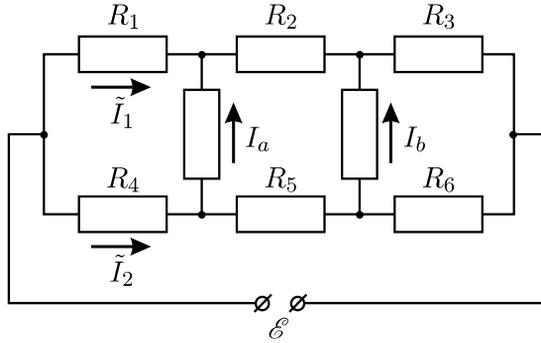


Рис. 3.50.2.

Величину погрешности нашего результата можно оценить следующим образом. Обозначим токи, текущие в исходной схеме через резисторы  $R$ ,  $2R$ ,  $1000R$  и  $2000R$  через  $\tilde{I}_1$ ,  $\tilde{I}_2$ ,  $I_a$  и  $I_b$  соответственно (см. рис. 3.50.2). Тогда, в соответствии с законом Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, имеем:

$$\tilde{I}_1 R_1 + (\tilde{I}_1 + I_a) R_2 + (\tilde{I}_1 + I_a + I_b) R_3 = \mathcal{E},$$

где  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 3R$ ,  $R_3 = 5R$ . Отсюда

$$\tilde{I}_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{I_a(R_2 + R_3) + I_b R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = I_1 - \frac{I_a(R_2 + R_3) + I_b R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Аналогично,

$$\tilde{I}_2 R_4 + (\tilde{I}_2 - I_a) R_5 + (\tilde{I}_2 - I_a - I_b) R_6 = \mathcal{E},$$

где  $R_4 = 2R$ ,  $R_5 = 4R$ ,  $R_6 = 6R$ . Отсюда

$$\tilde{I}_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_4 + R_5 + R_6} + \frac{I_a(R_5 + R_6) + I_b R_6}{R_4 + R_5 + R_6} = I_2 + \frac{I_a(R_5 + R_6) + I_b R_6}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

Таким образом, токи, рассчитанные приближённым способом, отличаются по абсолютной величине от токов, рассчитанных точно, на величины

$$\Delta I_1 = |I_1 - \tilde{I}_1| \leq |I_a| \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + |I_b| \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} < |I_a| + |I_b|,$$

$$\Delta I_2 = |I_2 - \tilde{I}_2| \leq |I_a| \frac{R_5 + R_6}{R_4 + R_5 + R_6} + |I_b| \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6} < |I_a| + |I_b|,$$

то есть абсолютная погрешность каждого из токов  $I_1$  и  $I_2$  не превосходит сумму абсолютных величин токов  $|I_a| + |I_b|$ . Учитывая, что ток  $I_b$  приближённо равен

$$I_b = \frac{5RI_1 - 6RI_2}{2000R} = \frac{(5\mathcal{E}/9) - (\mathcal{E}/2)}{2000R} = \frac{\mathcal{E}}{36000R},$$

а ток  $I_a = I_{1000R}$  был оценён нами ранее, получим оценку для абсолютных погрешностей токов  $I_1$  и  $I_2$ :

$$\Delta I_{1,2} < \frac{\mathcal{E}}{18000R} + \frac{\mathcal{E}}{36000R} = \frac{\mathcal{E}}{12000R}.$$

Значит, абсолютная погрешность напряжения  $U_{23}$  не превышает

$$\Delta U_{23} < R\Delta I_1 + 2R\Delta I_2 = \frac{\mathcal{E}}{4000R}.$$

Так как сила тока, текущего через резистор  $1000R$ , пропорциональна  $U_{23}$ , то относительные погрешности определения этого тока и напряжения  $U_{23}$  одинаковы и составляют

$$\frac{\Delta I_{1000R}}{I_{1000R}} = \frac{\Delta U_{23}}{U_{23}} = \frac{18}{4000} = 0,045 = 0,45\%,$$

что удовлетворяет условию задачи.

В заключение отметим, что данную задачу можно решить точно. В этом случае после проведения всех необходимых вычислений получается ответ  $I_{1000R} = \frac{\mathcal{E}}{18055R}$ , от которого наша оценка отличается примерно на 0,3%.

**3.51.** Пусть второй провод, идущий от батарейки, подключён между резисторами  $nR$  и  $(n+1)R$ . Тогда схему, описанную в условии задачи, можно перерисовать в эквивалентном виде, показанном на рисунке 3.51, где

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R + 2R + \dots + 100R = \frac{100 \cdot 101}{2}R, \\ r &= R + 2R + \dots + nR = \frac{n(n+1)}{2}R. \end{aligned}$$

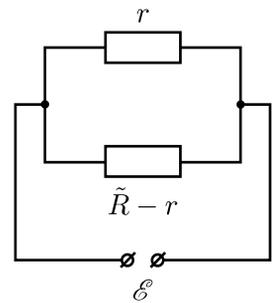


Рис. 3.51.

Тогда сила тока, протекающего через батарейку, равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{\mathcal{E}}{\tilde{R} - r} = \frac{\mathcal{E}\tilde{R}}{r(\tilde{R} - r)}.$$

Далее минимально возможное значение силы тока  $I$  можно искать разными способами. Например, можно рассматривать знаменатель последнего выражения, как квадратный трёхчлен:  $y(r) = -r^2 + r\tilde{R}$ . Функция  $y(r)$  достигает максимума при  $r = \tilde{R}/2$ . Отсюда получаем условие на величину  $n$ :

$$\frac{n(n+1)}{2}R = \frac{100 \cdot 101}{2 \cdot 2}R,$$

которое сводится к квадратному уравнению

$$n^2 + n - 5050 = 0.$$

Решая его, находим  $n \approx 70,565$ . Поскольку  $n$  может принимать только целые значения, то в качестве ответа следует принять наиболее близкое к 70,565 целое число, то есть  $n = 71$ .

Другой способ отыскания минимума выражения для тока, протекающего через батарейку, состоит в алгебраическом преобразовании знаменателя  $y(r)$  к следующему виду:

$$\begin{aligned} y(r) &= r(\tilde{R} - r) = \left( \frac{\tilde{R}}{2} + \left( r - \frac{\tilde{R}}{2} \right) \right) \left( \frac{\tilde{R}}{2} - \left( r - \frac{\tilde{R}}{2} \right) \right) = \\ &= \left( \frac{\tilde{R}}{2} \right)^2 - \left( r - \frac{\tilde{R}}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Видно, что знаменатель можно представить в виде разности двух величин, одна из которых постоянная, а другая зависит от  $r$ . Понятно, что знаменатель достигает максимума (а сила тока минимума) тогда, когда второе слагаемое обращается в ноль, то есть при  $r = \tilde{R}/2$ . Дальнейший ход решения описан выше.

**3.52.** Начнём решение с рассмотрения цепи, изображённой на рисунке в условии слева. Разобьём исходную цепь на две последовательно соединённые вспомогательные цепи с неизвестными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$  (см. рис. 3.52.1) и рассмотрим каждую вспомогательную цепь по отдельности.

Первая вспомогательная цепь представляет собой последовательность узлов, типа изображённых на рисунке 3.52.2. Если у этой цепи отбросить первый узел, то получится новая цепь, во всём подобная прежней (обе цепи бесконечные!), но состоящая из резисторов с вдвое меньшими номиналами. Её сопротивление будет равно  $R_1/2$ . Действительно, так как номиналы всех резисторов, из которых состоит цепь,

пропорциональны  $R$ , то и полное сопротивление цепи пропорционально  $R$ . Значит, если номиналы всех резисторов уменьшатся вдвое, то и полное сопротивление также уменьшится вдвое. В итоге для первой вспомогательной цепи можно нарисовать эквивалентную схему (см. рис. 3.52.3), из которой следует уравнение:

$$R_1 = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1/2}},$$

откуда  $R_1 = \sqrt{2}R$ .

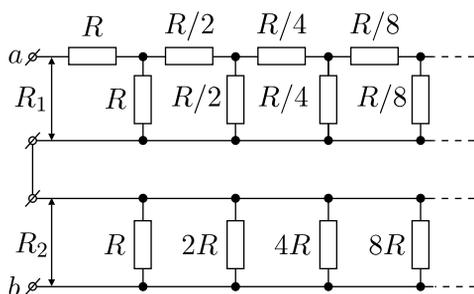


Рис. 3.52.1.

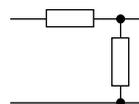


Рис. 3.52.2.

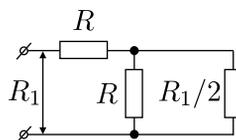


Рис. 3.52.3.

Вторая вспомогательная цепь состоит из бесконечного числа параллельно соединённых резисторов, причем номинал каждого следующего резистора вдвое больше номинала предыдущего. Учитывая это, для сопротивления  $R_2$  имеем:

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R} + \dots} = \frac{R}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Сумма, стоящая в знаменателе, представляет собой сумму бесконечной геометрической прогрессии. По известной формуле она равна

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

С учётом этого  $R_2 = R/2$ .

Этот же результат можно получить и способом, который применялся для нахождения сопротивления  $R_1$ . Отбросим у второй вспомогательной цепи первый резистор  $R$ . Тогда получится новая цепь, подобная

прежней, но имеющая вдвое большее сопротивление. В итоге получаем эквивалентную схему, изображённую на рисунке 3.52.4, из которой следует уравнение:

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R_2}},$$

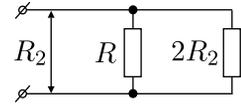


Рис. 3.52.4.

приводящее к прежнему результату для  $R_2$ .

Так как рассмотренные вспомогательные цепи соединены последовательно, окончательно для цепи, изображённой на рисунке в условии слева, имеем:

$$R_{ab} = R_1 + R_2 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) R.$$

Теперь рассмотрим цепь, изображённую на рисунке в условии справа. Для решения задачи, аналогично предыдущему случаю, вновь разобьём исходную цепь на две последовательно соединённые вспомогательные цепи с неизвестными сопротивлениями  $R_1$  и  $R_3$  (см. рис. 3.52.5).

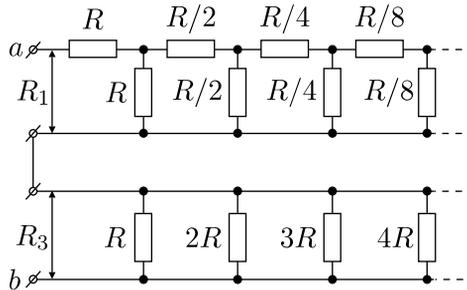


Рис. 3.52.5.

Сопротивление первой вспомогательной цепи  $R_1$  было найдено при рассмотрении предыдущего случая. Сопротивление же второй вспомогательной цепи может быть найдено по формуле:

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} + \dots} = \frac{R}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}.$$

Знаменатель этой формулы представляет собой сумму так называемого гармонического ряда, который расходится. Таким образом, сумма в знаменателе равна бесконечности, поэтому  $R_3 = 0$ . Учитывая это, для

цепи, изображённой на рисунке в условии справа, окончательно получаем:

$$R_{ab} = R_1 + R_3 = \sqrt{2}R.$$

**3.53\*.** Во время измерений напряжение в очень далёких точках (узлах сетки) равно нулю. Поэтому, если мы соединим их хорошо проводящим проводом, то ничего не изменится. Назовём этот провод «бесконечность». Пусть во время измерений сопротивление напряжение между точками 1 и 2, измеренное идеальным вольтметром, равно  $U$ , а ток в измерительной цепи, содержащей источник питания и идеальный амперметр, равен  $I$ . Возьмём теперь два одинаковых источника тока, каждый из которых даёт фиксированный ток  $I$ . Первый источник

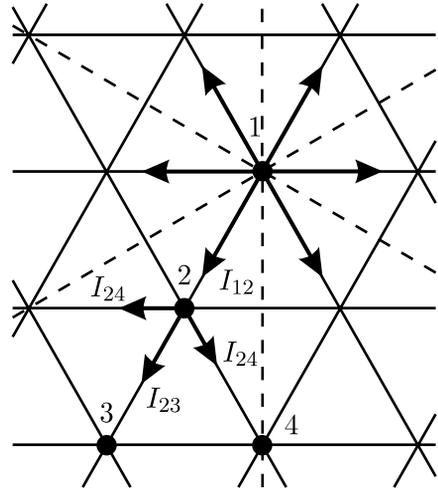


Рис. 3.53.

подключим к точке 1 и «бесконечности» так, чтобы ток  $I$  тёл по сетке от точки 1 к «бесконечности». Сейчас распределение тока по разным направлениям (по шести проводникам, подключённым к точке 1) равномерно. Второй источник подсоединим к точке 2 и «бесконечности» так, чтобы он снимал с точки 2 ток  $I$ , текущий к ней по сетке из «бесконечности». В силу линейности цепи ток в любой её точке теперь будет суммой токов этих двух источников, для каждого из которых распределение тока симметрично относительно точки, к которой он подключён. После этого можно убрать провод «бесконечность», поскольку сумма притекающих к нему и оттекающих от него токов равна нулю. Теперь мы видим, что получилась исходная схема.

Рассмотрим вначале случай, когда один источник подключён к точке 1 и «бесконечности». На рисунке показаны участки (пунктирные линии их пересекают), где ток не идёт из соображений симметрии. Очевидно, что  $I_{12} = I_{23} + 2I_{24}$ , и  $I = 6I_{12}$ .

При измерении  $R_{12} = R$  ток, текущий по проволочке 1–2, очевидно, будет равен  $2I_{12}$ , поскольку токи двух источников складываются. Напряжение между точками 1 и 2 будет равно  $2r_0I_{12}$ , где  $r_0$  — сопротивление одной проволочки. Отсюда  $R_{12} = R = 2r_0I_{12}/I = r_0/3$ . При измерении  $R_{13} = r$  напряжение между точками 1 и 3 будет равно

$2r_0(I_{12} + I_{23})$ , поскольку текущий по проволочкам 1–2 и 2–3 суммарный ток будет одинаков и равен  $I_{12} + I_{23}$ , а сопротивление

$$R_{13} = r = 2r_0(I_{12} + I_{23})/I = R(1 + a),$$

где для  $a = I_{23}/I_{12}$  из последнего уравнения получаем:  $a = (r - R)/R$ .

Аналогично получаем, что при измерении  $R_{14}$  текущий по проволочкам 1–2 и 2–4 суммарный ток будет одинаков и равен  $I_{12} + I_{24}$ , напряжение между точками 1 и 4 будет равно  $2r_0(I_{12} + I_{24})$ , и сопротивление

$$R_{14} = 2r_0(I_{12} + I_{24})/I = R(1 + b),$$

где для  $b = I_{24}/I_{12}$  из этого уравнения получаем:  $b = (R_{14} - R)/R$ . Поскольку  $I_{12} = I_{23} + 2I_{24}$ , или  $1 = a + 2b$ , то, подставляя  $a$  и  $b$ , выраженные через  $R$ ,  $r$  и  $R_{14}$ , в последнее уравнение, получаем:  $1 = \frac{r - R}{R} + 2\frac{R_{14} - R}{R}$ , откуда  $R_{14} = 2R - \frac{r}{2}$ .

**3.54.** Сразу после замыкания ключа напряжение на каждом из конденсаторов равно нулю. Поэтому потенциал точки  $A$  в момент времени  $t = 0$  превышает потенциал точки  $B$  на величину  $\Delta\varphi = \mathcal{E} = 5 \text{ В}$  (см. рис. 3.54). Поскольку  $\Delta\varphi > U_0$ , то, как видно из приведённой в условии вольт-амперной характеристики, сразу же после замыкания ключа диод окажется открытым, разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  упадёт до  $U_0 = 0,7 \text{ В}$ , а через диод будет течь большой ток, ограниченный лишь малым внутренним сопротивлением батареи  $r$ . Так как  $r \ll R$ , то токами, текущими через резисторы при открытом диоде, можно пренебречь. Поэтому заряжающий конденсаторы ток при открытом диоде будет течь так, как показано стрелками на рисунке. Этот ток будет существовать до тех пор, пока разность потенциалов между точками  $A$  и  $B$  не станет равной  $U_0$ , то есть пока каждый из конденсаторов не зарядится до напряжения  $U = \frac{\mathcal{E} - U_0}{2}$ . После этого диод закроется, и ток через него прекратится. Следовательно, через диод протечёт заряд, равный

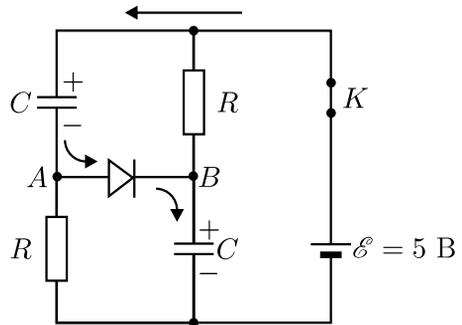


Рис. 3.54.

заряду каждого из конденсаторов:

$$q = CU = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)}{2} = 2,15 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

**3.55.** Очевидно, что при  $\mathcal{E} < U_0$  ток в цепи не будет идти при включении диода в любом направлении, и следовательно, в этом случае вольтметр будет показывать напряжение  $V_1 = \mathcal{E}$ .

В случае  $\mathcal{E} > U_0$  диод открывается, и падение напряжения на нём не зависит от тока и равняется  $U_0$ . Поэтому закон Ома для всей замкнутой цепи имеет вид:

$$\mathcal{E} = U_0 + I(R_1 + R_2),$$

а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R_1 + R_2}.$$

При этом вольтметр будет показывать напряжение

$$V_2 = U_0 + IR_1 = \frac{\mathcal{E}R_1 + U_0R_2}{R_1 + R_2}.$$

Если изменить полярность включения диода, то ток в цепи течь не будет, так как диод не пропускает ток в обратном направлении. Поэтому вольтметр покажет напряжение  $V = \mathcal{E}$ .

**3.56\*.** При подаче напряжения на цепь из лампочек (рис. 3.56.1) в первую очередь будет перегорать лампочка 1. Действительно, текущий через неё ток  $I_1$  равен сумме токов  $I_2$  и  $I_3$ , текущих через лампочки 2 и 3, и поэтому является наибольшим из всех токов в этой цепи.

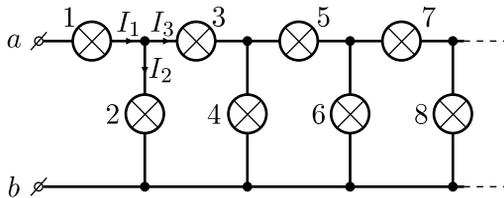


Рис. 3.56.1.

Пусть к клеммам приложено максимально возможное напряжение, при котором лампочка 1 ещё не перегорает. Тогда, как следует из приведённой в условии вольт-амперной характеристики, напряжение на этой лампочке равно  $U_1 = 3$  В, а текущий через неё ток составляет  $I_1 = 0,4$  А. Следовательно, наименьший из токов  $I_2$  и  $I_3$  меньше 0,2 А.

Заметим, что поскольку  $U_2 = U_3 + U_4$ , то  $U_2 > U_3$ , и поэтому  $I_2 > I_3$ . Следовательно,  $I_3 < 0,2$  А. Рассуждая аналогично, можно показать, что токи, текущие через все остальные лампочки с номерами, большими чем 3, также удовлетворяют этому условию.

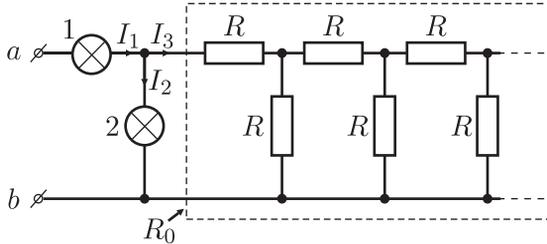


Рис. 3.56.2.

Из приведённой в условии вольт-амперной характеристики следует, что при  $I < 0,2$  А лампочку можно заменить на резистор с постоянным сопротивлением  $R \approx 5$  Ом. Таким образом, рассматриваемая цепь из лампочек может быть заменена на эквивалентную схему, показанную на рисунке 3.56.2. Найдём сопротивление  $R_0$  бесконечной цепочки, обведённой пунктирной рамкой. Эта цепочка состоит из одинаковых резисторов с сопротивлениями  $R$ , и её сопротивление может быть найдено при помощи способа, который использовался для вычисления сопротивления первой вспомогательной цепочки в решении задачи 3.52. Для сопротивления  $R_0$  можно записать:  $R_0 = R + \frac{RR_0}{R + R_0}$ ,

откуда  $R_0 = 0,5(\sqrt{5} + 1)R \approx 8$  Ом.

Вернёмся к исходной цепочке из лампочек. Напряжение на лампочке 2 равно  $U_2 = (I_1 - I_2)R_0$ , откуда текущий через неё ток  $I_2 = I_1 - \frac{U_2}{R_0}$ . Значит, для того, чтобы определить величину  $U_2$ , нужно найти точку пересечения графика

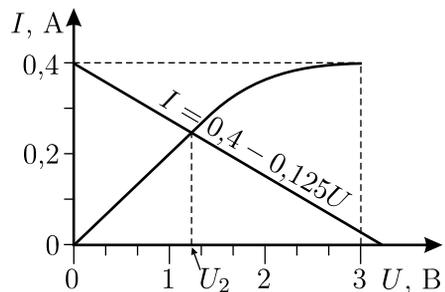


Рис. 3.56.3.

$$I = I_1 - \frac{1}{R_0}U = 0,4 - 0,125U$$

и вольт-амперной характеристики, приведённой в условии. Выполнив построение (см. рис. 3.56.3), получаем  $U_2 \approx 1,2$  В. Следовательно, искомое напряжение, при прикладывании которого к клеммам цепи ни одна из лампочек не перегорает, равно  $U = U_1 + U_2 \approx 4,2$  В.

**3.57.** Обозначим через  $R$  сопротивление каждого из вольтметров, а через  $r$  и  $\mathcal{E}$  — внутреннее сопротивление и ЭДС каждой из батареек.

Тогда сила тока, текущего через  $k$ -й вольтметр, равна  $\frac{U}{Rn^k}$ , а сила тока, текущего через  $k$ -ю батарейку, равна

$$I_k = \frac{U}{R} \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^k} \right) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1 - (1/n)^{k+1}}{1 - (1/n)},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим замкнутый участок исходной цепи, включающий в себя  $k$ -ю батарейку и два соседних с ней вольтметра (см. рис. 3.57). Как следует из закона Ома, ЭДС должна равняться сумме падений напряжения на всех трёх участках этой цепи:

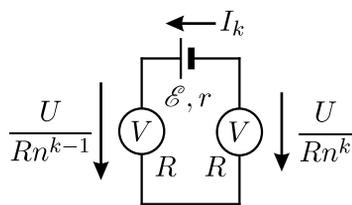


Рис. 3.57.

$$\mathcal{E} = I_k r + \frac{U}{Rn^k} \cdot R - \frac{U}{Rn^{k+1}} \cdot R = U \left( \frac{1}{n^k} - \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{r}{R} \cdot \frac{1 - (1/n)^{k+1}}{1 - (1/n)} \right),$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{Ur}{R} \cdot \frac{1}{1 - (1/n)} + \frac{U}{n^k} \left( 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{R} \cdot \frac{1/n}{1 - (1/n)} \right).$$

Поскольку полученное равенство должно быть справедливым для любого  $k$ , то заключённое в скобки выражение равно нулю:

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{R} \cdot \frac{1/n}{1 - (1/n)} = 0.$$

Отсюда  $\frac{r}{R} = \frac{(n-1)^2}{n}$ , и искомая ЭДС равна

$$\mathcal{E} = \frac{Ur}{R} \cdot \frac{n}{n-1} = U \cdot \frac{(n-1)^2}{n} \cdot \frac{n}{n-1} = (n-1)U.$$

**3.58.** При подключении как прибора Алисы, так и прибора Василисы к контактам 1 и 3 схемы ток, текущий через прибор, будет равен  $I = U/R$ , где  $R$  — сопротивление данного прибора. Поэтому вне зависимости от величины  $R$  стрелка на шкале самодельного вольтметра будет показывать величину  $IR = U$ , то есть напряжение батарейки. Следовательно, приборы Алисы и Василисы при подключении к клеммам 1 и 3 покажут одинаковые значения напряжения  $V_{13} = U_{13} = 4,5$  В.

Выясним теперь, как зависят показания  $U_{12}$  и  $U_{23}$  самодельных приборов от величин сопротивлений  $R_1$  (для прибора Алисы) или  $R_2$  (для прибора Василисы). Пусть прибор подключён к контактам 1 и 2 испытательной схемы (см. рис. 3.58).

Обозначим через  $R_x$  и  $R_y$  сопротивления резисторов, включённых между контактами 1–2 и 2–3. Тогда в случае подключения прибора Алисы ток, текущий через резистор  $R_1$ , будет равен  $I_1 = U_{12}/R_1$ , а ток, текущий через резистор  $R_x$ , будет равен  $I_x = U_{12}/R_x$ . Поэтому ток, текущий через резистор  $R_y$ , равен

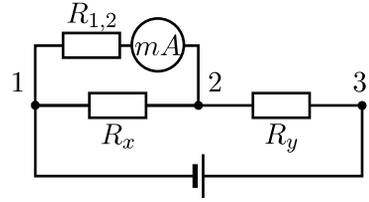


Рис. 3.58.

$$I_y = I_1 + I_x = U_{12} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right),$$

а напряжение батарейки равно:

$$U_{13} = U_{12} + I_y R_y = U_{12} R_y \left( \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right).$$

Отсюда

$$U_{12} = \frac{U_{13}}{R_y \left( \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right)}.$$

Рассуждая аналогично, можно получить выражение для напряжения  $U_{23}$  в случае подключения приборов к контактам 2 и 3:

$$U_{23} = \frac{U_{13}}{R_x \left( \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_x} \right)}.$$

По условию задачи  $U_{12} = U_{23}$ . Следовательно,  $R_x = R_y$ . С учётом этого получаем:

$$U_{12} = \frac{U_{13}}{2 + \frac{R_x}{R_1}},$$

откуда

$$R_x = R_y = \left( \frac{U_{13}}{U_{12}} - 2 \right) R_1 = 0,5 \text{ кОм}.$$

Теперь для того, чтобы найти показания прибора Вавилонской  $V_{12}$  и  $V_{23}$  при подключении к клеммам 1–2 и 2–3, нужно в выражениях для  $U_{12}$  и  $U_{23}$  заменить  $R_1$  на  $R_2$ . С учётом равенства величин  $R_x$  и  $R_y$  получаем:

$$V_{12} = V_{23} = \frac{U_{13}}{2 + \frac{R_x}{R_2}} = \frac{4,5 \text{ В}}{2 + \frac{0,5}{2}} = 2 \text{ В.}$$

**3.59.** Обозначим через  $R_A$ ,  $R_V$  и  $R$  сопротивления амперметра, вольтметра и резистора, а через  $U$  — напряжение батарейки. Тогда по закону Ома в первом и во втором случаях получаем:

$$U = I_1 R_A + U_1, \quad U = I_2 R_A + U_2.$$

Отсюда  $(I_1 - I_2)R_A = U_2 - U_1$ , и

$$R_A = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 2 \text{ Ом}; \quad U = I_1 \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} + U_1 = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} = 3 \text{ В.}$$

В первом случае через параллельно соединённые вольтметр и резистор течёт суммарный ток

$$I_1 = U_1 \left( \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right).$$

Во втором случае на параллельно соединённых амперметре и резисторе падает напряжение  $U - U_2$ . Поэтому в данном случае ток, текущий через резистор, равен  $\frac{U - U_2}{R}$ , а ток через вольтметр  $\frac{U - U_2}{R} + I_2$ . С другой стороны, этот же ток равен  $\frac{U_2}{R_V}$ , то есть

$$\frac{U - U_2}{R} + I_2 = \frac{U_2}{R_V}.$$

Из записанных соотношений получаем:

$$\begin{aligned} \frac{U}{R} &= U_2 \left( \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) - I_2 = I_1 \frac{U_2}{U_1} - I_2; \\ R &= \frac{U}{I_1 \frac{U_2}{U_1} - I_2} = \frac{I_1 U_2 - I_2 U_1}{I_1 - I_2} \cdot \frac{U_1}{I_1 U_2 - I_2 U_1} = \frac{U_1}{I_1 - I_2} = 2 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R_V} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{1}{R} = \frac{I_1}{U_1} - \frac{I_1 - I_2}{U_1} = \frac{I_2}{U_1};$$

$$R_V = \frac{U_1}{I_2} = 2 \text{ Ом.}$$

**3.60.** Нарисуем схему разветвлённой электрической цепи, получившейся у школьников после подключения их приборов к неизвестному резистору (см. рис. 3.60). Сопротивления резисторов  $r_1$  и  $r_2$  включают в себя сопротивления тех резисторов, которые школьники использовали в своих омметрах, а также внутренние сопротивления соответствующих батареек и амперметров.

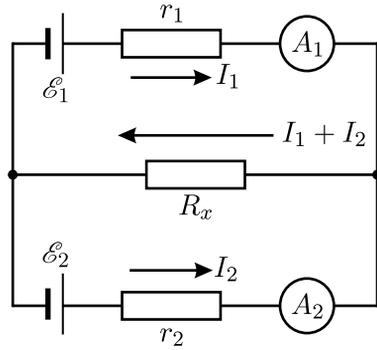


Рис. 3.60.

Согласно правилам расчёта разветвлённых цепей постоянного тока (правила Кирхгофа), сумма токов в каждом узле разветвлённой цепи равна нулю, а сумма падений напряжений вдоль замкнутых контуров, на которые можно разбить эту цепь, равна суммарной ЭДС в этих контурах. Отсюда, выбрав направления текущих в участках цепи токов так, как показано на рисунке, получаем:

$$\mathcal{E}_1 = I_1 r_1 + (I_1 + I_2) R_x; \quad \mathcal{E}_2 = I_2 r_2 + (I_1 + I_2) R_x.$$

Заметим, что при измерении сопротивления резистора  $R$  одним из самодельных омметров через этот омметр течёт ток  $I_i = \frac{\mathcal{E}_i}{r_i + R}$  (здесь  $i = 1, 2$ ), так что показание каждого омметра связано с текущим через него током формулой:  $I_i R = \mathcal{E}_i - I_i r_i$ . Поэтому записанную выше систему уравнений можно переписать в виде:

$$I_1 R_1 = (I_1 + I_2) R_x;$$

$$I_2 R_2 = (I_1 + I_2) R_x,$$

откуда

$$I_1 = (I_1 + I_2) \frac{R_x}{R_1}, \quad I_2 = (I_1 + I_2) \frac{R_x}{R_2}.$$

Складывая эти равенства, получим:  $R_x \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1$ . Отсюда

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

**3.61.** Всё дело в том, что у батареек имеется конечное внутреннее сопротивление  $r$ , и вольтметры также неидеальны. Обозначим

внутренние сопротивления вольтметров через  $R_1$  и  $R_2$  и запишем закон Ома для каждой из схем измерения ЭДС (на рисунке 3.61 изображены схемы, в которых реальные вольтметры заменены идеальными приборами с параллельно подключёнными к ним сопротивлениями).

Для первой цепи  $\mathcal{E}_0 = I(r + R_1)$ , откуда, учитывая, что вольтметр показывает напряжение  $U_1 = IR_1$ , получаем:

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_0 R_1}{r + R_1} = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{r}{R_1}}.$$

Для второй и третьей цепи аналогично имеем:

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{r}{R_2}}, \quad U_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{1 + \frac{r}{R_1} + \frac{r}{R_2}}.$$

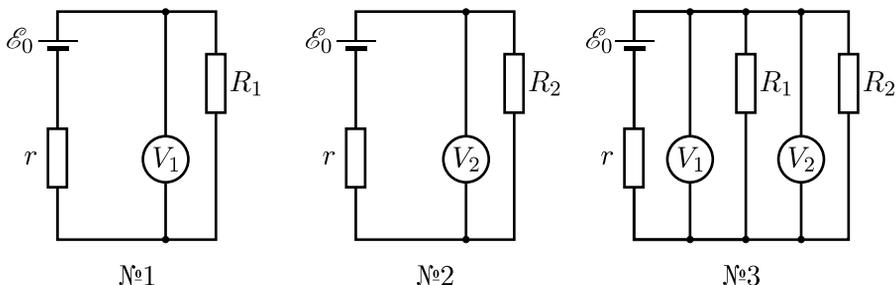


Рис. 3.61.

Решая совместно три полученных уравнения, находим ЭДС батарейки:

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} - \frac{1}{U_0}} = 1,8 \text{ В}.$$

**3.62.** Пусть напряжение на миллиамперметре, при котором его стрелка отклоняется до последнего деления шкалы, равно  $U_0$ . Тогда на пределе «1 мА» сопротивление всего амперметра (с учётом задействованного шунта) равно  $R_1 = \frac{U_0}{1 \text{ мА}}$ , а на пределе «3 мА» оно равно  $R_2 = \frac{U_0}{3 \text{ мА}} = \frac{R_1}{3}$ . Если сопротивление исследуемой цепи равно  $r$ , а действующая в ней ЭДС равна  $\mathcal{E}$ , то можно записать:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_2} = \frac{\mathcal{E}}{r + (R_1/3)}.$$

Отсюда истинный ток в цепи без амперметра:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{2I_1 I_2}{3I_1 - I_2} = 2 \text{ мА.}$$

**3.63.** Ясно, что между каждой парой клемм «чёрного ящика» должны быть включены резисторы — в противном случае невозможно будет снимать ненулевое напряжение либо с клемм  $BC$ , либо с клемм  $AC$ . Простейшие схемы подключения этих резисторов («треугольник» и «звезда») изображены на рисунках 3.63.1 и 3.63.2.

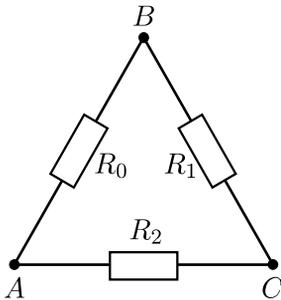


Рис. 3.63.1.

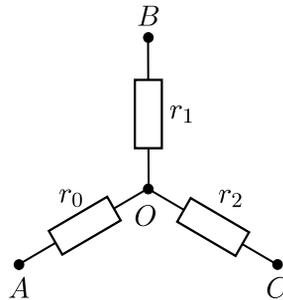


Рис. 3.63.2.

Вначале рассмотрим первую схему и найдём, чему должны быть равны сопротивления  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$ . Обозначим подаваемое на клеммы напряжение через  $V = 20$  В, а снимаемое с соответствующих пар клемм напряжение через  $U_{BC} = 8$  В и  $U_{AC} = 15$  В. Тогда можно записать:

$$U_{BC} = \frac{VR_1}{R_1 + R_2}, \quad U_{AC} = \frac{VR_2}{R_0 + R_2}.$$

Отсюда

$$R_2 = \frac{U_{AC}}{V - U_{AC}} R_0 = 3R_0, \quad R_1 = \frac{U_{BC}}{V - U_{BC}} R_2 = 2R_0.$$

Теперь найдём, чему должны быть равны сопротивления  $r_0$ ,  $r_1$  и  $r_2$  во второй схеме, используя те же обозначения для напряжений, что и первом случае. Поскольку во второй схеме при подаче напряжения  $V$  на клеммы  $AB$  ток не течёт через резистор  $r_2$  и напряжение на нём не падает, а при подаче напряжения  $V$  на клеммы  $BC$  ток не течёт через резистор  $r_0$  и на нём также отсутствует падение напряжения, то

$$U_{BC} = U_{OB} = \frac{Vr_1}{r_0 + r_1}, \quad U_{AC} = U_{OC} = \frac{Vr_2}{r_1 + r_2}.$$

Отсюда

$$r_1 = \frac{U_{BC}}{V - U_{BC}} r_0 = \frac{2}{3} r_0, \quad r_2 = \frac{U_{AC}}{V - U_{AC}} r_1 = 3r_1 = 2r_0.$$

Таким образом, «чёрный ящик» в простейших случаях должен состоять из трёх резисторов с сопротивлениями  $R_0$ ,  $R_1 = 2R_0$  и  $R_2 = 3R_0$ , соединённых «треугольником» — так, как показано на рисунке 3.63.1, или из трёх резисторов с сопротивлениями  $r_0$ ,  $r_1 = \frac{2}{3}r_0$  и  $r_2 = 2r_0$ , соединённых «звездой», как показано на рисунке 3.63.2. Величины сопротивлений  $R_0$  и  $r_0$  могут быть любыми, отличными от нуля.

**3.64.** 1) Из условия задачи вытекает, что:

— никакие две клеммы не могут быть подключены только к батарее (иначе бы амперметр при подключении к этим клеммам зашкаливало);

— никакие две клеммы не могут быть соединены друг с другом только соединительным проводом (иначе бы два тока из трёх совпали).

Поэтому невозможны следующие схемы, изображённые на рисунке 3.64.1:

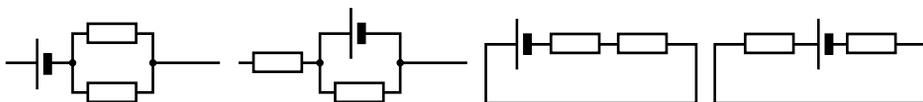


Рис. 3.64.1.

2) Далее, если схема состоит из нескольких отдельных частей, то все три клеммы должны быть подключены к той её части, которая содержит батарею. Поэтому, с учётом изложенного в пункте 1), также невозможны следующие схемы (см. рис. 3.64.2):

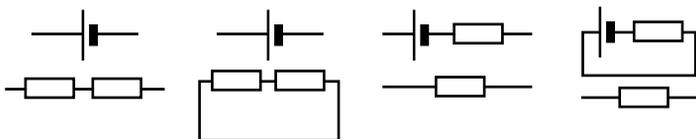


Рис. 3.64.2.

3) В итоге нам осталось рассмотреть следующие схемы (см. рис. 3.64.3).

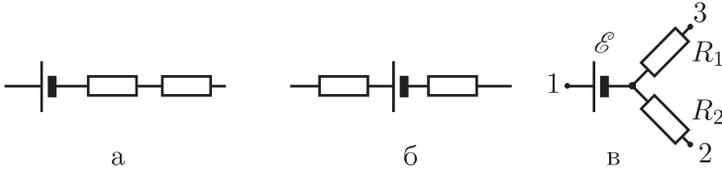


Рис. 3.64.3.

Поскольку между клеммами 2 и 3 включено только сопротивление, то в случаях (а) и (б) клеммы 1, 2 и 3 могут располагаться так, как показано на рисунке 3.64.4.

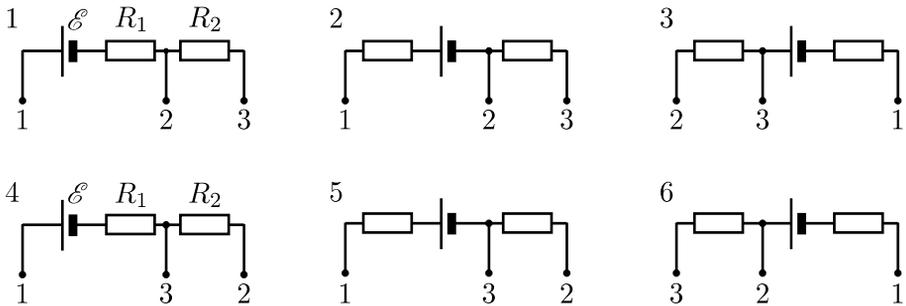


Рис. 3.64.4.

Заметим, что схемы 1, 2, 6 эквивалентны друг другу (также эквивалентны друг другу схемы 3, 4, 5). Поэтому для решения задачи достаточно рассмотреть всего три схемы — по одной, соответствующей случаям, изображённым на рисунках 3.64.3.а и 3.64.3.б (например, схемы 1 и 4 с рисунка 3.64.4) и схему с рисунка 3.64.3.в. Прделаем это.

Запишем (с учётом условия задачи) закон Ома для первой схемы (рисунок 3.64.4.1):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad 2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}.$$

При решении этой системы уравнений значение  $R_2$  получается отрицательным. Значит, такое соединение невозможно. Аналогично для второй схемы (рисунок 3.64.4.4):

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}, \quad 2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}.$$

Отсюда получаем  $R_1 = R_2 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$ .

Наконец, для последней схемы (рисунок 3.64.3.в):

$$2I = \frac{\mathcal{E}}{R_1}, \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R_2},$$

откуда  $R_1 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$ ,  $R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I}$ .

В итоге получаем, что величины сопротивлений могут быть равны  $R_1 = R_2 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$  (батарея и сопротивления соединены последовательно) или  $R_1 = \frac{\mathcal{E}}{2I}$  и  $R_2 = \frac{\mathcal{E}}{I}$  (батарея и сопротивления соединены «звездой»).

**3.65.** Путём простого перебора вариантов легко установить, что минимально возможное число резисторов внутри «чёрного ящика» — четыре, и возможны две схемы их соединения.

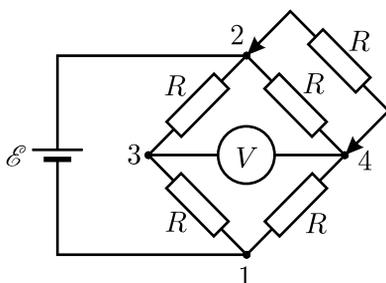


Рис. 3.65.1.

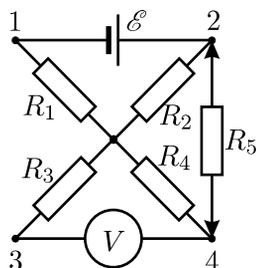


Рис. 3.65.2.

**1. Мостовая схема** (рисунок 3.65.1). Рассмотрим, например, случай, когда дополнительный резистор включён между клеммами 2 и 4. При этом между точками 3 и 1 падение напряжения равно  $\mathcal{E}/2$ , а между точками 4 и 1, очевидно,  $2\mathcal{E}/3$ . Поэтому между клеммами 4 и 3 напряжение равно

$$U = \frac{2\mathcal{E}}{3} - \frac{\mathcal{E}}{2} = \frac{\mathcal{E}}{6}.$$

Остальные случаи подключения дополнительного резистора рассматриваются аналогично.

**2. Схема с общей точкой посередине** (рисунок 3.65.2). Включим дополнительный резистор  $R_5 = R$  между точками 2 и 4, как и на первой схеме. В данном случае через резистор  $R_3$  и идеальный вольтметр, обладающий бесконечно большим сопротивлением, ток не течёт. Поэтому общее сопротивление цепи, состоящей из резистора  $R_1 = R$

и подключённой к нему последовательно разветвлённой части цепи, состоящей из резистора  $R_2 = R$  и соединённого с ним параллельно сопротивления  $R_4 + R_5 = 2R$ , равно

$$R_x = R + \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = R + \frac{2R}{3} = \frac{5R}{3}.$$

Поэтому ток, текущий через резистор  $R_1$ , будет равен

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_x} = \frac{3\mathcal{E}}{5R},$$

а ток, текущий через резисторы  $R_4$  и  $R_5$  — втрое меньше:

$$I_4 = I_5 = \frac{I_1}{3} = \frac{\mathcal{E}}{5R}.$$

Вольтметр показывает падение напряжения на резисторе  $R_4 = R$ , равное  $U = I_4 R = \frac{\mathcal{E}}{5}$ . Остальные случаи подключения дополнительного резистора рассматриваются аналогично.

**3.66.** Так как конденсатор разряжается не до конца, то находящиеся в «чёрном ящике» конденсатор и резистор могут быть соединены друг с другом и с контактами только последовательно. Поскольку установившийся заряд на конденсаторе  $C$  равен  $Q_0/2$ , то ёмкость конденсатора  $C_1$  в «чёрном ящике» также равна  $C$ .

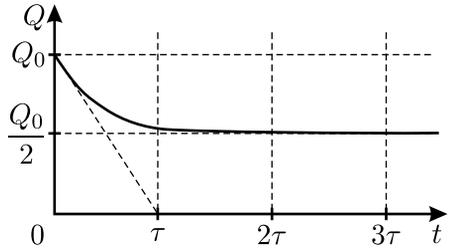


Рис. 3.66.

В начальный момент времени ток через резистор, в соответствии с определением силы тока, равен  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ , где  $\Delta Q$  — заряд, стёкший с конденсатора  $C$  за малое время  $\Delta t$ , прошедшее после начала его разрядки. Отношение  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  равно угловому коэффициенту касательной к графику зависимости  $Q(t)$ , проведённой в точке, соответствующей моменту времени  $t = 0$ . Из графика (см. рис. 3.66) видно, что эта касательная, выходящая из точки  $Q_0$  на оси ординат, отсекает на оси абсцисс отрезок времени, равный  $\tau$ . Таким образом, начальный ток через резистор равен  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_0}{\tau}$ , а падение напряжения на нём  $U = \frac{Q_0}{C}$ . Поэтому сопротивление резистора  $R = \frac{U}{I} = \frac{\tau}{C}$ .

**3.67\***. Так как радиус каждого шара мал по сравнению с глубиной его погружения в среду и с расстоянием между шарами, то вблизи каждого шара ток распределён сферически симметрично. Обозначим радиусы шаров через  $R_1$  и  $R_2$ , удельное сопротивление среды через  $\rho$ , её диэлектрическую проницаемость через  $\varepsilon$ . Пусть на первом шаре в установившемся режиме находится положительный заряд  $q_1$ , а на втором — отрицательный заряд  $q_2$ . Окружим первый шар воображаемыми концентрическими сферическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $r + \Delta r$  ( $\Delta r \ll r$ ) и найдём напряжение  $\Delta U$  между этими поверхностями:

$$\Delta U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_1}{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{q_1}{r + \Delta r} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \Delta r.$$

Сопротивление среды, находящейся между рассматриваемыми поверхностями, равно  $\Delta \tilde{R} = \rho \frac{\Delta r}{4\pi r^2}$ . Значит, в соответствии с законом Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС, сила тока, текущего между рассматриваемыми поверхностями, равна

$$i = \frac{\Delta U}{\Delta \tilde{R}} = \frac{q_1}{\varepsilon_0\varepsilon\rho}.$$

Поскольку сила тока вдоль всей цепи одинакова, то из полученной формулы следует, что заряды на обоих шарах одинаковы по величине:  $q_1 = |q_2| = i\varepsilon_0\varepsilon\rho$ . Следовательно, потенциалы шаров равны

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1} = \frac{\rho i}{4\pi R_1}, \quad \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2} = -\frac{\rho i}{4\pi R_2}.$$

Поскольку сопротивление источника и соединительных проводников пренебрежимо мало, то разность потенциалов между шарами равна ЭДС источника:

$$\mathcal{E} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\rho i}{4\pi} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Отсюда получаем связь между радиусами шаров и силой тока в цепи:

$$i = \frac{4\pi\mathcal{E}}{\rho \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}.$$

По условию задачи, когда погруженные в среду шары одинаковы, ( $R_1 = R_2 = R$ ), в цепи течёт ток, сила которого равна  $I = \frac{2\pi\mathcal{E}R}{\rho}$ . Если

же один из шаров заменить шаром вдвое меньшего размера ( $R_1 = R$ ,  $R_2 = R/2$ ), то в цепи будет течь ток  $I' = \frac{4\pi\epsilon R}{3\rho} = \frac{2}{3}I$ .

**3.68\***. После создания разности потенциалов  $V$  в процессе установления тока на поверхностях пластинки накапливаются избыточные заряды, которые и создают в проводнике электрическое поле. Считая, что потенциал грани  $AD$  больше потенциала грани  $BC$ , и потенциал точки  $F$  превышает потенциал точки  $G$ , напряжённость поля  $\vec{E}$  в среднем сечении пластинки можно представить в виде суммы компонент  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_{\perp}$  (см. рис. 3.68), либо в виде суммы компонент  $\vec{E}_x$  и  $\vec{E}_y$ , где ось  $Y$  перпендикулярна главной оси симметрии монокристалла  $X$  и лежит в плоскости, параллельной грани  $ABCD$ . Обозначим угол между векторами  $\vec{E}_{\parallel}$  и  $\vec{E}_x$  через  $\alpha$ . Тогда

$$E_{\parallel} = E_x \cos \alpha + E_y \sin \alpha,$$

$$E_{\perp} = E_x \sin \alpha - E_y \cos \alpha.$$

В установившемся режиме по пластинке протекает ток, вектор плотности которого  $\vec{j}$  параллелен стороне  $AB$ . Поэтому  $j_x \sin \alpha = j_y \cos \alpha$ .

Согласно закону Ома  $E_x = \rho_x j_x$  и  $E_y = \rho j_y$ . Следовательно,

$$\frac{\rho_x}{\rho} = \frac{E_x}{E_y} \operatorname{tg} \alpha.$$

Поскольку пластинка вырезана из однородного кристалла, имеет неизменную площадь поперечного сечения и достаточно длинная (её длина в 10 раз больше ширины), то можно считать, что во всех точках поперечного сечения пластинки плотность постоянного тока одинакова, и  $U = E_{\perp} b$ . Считая, что вдоль оси пластинки плотность тока также постоянна, получим  $V = E_{\parallel} a$ . Выражая величины  $E_x$  и  $E_y$  через  $E_{\parallel}$  и  $E_{\perp}$ , а их, в свою очередь, через  $U$  и  $V$ , получаем, что искомое отношение равно

$$\frac{\rho_x}{\rho} = \frac{Vb \cos \alpha + Ua \sin \alpha}{Vb \sin \alpha - Ua \cos \alpha} \operatorname{tg} \alpha \approx 3,20.$$

Отметим, что по данным, приведённым в справочнике физических величин, для монокристалла галлия

$$\frac{\rho_x}{\rho} = \frac{55,5 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}}{17,3 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{см}} \approx 3,21.$$

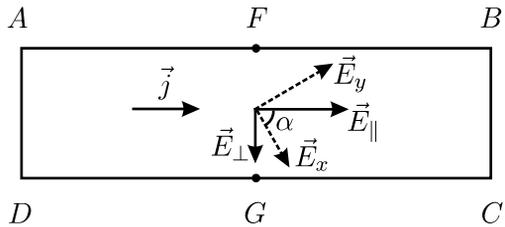


Рис. 3.68.

**3.69.** Поскольку электродвижущая сила химического источника тока определяется только его химическим составом, ЭДС копии будет равна ЭДС батарейки. Пусть эта ЭДС равна  $\mathcal{E}$ , сопротивление лампочки равно  $R$ , а внутреннее сопротивление источника  $r$ . Тогда полная мощность, выделяющаяся в цепи батарейки, равна  $N_1 = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r_1}$ , а в цепи копии  $N_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r_2}$ . Так как  $r_1 \ll R$  и, следовательно,  $r_2 \ll R$ , то  $N_1 \approx N_2 \approx \mathcal{E}^2/R$ .

Химический источник совершает работу, расходуя запасённую в нём энергию химических связей молекул. По сравнению с батарейкой в её копии вдвое большего размера заключено в  $2^3 = 8$  раз больше реагентов, поэтому при такой же мощности она сможет совершить во столько же раз бóльшую работу. Это означает, что лампочка, подключённая к копии, будет гореть 24 часа.

**3.70.** При электролизе воды происходит поляризация электродов, в результате чего ячейка устройства становится гальваническим элементом. Работа действующих в этом элементе сторонних сил расходуется при электролизе на образование водорода, при сгорании которого выделяется теплота в количестве, равном данной работе. Это позволяет найти ЭДС такого элемента. В соответствии с законом электролиза Фарадея, для получения  $m$  граммов водорода через ячейку должен протечь заряд

$$q = \frac{mZeN_A}{A} = \frac{mZF}{A}.$$

Здесь  $A = 1$  г/моль — атомная масса водорода,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — модуль заряда электрона,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль $^{-1}$  — число Авогадро,  $Z = 1$  — валентность,  $F = eN_A = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль — постоянная Фарадея. Поскольку при этом, как уже говорилось, сторонними силами должна быть совершена работа  $A_{\text{стор}}$ , равная  $Q$ , то ЭДС равна

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{Q}{q} = \frac{QA}{mZF}.$$

Полезным эффектом при работе рассматриваемого устройства для электролиза является выделение тепла  $Q = A_{\text{стор}} = q\mathcal{E}$ , а затратами — работа источника  $A_{\text{затр}} = qU$ . Поэтому КПД ячейки (он равен КПД соответствующего гальванического элемента) и всего устройства для электролиза воды:

$$\eta = \frac{Q}{A_{\text{затр}}} = \frac{q\mathcal{E}}{qU} = \frac{QA}{mZFU} \approx 0,75, \quad \text{то есть} \quad \eta \approx 75\%.$$

**3.71.** Из приведённой в условии задачи зависимости  $I(t)$  следует, что при  $t \gg 1/f$  в течение времени  $t/2$  через кювету течёт некоторый постоянный ток  $I_0$ , а в течение остального времени ток в цепи отсутствует. В соответствии с законом электролиза Фарадея, за время  $t/2$  на электродах выделяется масса меди

$$m = \frac{A}{ZF} \cdot \frac{I_0 t}{2},$$

где  $F$  — постоянная Фарадея,  $Z = 2$  — валентность меди. В соответствии с законом Джоуля — Ленца, за это же время в электролите выделяется количество теплоты

$$\Delta Q = I_0^2 \cdot \rho \frac{L}{bh} \cdot \frac{t}{2}.$$

Так как это тепло полностью идёт на нагревание электролита, то, на основании уравнения теплового баланса, можно записать:  $\Delta Q = C\Delta T$ , где  $\Delta T$  — искомое изменение температуры электролита. Решая полученные уравнения, найдём, что температура электролита за время  $t \gg 1/f$  возрастёт на величину

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{\rho L t I_0^2}{2bhC} = \frac{2m^2 Z^2 F^2 \rho L}{A^2 bhCt}.$$

**3.72\*.** Из соображений симметрии и правила буравчика следует, что вектор магнитной индукции  $\vec{B}_0$  поля, создаваемого током, текущим по контуру  $ABCD$ , направлен вдоль оси  $y$ . Заметим, что ток  $I$ , текущий по контуру  $ABCGHEA$ , можно представить как сумму трёх токов  $I$ , текущих по контурам  $ABCD$ ,  $DCGHD$  и  $ADHEA$  (см. рис. 3.72). Каждый из этих токов создаёт в центре куба  $O$  поле  $B_0$ , направленное перпендикулярно плоскости соответствующего контура. На основании принципа суперпозиции, для искомого вектора индукции  $\vec{B}$  можно записать:  $\vec{B} = \vec{B}_{ABCD} + \vec{B}_{DCGHD} + \vec{B}_{ADHEA}$ . Переходя к координатной форме записи, получим:

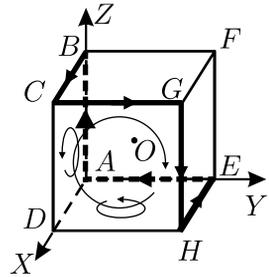


Рис. 3.72.

$$\vec{B} = (0, B_0, 0) + (-B_0, 0, 0) + (0, 0, B_0) = (-B_0, B_0, B_0).$$

Таким образом, вектор  $\vec{B}$  направлен вдоль отрезка  $OF$  в сторону точки  $F$ , а величина вектора  $B$  равна  $|\vec{B}| = \sqrt{3}B_0$ .

**3.73\*.** На полоски линии, описанной в задаче, действуют две силы: кулоновская сила электростатического притяжения  $F_K$ , обусловленная наличием на поверхности полосок зарядов, и сила Ампера  $F_A$ ,

связанная с протеканием тока и отталкивающая пластинки друг от друга. Согласно условию, при некотором сопротивлении нагрузки  $R_0$  сила взаимодействия проводников равна нулю. Это означает, что при данном сопротивлении нагрузки силы Кулона и Ампера уравновешивают друг друга. Вычислим кулоновскую силу, приходящуюся на единицу длины линии. Выделим участок линии длиной  $l$ . Пусть на нём находится заряд  $q$ . Тогда  $\frac{F_K}{l} = \frac{qE}{2l}$ . В этой формуле  $E$  — напряжённость электрического поля между полосками линии, которая представляет собой плоский конденсатор. В формуле учтено, что кулоновская сила равна произведению заряда, находящегося на рассматриваемом участке пластины, на величину напряжённости поля, создаваемого другой пластиной, равную  $E/2$ . Выразим погонную кулоновскую силу через величины, заданные в условии задачи:

$$\frac{F_K}{l} = \frac{qE}{2l} = \frac{qU}{2bl} = \frac{CU^2}{2bl} = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2b^2}.$$

Здесь  $C/l = \varepsilon_0 a/b$  — ёмкость плоского конденсатора, приходящаяся на единицу длины линии.

Теперь найдём силу Ампера, приходящуюся на единицу длины линии. Она пропорциональна квадрату силы тока:

$$\frac{F_A}{l} = BI^2 = B \left( \frac{U}{R_0} \right)^2.$$

Коэффициент пропорциональности  $B$  можно найти, приравнявая  $F_K/l$  и  $F_A/l$ :

$$B = \frac{\varepsilon_0 a R_0^2}{2b^2}.$$

Из полученных формул следует, что после увеличения сопротивления нагрузки в  $n = 5$  раз кулоновская сила не изменится, а сила Ампера уменьшится в  $n^2$  раз. Значит, после увеличения сопротивления полоски линии будут притягиваться. Сила их притяжения  $f$ , приходящаяся на единицу длины, будет равна разности сил Кулона и Ампера

$$f = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2b^2} - B \left( \frac{U}{n R_0} \right)^2,$$

откуда, с учётом выражения для  $B$ , получаем:

$$f = \frac{\varepsilon_0 a U^2}{2b^2} \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \approx 0,042 \text{ Н/м.}$$

**3.74.** Выясним сначала, где находится положение равновесия переключки. Поскольку батареи имеют одинаковые ЭДС, то при схеме их включения, показанной на рисунке 3.74, разность потенциалов между серединами рельсов равна нулю. Следовательно, если переключка покоится посередине, то через неё не протекает ток, а значит, на неё не

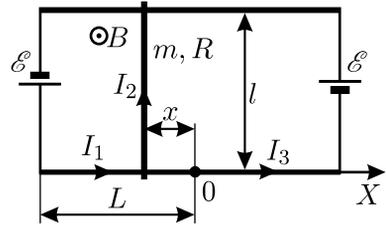


Рис. 3.74.

действует сила Ампера. Значит, это положение и является положением равновесия переключки. Отметим далее, что при движении переключки через неё протекает ток, обусловленный как изменением омического сопротивления частей цепи, так и явлением электромагнитной индукции. В соответствии с правилом Ленца, часть силы Ампера, связанная с индукционным током, приводит к затуханию колебаний (можно показать, что эта часть силы пропорциональна скорости переключки и, следовательно, является аналогом вязкого трения). Поэтому, в соответствии с условием задачи, ЭДС индукции при решении задачи можно пренебречь.

Поместим начало координатной оси  $X$  в середину нижнего рельса и направим ось вдоль него. Рассмотрим малое смещение переключки вдоль оси  $X$  — например, влево. После того, как переключка сдвинется вдоль рельсов на расстояние  $x < 0$ , в ней начнёт протекать ток. Обозначим ток, текущий от левой батареи к началу координат, через  $I_1$ ; ток, ответвляющийся из начала координат в переключку, через  $I_2$ ; ток, текущий от начала координат к правой батарее, через  $I_3$ . Запишем первое правило Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Для контура, содержащего левую батарею и переключку, а также для контура, содержащего правую батарею и переключку, применим второе правило Кирхгофа:

$$2I_1\rho(L + x) + I_2R = \mathcal{E},$$

$$2I_3\rho(L - x) - I_2R = \mathcal{E}.$$

Решая полученную систему, найдём силу тока, текущего через переключку:

$$I_2 = -\frac{\mathcal{E}x}{\rho(L^2 - x^2) + RL} \approx -\frac{\mathcal{E}x}{\rho L^2 + RL},$$

поскольку колебания малые, и  $x^2 \ll L^2$ .

Так как переключатель находится в магнитном поле, то на неё действует сила Ампера:

$$F_A = I_2 l B = -\frac{\mathcal{E} l B x}{L(\rho L + R)}.$$

Она направлена вправо, то есть стремится вернуть переключатель в положение равновесия. Поэтому уравнение движения переключателя имеет вид:

$$m a_x = -\frac{\mathcal{E} l B}{L(\rho L + R)} x.$$

Отсюда для частоты  $\omega_0$  и периода  $T_0$  собственных колебаний переключателя получаем:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{E} l B}{m L(\rho L + R)}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m L(\rho L + R)}{\mathcal{E} l B}}.$$

**3.75\***. Пусть  $R$  — сопротивление обмотки мотора,  $I$  — текущий по обмотке ток. Тогда развиваемая мотором полезная механическая мощность равна  $N = UI - I^2 R$ . Следовательно, мотор может развивать заданную мощность  $N$  при двух различных силах тока, текущего через обмотку:

$$I(N)_{1,2} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}}{2R},$$

где знак «+» соответствует случаю, когда ротор мотора был соединён с нагрузкой до подключения к сети, и его число оборотов невелико, а знак «-» соответствует случаю, когда мотор механически нагрузили лишь после того, как его ротор раскрутился до большого числа оборотов в режиме холостого хода.

Максимальная мощность, которую может развить мотор при заданном напряжении сети, получается, когда подкоренное выражение равно нулю:

$$N_{\max} = \frac{U^2}{4R}.$$

(Заметим, что этот результат можно получить и другим способом. Зависимость  $N(I)$  — параболическая. Она достигает максимума при  $I = \frac{U}{2R}$ . Подставляя это значение силы тока в формулу для  $N(I)$ , сразу получаем выражение для  $N_{\max}$ .)

Поскольку  $U = IR + \mathcal{E}$ , где  $\mathcal{E}$  — ЭДС индукции, возникающая в обмотке ротора во время работы мотора от сети при заданной нагрузке на валу, то

$$N = I(U - IR) = \mathcal{E}I.$$

ЭДС индукции пропорциональна скорости вращения ротора, поэтому при работе мотора в качестве генератора с тем же числом оборотов создаваемая ЭДС должна быть такой же, то есть равной  $\mathcal{E}$ . Учитывая, что мотор развивает мощность  $N = N_{\max}/n$ , получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{N}{I} = \frac{N_{\max}/n}{I(N_{\max}/n)_{1,2}} = \frac{U}{2n \left(1 \pm \sqrt{1 - (1/n)}\right)},$$

где знак «+» соответствует меньшему, а знак «−» большему из двух возможных чисел оборотов, при которых мотор развивал мощность, в  $n$  раз меньшую максимальной.

**3.76.** Так как текущий через сопротивление  $R$  ток не превосходит максимального значения  $\mathcal{E}/R$ , то конденсатор за время пролёта частицы  $t$  получает заряд не больший, чем  $\mathcal{E}t/R$ , то есть падение напряжения на нём не превосходит  $U = \frac{\mathcal{E}t}{RC}$ . Поскольку  $t \ll RC$ , то  $U \ll \mathcal{E}$ . Поэтому можно считать, что во время пролёта частицы текущий через сопротивление ток равен  $\mathcal{E}/R$ . Действительно, пока падение напряжения на конденсаторе намного меньше ЭДС источника, конденсатор слабо влияет на протекание тока, и сила тока может быть приближённо определена из закона Ома для цепи постоянного тока. При этом заряд конденсатора зависит от времени по закону  $Q(t) = \frac{\mathcal{E}t}{R}$ , падение напряжения на конденсаторе равно  $U(t) = \frac{\mathcal{E}t}{RC}$ , а напряжённость поля внутри конденсатора  $E(t) = \frac{\mathcal{E}t}{RCd}$ .

Ускорение частицы направлено перпендикулярно плоскости пластин и по величине равно

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{q\mathcal{E}}{mRCd}t,$$

то есть зависит от времени линейно.

**3.77.** Ясно, что для выполнения условий задачи шарик после попадания в поле должен выталкиваться из него — в противном случае

он никогда не покинет область поля и, следовательно, не сможет вернуться в исходную точку. Предположим далее, что плоскость траектории шарика до его попадания в поле перпендикулярна границе области, в которой имеется поле. Тогда для выполнения условий задачи необходимо, как минимум, чтобы силовые линии поля были также перпендикулярны границе указанной области. Действительно, если бы силовые линии были направлены под углом к границе области, в которой имеется поле, то шарик за время движения в поле приобрёл бы «боковую» составляющую скорости, направленную вдоль этой границы (перпендикулярно плоскости начальной траектории), и не смог бы вернуться в исходную точку. Пусть теперь плоскость траектории шарика до его попадания в поле составляет с границей области, в которой имеется поле, некоторый угол. Тогда, очевидно, для выполнения условий задачи необходимо, как минимум, чтобы силовые линии поля составляли с границей области поля точно такой же угол — в противном случае у шарика опять же появится «боковая» составляющая скорости, перпендикулярная плоскости начальной траектории, и шарик не сможет упасть в исходную точку. Таким образом, мы доказали, что в любом случае траектория шарика как до, так и после его попадания в поле лежит в вертикальной плоскости, параллельной силовым линиям поля. При этом данная плоскость может составлять некоторый угол с границей области, в которой имеется поле.

Теперь выясним, каким образом должен двигаться шарик в электрическом поле. Разложим вектор скорости шарика в момент его попадания в поле на две составляющие — горизонтальную, параллельную силовым линиям, и вертикальную. Так как электрическое поле потенциально, то горизонтальная составляющая скорости шарика при его вылете из поля сохранит величину и изменит знак по сравнению с горизонтальной составляющей в момент попадания шарика в поле. Значит, время, проходящее от момента броска шарика до его попадания в поле, равно времени, проходящему от момента вылета шарика из поля до его падения, и равно отношению расстояния  $L$  к величине горизонтальной составляющей скорости. С другой стороны, это время равно времени подъёма шарика в поле тяжести от места броска до уровня точки пересечения границы поля, а также времени движения от данной точки до точки падения. В силу потенциальности поля тяжести вертикальная составляющая скорости шарика при его движении вверх и вниз на одной и той же высоте одинакова, а с ростом высоты уменьшается. Поэтому, если бы шарик вылетел из поля выше точки его попадания в поле, то время движения вниз до точки падения было бы больше, а если ниже —

то меньше упомянутого выше времени подъёма шарика от точки броска до точки его попадания в поле. Следовательно, для того, чтобы шарик упал в исходную точку, необходимо, чтобы вертикальная составляющая скорости шарика за время его нахождения в поле также изменила знак и сохранила свою величину, причём точки попадания шарика в поле и его вылета из поля должны совпадать. Это возможно только в том случае, когда шарик в поле движется по прямой линии, вдоль которой направлен вектор действующей на шарик суммарной силы  $m\vec{g} + q\vec{E}$ .

Итак, мы доказали следующие утверждения. Для того, чтобы шарик мог вернуться в исходную точку, необходимо, чтобы он после вылета из электрического поля двигался назад по той же траектории, по которой он летел от момента броска до попадания в электрическое поле. Это возможно лишь в том случае, если траектория шарика всё время лежит в плоскости, параллельной силовым линиям электрического поля, причём они должны быть направлены так, чтобы выталкивать шарик из поля.

Для дальнейшего решения задачи введём прямоугольную систему координат с началом в точке броска шарика, поместим её в плоскость траектории шарика и направим координатную ось  $X$  вдоль поверхности земли (антипараллельно линиям электрического поля), а ось  $Y$  — вверх. Пусть шарик влетает в электрическое поле, имея проекции скорости  $v_x$  и  $v_y$ . При вылете из поля проекции скорости, как мы уже выяснили, должны остаться прежними по величине и изменить свой знак. Так как шарик движется в поле вдоль оси  $X$  с постоянным ускорением  $-qE/m$ , а вдоль оси  $Y$  — с ускорением свободного падения  $-g$ , то для проекций его скорости в момент вылета из поля можно записать:

$$-v_x = v_x - \frac{qE}{m}t; \quad -v_y = v_y - gt,$$

где  $t$  — время полёта шарика в электрическом поле. Из этих соотношений получаем:

$$E = \frac{mg}{q} \cdot \frac{v_x}{v_y}.$$

Пусть от момента броска шарика до его попадания в электрическое поле прошло время  $\tau$ . Тогда из уравнений кинематики получаем:

$$v_x = v \cos \alpha, \quad v_y = v \sin \alpha - g\tau, \quad L = v_x \tau = v \cos \alpha \cdot \tau.$$

Исключая из двух последних уравнений  $\tau$ , получаем выражение для проекции скорости  $v_y$ :

$$v_y = v \sin \alpha - \frac{gL}{v \cos \alpha}.$$

Подставляя  $v_x$  и  $v_y$  в выражение для  $E$  и учитывая, что  $\alpha = 45^\circ$ , находим:

$$E = \frac{mg}{q} \cdot \frac{v_x}{v_y} = \frac{mg}{q} \cdot \frac{v \cos \alpha}{v \sin \alpha - \frac{gL}{v \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{mg}{q} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha - \frac{gL}{(v \cos \alpha)^2}} = \frac{mg}{q} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2gL}{v^2}}.$$

Из этого выражения видно, что решение задачи существует при условии  $v > \sqrt{2gL}$ . Данное условие означает, что шарик должен влетать в электрическое поле прежде, чем достигнет наивысшей точки своей траектории при полёте вне поля. Из формулы для  $E$ , кроме того, следует, что при движении, удовлетворяющем условиям задачи, справедливо соотношение  $\frac{mg}{qE} = \frac{v_y}{v_x}$ , которое и означает, что в момент попадания шарика в электрическое поле его скорость направлена вдоль суммарной силы, действующей на шарик в электрическом поле и поле силы тяжести. Следовательно, шарик движется в поле с ускорением вдоль прямой, составляющей с горизонталью угол

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{mg}{qE} = \operatorname{arctg} \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{arctg} \left( 1 - \frac{2gL}{v^2} \right).$$

Следует отметить, что в общем случае движение заряженного шарика во взаимно перпендикулярных однородных гравитационном и электрическом полях происходит по параболе, которая в данном случае вырождается в прямую.

**3.78\***. Так как сила Лоренца, действующая на движущийся в магнитном поле электрон, всё время направлена перпендикулярно его скорости, то электроны в цилиндре будут двигаться по дугам окружностей с радиусом  $r$ . Уравнение движения электрона при этом имеет вид:  $\frac{mv^2}{r} = evB$ , откуда  $r = \frac{mv}{eB} \ll R$ . Следовательно, соударяться со стенкой цилиндра будут только те электроны, которые в процессе движения не удаляются от стенки цилиндра на расстояние, большее  $2r$ . Рассмотрим электрон,

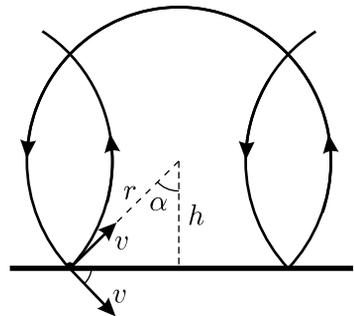


Рис. 3.78.

центр «орбиты» которого находится на некотором расстоянии  $h$  от стенки цилиндра (см. рис. 3.78). Заметим, что поскольку  $r \ll R$ , то стенку цилиндра при рассмотрении процесса соударения можно считать плоской. При ударе о стенку электрон передаёт ей импульс  $\Delta p = 2mv \sin \alpha$ , а происходят эти удары через промежутки времени, равные  $\Delta t = 2(\pi - \alpha)r/v$ . Поэтому рассматриваемый электрон действует на стенку с силой, которая в среднем равна

$$f = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha} \cdot \frac{mv^2}{r}.$$

Из полученной формулы видно, что сила  $f$  зависит от угла  $\alpha$  (или, что то же самое, от расстояния  $h$ ), то есть на самом деле все сталкивающиеся со стенкой электроны действуют на неё с разными силами. Для того, чтобы найти силу  $f$  точно, нужно усреднить зависимость  $f(h)$  по всем возможным значениям, которые может принимать величина  $h$ . Но ясно, что при таком усреднении в выражение для силы  $f_{\text{ср}}$  вместо отношения  $\frac{\sin \alpha}{\pi - \alpha}$  войдёт некоторый численный коэффициент  $C$ , не зависящий от магнитного поля, то есть  $f_{\text{ср}} = Cmv^2/r$ .

Найдём теперь давление на стенку цилиндра. Оно равно  $p = Nf_{\text{ср}}/S$ , где  $N$  — количество электронов, которые сталкиваются с цилиндром,  $S$  — площадь боковой поверхности цилиндра. Так как  $r \ll R$ , то в соударениях принимают участие только те электроны, которые находятся в тонком цилиндрическом слое шириной  $2r$  вблизи поверхности цилиндра. Учитывая это, получим, что давление «электронного газа» на боковые стенки цилиндра при условиях задачи не зависит от  $B$  и равно

$$p = \frac{Nf_{\text{ср}}}{S} = \frac{n \cdot 2rS \cdot f_{\text{ср}}}{S} = 2Cnmv^2.$$

**3.79.** При движении шарика в отсутствие магнитного поля в среде в единицу времени выделялось постоянное количество теплоты  $Q_1 = mgv$ . Из условия постоянства тепловых потерь в единицу времени в обоих случаях следует, что через очень большое время после включения магнитного поля шарик будет двигаться с постоянной скоростью. Поскольку движение происходит в вязкой среде, то через очень большое время оно станет прямолинейным и равномерным. Следовательно, сумма сил тяжести, вязкости и силы Лоренца будет при этом равна нулю. Обозначим скорость движения шарика при наличии магнитного поля через  $u$ . Из рисунка 3.79 видно, что шарик будет двигаться по прямой, составляющей с вертикалью угол  $\alpha$ , причём

$$\sin \alpha = \frac{quB}{mg}.$$

Так как сила Лоренца не совершает работы, то количество тепла, выделяющееся в единицу времени, равно работе, которую совершает за это время сила тяжести:  $Q_2 = mgu \cos \alpha$ . По условию задачи  $Q_1/Q_2 = n$ , то есть

$$mgv = nmgu \cos \alpha.$$

Исключая из записанных уравнений угол  $\alpha$ , получаем уравнение относительно скорости  $u$ :

$$n^2 q^2 B^2 u^4 - n^2 m^2 g^2 u^2 + m^2 g^2 v^2 = 0.$$

Решая его, находим:

$$u_{1,2}^2 = \frac{mg}{2nq^2 B^2} \left( mgn \pm \sqrt{m^2 g^2 n^2 - 4q^2 v^2 B^2} \right).$$

Видно, что решение существует при условии  $m^2 g^2 n^2 - 4q^2 v^2 B^2 \geq 0$ , откуда  $B \leq \frac{mgn}{2qv}$ . Таким образом, описанное в условии задачи движение возможно при максимальном значении индукции магнитного поля

$$B_{\max} = \frac{mgn}{2qv}.$$

**3.80.** После того, как частица начала двигаться в области пространства, в которой есть только поле  $\vec{g}$ , её скорость начала уменьшаться. Это означает, что скорость частицы имеет составляющую, направленную противоположно вектору  $\vec{g}$ , то есть частица движется «вверх» по отношению к полю силы тяжести. Следовательно, векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{g}$ , скорость частицы  $\vec{v}$  и действующие на неё электрическая, магнитная и гравитационная силы направлены так, как показано на рисунке 3.80. Угол к горизонту, под которым частица двигалась, находясь во всех трёх полях, может быть найден из условия равенства нулю суммы действующих на неё сил:

$$\sin \alpha = \frac{qE}{qvB} = \frac{E}{vB}.$$

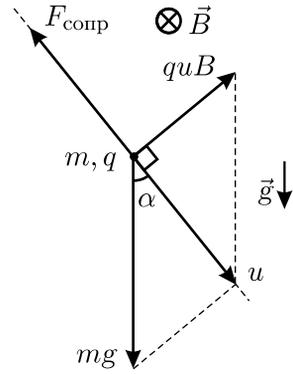


Рис. 3.79.

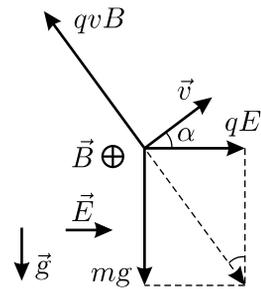


Рис. 3.80.

После попадания в ту область пространства, где есть только поле силы тяжести, частица будет двигаться по параболе. Её скорость будет минимальна в верхней точке траектории, тогда, когда вертикальная составляющая скорости обратится в ноль. Это произойдёт через время

$$t = \frac{v \sin \alpha}{g} = \frac{v}{g} \cdot \frac{E}{vB} = \frac{E}{gB}.$$

**3.81\***. В данной ситуации катушка, очевидно, будет катиться в том направлении, в котором тянут второй конец провода. При этом провод будет наматываться на средний цилиндр и сматываться с крайнего цилиндра. Вследствие этого будет изменяться общая площадь контура, пронизываемого магнитным полем, и в контуре возникнет ЭДС индукции, которую и покажет вольтметр. Изменение магнитного потока через контур удобно разбить на две части: первую, связанную с изменением площади обмотки самой катушки, и вторую, связанную с изменением площади той части контура, которая образована подводными проводами и меняется за счёт движения катушки. Нужно также иметь в виду, что знак потока через вторую часть контура противоположен знаку потока через первую часть, поскольку направления обхода этих контуров противоположны.

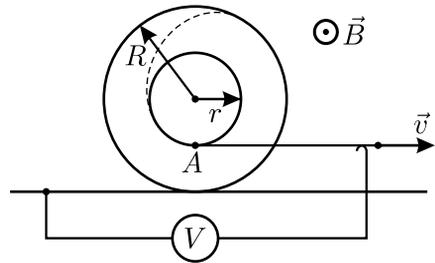


Рис. 3.81.

Рассмотрим изменение магнитного потока через обмотку катушки. Точка  $A$  катушки (см. рис. 3.81) движется вдоль стола с постоянной скоростью  $v$ . Так как проскальзывание отсутствует, то скорость  $u$  оси катушки можно найти из соотношения  $\frac{v}{R-r} = \frac{u}{R}$ , откуда  $u = \frac{vR}{R-r}$ , а  $u - v = \frac{vr}{R-r}$ .

Пусть за время  $\Delta t$  ось катушки сместилась вдоль стола на расстояние  $\Delta L_1 = u\Delta t$ . При этом на средний цилиндр наматывается участок провода длиной  $\Delta L_2 = (u-v)\Delta t$ , а с крайнего цилиндра сматывается участок длиной  $\Delta L_1$ . Изменение потока магнитной индукции через обмотку на крайнем цилиндре при этом равно

$$\Delta\Phi_1 = B\Delta S_1 = B\pi R^2 \cdot \frac{\Delta L_1}{2\pi R} = \frac{BR}{2}\Delta L_1 = \frac{BRu}{2}\Delta t = \frac{BR^2v}{2(R-r)}\Delta t,$$

а через обмотку на среднем цилиндре —

$$\Delta\Phi_2 = B\Delta S_2 = B\pi r^2 \cdot \frac{\Delta L_2}{2\pi r} = \frac{Br}{2}\Delta L_2 = \frac{Br(u-v)}{2}\Delta t = \frac{Br^2v}{2(R-r)}\Delta t,$$

где  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  — изменения площадей средней и крайней обмоток соответственно. Поток через обмотку на крайнем цилиндре уменьшается, а через обмотку на среднем — увеличивается.

Поток через площадь, ограниченную подводными проводами, уменьшается за счёт того, что катушка движется вправо со скоростью  $u$ . При этом за время  $\Delta t$  поток уменьшится на величину

$$\Delta\Phi_3 = B(R-r)u\Delta t = BRv\Delta t.$$

Следовательно, с учётом противоположного направления обхода двух частей общего контура, величина ЭДС индукции, которую покажет вольтметр, равна

$$U = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_3}{\Delta t} = -\frac{BR^2v}{2(R-r)} + \frac{Br^2v}{2(R-r)} + BRv = \frac{vB(R-r)}{2}.$$

Задачу можно решить и другим, более простым способом, рассматривая не изменение магнитного потока через контуры, а движение проводников в магнитном поле. Заметим, что при движении катушки нескомпенсированная ЭДС возникает только на участке провода, начинающемся в точке касания катушки и стола, и заканчивающемся в точке  $A$ . Это следует из того, что все идущие вверх участки намотанного на катушку провода, кроме указанного, имеют соответствующие и идущие вниз участки по другую сторону вертикальной оси симметрии катушки, и возникающие в этих участках провода ЭДС взаимно компенсируются. Остающийся «нескомпенсированным» участок провода имеет длину  $R-r$ , его начало в любой момент времени покоится, а конец движется вдоль стола со скоростью  $v$ , причём скорость точек этого воображаемого проводника, лежащих между его началом и концом, равномерно возрастает от 0 до величины  $v$ . Поэтому средняя скорость этого проводника направлена горизонтально и равна  $v_{\text{ср}} = v/2$ , а возникающая в нём ЭДС равна

$$U = B(R-r)v_{\text{ср}} = \frac{vB(R-r)}{2}.$$

**3.82\*.** Выясним сначала, почему стержень начнёт вращаться. Рассмотрим воображаемый круговой контур, по которому движутся

заряды при вращении стержня вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При выключении магнитного поля магнитный поток через этот контур уменьшается, что приводит к возникновению вихревого электрического поля. Это поле действует на заряды и разгоняет их. Данный процесс для простоты понимания можно представлять себе так, как будто вместо воображаемого контура имеется проводящее кольцо, содержащее всего два носителя заряда. Тогда при выключении магнитного поля в проводнике будет возникать ЭДС индукции, и потечёт ток, то есть заряды придут в движение.

Для решения задачи прежде всего найдём ЭДС индукции  $\mathcal{E}$ . По условию однородное магнитное поле в любой момент времени сосредоточено между полюсами электромагнита и строго вертикально. По закону электромагнитной индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -S\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Здесь  $\Phi = SB$  — магнитный поток через контур,  $S = \pi d^2/4$  — площадь торцевого сечения полюса электромагнита,  $B$  — мгновенное значение индукции магнитного поля. По условию магнитное поле равномерно уменьшается от значения  $B_0$  до нуля; пусть это происходит за время  $\tau$ :

$$B = B_0 - \frac{B_0}{\tau}t.$$

Отсюда  $\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{\tau}$ , и для ЭДС индукции получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi d^2 B_0}{4\tau}.$$

С другой стороны, ЭДС по определению есть отношение работы  $A_{\text{стор}}$ , совершаемой сторонними силами  $F_{\text{стор}}$  при перемещении пробного заряда, к его величине  $q_{\text{проб}}$ . В нашем случае появление ЭДС индукции связано с возникновением вихревого электрического поля, которое и совершает работу. Значит,

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \frac{F_{\text{стор}}}{q} \cdot \pi L = E\pi L.$$

Здесь  $E$  — напряжённость вихревого электрического поля. Приравнивая два полученных выражения для  $\mathcal{E}$ , найдём  $E$ :

$$E = \frac{d^2 B_0}{4\tau L}.$$

Так как система симметрична, то для нахождения угловой скорости вращения стержня можно рассмотреть только один заряд. На этот заряд в вихревом электрическом поле действует сила  $F = qE$ , направленная по касательной к окружности, по которой он движется. В соответствии со вторым законом Ньютона эта сила приводит к появлению тангенциального (касательного) ускорения, которое равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qd^2B_0}{4m\tau L}.$$

В течение времени  $\tau$ , за которое происходит уменьшение магнитного поля, заряды движутся по окружности с этим ускорением и приобретают линейную скорость

$$v = a\tau = \frac{qd^2B_0}{4mL}.$$

Этой линейной скорости зарядов соответствует искомая угловая скорость стержня

$$\omega = \frac{v}{L/2} = \frac{qd^2B_0}{2mL^2}.$$

**3.83\***. Пусть радиус катушки равен  $R$ , а число витков в ней  $N$ . Тогда ЭДС индукции, возникающая в катушке при её небольшом смещении вдоль оси  $OO'$ , равна  $\mathcal{E}(t) = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , где  $\Delta\Phi$  — изменение магнитного потока через один виток катушки. Для того, чтобы найти  $\Delta\Phi$ , построим очень длинный цилиндр, ось которого параллельна  $OO'$ , а одно из оснований опирается на катушку (см. рис. 3.83). Очевидно, что магнитный поток через один виток катушки равен магнитному потоку через боковую поверхность и другое основание этого цилиндра. Поэтому, если катушка смещается вдоль  $OO'$  на малое расстояние  $\Delta x$ , то изменение магнитного потока через один

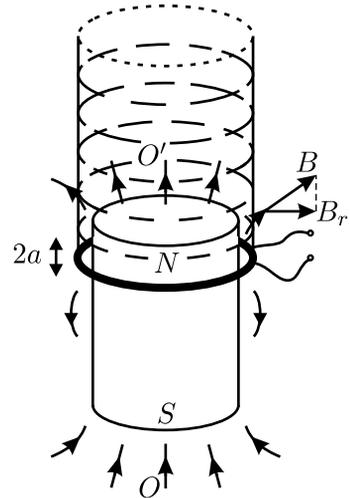


Рис. 3.83.

виток равно изменению магнитного потока через боковую поверхность такого цилиндра, то есть  $\Delta\Phi = 2\pi R\Delta x B_r$ , где  $B_r$  — радиальная компонента вектора магнитной индукции поля, создаваемого магнитом в том месте, где находится кольцо. Следовательно,  $\mathcal{E}(t) = -2\pi RN B_r \cdot v(t)$ ,

где  $v(t) = \Delta x / \Delta t$  — мгновенная скорость катушки. Так как при гармонических колебаниях катушки амплитуда изменения её скорости равна  $v_0 = 2\pi f a$ , то амплитуда наводимой в катушке ЭДС индукции составляет  $\mathcal{E}_0 = 2\pi R N B_r v_0 = 4\pi^2 f a N R B_r$ .

Если через неподвижную катушку пропустить постоянный ток  $I$ , то на неё будет действовать сила Ампера, направленная вдоль оси  $OO'$  и равная  $F = N \cdot 2\pi R I B_r$ . Учитывая выражение для  $\mathcal{E}_0$ , окончательно получим:

$$F = \frac{I \mathcal{E}_0}{2\pi f a} \approx 0,16 \text{ Н.}$$

**3.84.** Магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю потому, что по его поверхности течёт ток, создающий собственное магнитное поле, которое и компенсирует внешнее магнитное поле  $B$ . Сила этого тока  $I$ , очевидно, должна быть пропорциональна индукции внешнего магнитного поля:  $I \sim B$ . Согласно закону Ампера, сила  $F$  взаимодействия этого тока с внешним магнитным полем пропорциональна произведению  $I$  и  $B$ , то есть  $F \sim B^2$ . Эта сила и уравнивает сверхпроводящий образец. Следовательно, для того, чтобы скомпенсировать удвоение веса образца, то есть увеличение силы  $F$  в два раза, нужно увеличить индукцию магнитного поля в  $\sqrt{2}$  раз.

**3.85.** ЭДС индукции, возникающая в катушке, равна  $\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , где  $\Phi$  — магнитный поток, охватываемый проводом катушки. В свою очередь,  $\Phi = LI$ , где  $I$  — текущий в катушке ток. Следовательно,  $\mathcal{E} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t}$ . В соответствии с законом Ома для цепи, содержащей ЭДС, можно записать:  $\mathcal{E} = IR$ . Поскольку катушка сверхпроводящая, то её сопротивление  $R$  равно нулю, и поэтому  $\mathcal{E} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t} = IR = 0$ , откуда  $\Delta(LI) = 0$ . Таким образом, магнитный поток  $\Phi = LI$  не зависит от времени и остаётся одинаковым при любом положении сердечника в катушке, то есть  $LI = \text{const}$ .

Из приведённого в условии графика следует, что до вынимания сердечника из катушки её индуктивность была равна  $L_H = 5$  мГн, а после вынимания сердечника она стала равной  $L_K = 1$  мГн. С учётом вышесказанного можно записать:  $L_H I_H = L_K I_K$ , где  $I_K$  — искомая сила тока, который будет течь в катушке после вынимания из неё сердечника. Отсюда  $I_K = L_H I_H / L_K = 5$  А.

**3.86\*.** При внесении сверхпроводящего образца в сверхпроводящую катушку, замкнутую накоротко, магнитный поток  $\Phi = LI$  в ней не

изменяется (см. [решение предыдущей задачи](#)). Поэтому искомая работа, которая равна разности энергий магнитного поля, запасённых в катушке после и до внесения в неё образца, может быть найдена по формуле:

$$A = \frac{\Phi^2}{2} \left( \frac{1}{L'} - \frac{1}{L} \right),$$

где  $L'$  — индуктивность катушки с внесённым в неё образцом. Величину  $L'$  можно найти, сравнив друг с другом две катушки, по которым течёт некоторый одинаковый ток  $I_0$  — одну пустую, без сердечника, а вторую — с внесённым в неё сверхпроводящим образцом. Так как внутри сверхпроводящего образца магнитное поле отсутствует, а вне образца в пространстве внутри катушки магнитное поле однородно и равно полю в катушке без образца, то магнитный поток через катушку с образцом отличается от магнитного потока через пустую катушку в  $1 - (1/n^2)$  раз. Следовательно, поскольку через катушки течёт одинаковый ток  $I_0$ , то индуктивность катушки с образцом должна быть меньше индуктивности катушки без сердечника, причём

$$L' = L \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

С учётом этого результата, для работы, которую нужно совершить при внесении в катушку сверхпроводящего образца, получаем:

$$A = \frac{LI^2}{2(n^2 - 1)}.$$

**3.87.** Воспользуемся тем обстоятельством, что напряжение на конденсаторе остаётся практически постоянным. В течение времени  $\tau$ , пока напряжение на втором резисторе равно  $U_2$ , через конденсатор протекает ток, равный в среднем  $I_1 = \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_C}{R_1}$ . За это время конденсатор приобретает заряд

$$\Delta q_1 = I_1 \tau = \left( \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_C}{R_1} \right) \tau.$$

В течение времени  $T - \tau$ , когда напряжение на втором резисторе равно нулю, конденсатор разряжается через резистор  $R_1$ . Средний ток через него равен  $I_2 = \frac{U_C}{R_1}$ , а теряемый конденсатором заряд составляет:

$$\Delta q_2 = I_2(T - \tau) = \frac{U_C}{R_1}(T - \tau).$$

Так как заряд конденсатора за период не изменяется, то приращения  $\Delta q_1$  и  $\Delta q_2$  должны быть одинаковыми:

$$\left(\frac{U_2}{R_2} - \frac{U_C}{R_1}\right)\tau = \frac{U_C}{R_1}(T - \tau).$$

Отсюда находим:

$$U_C = \frac{R_1\tau}{R_2T}U_2.$$

**3.88\***. В режиме холостого хода напряжение  $U_{\text{ист}}$  на клеммах двухполупериодного выпрямителя изменяется со временем  $t$  по закону, показанному на графике в верхней части рисунка 3.88. При замкнутом ключе  $K_1$  вольтметр, очевидно, показывает среднее напряжение  $U_1 = 12$  В, меньшее амплитудного значения напряжения  $U_{\text{ист}}(t)$ .

При одновременно замкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$  заряжаемый аккумулятор включён «навстречу» с выпрямителем (иначе бы аккумулятор не заряжался). Поэтому в те моменты времени, когда  $U_{\text{ист}}(t) < U_0$ , диоды в выпрямителе заперты, ток через амперметр не идёт, и на вольтметр подаётся напряжение аккумулятора  $U_0 = 12,3$  В. В те моменты времени, когда  $U_{\text{ист}}(t) \geq U_0$ , диоды открыты,

и мгновенное значение напряжения на зажимах вольтметра равно  $U_{\text{ист}}(t)$ . Таким образом, ток, идущий через амперметр и аккумулятор с внутренним сопротивлением  $r$ , в любой момент времени равен

$$I(t) = \frac{U_2(t) - U_0}{r}, \quad \text{где } U_2(t) = \begin{cases} U_0 & \text{при } U_{\text{ист}}(t) < U_0; \\ U_{\text{ист}}(t) & \text{при } U_{\text{ист}}(t) \geq U_0. \end{cases}$$

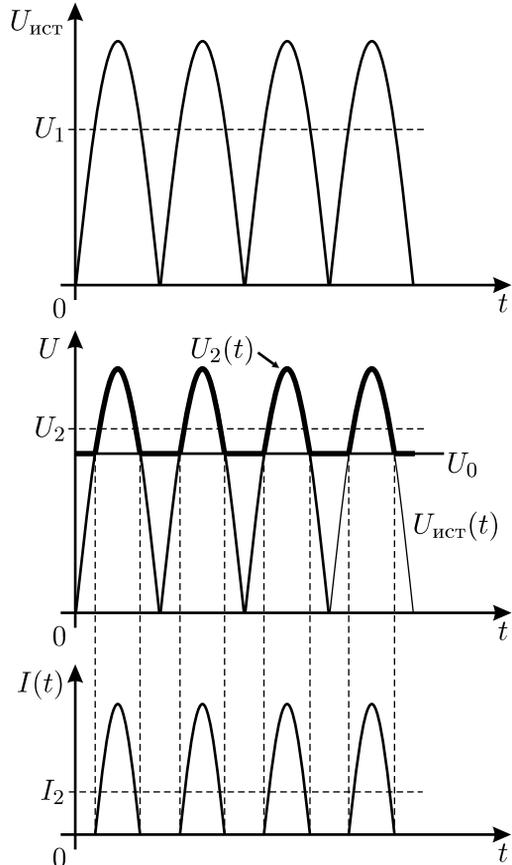


Рис. 3.88.

На графике, приведённом в средней части рисунка 3.88, показаны напряжение на клеммах выпрямителя  $U_{\text{ист}}(t)$ , постоянное напряжение на аккумуляторе  $U_0$ , а также напряжение  $U_2(t)$  (обозначено жирной линией). Кривая для напряжения  $U_2(t)$  получается на графике в результате «отрезания» нижней части графика  $U_{\text{ист}}(t)$  горизонтальной прямой  $U = U_0$ .

Напряжение  $U_2 = 12,8$  В, которое показывает вольтметр при замкнутых ключах  $K_1$  и  $K_2$ , равно среднему значению напряжения  $U_2(t)$ , а сила тока  $I_2 = 5$  А, которую показывает при этом амперметр, есть среднее значение силы тока  $I(t)$  (график зависимости  $I(t)$  приведён в нижней части рисунка 3.88). Усредняя правую и левую части выражения для  $I(t)$  по времени в пределах одного периода изменения напряжения  $U_{\text{ист}}$ , получим:  $\langle I(t) \rangle \cdot r = \langle U_2(t) \rangle - U_0$ , где угловыми скобками  $\langle \ \rangle$  обозначено усреднение по времени. Отсюда  $I_2 r = U_2 - U_0$ , и

$$r = \frac{U_2 - U_0}{I_2} = 0,1 \text{ Ом.}$$

**3.89.** Описанный в условии задачи вольтметр, очевидно, показывает эффективное значение напряжения, то есть корень квадратный из среднего значения квадрата напряжения:

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{\langle U^2(t) \rangle}.$$

Здесь угловые скобки  $\langle \ \rangle$  обозначают усреднение по времени. В нашем случае напряжение, подаваемое на вольтметр, определяется как

$$U(t) = U_{10} \cos \omega t + U_2,$$

где  $U_{10} = \sqrt{2}U_1$  — амплитудное напряжение переменной составляющей  $U(t)$ . Поэтому:

$$U_{\text{эфф}}^2 = 2U_1^2 \langle \cos^2 \omega t \rangle + U_2^2 + 2\sqrt{2}U_1U_2 \langle \cos \omega t \rangle.$$

Понятно, что  $\langle \cos \omega t \rangle = 0$  — в силу симметричности функции относительно оси абсцисс. В свою очередь,

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \left\langle \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle \cos 2\omega t \rangle = \frac{1}{2},$$

поскольку  $\langle \cos 2\omega t \rangle = 0$ . Учитывая это, для напряжения  $U_{\text{эфф}}$ , которое будет показывать вольтметр, окончательно получаем:

$$U_{\text{эфф}} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} \approx 242 \text{ В.}$$

**3.90\***. Температура нити колеблется из-за изменения в течение периода мгновенной тепловой мощности, выделяющейся в спирали при протекании по ней переменного тока. Для того, чтобы сделать грубую оценку, примем, что в течение четверти периода, то есть в течение времени  $1/(4f)$ , теплота Джоуля — Ленца в спирали вообще не выделяется. За это время спираль излучает тепловую энергию  $\Delta Q = N \cdot \frac{1}{4f} = 0,5$  Дж, вследствие чего температура спирали понижается. Из уравнения теплового баланса для спирали лампочки получаем:

$$Cm(T_2 - T_1) = \Delta Q. \text{ Отсюда } m = \frac{\Delta Q}{C(T_2 - T_1)} = \frac{N}{4fC(T_2 - T_1)} \approx 0,013 \text{ г.}$$

Можно получить и более точную оценку. Пусть напряжение на лампе изменяется со временем по закону  $U(t) = U_0 \cos \omega t$ , где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота колебаний напряжения. Тогда за малое время  $\Delta t$  в спирали выделяется теплота Джоуля — Ленца  $\Delta Q = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t \cdot \Delta t$ , а в окружающую среду излучается количество тепла  $N \Delta t$ . Разность этих двух количеств теплоты идёт на нагревание нити (то есть на увеличение температуры на  $\Delta T$ ; если  $\Delta T < 0$ , то нить охлаждается). Исходя из уравнения теплового баланса, получаем:

$$\left( \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t - N \right) \Delta t = Cm \Delta T,$$

откуда

$$\frac{U_0^2}{2R} + \frac{U_0^2}{2R} \cos 2\omega t - N = Cm \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

Усредним правую и левую части полученного уравнения по периоду изменения напряжения  $U$ . Заметим, что  $\langle \cos 2\omega t \rangle = 0$ , так как косинус является периодической функцией, симметричной относительно оси абсцисс, и  $\left\langle \frac{\Delta T}{\Delta t} \right\rangle = 0$ , так как в среднем температура нити лампы постоянна. Поэтому среднее значение тепловой мощности, выделяющейся в спирали при протекании переменного тока, равно  $\langle N \rangle = \frac{U_0^2}{2R} \approx N$ . С учётом этого получаем:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{N}{Cm} \cos 2\omega t,$$

откуда

$$T = T_0 + \frac{N}{2\omega Cm} \sin 2\omega t,$$

где  $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$  — среднее значение, вокруг которого колеблется температура спирали  $T$ . Из полученной зависимости следует, что установившиеся колебания температуры спирали происходят с частотой  $f' = \frac{2\omega}{2\pi} = 2f = 100$  Гц, как и указано в условии задачи. Диапазон этих

температурных колебаний равен  $T_2 - T_1 = \frac{N}{\omega Cm}$ , откуда для массы

спирали находим:  $m = \frac{N}{2\pi f C (T_2 - T_1)} \approx 0,008$  г. Заметим, что уточнённая оценка для  $m$  отличается от первоначальной в меньшую сторону примерно в 1,5 раза.

**3.91.** Так как паяльник работает нормально, то амперметр  $A_3$  показывает эффективное значение тока  $I_{3\text{эфф}} = \frac{40 \text{ Вт}}{36 \text{ В}} \approx 1,11$  А. Для нахождения показаний амперметров  $A_1$  и  $A_2$  следует заметить, что первичная и вторичная обмотки трансформатора включены параллельно, и поэтому напряжения  $U_1$  и  $U_2$  на обеих обмотках одинаковы. Напряжение на каждой из обмоток пропорционально числу витков  $N_1$  и  $N_2$  в соответствующей обмотке и скорости изменения магнитного потока через один виток. Так как сердечник трансформатора замкнут, то магнитный поток  $\Phi$  одинаков для всех витков. Учитывая всё сказанное, можно записать:

$$U_1 = N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = U_2 = N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Так как трансформатор является понижающим, то количество витков в обмотках разное. Следовательно, записанное равенство может выполняться только в том случае, когда  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0$ . Это означает, что магнитное поле внутри сердечника равно нулю, то есть поле, создаваемое током, текущим по одной обмотке, компенсируется полем, создаваемым током, текущим по второй обмотке. Магнитное поле внутри каждой из обмоток пропорционально току, текущему через обмотку, и числу витков в ней. Поэтому должно выполняться одно из двух соотношений между мгновенными значениями токов  $I_1$  и  $I_2$  и числами витков  $N_1$  и  $N_2$  в обмотках:

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0 \quad \text{или} \quad N_1 I_1 - N_2 I_2 = 0.$$

Первое соотношение соответствует способу включения витков, при котором токи  $I_1$  и  $I_2$  текут навстречу друг другу, а второе — способу включения, при котором токи текут в одну сторону. При этом всегда

выполняется равенство

$$I_1 + I_2 = I_3.$$

Решая совместно эти уравнения и учитывая, что  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{220 \text{ В}}{36 \text{ В}} \approx 6,11$ , получим для эффективных значений токов  $I_{\text{эфф}} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$  через амперметры  $A_1$  и  $A_2$  два возможных набора, соответствующие различным способам включения обмоток:

$$I_{1\text{эфф}} = \frac{I_{3\text{эфф}}}{|1 - (N_1/N_2)|} \approx 0,22 \text{ А}, \quad I_{2\text{эфф}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{I_{3\text{эфф}}}{(N_1/N_2) - 1} \approx 1,33 \text{ А}$$

(первый способ включения);

$$I_{1\text{эфф}} = \frac{I_{3\text{эфф}}}{1 + (N_1/N_2)} \approx 0,156 \text{ А}, \quad I_{2\text{эфф}} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{I_{3\text{эфф}}}{1 + (N_1/N_2)} \approx 0,955 \text{ А}$$

(второй способ включения).

В заключение отметим, что трансформатор, включённый таким образом, как описано в условии задачи, не оказывает никакого влияния на работу паяльника. Паяльник работает нормально благодаря конденсатору.

**3.92\***. При разомкнутой второй обмотке магнитное поле в сердечнике создаётся только первой обмоткой, подключённой к источнику переменного напряжения. Магнитный поток в первой обмотке равен  $\Phi_1 = LI_1$ , где  $I_1$  — ток в первой обмотке,  $L$  — индуктивность обмотки (у всех трёх обмоток она одинаковая). Очевидно, что магнитный поток через третью обмотку также пропорционален току  $I_1$ , то есть  $\Phi_3 \sim I_1$ , или  $\Phi_3 = MI_1$ , где  $M$  — коэффициент, который называется взаимной индуктивностью обмоток (для каждой пары обмоток он одинаков). Так как сопротивления обмоток пренебрежимо малы, то напряжения на них равны наводимым в них ЭДС индукции. Тогда, с учётом закона электромагнитной индукции Фарадея, для отношения напряжений на третьей и первой обмотках получаем:

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{-\Delta\Phi_3/\Delta t}{-\Delta\Phi_1/\Delta t} = \frac{\Delta\Phi_3}{\Delta\Phi_1} = \frac{M\Delta I_1}{L\Delta I_1} = \frac{M}{L} = \frac{1}{2}.$$

При замкнутой накоротко второй обмотке токи текут и в первой, и во второй обмотках. Эти токи создают в первой, второй и третьей обмотках магнитные потоки  $\Phi_1^*$ ,  $\Phi_2^*$  и  $\Phi_3^*$ , соответственно. Для них можно записать:

$$\Phi_1^* = LI_1^* + MI_2^*, \quad \Phi_2^* = MI_1^* + LI_2^*, \quad \Phi_3^* = MI_1^* + MI_2^*,$$

где  $I_1^*$  и  $I_2^*$  — токи, текущие в первой и второй обмотках при короткозамкнутой второй обмотке. Заметим, что ЭДС индукции, наводимая во второй обмотке, равна нулю, так как она замкнута накоротко, а её сопротивление пренебрежимо мало. Следовательно, и магнитный поток через вторую обмотку также равен нулю:  $\Phi_2^* = MI_1^* + LI_2^* = 0$ , откуда  $I_2^* = -\frac{M}{L}I_1^*$ . Поэтому для отношения напряжений на третьей и первой обмотках после закорачивания второй обмотки получаем:

$$\begin{aligned} \frac{U_3^*}{U_1^*} &= \frac{-\Delta\Phi_3^*/\Delta t}{-\Delta\Phi_1^*/\Delta t} = \frac{\Delta\Phi_3^*}{\Delta\Phi_1^*} = \frac{M\Delta I_1^* + M\Delta I_2^*}{L\Delta I_1^* + M\Delta I_2^*} = \\ &= \frac{M\Delta I_1^* - M \cdot (M/L)\Delta I_1^*}{L\Delta I_1^* - M \cdot (M/L)\Delta I_1^*} = \frac{M}{L} \cdot \frac{1 - M/L}{1 - (M/L)^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Так как первая обмотка подключена к источнику напряжения, то  $U_1 = U_1^*$ . Следовательно, если вторую обмотку замкнуть накоротко, то вольтметр покажет одну треть от напряжения источника.

**3.93.** Нарисуем трансформатор (см. рис. 3.93) и обозначим выводы обмотки с малым числом витков цифрами 1 и 2, а выводы обмотки с большим числом витков — цифрами 3 и 4. Рассмотрим различные возможные способы соединения обмоток между собой и разные варианты подключения источника напряжения. При этом с помощью верхнего индекса «вх» или «вых» будем обозначать входное или выходное напряжение трансформатора, а с помощью двойного нижнего индекса  $nm$  будем обозначать напряжение между выводами  $n$  и  $m$  обмоток трансформатора. Отметим также, что входное напряжение всегда равно напряжению, которое даёт источник ( $U^{\text{вх}} = U$ ).

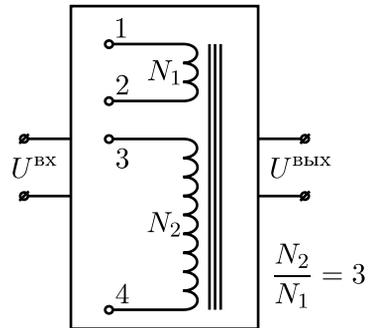


Рис. 3.93.

Сначала рассмотрим тривиальные случаи, когда выходное напряжение снимается непосредственно с клемм источника, либо источник вовсе не подключён к цепи. В этих случаях выходное напряжение равно  $U^{\text{вых}} = U$ , либо  $U^{\text{вых}} = 0$ .

Далее, можно эксплуатировать трансформатор в «обычном» режиме, то есть при не соединённых друг с другом обмотках на одну из них подавать входное напряжение, а с другой снимать выходное напряжение. В этом случае, в зависимости от того, какая из обмоток — с большим или с малым числом витков — используется в

качестве первичной, трансформатор будет либо понижающим, либо повышающим. Таким образом, здесь возможны два случая:  $U^{\text{ВХ}} = U_{34}$  и  $U^{\text{ВЫХ}} = U_{12} = U/3$ , либо  $U^{\text{ВХ}} = U_{12}$  и  $U^{\text{ВЫХ}} = U_{34} = 3U$ .

Перейдём теперь к более сложным вариантам. Пусть в трансформаторе соединены выводы обмоток, имеющие номера 2 и 3. Такой способ соединения даёт нам одну длинную катушку, все витки которой включены в одну сторону. Тогда в зависимости от того, между какими выводами подключать источник напряжения, возможны следующие отличные от ранее полученных варианты выходного напряжения:

$$U^{\text{ВХ}} = U_{14}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{12} = U/4;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{14}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{34} = 3U/4;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{12}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{14} = 4U;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{34}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{14} = 4U/3.$$

Можно соединить обмотки друг с другом и по другому, а именно, соединить выводы, имеющие номера 1 и 3. В этом случае обмотка с малым числом витков оказывается включённой навстречу со второй обмоткой. В итоге  $1/3$  часть обмотки с большим числом витков оказывается как бы выключенной. В этом случае, в зависимости от способа подключения источника, возможны следующие варианты выходного напряжения:

$$U^{\text{ВХ}} = U_{24}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{12} = U/2;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{12}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{24} = 2U;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{24}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{34} = 3U/2;$$

$$U^{\text{ВХ}} = U_{34}, \quad U^{\text{ВЫХ}} = U_{24} = 2U/3.$$

Таким образом, с учётом тривиальных случаев, можно получить всего 12 различных значений амплитуд выходного напряжения:  $0, U/4, U/3, U/2, 2U/3, 3U/4, U, 4U/3, 3U/2, 2U, 3U, 4U$ .

**3.94\***. Как видно из приведённого в условии задачи рисунка, на каждом периоде следования импульсов напряжение на клеммах генератора в течение времени  $T_1 = 4,5 \cdot 10^{-3}$  с равно нулю, а в течение остального времени  $T_2 = 0,5 \cdot 10^{-3}$  с оно равно  $U_0 = 1$  В. Предположим, что напряжение на конденсаторе  $U_C$  в установившемся режиме

всё время не очень сильно отличается от  $U_0$ . Если это так, то и среднее значение напряжения на конденсаторе  $\langle U_C \rangle$  также близко к  $U_0$ . Тогда в течение времени  $T_1$  напряжение на диоде равно  $U_C \approx -U_0$ , и поэтому ток, текущий через диод, равен  $I_1 \approx I_0(2^{-U_0/W} - 1) \approx -I_0$ , так как  $U_0 \gg W$ . Поэтому в течение времени  $T_1$  конденсатор разряжается через диод обратным током диода  $-I_0$ , и напряжение  $U_C$  на конденсаторе уменьшается на величину  $\Delta U_C = \frac{I_0 T_1}{C} = 4,5 \cdot 10^{-4}$  В.

В течение времени  $T_2$  происходит зарядка конденсатора током  $I_2 = I_0(2^{(U_0 - U_C)/W} - 1)$ . Так как  $U_C \approx \langle U_C \rangle$ , то ток  $I_2$  за время  $T_2$  также изменяется незначительно. Тогда, поскольку в установившемся режиме напряжение на конденсаторе должно за время  $T_2$

увеличиваться на такую же величину  $\Delta U_C$ , на какую оно уменьшается за время  $T_1$ , то  $\Delta U_C = \frac{I_0 T_1}{C} = \frac{I_2 T_2}{C}$ . Отсюда следует, что  $I_0 T_1 = I_2 T_2$ , то есть  $T_1 = T_2(2^{(U_0 - \langle U_C \rangle)/W} - 1)$ , откуда среднее напряжение на конденсаторе

$$\langle U_C \rangle = U_0 - W \log_2 \left( \frac{T_1}{T_2} + 1 \right) \approx 0,97 \text{ В.}$$

Видно, что предположение о том, что  $U_C \approx U_0$ , верно. Кроме того, оправдывается и предположение о незначительности изменения тока  $I_2$ . Действительно, такое предположение справедливо, поскольку изменение напряжения на диоде за время  $T_2$ , равное  $\Delta U_C = 4,5 \cdot 10^{-4}$  В, мало по сравнению со средним (за тот же промежуток времени) значением напряжения на диоде  $U_0 - \langle U_C \rangle \approx 0,03$  В, величиной которого и определяется ток  $I_2$ .

Итак, напряжение на конденсаторе изменяется пилообразно с амплитудой  $\Delta U_C \approx 4,5 \cdot 10^{-4}$  В около среднего значения  $\langle U_C \rangle = 0,97$  В (см. рис. 3.94).

**3.95\***. После замыкания цепи электронный прибор начнёт работать на участке 1–2 его характеристики. При этом уравнение, описыва-

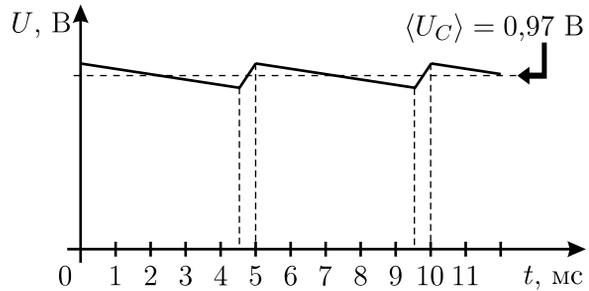


Рис. 3.94.

ющее изменение силы тока  $I$  в цепи со временем  $t$ , будет иметь вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = U_0,$$

откуда следует, что  $LI = U_0 t$ , то есть сразу после замыкания цепи сила тока в ней будет нарастать прямо пропорционально времени.

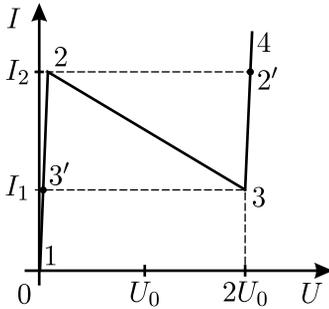


Рис. 3.95.1.

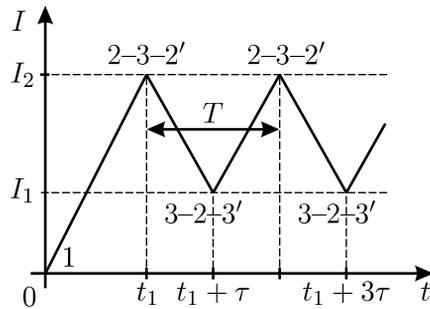


Рис. 3.95.2.

Наращение тока будет продолжаться до момента времени  $t_1 = LI_2/U_0$  — до тех пор, пока состояние прибора не изобразится точкой 2 на графике зависимости  $I(U)$  (см. рис. 3.95.1). Начиная с этого момента дальнейшее увеличение силы тока через прибор станет невозможным. При этом напряжение на катушке будет падать, а на приборе — расти. В результате прибор очень быстро совершит переход 2–3–2', так как состояние системы на участке 2–3, на котором прибор характеризуется отрицательным дифференциальным сопротивлением, неустойчиво. Поскольку сила тока в катушке не может измениться мгновенно, то токи в состояниях 2 и 2' одинаковы:  $I_2 = I_{2'}$  (заметим, что во время перехода 2–3–2' ток в цепи поддерживается постоянным за счёт так называемых «паразитных ёмкостей», которые неизбежно имеются у всех элементов цепи).

После того, как система окажется в состоянии 2', электронный прибор будет работать, как идеальная батарейка с ЭДС, равной  $-2U_0$ . Поэтому уравнение, описывающее изменение силы тока в цепи со временем, примет вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = U_0 - 2U_0 = -U_0,$$

откуда следует, что  $L\Delta I = -U_0\Delta t$ , то есть сила тока в цепи будет уменьшаться со временем по линейному закону. Через время  $\tau = L(I_2 - I_1)/U_0$

сила тока станет равной  $I_1$ , и система окажется в состоянии 3, из которого очень быстро совершит переход 3–2–3' через участок неустойчивости 3–2. После этого сила тока в цепи вновь начнёт нарастать от значения  $I_1$  до значения  $I_2$  в соответствии с уравнением  $L \frac{\Delta I}{\Delta t} = U_0$ , и через время  $\tau$  система вновь придёт в состояние 2, после чего описанные выше процессы будут повторяться.

Таким образом, сила тока, текущего в цепи, будет изменяться со временем по «пилообразному» закону (см. рис. 3.95.2) с периодом повторения  $T = 2\tau = 2L(I_2 - I_1)/U_0$ .

**3.96.** За время, намного меньшее периода колебаний в контуре, суммарные заряды на каждой из пластин не могут измениться, и поэтому сразу после создания внешнего поля его напряжённость внутри и снаружи конденсатора будет одинакова и равна  $E$ , а разность потенциалов между пластинами станет равна  $U_0 = Ed$ . Будем считать сопротивление катушки индуктивности очень малым. Тогда возникшие в контуре после включения внешнего поля колебания спустя большое время  $T \gg \sqrt{LC}$  затухнут, и пластины конденсатора, соединённые через индуктивность, будут иметь одинаковый потенциал. Таким образом, колебания разности потенциалов между пластинами конденсатора будут происходить вокруг значения  $U_C = 0$  с начальной амплитудой  $U_0 = Ed$ , постепенно затухая. Поскольку суммарный заряд пластин равен нулю, то вне конденсатора электрическое поле не меняется и остаётся равным  $E$ .

В начале колебательного процесса энергия электрического поля между пластинами конденсатора равна

$$W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{CE^2d^2}{2},$$

а ток через индуктивность равен нулю. Через  $1/4$  периода колебаний поле внутри конденсатора станет равным нулю, а ток через индуктивность будет максимальным, то есть вся энергия перейдёт в энергию магнитного поля в катушке индуктивности (при этом мы считаем затухание колебаний малым, то есть пренебрегаем уменьшением энергии за период колебаний):

$$\frac{CE^2d^2}{2} = \frac{LI^2}{2}.$$

Следовательно, максимальный ток  $I$  в контуре будет равен

$$I = Ed\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

### Волны. Оптика. Кванты

**4.1\***. Обозначим точку удара по первому стержню через  $A$ , а точку, в которой принимают звуковой сигнал — через  $B$  (см. рис. 4.1.1). В зависимости от соотношения между параметрами, заданными в условии задачи, звук быстрее дойдёт до точки  $B$  или при распространении по прямой  $AB$ , или при распространении сначала вдоль стержня, а затем по воде.

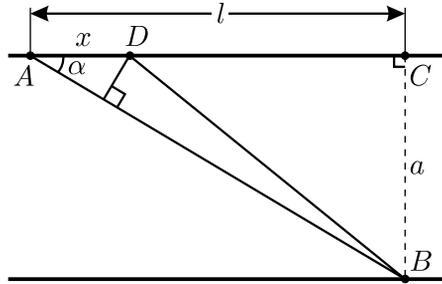


Рис. 4.1.1.

При  $c \geq v$  звуковой сигнал, очевидно, быстрее дойдёт до точки  $B$ , распространяясь по прямой  $AB$ . Время распространения сигнала в этом случае будет равно

$$T_1 = \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{c}.$$

Пусть  $c < v$ . Рассмотрим два сигнала, одновременно вышедших из точки  $A$ , один из которых идёт по прямой сразу в точку  $B$ , а другой сначала распространяется на малое расстояние  $x$  по стержню до точки  $D$ , а затем идёт в точку  $B$  по воде. Обозначим  $\angle CAB = \alpha$ . Разность  $AB - DB$  в силу малости  $x$  приближённо равна произведению  $x \cos \alpha$ . Следовательно, разность времён распространения сигналов по путям  $AB$  и  $DB$  равна

$$\Delta t = \frac{AB}{c} - \left( \frac{x}{v} + \frac{DB}{c} \right) = \frac{x \cos \alpha}{c} - \frac{x}{v}.$$

При выполнении условия

$$\cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} < \frac{c}{v}$$

разность  $\Delta t$  отрицательна, и звук быстрее дойдёт до точки  $B$  по прямой, затратив на это время  $T_1$ . При  $\cos \alpha > \frac{c}{v}$  разность  $\Delta t$  положитель-

на, то есть звуковой сигнал быстрее дойдёт до точки  $B$  по ломаной линии (распространяясь сначала вдоль стержня, а затем по воде).

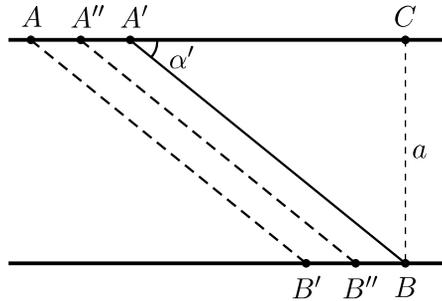


Рис. 4.1.2.

Пусть в последнем случае звук доходит по стержню до некоторой точки  $A'$  (см. рис. 4.1.2), для которой  $\cos \alpha' = \frac{c}{v}$ , и начинает распространяться по прямой  $A'B$ . Время распространения этого сигнала

$$T_2 = \frac{l - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha'}}{v} + \frac{a}{c \sin \alpha'} = \frac{l}{v} + a \left( \frac{1}{c \sin \alpha'} - \frac{1}{v \operatorname{tg} \alpha'} \right).$$

Так как  $\cos \alpha' = \frac{c}{v}$ , то  $\sin \alpha' = \sqrt{1 - \frac{c^2}{v^2}}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha' = \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}$ , и

$$T_2 = \frac{l}{v} + a \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}}.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем ответ для минимального времени распространения звука между точками  $A$  и  $B$ :

$$T = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + l^2}}{c} & \text{при } \frac{c}{v} \geq \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}; \\ \frac{l}{v} + a \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2}} & \text{при } \frac{c}{v} < \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}}. \end{cases}$$

Отметим, что при одновременном выполнении условий  $c < v$  и  $\cos \alpha > \frac{c}{v}$  сигнал может распространяться как по пути  $AA'B$ , так и по путям  $AB'B$  и  $AA''B''B$ . При этом сигналы, распространяющиеся по всем трём путям, достигнут точки  $B$  одновременно, но их интенсивности будут различными. Сигналы, прошедшие по путям  $AA'B$  и  $AB'B$ ,

преломляются на границе стержень–вода по одному разу и будут иметь примерно одинаковую амплитуду, а сигналы, прошедшие по всем путям типа  $AA''B''B$ , преломляются по два раза и будут гораздо слабее. Заметим также, что после первого сигнала, пришедшего в точку  $B$ , будет слышен довольно продолжительный гул, так как звук излучают все точки стержня, по которому бежит волна от удара, но эти сигналы приходят позже. Ситуация в этом случае напоминает то, что слышно при пролёте сверхзвукового самолёта или ударе молнии: вначале наблюдатель слышит удар, а затем раскаты.

В заключение отметим, что задачу можно решать и другим способом, строя так называемый «конус Маха».

**4.2\*.** Звук от выстрела может достичь второго корабля несколькими путями (см. рис. 4.2).

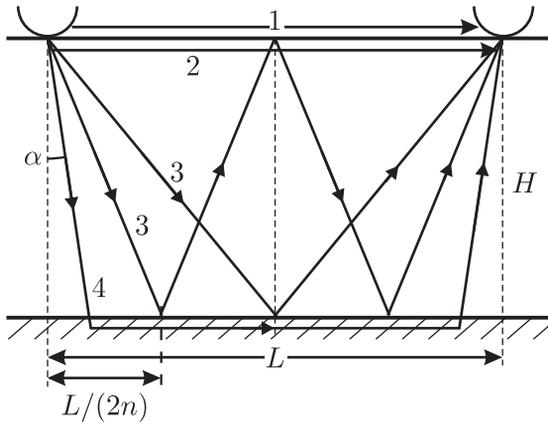


Рис. 4.2.

1) Напрямую по воздуху. В этом случае время распространения звука равно  $t_1 = L/v_3 \approx 9,01$  с.

2) Напрямую по воде. В этом случае время распространения звука  $t_2 = L/v_1 = 2$  с.

3) По воде, с рядом последовательных отражений от границ разделов «вода — дно» и «вода — воздух». Рассмотрим распространение звука с  $n$  отражениями от дна и  $n - 1$  отражениями от границы «вода — воздух». Длина такого пути равна

$$S_3 = 2n \sqrt{\left(\frac{L}{2n}\right)^2 + H^2} = \sqrt{L^2 + 4n^2 H^2},$$

а время распространения звука по нему

$$T_n = \frac{S_3}{v_1} = \frac{\sqrt{L^2 + 4n^2 H^2}}{v_1}.$$

При  $n = 1, 2, \dots$  получаем времена:  $T_1 \approx 2,40$  с,  $T_2 \approx 3,33$  с,  $\dots$

4) По воде и по дну — звук через воду проходит до дна, проникает в донные породы, движется в них по границе раздела «вода — дно», вновь выходит в воду и либо достигает второго корабля, либо отражается от поверхности воды, после чего цикл «вода — дно — вода» повторяется до тех пор, пока звук не дойдёт до второго корабля. Очевидно, что минимальное время распространения звука по пути такого типа получится при одном цикле «вода — дно — вода». Для того, чтобы дошедший до дна звук начал распространяться вдоль границы раздела сред, необходимо, чтобы угол его падения на границу раздела был равен углу полного внутреннего отражения, который равен  $\alpha = \arcsin \frac{v_1}{v_2} \approx 0,3398$  рад  $\approx 19,5^\circ$ . Время распространения звука при одном цикле «вода — дно — вода» равно:

$$t_4 = \frac{L - 2H \operatorname{tg} \alpha}{v_2} + \frac{2H}{v_1 \cos \alpha} \approx 1,92 \text{ с},$$

при двух циклах —

$$t_5 = \frac{L - 4H \operatorname{tg} \alpha}{v_2} + \frac{4H}{v_1 \cos \alpha} \approx 3,19 \text{ с},$$

и так далее.

В итоге, сравнивая найденные времена, получаем, что первый звуковой сигнал дойдёт до гидроакустика через 1,92 с по пути «вода — дно — вода», второй — через 2 с напрямую по воде, третий — через 2,4 с по воде с одним отражением от дна.

**4.3.** Музыка может звучать фальшиво, если вследствие приближения или удаления от зрителя звучащей гармонии частота звука при нажатии одной и той же клавиши изменяется больше, чем в  $a = \sqrt[24]{2}$  раз. Изменение частоты связано с эффектом Доплера. Прежде, чем приступить к решению задачи, рассмотрим подробнее происхождение этого эффекта.

Пусть источник звука, испускающий волны с частотой  $\nu_0 = 1/T_0$ , где  $T_0$  — период колебаний источника, движется по направлению к приёмнику с постоянной скоростью  $v$ . Представим, что за время  $t = NT_0$  испускается пуг, состоящий из  $N$  длин волн. Если скорость звука составляет  $c$ , то через время  $t$ , когда первая волна пройдёт расстояние  $ct$ ,

последняя волна ещё только успеет выйти из источника, а сам источник пройдёт расстояние  $vt$ . Значит, расстояние между началом и концом цуга через время  $t$  будет составлять  $(c - v)t$ , и на этом расстоянии будет укладываться  $N$  длин волн. Значит, длина волны, излучаемой движущимся источником, равна

$$\lambda = \frac{(c - v)t}{N} = (c - v)T_0,$$

а соответствующая ей частота, регистрируемая неподвижным приёмником,

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{(c - v)T_0} = \nu_0 \frac{c}{c - v}.$$

Это и есть формула, описывающая эффект Доплера. Если источник удаляется от приёмника, то перед скоростью источника  $v$  в данной формуле, очевидно, должен стоять знак «плюс». Отметим ещё раз, что эффект Доплера связан с изменением длины волны, испускаемой движущимся источником, а не с изменением скорости звука, которая зависит только от свойств среды.

Итак, мы выяснили, что приближение гармони к зрителю при вращении карусели приводит к повышению частоты звука, а удаление гармони — к понижению. В нашем случае изменение частоты максимально тогда, когда слушатель находится в одной плоскости с каруселью, а скорость гармониста, равная по величине  $\omega R$ , направлена вдоль линии слушатель — гармонист (см. рис. 4.3). Отношение повышенной частоты звука к номинальной  $\nu_0$  или номинальной частоты к пониженной частоте не должно превышать  $a = \sqrt[24]{2}$ .

Поскольку, очевидно,  $\omega R \ll c$ , где  $\omega$  — угловая скорость вращения карусели, то, используя приближённую формулу  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , в первом случае получаем

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{c}{c - \omega R} \approx 1 + \frac{\omega R}{c} < a,$$

а во втором случае

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \frac{c + \omega R}{c} = 1 + \frac{\omega R}{c} < a,$$

то есть то же самое условие. Выражая из полученного соотношения угловую скорость  $\omega$ , находим:

$$\omega < \frac{c}{R}(a - 1) \approx 2 \text{ рад/с.}$$

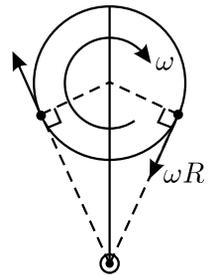


Рис. 4.3.

Заметим, что и первое, и второе неравенства могут быть решены непосредственно, без использования приближённой формулы. При этом получаются два значения частоты:

$$\omega < \omega_1 = \frac{c}{R} \cdot \frac{a-1}{a} \approx 1,9698 \text{ рад/с} \text{ — в первом случае,}$$

$$\omega < \omega_2 = \frac{c}{R}(a-1) \approx 2,0276 \text{ рад/с} \text{ — во втором случае.}$$

Однако, частота  $\omega_1$  отличается от частоты  $\omega_2$  настолько незначительно, что смещение частоты, вызванное таким изменением угловой скорости, значительно меньше четверти тона и не может быть обнаружено на слух. Поэтому физически более правильно объединять случаи приближения и удаления гармониста и давать один приближённый ответ.

Отметим, что реальная угловая скорость вращения карусели, конечно, значительно меньше 2 рад/с, поскольку при такой угловой скорости центростремительное ускорение гармониста равнялось бы  $\omega^2 R = 20 \text{ м/с}^2 \approx 2g$ !

**4.4.** Изменение частоты отражённого от смерча электромагнитного сигнала связано с тем, что отражающие этот сигнал предметы движутся, и имеет место эффект Доплера. В отличие от задачи 4.3, где этот эффект рассматривался для звуковых волн в воздухе, здесь речь идёт о радиоволнах, скорость которых  $c$  равна скорости света. Пусть предмет, отражающий сигнал, движется в направлении радара с максимальной скоростью  $v$ . Ясно, что эта скорость очень мала по сравнению с  $c$ , и квадратичными эффектами, связанными с теорией относительности, можно пренебречь. Тогда остаётся только линейный по отношению  $v/c$  эффект Доплера, и по аналогии с задачей 4.3 частота сигнала, поглощаемого предметом в смерче, должна выражаться формулой

$$f_{\text{полг}} \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right),$$

а изменение частоты  $\Delta f_1 = f_{\text{полг}} - f_0$  определяется выражением:

$$\frac{\Delta f_1}{f_0} = \frac{v}{c}.$$

Поскольку сигнал от радара сначала поглощается движущимся предметом, а потом переизлучается им, то относительное изменение частоты, регистрируемое радаром, будет в два раза больше:

$$\frac{\Delta f_2}{f_0} = 2 \frac{v}{c}.$$

Отсюда

$$v = \frac{c}{2} \cdot \frac{\Delta f_2}{f_0}.$$

Из графика, приведённого в условии, видно, что максимальной скорости предметов в смерче соответствует изменение частоты отражённого сигнала  $\Delta f_2 \approx 6500$  Гц. Подставляя числовые данные в полученную формулу, имеем:

$$v \approx \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{2} \cdot \frac{6500 \text{ Гц}}{10^{10} \text{ Гц}} \approx 100 \text{ м/с}.$$

**4.5.** Мысленно разобьём океан на тонкие горизонтальные слои так, чтобы скорость звука в пределах одного слоя можно было считать постоянной. Закон преломления «звуковых лучей» при переходе

из одного слоя в другой слой, как и в оптике, имеет вид:  $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — скорости звука в соседних слоях,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы, под которыми звук выходит из первого слоя и входит во второй. Далее, для следующей пары соседних слоёв:  $\frac{\sin \varphi_2}{\sin \varphi_3} = \frac{c_2}{c_3}$ , и т. д. Перемножая такие

равенства, записанные для  $n$  слоёв, получаем:  $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_n} = \frac{c_1}{c_n}$ .

Пусть звук проникает в океан на максимальную глубину  $H$ . Тогда  $\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi(H)} = \frac{c_0}{c(H)}$ , где  $\varphi(H)$  — угол, под которым звук входит в самый глубоко лежащий слой. Но  $\varphi(H) = \pi/2$  (если бы это было не так, то звук пошёл бы ещё глубже). Значит,  $\sin \alpha = \frac{c_0}{c_0(1 + aH)}$ , и

$$H = \frac{1 - \sin \alpha}{a \sin \alpha}.$$

**4.6.** Для решения задачи сделаем чертёж (см. рис. 4.6). Обозначим на нём буквами  $A$  и  $B$  начальную и конечную автобусные остановки, буквой  $C$  — точку, откуда остановочный павильон  $B$  казался пешеходу в  $k = 1,5$  раза ниже павильона  $A$ , буквой  $D$  — точку, откуда остановочный павильон  $A$  казался пешеходу в  $k = 1,5$  раза ниже павильона  $B$ . Поскольку видимый размер павильона обратно пропорционален расстоянию до него, то справедливы следующие пропорции:

$$\frac{AC}{CD + DB} = \frac{1}{k}, \quad \frac{DB}{AC + CD} = \frac{1}{k}.$$



Рис. 4.6.

Из них получаем:

$$\frac{AC}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k + 1} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{DB}{AC + CD + DB} = \frac{1}{k + 1} = \frac{DB}{AB}.$$

С другой стороны,  $CD = AB - AC - DB$ , откуда

$$\frac{CD}{AB} = 1 - \frac{AC}{AB} - \frac{DB}{AB} = 1 - \frac{1}{k + 1} - \frac{1}{k + 1} = \frac{k - 1}{k + 1}.$$

Отсюда, учитывая, что  $CD = L$ , получаем:

$$AB = \frac{k + 1}{k - 1} L = 500 \text{ м.}$$

**4.7.** Нарисуем вид канала сверху (см. рис. 4.7.1) и обозначим на нём положения автобуса, блика и столба буквами  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Пусть в момент времени  $t = 0$  автобус находился в начале системы координат  $XOY$  — точке  $O$ , причём прямая  $OC$  была перпендикулярна берегам канала. Тогда  $OA = vt$ . Обозначим также  $OC = L$ ,  $AC = l$ ,  $AB = l_1$ ,  $BC = l_2$ .

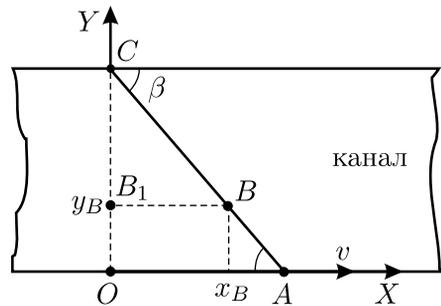


Рис. 4.7.1.

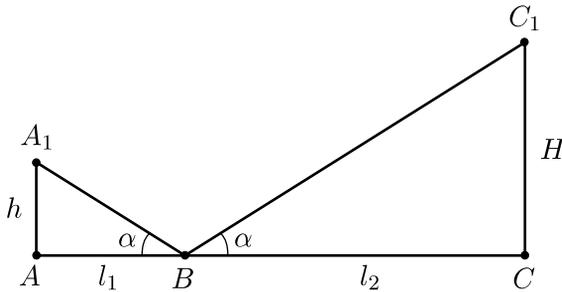


Рис. 4.7.2.

Рассмотрим вид сбоку в плоскости  $ACB$  (см. рис. 4.7.2) и обозначим местонахождение глаз пассажира  $A_1$ , а вершину столба  $C_1$ . Так как угол падения  $A_1BA$  равен углу отражения  $C_1BC$ , то

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l_1} = \frac{H}{l_2}.$$

Кроме того,

$$l_1 + l_2 = l = \frac{L}{\sin \beta}.$$

Выражая из первого уравнения значение  $l_2$  и подставляя его во второе, находим  $l_1$ :

$$l_1 = \frac{hL}{(h + H) \sin \beta}.$$

Отсюда координаты блика:

$$x_B = vt - l_1 \cos \beta = vt - \frac{hL \operatorname{ctg} \beta}{h + H} = vt - \frac{hL \cdot \frac{vt}{L}}{h + H} = v \frac{H}{h + H} t,$$

$$y_B = l_1 \sin \beta = \frac{hL}{h + H}.$$

Из этих формул следует, что блик не смещается в направлении, перпендикулярном берегам. Таким образом, скорость движения блика направлена параллельно берегам канала и по величине равна

$$u = v \frac{H}{h + H}.$$

Другой способ решения задачи основывается на рассмотрении подобных треугольников и позволяет обойтись без тригонометрии. Действительно, треугольники  $AA_1B$  и  $CC_1B$  подобны. Поэтому

$$\frac{BC}{AB} = \frac{H}{h}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB + BC} = \frac{H}{h + H}.$$

Проведём через точку  $B$  на рисунке 4.7.1 прямую, параллельную берегам канала; она пересечёт перпендикуляр  $CO$  в точке  $B_1$ . Из подобия треугольников  $CBV_1$  и  $CAO$  получаем

$$\frac{B_1C}{OC} = \frac{BC}{AC} = \frac{H}{h + H},$$

то есть отношение  $B_1C : OC$  есть постоянная величина. Это означает, что точка  $B_1$  не меняет своего положения со временем. Таким образом,

блик движется по прямой, проходящей через точку  $B_1$  параллельно берегам канала. Найдём его скорость. Длины отрезков  $B_1B$  и  $OA$  равны  $ut$  и  $vt$  соответственно. Из подобия треугольников  $CBB_1$  и  $CAO$  следует отношение:

$$\frac{B_1B}{OA} = \frac{ut}{vt} = \frac{BC}{AC} = \frac{H}{h+H},$$

из которого получается прежнее выражение для скорости блика.

**4.8\***. Прежде всего заметим, что луч, который видит пассажир, отражается от верхней части рельса, которая имеет округлую форму. Поэтому при большом радиусе закругления рельсов (и, следовательно, при малых углах падения и отражения луча) можно пренебречь тем, что глаза пассажира и фары метропоезда находятся на разной высоте над уровнем рельсов, и считать, что фары, глаз пассажира и точка рельса, от которой отражается свет, лежат в практически горизонтальной плоскости. Далее, необходимо рассмотреть два случая: когда тоннель закругляется в сторону платформы, на которой стоит пассажир, и когда тоннель закругляется в противоположную от пассажира сторону.

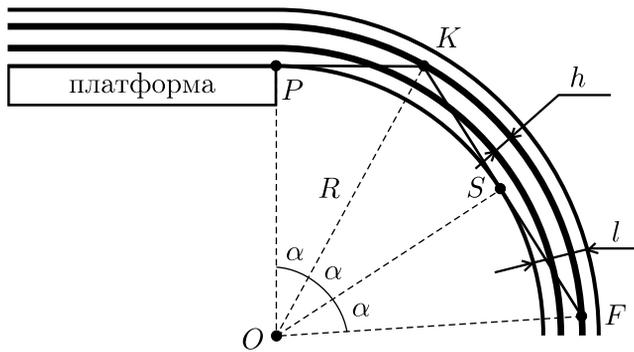


Рис. 4.8.1.

Рассмотрим сначала первый случай. Из рисунка 4.8.1 видно, что прежде всего пассажир увидит луч от правой фары, отражённый правым рельсом. Отрезки, проведённые из центра кривизны пути (точка  $O$ ) к фаре (точка  $F$ ), пассажиру (точка  $P$ ), точке ( $K$ ) отражения света от рельса и точке, в которой луч касается стенки тоннеля ( $S$ ), составляют друг с другом равные углы  $\alpha$ . Из треугольника  $OPK$  можно приближённо найти расстояние от внутренней стенки тоннеля до внешнего рельса:

$$\frac{l}{2} + \frac{h}{2} \approx R(1 - \cos \alpha) \approx \frac{R\alpha^2}{2}.$$

Отсюда  $\alpha \approx \sqrt{\frac{l+h}{R}}$ , а искомое расстояние:

$$L \approx 3\alpha R \approx 3\sqrt{R(l+h)}.$$

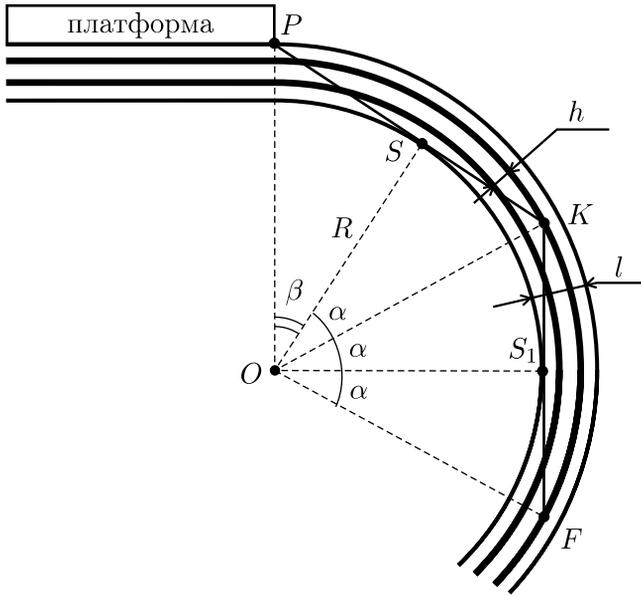


Рис. 4.8.2.

Рассмотрим второй случай (см. рис. 4.8.2). Он отличается от первого тем, что луч касается стенок тоннеля дважды — в точках  $S$  и  $S_1$ . Отрезки  $OF$ ,  $OS_1$ ,  $OK$  и  $OS$  по-прежнему образуют между собой одинаковые углы  $\alpha$ , совпадающие с углом, найденным в предыдущем случае. Отрезок же  $OP$  составляет с отрезком  $OS$  некоторый угол  $\beta$ , который можно оценить из треугольника  $OPS$  при помощи следующего соотношения:

$$l \approx R(1 - \cos \beta) \approx \frac{R\beta^2}{2}.$$

Отсюда  $\beta \approx \sqrt{\frac{2l}{R}}$ , и искомое расстояние:

$$L \approx R(3\alpha + \beta) \approx (3\sqrt{l+h} + \sqrt{2l})\sqrt{R}.$$

**4.9.** Обычное плоское зеркало представляет собой стеклянную пластину с посеребрённой задней поверхностью. На рисунке 4.9 приведена оптическая схема, поясняющая возникновение в таком зеркале

основного изображения  $B$  и дополнительных изображений  $A$  и  $C$  (буквой  $S$  обозначен предмет, отражение которого наблюдается). Основное изображение возникает в результате отражения падающего света от посеребрённой поверхности, а дополнительные изображения — в результате отражения от передней поверхности пластины. Так как передняя поверхность отражает очень малую долю падающего на неё света, а задняя — наоборот, отражает практически весь свет, то изображение  $B$  получается гораздо ярче, чем изображения  $A$  и  $C$ . Заметим, что кроме этих двух дополнительных изображений, имеются и другие, связанные с наличием многократных отражений света внутри стеклянной пластины. Однако они имеют очень малую яркость при нормальном падении света на зеркало и видны, только если угол падения близок к  $90^\circ$ .

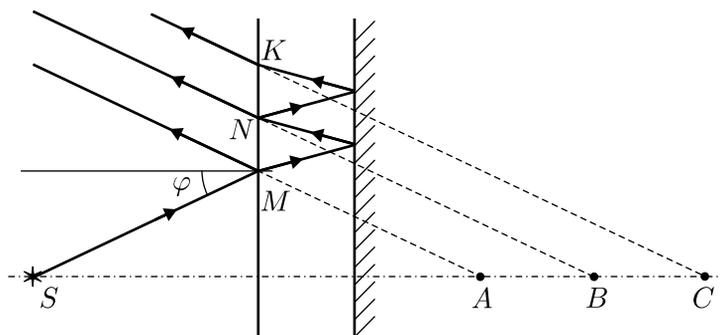


Рис. 4.9.

Определим, как будут располагаться дополнительные изображения  $A$  и  $C$  относительно основного. Пусть толщина стеклянной пластины  $d$ , показатель преломления стекла  $n$ . Если угол  $\varphi$  падения световых лучей на зеркало мал, то  $MN \approx 2\varphi d/n \approx NK$ , и  $AB = BC \approx MN/\varphi = 2d/n$ . Итак, эти дополнительные изображения будут располагаться впереди и позади основного на расстояниях  $2d/n$  от него.

**4.10\***. Будем считать, что среднее расстояние между центрами граней соседних кристаллов снега  $l \sim d$ . На каждый из кристаллов падает свет Солнца в пределах угла  $\varphi = 0,5^\circ \approx 0,01$  рад. При этом кристалл отражает свет одной из своих граней в телесный угол  $\omega \sim \pi\varphi^2/4$ . Так как кристаллы расположены на поверхности хаотически, то отражённый пучок может быть направлен произвольно в пределах телесного угла  $\Omega = 4\pi$ , то есть в один глаз попадает свет, отражённый от одной из  $N_1 = \Omega/\omega \sim 16/\varphi^2 = 16 \cdot 10^4$  граней. Если же смотреть на снег двумя глазами, то хотя бы в один из них попадёт свет, отражённый от одной из  $N_2 = N_1/2 = 8 \cdot 10^4$  граней.

Для оценки расстояния между соседними кристаллами, свет от которых попадает в один глаз, будем считать, что все  $N_1$  отражающих граней равномерно распределены по поверхности. Тогда на единицу длины на этой поверхности приходится  $n_1 \sim \sqrt{N_1}$  отражающих граней, а среднее расстояние между гранями, отражающими свет в нужном направлении, составляет  $D_1 \sim ln_1 \sim d\sqrt{N_1} \sim 4d/\varphi \approx 40$  см. Аналогично для случая, когда на снег смотрят двумя глазами,  $D_2 \sim d\sqrt{N_2} \sim 2\sqrt{2}d/\varphi \approx 28$  см. Полученные результаты являются, конечно, довольно грубыми оценками.

Интересно ответить ещё на один вопрос: на какое расстояние нужно переместить голову для того, чтобы одна блёстка, которую видит глаз, исчезла, а вместо неё появилась другая, в другом месте? Очевидно, что это расстояние определяется диаметром светового пятна, получающегося вблизи глаза при отражении света Солнца от снежинки. Если мы смотрим на снег стоя с расстояния  $L \sim 2$  м, то диаметр этого пятна примерно равен  $L\varphi \sim 2$  см, что примерно в 10 раз больше диаметра зрачка глаза, так что оценка искомого расстояния как раз и составляет около 2 см.

**4.11.** Пусть рост отражающегося человека равен  $H \sim 2$  м, а размер его изображения  $h$  ( $h \ll H$ ). Для простоты рассуждений будем считать, что центр ёлочного шарика расположен на уровне половины роста человека. На рисунке 4.11 приведён ход лучей, формирующих изображение.

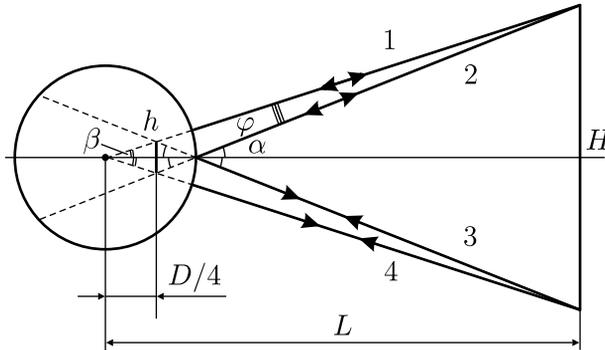


Рис. 4.11.

Так как  $D \ll L$ , то угол  $\varphi$  между лучами, формирующими изображение головы и ног человека, очень мал (изображение головы лежит на пересечении продолжений лучей 1 и 3, а ног — 2 и 4). Поэтому углы  $\alpha$  и  $\beta$  примерно одинаковы, а это означает, что изображение человека расположено на расстоянии  $\approx D/4$  от центра шарика. Из подобия

треугольников следует отношение:

$$\frac{H/2}{L} = \frac{h/2}{D/4}, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{HD}{4L}.$$

Так как  $D \ll L$ , то расстояние от человека до изображения примерно равно  $L$ . Поэтому угловой размер изображения человека в шарике

$$\varphi \approx \frac{h \cos \alpha}{L / \cos \alpha} = \frac{HD}{4L^2} \cos^2 \alpha = \frac{HD}{4L^2} \left( \frac{L}{\sqrt{L^2 + (H/2)^2}} \right)^2 = \frac{HD}{4L^2 + H^2}.$$

Для того, чтобы человек видел своего двойника таким же маленьким, то есть под тем же углом, двойник должен стоять на таком расстоянии  $x$  от человека, чтобы выполнялось соотношение:  $\varphi \cdot x \approx H$ . Отсюда

$$x \approx \frac{H}{\varphi} = \frac{4L^2 + H^2}{D} = 200 \text{ м.}$$

**4.12\*.** Если источник находится не очень далеко от биссектрисы двугранного угла, то наблюдаются четыре различных мнимых изображения (см. рис. 4.12.1).

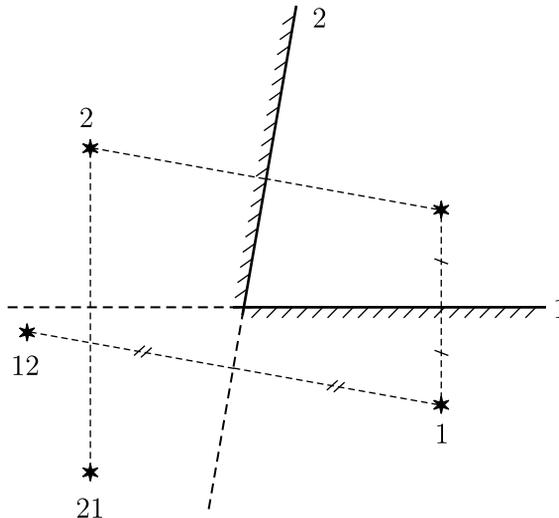


Рис. 4.12.1.

Они получаются при отражении света от первого зеркала (изображение 1), от второго (изображение 2), а также при отражении получившихся мнимых источников 1 и 2 в зеркалах 2 и 1 соответственно

(изображения 12 и 21). Заметим, что источник может дать изображение только в том случае, если он находится перед отражающей поверхностью зеркала или её продолжением. Так как мнимые источники 12 и 21 находятся за продолжениями отражающих поверхностей зеркал 1 и 2, то свет от них больше отразиться не может.

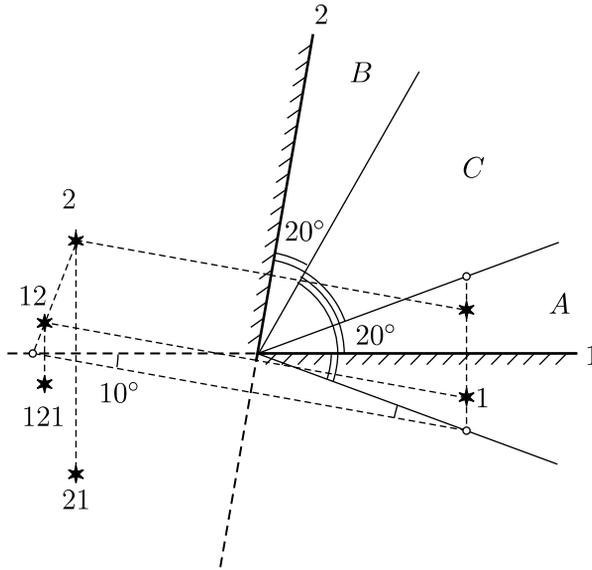


Рис. 4.12.2.

Если источник приближать к поверхности какого-либо из зеркал (например, зеркала 1), то, как видно из рисунка 4.12.2, изображение 12 будет перемещаться в сторону плоскости зеркала 1, пересечёт её и окажется над продолжением его отражающей поверхности. При этом возникнет ещё одно мнимое изображение 121, получающееся при отражении мнимого источника 12 в зеркале 1. В этом случае всего будет наблюдаться пять различных мнимых изображений источника. Из построения видно, что мнимый источник 12 пересекает плоскость зеркала 1 тогда, когда источник света лежит в плоскости, составляющей с этим зеркалом угол  $20^\circ$ . Аналогичные рассуждения можно провести и для случая приближения источника к зеркалу 2.

Таким образом, если источник света находится внутри двугранного угла  $20^\circ$  от любого из зеркал (области A и B на рисунке), то наблюдается пять изображений, а в остальных случаях (область C, включая ограничивающие её плоскости) — четыре.

**4.13\*.** Все изображения лежат на окружности с центром на ребре двугранного угла, образованного зеркалами, и проходящей через источник света  $P$  (см. рис. 4.12). Пусть  $\alpha$  — угол между зеркалами,  $\Omega$  — заштрихованная область (не включая границы),  $W$  — незаштрихованная область (включая границы). Совпадающие изображения будем считать, согласно условию, за одно изображение.

Изображения, лежащие под прямой  $AC$ , дают изображения в зеркале  $AO$ , которые лежат над прямой  $AC$ . Изображения, лежащие над прямой  $BD$ , дают изображения в зеркале  $BO$ , которые лежат под прямой  $BD$ . Отсюда следует, что изображения, лежащие в области  $W$  без границ, дают своё изображение; изображения, лежащие в  $\Omega$ , не дают своих изображений.

Обозначим через  $\alpha$  угол, который образуют лучи, проведённые из точки  $O$  к двум соседним изображениям. Из рисунка видно, что в области  $W$  лежит ровно

$$2 \left[ \frac{\angle POD}{\alpha} \right] = 2 \left[ \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha} \right]$$

изображений (квадратными скобками обозначена операция выделения целой части числа). При этом возможны три следующих случая.

1) В  $\Omega$  не лежит ни одного изображения. Это имеет место тогда и только тогда, когда есть изображения, находящиеся на лучах  $OD$  и  $OC$ . Это условие эквивалентно тому, что  $\frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha}$  является положительным целым числом. Тогда общее число различных изображений будет равно

$$N = 2 \cdot \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha}.$$

Приравнявая в этом выражении  $N = 100$ , получаем:

$$\alpha = \frac{2\pi}{N + 1} = \frac{2\pi}{101}.$$

2) В  $\Omega$  лежит ровно одно изображение, находящееся на луче  $OK$ . Это имеет место тогда и только тогда, когда  $\frac{\pi}{\alpha}$  является целым поло-

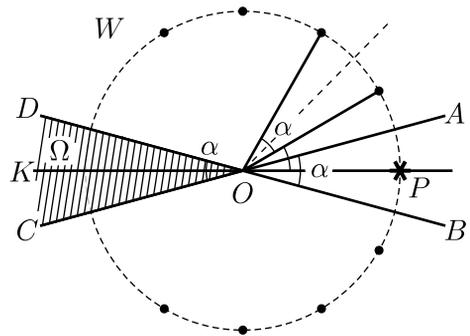


Рис. 4.13.

жительным числом. При этом общее число изображений будет равно

$$N = 2 \left[ \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha} \right] + 1.$$

Это число не может быть равно 100 ни при каком  $\alpha$ , так как является нечётным, то есть второй случай не удовлетворяет условию задачи.

3) В  $\Omega$  лежат ровно 2 изображения. Это имеет место тогда и только тогда, когда  $\frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha}$  и  $\frac{\pi}{\alpha}$  не являются целыми положительными числами. Тогда общее число изображений будет равно

$$N = 2 \left[ \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha} \right] + 2.$$

Приравнивая в этом выражении  $N = 100$ , получаем

$$\left[ \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha} \right] = \frac{N - 2}{2} = 49.$$

Это уравнение эквивалентно неравенству

$$\frac{N - 2}{2} = 49 \leq \frac{\pi - (\alpha/2)}{\alpha} < 50 = \frac{N}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{2\pi}{N + 1} = \frac{2\pi}{101} < \alpha \leq \frac{2\pi}{99} = \frac{2\pi}{N - 1}.$$

Учтя указанные выше условия, при которых возможен третий случай, получаем, что угол  $\alpha = 2\pi/N = 2\pi/100$  должен быть исключён из последнего неравенства.

Объединяя все случаи, получаем ответ:

$$\frac{2\pi}{101} < \alpha < \frac{2\pi}{100}; \quad \frac{2\pi}{100} < \alpha \leq \frac{2\pi}{99}.$$

**4.14.** Из чертежа 4.14 ясно, что тень на столе имеет вид кольца с центром на оси цилиндра (область тени показана штриховкой). Внешняя граница кольца находится там, куда падает световой луч 1, касающийся края верхнего основания цилиндра. Из чертежа следует, что радиус внешней границы тени равен

$$R_1 = (H_1 + H_2) \frac{R}{H_2}.$$

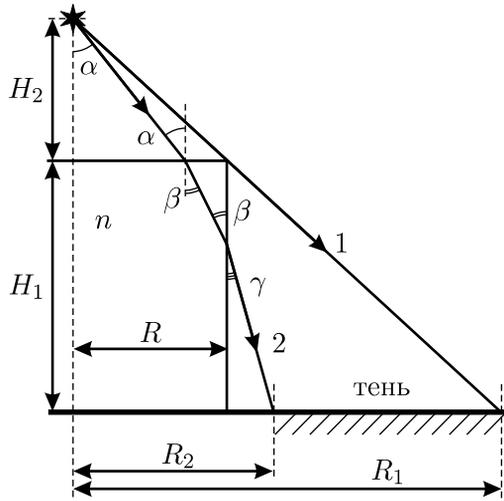


Рис. 4.14.

Для того чтобы найти радиус  $R_2$  внутренней границы тени, рассмотрим луч 2, который проходит через цилиндр очень близко от края его верхнего основания (масштаб на чертеже не соблюден). Именно этот луч определяет, где на столе будет проходить граница между тенью и светом, поскольку все остальные лучи, упавшие на верхнее основание цилиндра, попадут на стол левее луча 2. Рассматриваемый луч вначале преломляется на верхнем основании, а затем — на боковой поверхности цилиндра. Запишем для двух указанных преломлений закон Снеллиуса:

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad \cos \gamma = n \cos \beta.$$

Отсюда  $\cos \gamma = \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ , или  $\cos^2 \gamma + \sin^2 \alpha = n^2$ . Последнее соотношение можно преобразовать, выразив  $\cos \gamma$  и  $\sin \alpha$  через  $\text{tg} \alpha$  и  $\text{ctg} \alpha$ :

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2 \gamma} + \frac{1}{1 + \text{ctg}^2 \alpha} = n^2.$$

Отсюда

$$\text{tg} \gamma = \sqrt{\frac{2 + \text{ctg}^2 \alpha - n^2(1 + \text{ctg}^2 \alpha)}{n^2(1 + \text{ctg}^2 \alpha) - 1}}.$$

Учитывая, что  $\text{ctg} \alpha = H_2/R$  (луч 2 проходит практически через край верхнего основания цилиндра), найдём  $R_2$ :

$$\begin{aligned}
 R_2 &= R + H_1 \operatorname{tg} \gamma = R + \sqrt{\frac{2 + (H_2/R)^2 - n^2 (1 + (H_2/R)^2)}{n^2 (1 + (H_2/R)^2) - 1}} = \\
 &= R + \sqrt{\frac{1 - (n^2 - 1) (1 + (H_2/R)^2)}{n^2 (1 + (H_2/R)^2) - 1}}.
 \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что внутренняя граница кольцевой тени может существовать за пределами нижнего основания цилиндра только при выполнении условия

$$(n^2 - 1) (1 + (H_2/R)^2) < 1.$$

Переписав его в виде

$$(H_2/R)^2 < \frac{2 - n^2}{n^2 - 1},$$

заметим, что при заданном в условии задачи значении показателя преломления  $n = 1,5$  полученное условие не выполняется. Это означает, что в данном случае все световые лучи, попавшие из источника на верхнее основание цилиндра, упадут на стол в пределах его нижнего основания, то есть второго преломления на боковой поверхности цилиндра не будет. Поэтому радиус внутренней границы тени будет равен радиусу  $R$  цилиндра, и искомая площадь тени равна

$$S = \pi(R_1^2 - R^2) = \frac{\pi R^2 H_1 (H_1 + 2H_2)}{H_2^2}.$$

Заметим, что к этому же результату можно прийти и более коротким путём, найдя критическое значение показателя преломления  $n_0$ , при превышении которого все лучи света от точечного источника, преломлённые на верхнем основании цилиндра, даже при  $H_2 = 0$  не смогут выйти через его боковую поверхность. Скользящий вдоль верхнего основания луч преломляется под углом  $\beta_0$  и падает на боковую поверхность цилиндра под углом, равным  $\frac{\pi}{2} - \beta_0$ . Ясно, что после второго преломления этот луч будет скользить вдоль боковой поверхности цилиндра при  $\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \beta_0$ , то есть при  $\beta_0 = \frac{\pi}{4} = \arcsin \frac{1}{n_0}$ , откуда  $n_0 = \sqrt{2}$ . Поскольку по условию  $n = 1,5 > n_0$ , то все лучи, попавшие внутрь стеклянного цилиндра, будут испытывать полное внутреннее отражение на его боковой поверхности и не смогут из него выйти. Это приводит к тому же выражению для площади тени  $S$ .

**4.15.** Так как фонарь расположен очень далеко от окна, то можно считать, что приходящие от него лучи света параллельны. Максимальный угол, на который свет отклоняется от прямой из-за преломления в каплях, приближённо равен  $\alpha \approx r/L = 1/30$ . Так как  $\alpha \ll 1$ , то и все остальные углы также малы. Следовательно, при решении задачи можно пользоваться приближённым соотношением  $\sin x \approx x$ .

Будем считать, что светлое пятно возникает из-за преломления света на поверхности каплей, и оценим величину угла  $\beta$ , который эта поверхность образует с оконным стеклом (см. рис. 4.15). Рассмотрим луч, который падает на участок капли вблизи стекла. Малый участок капли можно приближённо считать плоским. Поэтому рассматриваемая задача может быть сведена к задаче о преломлении света на клине. Введём обозначения углов падения и преломления так, как показано на рисунке, и применим закон преломления, учитывая малость всех углов:

$$\beta \approx n\gamma, \quad n\delta \approx n_1\varphi,$$

где  $n_1$  — показатель преломления оконного стекла. Связь между углами  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  найдём из треугольника  $ABC$ :

$$\gamma + \delta + \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \pi.$$

Выражая из первых двух уравнений  $\gamma$  и  $\delta$  и подставляя их в третье уравнение, найдём, что  $\beta \approx \frac{n_1\varphi}{n-1}$ . При преломлении света на ближней к наблюдателю поверхности стекла справедливо выражение  $n_1\varphi \approx \alpha$ . Значит,

$$\beta \approx \frac{\alpha}{n-1} \approx \frac{r}{L(n-1)} = 0,1 \text{ рад} \approx 6^\circ.$$

Заметим, что малая величина угла  $\beta$  говорит о том, что для наблюдения этого эффекта стекло должно хорошо смачиваться водой.

**4.16\*.** Луч света, попав в пластинку, несколько раз отразится от её посеребрённых боковых поверхностей, после чего попадёт на малое основание пластинки. Луч пройдёт через него только в том случае, если угол падения света не превысит угол полного внутреннего отражения, величина которого даётся формулой  $\sin \beta_{\max} = 1/n$ .

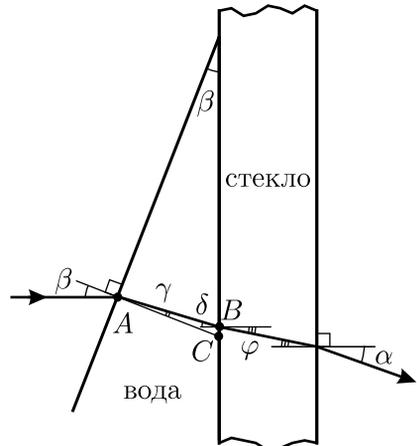


Рис. 4.15.

Для того, чтобы было проще рассматривать отражения от боковых поверхностей, воспользуемся следующим приёмом, который позволяет заменить распространение света с многократными отражениями на прямолинейное. Последовательно отразим несколько раз пластинку относительно её боковой поверхности, на которой происходит очередное отражение света и представим, что луч проходит эту боковую поверхность насквозь (см. рис. 4.16). Будем продолжать эту процедуру до тех пор, пока луч не упрётся в малое основание после очередного «отражения» пластинки. Фактически это выглядит так, как будто мы отражаем пластинку вместе с идущим в ней лучом. При этом величина угла падения света на малое основание после последнего «отражения» пластинки будет совпадать с величиной угла падения на основание реальной пластинки.

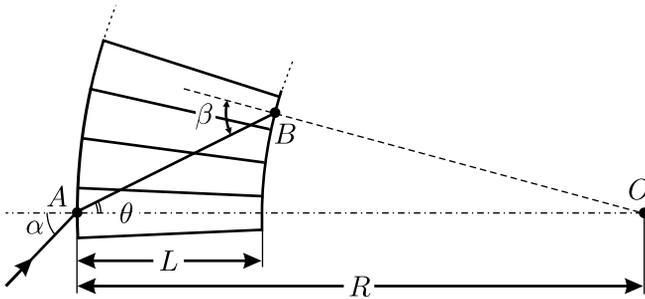


Рис. 4.16.

Теперь можно приступить к определению угла  $\alpha$ . Введём обозначения так, как это показано на рисунке, и применим к треугольнику  $ABO$  теорему синусов:  $\frac{\sin \theta}{R - L} = \frac{\sin(\pi - \beta)}{R}$ . Отсюда, учитывая, что

$R = \frac{D}{2 \sin(\varphi/2)}$ , получим:

$$\sin \theta_{\max} = \left(1 - \frac{L}{R}\right) \sin \beta_{\max} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{2L}{D} \sin \frac{\varphi}{2}\right).$$

Интересующий нас угол определяется из соотношения  $\sin \alpha_{\max} = n \sin \theta_{\max}$ , откуда, с учётом малости угла  $\varphi$ , окончательно найдём:

$$\sin \alpha_{\max} \approx \left(1 - \frac{L\varphi}{D}\right).$$

Следовательно, луч света пройдёт через пластинку при углах падения на её основание

$$\alpha \leq \alpha_{\max} \approx \arcsin \left(1 - \frac{L\varphi}{D}\right).$$

**4.17\***. Палочка не видна в растворе, если показатели преломления стекла (из которого изготовлена палочка) и раствора совпадают при данных условиях (в этом случае свет никак не преломляется на границе стекла и раствора).

Обозначим через  $\alpha_T$  объёмную долю ацетона в растворе, в котором палочка незаметна при температуре этого раствора  $T$ . Тогда объёмная доля бензола в таком растворе равна  $(1 - \alpha_T)$ . Для чистых жидкостей при температуре  $T_2 = 20^\circ\text{C}$  справедливы соотношения:

$$n_A^2 = 1 + K_A N_A; \quad n_B^2 = 1 + K_B N_B.$$

Для того, чтобы в растворе ацетона и бензола палочка не была видна при температуре  $20^\circ\text{C}$ , должно выполняться условие:

$$n_C^2 = 1 + \alpha_{20} K_A N_A + (1 - \alpha_{20}) K_B N_B.$$

Отсюда найдём объёмную долю ацетона в таком растворе при температуре  $20^\circ\text{C}$ :

$$\alpha_{20} = \frac{n_B^2 - n_C^2}{n_B^2 - n_A^2} = \frac{1,5^2 - 1,47^2}{1,5^2 - 1,36^2} \approx 0,222.$$

При изменении температуры раствора объёмная доля ацетона не изменяется, поскольку коэффициенты объёмного расширения обеих жидкостей по условию одинаковы. В то же время концентрации молекул ацетона и бензола меняются, поскольку изменяется объём раствора:  $V = V_{20}(1 + \mu(T_1 - T_2))$ . Таким образом,  $\alpha_{50}$  (объёмная доля ацетона в таком растворе, в котором стеклянная палочка незаметна при температуре  $T_1 = 50^\circ\text{C}$ ) может быть найдена из условия:

$$n_C^2 = 1 + \frac{\alpha_{50} K_A N_A + (1 - \alpha_{50}) K_B N_B}{1 + \mu(T_1 - T_2)}.$$

Отсюда, с учётом записанных выше соотношений для  $n_A$  и  $n_B$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{50} &= \frac{n_B^2 - 1 - (n_C^2 - 1)(1 + \mu(T_1 - T_2))}{n_B^2 - n_A^2} = \\ &= \frac{1,5^2 - 1 - (1,47^2 - 1) \cdot (1 + 0,00124 \cdot 30)}{1,5^2 - 1,36^2} \approx 0,115. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha_{20} > \alpha_{50}$ , для получения раствора с объёмной долей ацетона  $\alpha_{20}$  из раствора с объёмной долей ацетона  $\alpha_{50}$  в исходный раствор

нужно добавлять ацетон. Объём исходного раствора после охлаждения до  $20^\circ\text{C}$  равен

$$V_{20} = \frac{V}{(1 + \mu(T_1 - T_2))} \approx 192,8 \text{ мл.}$$

В нём на долю бензола приходится объём  $V_B = (1 - \alpha_{50})V_{20} \approx 170,7 \text{ мл}$ , который после добавления ацетона должен составлять долю  $(1 - \alpha_{20})$  от нового объёма раствора  $V_H$ . Отсюда

$$V_H = \frac{V_B}{1 - \alpha_{20}} \approx 219,5 \text{ мл.}$$

Таким образом, в раствор нужно добавить объём ацетона, равный

$$\begin{aligned} \Delta V_A = V_H - V_{20} &= \frac{n_C^2 - 1}{n_C^2 - n_A^2} \cdot \frac{\mu(T_1 - T_2)V}{1 + \mu(T_1 - T_2)} \approx \\ &\approx 219,5 \text{ мл} - 192,8 \text{ мл} \approx 26,7 \text{ мл} \end{aligned}$$

(объём рассчитан при температуре добавляемого ацетона  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ ).

**4.18\***. Выберем начало координат в центре окружности радиуса  $R$ , по дуге которой распространяется луч света. Пусть показатель преломления монотонно изменяется вдоль оси  $Z$ .

Разобьём среду на множество тонких слоёв, перпендикулярных оси  $Z$ , как показано горизонтальными пунктирными линиями на рисунке 4.18. В пределах каждого из слоёв показатель преломления можно считать неизменным. Пусть  $\varphi$  — угол между осью  $Z$  и касательной к лучу в некоторой точке. Тогда, как следует из построения на рисунке,  $\varphi$  является также углом падения луча на слой с координатой  $z$ . В соответствии с законом преломления  $n(z) \sin \varphi = \text{const}$ . Так как  $\sin \varphi = z/R$ , то

$$n(z) = \frac{\text{const}}{\sin \varphi} = \frac{R \cdot \text{const}}{z} = \frac{\alpha}{z},$$

где  $\alpha$  — постоянный коэффициент. Таким образом, для того, чтобы луч света мог распространяться в среде по дуге окружности, показатель преломления должен убывать обратно пропорционально координате  $z$ , отсчитываемой от центра этой окружности.

**4.19\***. Световой луч, проходящий через некоторые точки  $A$  и  $B$ , распространяется по такому пути между ними, который имеет экстремальную оптическую длину (это утверждение называется принципом

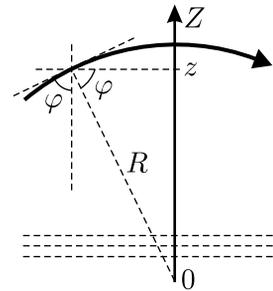


Рис. 4.18.

Ферма). Для параллельного пучка лучей, проходящих через нашу пластину, это означает, что все лучи, идущие от её левой поверхности до фокуса, имеют одинаковую оптическую длину. Кроме того, понятно, что правая поверхность пластины должна быть осесимметричной — в противном случае параллельный пучок не сможет собраться в фокусе.

Изобразим на рисунке 4.19 сечение пластины плоскостью, в которой лежит указанная ось симметрии. Обозначим расстояние от плоской поверхности пластины до фокуса через  $L$  и рассмотрим произвольный луч из пучка, упавший на плоскую поверхность пластины на расстоянии  $x$  от начала координат. Тогда оптическая длина пути для этого луча равна

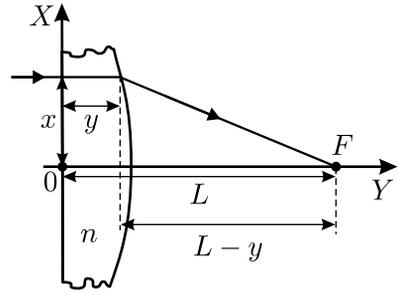


Рис. 4.19.

$$l = ny + \sqrt{x^2 + (L - y)^2} = \text{const},$$

так как все лучи независимо от точки падения должны иметь одинаковую оптическую длину. Это условие представляет собой записанное в неявном виде искомое уравнение функции  $y(x)$ , определяющей форму правой поверхности пластины.

Для малых отклонений  $x$  падающих лучей от оси симметрии (при  $x \ll (L - y)$ ) полученное уравнение можно преобразовать. Вынесем из под знака корня величину  $(L - y)$  и применим приближённую формулу  $\sqrt{1 + z} \approx 1 + (z/2)$ . В результате получим:

$$y(n - 1) + L + \frac{x^2}{2(L - y)} \approx \text{const}.$$

Для удобства представления этого результата найдём максимальную толщину пластины  $y_0$ . Для этого положим в полученном уравнении  $x = 0$ . Тогда  $y_0 = (\text{const} - L)/(n - 1)$  и

$$y \approx y_0 - \frac{x^2}{2(n - 1)(L - y_0)}.$$

При записи последнего уравнения мы учли, что вблизи оси симметрии пластины  $L - y \approx L - y_0$ . Полученное уравнение при  $x \ll (L - y)$  представляет собой уравнение сферы радиусом  $R = (L - y_0)(n - 1)$ . Отметим, что так как  $L - y_0 = F$  (где  $F$  — фокусное расстояние), то  $R = F(n - 1)$ , что совпадает с известным результатом для радиуса кривизны поверхности линзы.

**4.20\***. Пусть материал линзы имеет показатель преломления  $n$ , а скорость света в вакууме равна  $c$ . Тогда скорость света, распространяющегося внутри линзы, равна  $c/n$ . Так как линза осесимметрична, а фронт прошедшей через неё волны становится плоским, то времена распространения света от источника по путям  $ABC$  и  $ADE$  (см. рис. 4.20.1) должны быть одинаковыми:

$$\frac{R\sqrt{2}}{c} + \frac{R}{c} = \frac{R}{c} + \frac{R}{c/n}.$$

Отсюда получаем, что показатель преломления материала линзы  $n = \sqrt{2}$ .

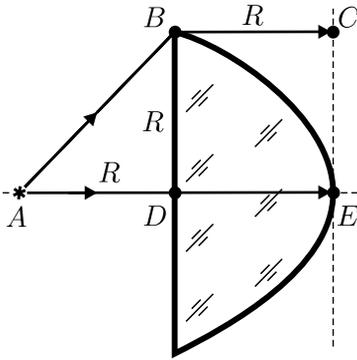


Рис. 4.20.1.

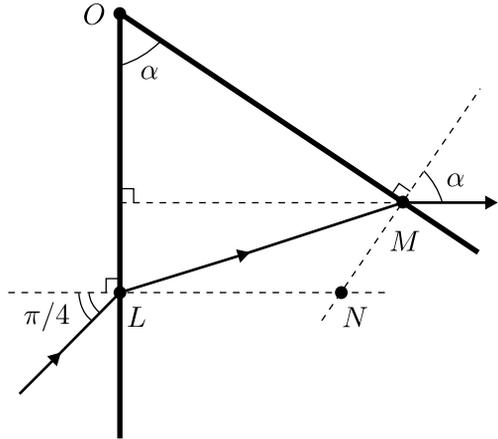


Рис. 4.20.2.

Рассмотрим далее преломление луча света вблизи пересечения поверхностей, ограничивающих линзу (см. рис. 4.20.2). Угол падения луча на плоскую поверхность равен  $\varphi = \pi/4$ . Из закона преломления света находим:

$$n \sin(\angle MLN) = \sin \varphi,$$

откуда  $\sin(\angle MLN) = \frac{\sin \varphi}{n} = \frac{1}{2}$ , то есть  $\angle MLN = \frac{\pi}{6}$ . Далее, из треугольника  $MLO$  получаем:

$$\alpha + \frac{\pi}{2} - \angle LMN + \frac{\pi}{2} - \angle MLN = \pi,$$

откуда, с учётом предыдущего соотношения,  $\angle LMN = \alpha - \frac{\pi}{6}$ .

Рассматривая преломление луча на выпуклой поверхности, получаем:

$$n \sin(\angle LMN) = \sin \alpha, \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \alpha.$$

Отсюда имеем:

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) = \sin \alpha, \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Окончательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \approx \operatorname{arctg}(1,73 + 1,41) = \operatorname{arctg} 3,14 \approx 72^\circ.$$

**4.21.** Изобразим на рисунке 4.21 оптическую схему. По условию фотоаппарат перед съёмкой со светофильтром был сфокусирован на бесконечность. Это означает, что приходящий из бесконечности луч света, преломляясь в линзе объектива и на пластинке светофильтра, попадает на плёнку (точка  $A$ ). Обозначим местоположение фокуса линзы объектива (в отсутствие светофильтра) буквой  $B$ , точку выхода светового луча из светофильтра буквой  $C$ , угол падения луча на светофильтр  $\varphi$ . Будем считать этот угол малым.

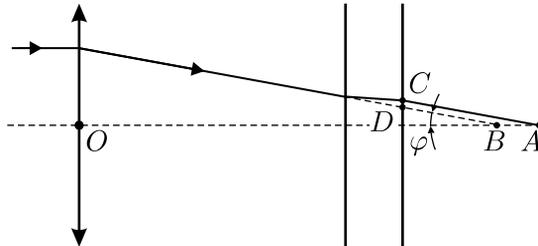


Рис. 4.21.

Известно, что плоскопараллельная пластинка смещает падающий на неё луч на расстояние  $CD = d(1 - (1/n))\varphi$ , не изменяя направления луча. Тогда из чертежа следует, что  $AB = CD/\varphi = d(1 - (1/n))$ , и расстояние от объектива до плёнки:

$$OA = F + AB = F + d \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

После убирания светофильтра на плёнку будут попадать лучи, приходящие от объектов, расположенных на некотором расстоянии  $l$  от

объектива. Применяя формулу тонкой линзы, получим:

$$l = \left( \frac{1}{F} - \frac{1}{OA} \right)^{-1} = F + \frac{F^2 n}{d(n-1)} = 78,4 \text{ см.}$$

**4.22.** Рассматриваемая в условии необычная линза состоит из призмы и обычной плосковыпуклой линзы, разделённых плоской поверхностью. Введём систему координат следующим образом: ось  $Y$  расположим в плоскости, разделяющей призму и линзу, и направим её перпендикулярно ребру призмы; ось  $X$  направим от призмы перпендикулярно границе её раздела с линзой вдоль радиуса сферической поверхности. Далее задачу можно решать двумя способами.

1) Заметим, что лучи, падающие на поверхность призмы под некоторым углом  $\alpha$  (так, как показано на рисунке в условии), внутри необычной линзы будут проходить параллельно плоскости  $XY$  под углом  $\beta = \alpha(1 - (1/n))$  к оси  $X$ .

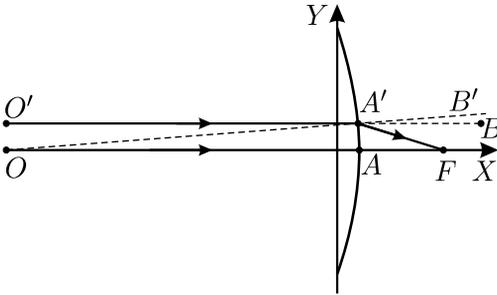


Рис. 4.22.1.

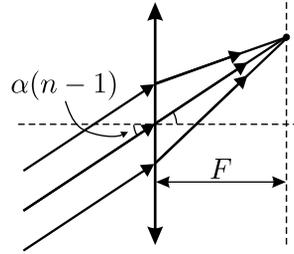


Рис. 4.22.2.

Рассмотрим далее параллельный пучок лучей, падающий на сферическую поверхность, разделяющую среды с показателями преломления  $n$  и  $1$  (см. рис. 4.22.1). Пусть точка  $O$  — центр преломляющей сферической поверхности,  $OA$  — луч, падающий нормально к этой поверхности, луч  $O'A'$  проходит параллельно  $OA$  на достаточно близком от  $OA$  расстоянии и преломляется на сферической поверхности в точке  $A'$ . Преломлённый луч  $A'F$  пересекает луч  $OA$  в точке  $F$ , которая, очевидно, является фокусом данной сферической поверхности. Из закона преломления следуют следующие соотношения:

$$\angle O'A'O = \angle B'A'B = \gamma, \quad \angle B'A'F = n\gamma, \quad \angle BA'F = \angle A'FA = (n-1)\gamma.$$

Расстояние между лучами  $O'A'$  и  $OA$  равно  $R\gamma$ , с одной стороны, и  $AF \cdot (n-1)\gamma$ , с другой. Поэтому

$$AF = \frac{R}{n-1}; \quad OF = R + AF = \frac{Rn}{n-1}.$$

Если теперь рассмотрим параллельный пучок лучей, идущий под углом  $\beta$  к оси  $X$ , то картинка на рисунке 4.22.1 целиком повернётся на угол  $\beta$ , и пучок соберётся в фокусе с координатами  $\left(\frac{R}{n-1}; \frac{Rn\beta}{n-1}\right)$ . Поскольку  $\beta = \alpha \frac{n-1}{n}$ , окончательно находим координаты фокуса необычной линзы:  $\left(\frac{R}{n-1}; R\alpha\right)$ .

2) Прохождение параллельного пучка лучей через рассматриваемую систему осуществляется в две стадии: прохождение через призму, а затем — через обычную линзу. Будем считать, что между призмой и этой линзой имеется тонкая воздушная прослойка (она, очевидно, не может никак влиять на работу оптической системы).

При прохождении через призму пучок лучей после выхода из неё в воздух поворачивается на угол  $n\beta = \alpha(n-1)$ . Если теперь этот пучок попадёт из воздуха в линзу, то после прохождения через неё лучи соберутся в фокальной плоскости линзы в точке с координатами  $(F; \alpha(n-1)F)$  — см. рисунок 4.22.2. Отсюда, учитывая, что  $F = \frac{R}{n-1}$ , получаем координаты фокуса системы, найденные выше.

**4.23.** На рисунке 4.23 изображён ход лучей через линзу.

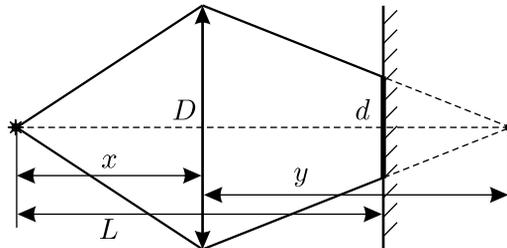


Рис. 4.23.

Обозначим расстояния от линзы до источника и до изображения  $x$  и  $y$  соответственно, диаметр линзы  $D$ , диаметр пятна на экране  $d$ . Тогда из подобия треугольников:

$$d = D \cdot \frac{x + y - L}{y} = D \left( \frac{x - L}{y} + 1 \right).$$

Найдём такое  $x$ , при котором  $d$  минимально. Отметим, что не имеет смысла рассматривать значения  $x \leq F$ , так как в этом случае  $d \geq D$ , и размер пятна явно не может быть минимальным. Ясно, что  $d$  будет

минимальным тогда, когда минимальное значение примет функция

$$f = \frac{x - L}{y}.$$

Применяя формулу тонкой линзы, получаем:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{F} - \frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f &= \frac{(x - L)(x - F)}{Fx} = \frac{1}{F} \left( x + \frac{LF}{x} - (L + F) \right) = \\ &= \frac{1}{F} \left( \left( \sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}} \right)^2 - (\sqrt{L} - \sqrt{F})^2 \right). \end{aligned}$$

Выражение  $\left( \sqrt{x} - \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}} \right)^2 - (\sqrt{L} - \sqrt{F})^2$  минимально тогда,

когда первое слагаемое равно нулю:  $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{LF}}{\sqrt{x}}$ . Отсюда  $x_0 = \sqrt{LF}$ .

Этому значению  $x_0$  соответствует минимально возможный диаметр пятна на экране:

$$d = D \cdot \frac{2\sqrt{LF} - L}{F}.$$

**4.24.** Пусть длина маятника равна  $d$ . Тогда период его колебаний:

$$T = \frac{N}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}}, \quad \text{откуда} \quad d = \frac{gN^2}{4\pi^2 f^2} = 1 \text{ м.}$$

Видно, что длина изображения маятника на плёнке  $l \ll d$ . Это означает, что искомое расстояние  $L$  от камеры до маятника намного превышает фокусное расстояние объектива ( $L \gg F$ ). Отсюда, в свою очередь, следует, что изображение маятника находится очень близко к фокусу (то есть расстояние от объектива до плёнки, на которой получается изображение, почти равно  $F$ ). Таким образом,  $\frac{d}{L} \approx \frac{l}{F}$ , откуда

$$L \approx \frac{Fd}{l} = \frac{FgN^2}{4\pi^2 f^2 l} = 7 \text{ м.}$$

**4.25.** Назначение очков — располагать изображение предмета, даваемое очками, там, где хозяину очков удобно его наблюдать. В нашем случае читатель держит книгу на расстоянии  $d = 0,3$  м от глаза, а изображение должно получиться вдали, «на бесконечности», потому что только удалённые предметы видны хозяину глаза с искусственным хрусталиком, если он без очков. Это означает, что книга должна находиться практически в фокальной плоскости линзы очков, то есть её фокусное расстояние составляет  $F \approx d = 0,3$  м. Оптическая сила очков при этом равна  $D = 1/F \approx 3,3$  дптр. Большая точность в оценочном расчёте неуместна. Следовательно, для того, чтобы читать книгу, владельцу искусственного хрусталика можно взять очки с оптической силой  $+3$  или  $+3,5$  диоптрии. Учёт расстояния между глазом и линзой (примерно 1 см) практически не меняет результат.

**4.26\*.** Близорукий человек носит очки с рассеивающими линзами. В соответствии с формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где  $F = 1/D < 0$  — фокусное расстояние линзы,  $a \leq \infty$  — расстояние от линзы до чётко видимого предмета,  $b < 0$  — расстояние от линзы до изображения. Поскольку  $1/a \geq 0$ , то  $\frac{1}{b} = \frac{1}{F} - \frac{1}{a} \leq \frac{1}{F}$ , откуда  $b \geq F$  и, следовательно,  $|b| \leq |F|$ . Таким образом, близорукий человек в очках видит предмет чётко, если его изображение удалено от глаза не более, чем на  $|F| + d$ , где  $d$  — расстояние от глаза до линзы очков, когда они надеты нормально (см. рис. 4.26).

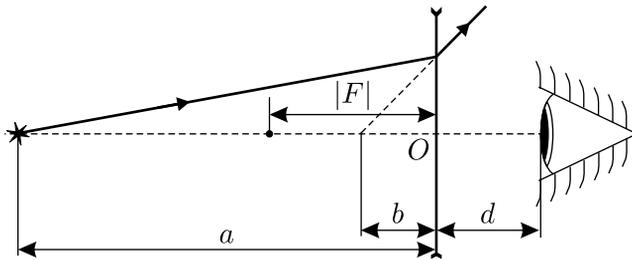


Рис. 4.26.

Для того, чтобы человек видел предмет чётко, когда очки сползут на расстояние  $l$  дальше от глаз, изображение предмета по-прежнему должно быть удалено от глаза не более чем на  $|F| + d$ , а от плоскости линзы — не более, чем на  $|F| - l$ . Таким образом,  $|b| \leq |F| - l$ , откуда

$b \geq F + l$  и  $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{F + l}$ . Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{F} - \frac{1}{b} \geq \frac{1}{F} - \frac{1}{F + l} = \frac{l}{F(F + l)}.$$

Отсюда

$$a \leq \frac{F(F + l)}{l} = \frac{1 + lD}{lD^2} = 0,9 \text{ м.}$$

**4.27\***. Пусть фокусное расстояние линзы  $F$ , длина палочки  $l$ , длина её изображения  $L$ , причём  $l \ll a$ ,  $L \ll b$ , где  $b$  — расстояние от изображения палочки до линзы. Тогда в соответствии с формулой тонкой линзы, для положений одного из концов палочки и его изображения имеем:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Если второй конец палочки находится ближе к линзе, то можно записать:

$$\frac{1}{a - l} + \frac{1}{b + L} = \frac{1}{F}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - (l/a)} + \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + (L/b)} = \frac{1}{F}.$$

Поскольку  $1/(1 + x) \approx 1 - x$  при  $x \ll 1$ , то последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\frac{1}{a} \left(1 + \frac{l}{a}\right) + \frac{1}{b} \left(1 - \frac{L}{b}\right) \approx \frac{1}{F}. \quad (2)$$

Вычитая из (2) соотношение (1), получаем:  $\frac{l}{a^2} - \frac{L}{b^2} \approx 0$ , откуда продольное увеличение линзы  $k = \frac{L}{l} = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ , и  $b = \sqrt{ka}$ . Подставляя это выражение для  $b$  в соотношение (1), получаем

$$F = \frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{k} + 1}.$$

При новых расстояниях от палочки до линзы  $a_1 = a + \Delta a$ , от изображения до линзы  $b_1 = \frac{a_1 F}{a_1 - F}$  и новой длине изображения  $L_1$  для нового коэффициента увеличения имеем:

$$k_1 = \frac{L_1}{l} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{F}{a_1 - F}\right)^2 =$$

$$= \left( \frac{\frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{k} + 1}}{a + \Delta a - \frac{\sqrt{ka}}{\sqrt{k} + 1}} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{ka}}{(a + \Delta a)(\sqrt{k} + 1) - \sqrt{ka}} \right)^2.$$

Отсюда искомое отношение длин изображений палочки равно

$$n = \frac{L_1}{L} = \frac{k_1}{k} = \left( \frac{a}{(a + \Delta a)(\sqrt{k} + 1) - \sqrt{ka}} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\left( \left( 1 + \frac{\Delta a}{a} \right) (\sqrt{k} + 1) - \sqrt{k} \right)^2} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\Delta a}{a} (\sqrt{k} + 1) \right)^2} = \frac{1}{4},$$

то есть длина изображения уменьшится в 4 раза.

**4.28\***. Основная трудность, возникающая при решении этой задачи, связана с тем, что свет может многократно отражаться от поверхностей пластинок внутри стопки. Поэтому для того, чтобы найти ответ, нужно получить рекуррентную формулу, показывающую, как изменяется коэффициент пропускания стопки из  $n$  пластинок при добавлении к ней ещё одной пластинки.

Пусть стопка из  $n$  пластинок имеет коэффициент пропускания  $T_n$ . Добавим к ней ещё одну пластинку, получив, таким образом, «составную» стопку из  $n + 1$  пластинок. Пусть на полученную стопку падает волна с интенсивностью  $a$ . Обозначим интенсивности волн, распространяющихся снаружи и внутри нашей «составной» стопки, так, как показано на рисунке 4.28. Учитывая, что  $R_n = 1 - T_n$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_2 &= T_n a_1; \\ b_1 &= (1 - T_n) a_1; \\ a_1 &= T_n a + (1 - T_n) b_1; \\ b_2 &= (1 - T_n) a + T_n b_1. \end{aligned}$$

Решая её, найдём:

$$\frac{a}{a_2} = \frac{1}{T_{n+1}} = \frac{1}{T_n} + \frac{1 - T_n}{T_n}.$$

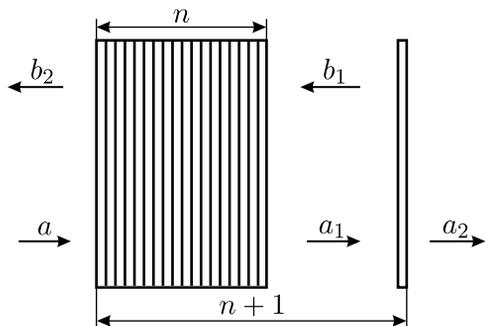


Рис. 4.28.

Это и есть искомая рекуррентная формула. Из неё можно получить явную зависимость коэффициента пропускания  $T_n$  от числа пластинок  $n$  в стопке. Действительно,

если пластинок в стопке всего две ( $n + 1 = 2$ ), то

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T} + \frac{1 - T}{T}.$$

Далее, при  $n + 1 = 3$ :

$$\frac{1}{T_3} = \frac{1}{T_2} + \frac{1 - T}{T} = \frac{1}{T} + 2\frac{1 - T}{T}.$$

Продолжая аналогичные выкладки, для стопки из  $n$  пластинок получим:

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{T} + (n - 1)\frac{1 - T}{T} = \frac{T + n(1 - T)}{T},$$

откуда

$$T_n = \frac{T}{T + n(1 - T)} = \frac{T}{T + nR} = \frac{0,92}{0,92 + 0,08n}.$$

**4.29\***. Обозначим интенсивность света, падающего на систему, через  $I$ . При падении на пластину часть света будет отражаться, причём интенсивность отражённого света будет равна  $RI$ . Интенсивность света, прошедшего через пластину и отразившегося от зеркала, будет равна  $TI$  (здесь используется то обстоятельство, что зеркало отражает весь падающий на него свет). Этот отражённый поток падает на пластину с другой стороны. При этом часть излучения проходит через пластину (интенсивность прошедшего излучения равна  $T^2I$ ), а часть отражается от пластины и возвращается к зеркалу (интенсивность этой части излучения равна  $RTI$ ). После второго отражения от зеркала интенсивность излучения, прошедшего через пластину, составит  $RT^2I$ . Продолжая рассуждения, аналогично найдём, что после  $k$  отражений от зеркала интенсивность выходящего из системы света равна  $R^{k-1}T^2I$ . Таким образом, полная интенсивность света, отразившегося от зеркала и пластины, равна сумме бесконечной геометрической прогрессии:

$$I_0 = RI + T^2I + RT^2I + R^2T^2I + \dots + R^{k-1}T^2I + \dots = I \left( R + \frac{T^2}{1 - R} \right).$$

Отметим, что, поскольку

$$R + A + T = 1,$$

то ответ может быть выражен и по-другому.

**4.30.** Из приведённого в условии графика ясно, что стенки баллона имеют толщину 1 см, а внешний диаметр баллона  $d = 4$  см. Для того, чтобы получить ответ, достаточно сравнить интенсивность излучения на середине баллона при  $x = 2$  см (в этом месте луч проходит через содержимое баллона и через две его стенки, суммарная толщина которых 2 см) и там, где при проходе сквозь стенку толщина металла на пути луча также равна 2 см. Если они одинаковы, то баллон пуст.

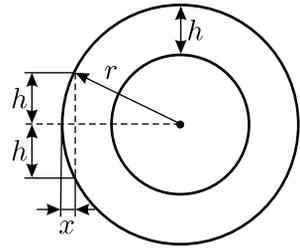


Рис. 4.30.

Из геометрических соображений (см. рис. 4.30) следует:

$$r^2 = h^2 + (r - x)^2,$$

где  $r = d/2 = 2$  см,  $h = 1$  см. Отсюда

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,28 \text{ см}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,72 \text{ см}.$$

Из графика видно, что при  $x = 2$  см интенсивность излучения составляет около 0,4 ед., а при  $x = x_1$  и при  $x = x_2$  интенсивность равна приблизительно 0,5 ед., то есть несколько больше. Значит, в баллоне есть содержимое, поглощающее рентгеновские лучи.

**4.31\***. Луч, попадающий в точку  $A$  на внутренней поверхности сферы, отражается и попадает затем в точку  $B$  на сфере (или её продолжении) — см. рисунок 4.31. Обозначим  $\angle AOO' = \beta$ . Из геометрических построений, сделанных с учётом закона отражения света, вытекают следующие соотношения:  $\angle OAA'' = \angle OAB = \beta$ ;  $\angle AOB = \pi - 2\beta$ . Следовательно,  $\angle O'OB = \pi - 3\beta$ .

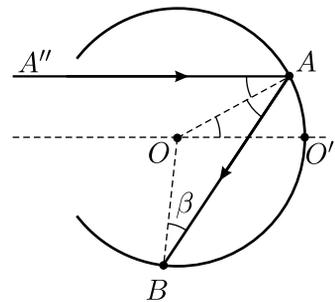


Рис. 4.31.

Луч света после отражения выйдет из сферы, если  $\angle O'OB > \pi - \alpha$ , то есть если  $\beta < \alpha/3$ . Отметим, что при тупых углах  $\alpha$  возможны случаи, когда все падающие лучи после отражения выйдут обратно. Такое произойдёт при  $\alpha/3 > \pi - \alpha$ , то есть при  $\alpha > 3\pi/4$ .

Искомая доля мощности пучка, вышедшего из сферы, равна отношению площадей, на которые приходятся пучок, претерпевающий отражение, и падающий пучок. В результате получаем:

$$n = \left( \frac{\sin(\alpha/3)}{\sin \alpha} \right)^2.$$

Этот ответ справедлив при  $\alpha \leq 3\pi/4$ . При  $\alpha > 3\pi/4$  весь отражённый свет выйдет из сферы, то есть  $n = 1$ .

**4.32\***. Обозначим через  $h$  высоту трубы, через  $r$  — радиус её основания. В первом случае (когда зеркальная сторона трубы ориентирована вниз) в фотоэлемент попадут лучи из областей, заштрихованных на рисунке 4.32.1, а во втором случае (когда труба перевернута) — из областей, заштрихованных на рисунке 4.32.2. По условию  $h \gg r$ , поэтому все углы падения света на фотоэлемент маленькие.

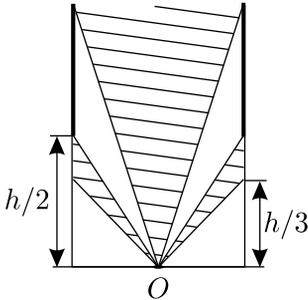


Рис. 4.32.1.

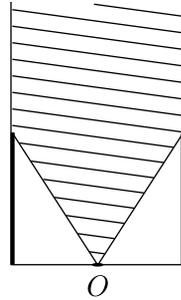


Рис. 4.32.2.

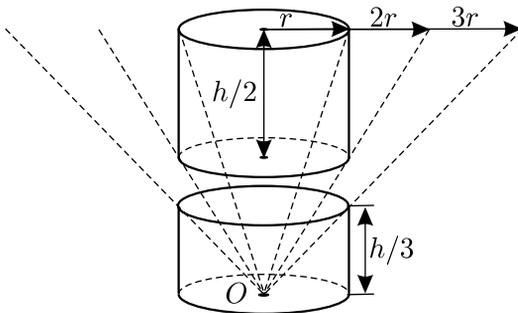


Рис. 4.32.3.

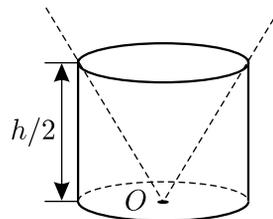


Рис. 4.32.4.

Ввиду изотропности освещения потоки энергии, переносимые лучами света, падающими на зеркальные поверхности с разных сторон под заданными углами, одинаковы, если лучи по пути к фотоэлементу не попадают на препятствия. Поэтому для расчёта освещённости фотоэлемента до и после переворачивания трубы оптические системы, изображённые на рисунках 4.32.1 и 4.32.2, можно заменить на эквивалентные оптические системы, показанные на рисунке 4.32.3 и рисунке 4.32.4 соответственно (части трубы, контуры которых изображены на этих схемах, полностью поглощают свет).

В первом случае в фотоэлемент (точка  $O$ ) попадёт световой поток из телесного угла

$$\Omega_1 \approx \left( \frac{\pi r^2}{(h/3)^2} - \frac{\pi r^2}{(h/2)^2} \right) + \frac{\pi r^2}{h^2} = \frac{6\pi r^2}{h^2},$$

а во втором случае — из телесного угла

$$\Omega_2 \approx \frac{\pi r^2}{(h/2)^2} = \frac{4\pi r^2}{h^2}.$$

При записи этих формул учтено, что  $h \gg r$ , то есть  $\Omega_1 \ll 1$  и  $\Omega_2 \ll 1$ .

Величина освещённости пропорциональна телесному углу, из которого падает свет. Поэтому отношение освещённостей во втором и в первом случаях равно  $\Omega_2/\Omega_1 = 2/3$ . Отсюда

$$E = \frac{2}{3} E_0.$$

**4.33\*.** При вращении жидкости вместе со стаканом её поверхность искривляется (см. рис. 4.33), вследствие чего параллельный пучок света после преломления становится расходящимся. Рассмотрим небольшой элемент жидкости, находящийся на её поверхности на расстоянии  $r$  от оси вращения  $O_1O$ . На него действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и суммарная сила давления  $\vec{N}$  со стороны остальной жидкости. Эти силы обеспечивают равномерное вращение рассматриваемого элемента по окружности с угловой скоростью  $\omega$ , сообщая ему центростремительное ускорение. Уравнения движения этого элемента в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси имеют вид:

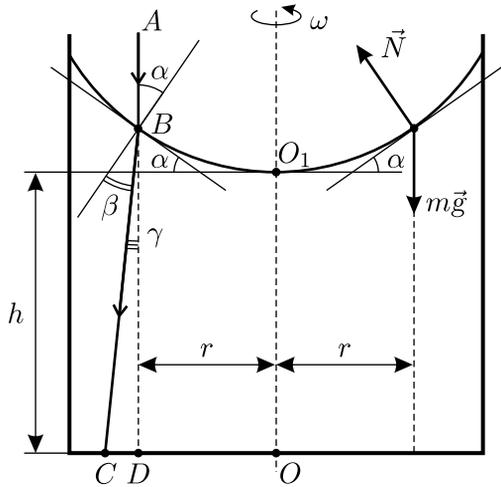


Рис. 4.33.

$$m\omega^2 r = N \sin \alpha, \quad mg = N \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол наклона к горизонту поверхности жидкости в данной точке. Отсюда  $\operatorname{tg} \alpha = \omega^2 r/g$ .

Луч света, идущий вдоль оси вращения  $O_1O$ , не преломляется. Рассмотрим ход луча  $ABC$ , преломляющегося в точке  $B$  на небольшом расстоянии  $r$  от оси вращения. В соответствии с законом преломления света  $\sin \alpha = n \sin \beta$ . Углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma = \alpha - \beta$  можно считать малыми, так что  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ ;  $\beta \approx \sin \beta$ ,  $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma$ . Отсюда

$$\alpha \approx \frac{\omega^2 r}{g},$$

и

$$\gamma = \alpha - \beta \approx \alpha - \frac{\alpha}{n} = \frac{\omega^2 r}{g} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Далее найдём расстояние  $OC$  от оси вращения до точки падения преломлённого луча на дно стакана:

$$OC = OD + DC \approx r + \gamma h = r \left( 1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n} \right).$$

Пока жидкость была не раскручена, все лучи, идущие на расстоянии от оси  $O_1O$ , меньшем  $r$ , не преломлялись и попадали в круг радиуса  $r$  на дне, то есть энергия этого пучка распределялась по площади  $S_0 = \pi r^2$ . После раскручивания жидкости эти же лучи попадут в круг на дне радиусом  $OC$ , то есть энергия пучка распределится по площади

$$S_1 = \pi(OC)^2 = \pi r^2 \left( 1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n} \right)^2.$$

Поэтому интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана, изменится в

$$k = \frac{S_0}{S_1} = \left( 1 + \frac{\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n} \right)^{-2} = (1 + 0,01)^{-2} \approx 0,98 \text{ раз,}$$

то есть уменьшится на

$$\delta \approx \frac{2\omega^2 h}{g} \cdot \frac{n-1}{n} = 2\%.$$

**4.34\***. Свечу  $S$ , как и её отражение  $S'$ , при наблюдении с большого расстояния можно считать точечным источником, равномерно излучающим свет во все стороны. Лучи от свечки, находящейся на расстоянии  $r$  от человека, расходятся под углом  $\Delta\alpha \approx d/r$ , где  $d$  — диаметр зрачка глаза. Очевидно, что лучи, испущенные свечкой в пределах такого угла, после отражения от шарика будут расходиться уже под

большим углом  $\Delta\varphi$ , и все попадут в глаз (то есть в пределы зрачка) на гораздо меньшем расстоянии  $r_1$  от свечки:  $d = r\Delta\alpha = r_1\Delta\varphi$ .

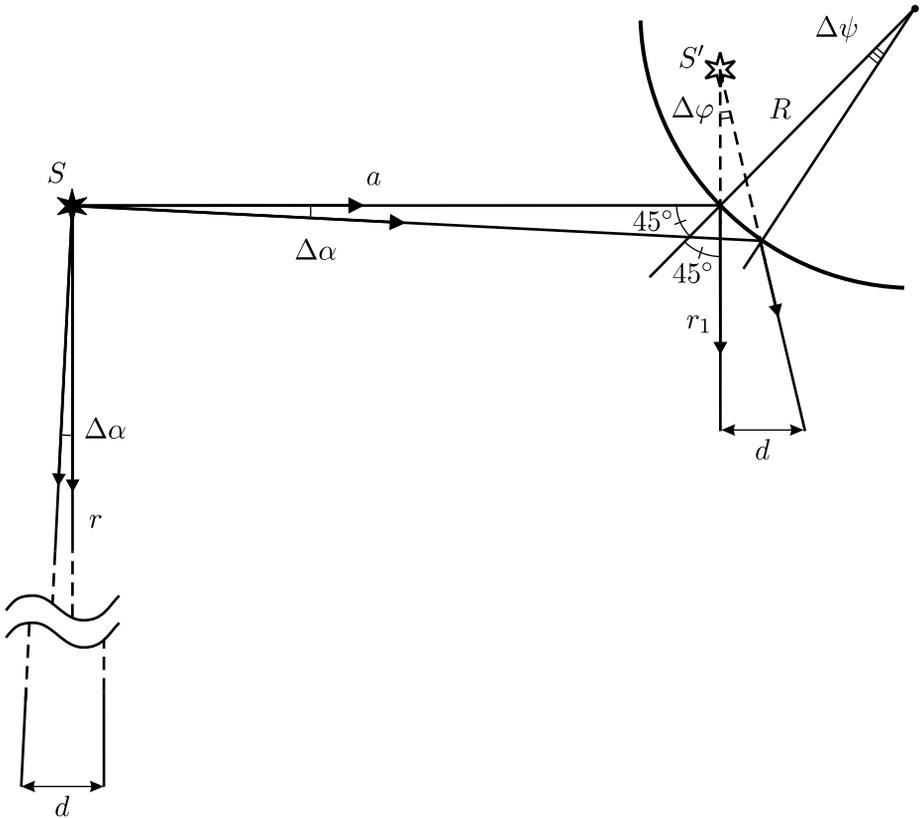


Рис. 4.34.

Изобразим ход испущенных свечкой лучей при отражении от зеркального шара (см. рис. 4.34). Обозначим радиус шарика через  $R = D/2$ . Для того, чтобы путник увидел отражение свечи в шаре, угол падения лучей на его зеркальную поверхность должен быть близок к  $45^\circ$ . Поэтому расстояние между точками падения двух лучей, расходящихся из свечки под углом  $\Delta\alpha$ , на поверхности шарика будет равно  $\frac{a\Delta\alpha}{\cos 45^\circ} = R\Delta\psi$ , где  $\Delta\psi$  — угол поворота отражающей поверхности между этими точками.

Поэтому  $\Delta\psi = \frac{\sqrt{2}a}{R}\Delta\alpha$ . Известно, что при повороте луча, падающего на плоское зеркало, на угол  $\Delta\alpha$ , отражённый луч поворачивается также на  $\Delta\alpha$ , а при повороте самого зеркала

на угол  $\Delta\psi$  — луч поворачивается на угол  $2\Delta\psi$ . Поэтому

$$\Delta\varphi = 2\Delta\psi + \Delta\alpha = \left( \frac{2\sqrt{2}a}{R} + 1 \right) \Delta\alpha,$$

и

$$r_1 = \frac{\Delta\alpha}{\Delta\varphi} r = \frac{r}{\frac{2\sqrt{2}a}{R} + 1} = \frac{r}{\frac{4\sqrt{2}a}{D} + 1} \approx 48,6 \text{ м.}$$

Поскольку  $4\sqrt{2}a/D \approx 100 \gg 1$ , ответ можно записать и так:

$$r_1 \approx \frac{rD}{4\sqrt{2}a} \approx 50 \text{ м.}$$

Полученную нами оценку можно немного уточнить. Следует отметить, что излученный свечкой свет отражается от искривлённой поверхности, наклонённой под большим углом ( $\sim 45^\circ$ ) к падающему пучку. Поэтому лучи света, идущие от свечки в пределах прямого кругового конуса с очень малым углом раствора  $\Delta\alpha$ , после отражения от шара будут идти внутри конической поверхности практически эллиптического сечения, причём вертикальная полуось эллипса в  $\sqrt{2}$  раз меньше горизонтальной. Из-за этого в момент, когда человек будет находиться на определённом нами расстоянии  $r_1$  от шара, в его зрачок будет попадать в  $\sqrt{2}$  раз больше лучистой энергии, чем было испущено свечкой в пределах угла  $\Delta\alpha$ . Следовательно, на самом деле человек увидит отражение свечки с несколько большего расстояния, чем  $r_1$ , а именно, с расстояния  $\sqrt{2}r_1 \approx 1,19r_1 \approx 58 \text{ м}$ .

**4.35\***. Будем считать малыми размеры экрана телевизора по сравнению с расстоянием  $r$  от него до лампы. Паразитная освещённость  $E$  экрана обратно пропорциональна  $r^2$  и пропорциональна косинусу угла падения  $\alpha$  света лампы на экран. Поскольку  $r = H/\sin \alpha$ , где  $H$  — высота лампы над столом (см. рис. 4.35), то

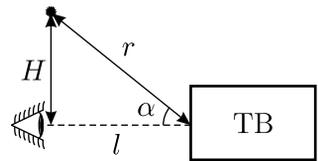


Рис. 4.35.

$$E \sim \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{H^2} \sim (1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = x - x^3,$$

где введено обозначение  $x = \cos \alpha$ . Максимум функции  $f(x) = x - x^3$  можно найти из уравнения

$$\frac{df}{dx} = 1 - 3x^2 = 0,$$

откуда  $x_{\max} = \cos \alpha_{\max} = 1/\sqrt{3}$ . Таким образом, паразитная засветка максимальна, когда свет лампы падает на экран телевизора под углом

$$\alpha_{\max} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54^\circ,$$

а расстояние до экрана равно  $l = H \operatorname{ctg} \alpha_{\max} = H/\sqrt{2}$ .

**4.36.** Поскольку расстояния от громкоговорителей до микрофона по условию много больше расстояния между соседними громкоговорителями  $l$ , то сдвиг фаз между звуковыми волнами, приходящими к микрофону  $M$  от двух соседних громкоговорителей, равен (см. рис. 4.36)

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l \cos \alpha}{\lambda},$$

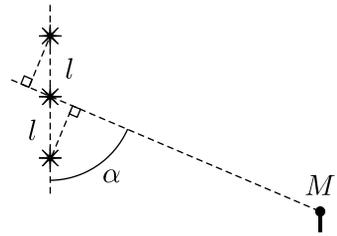


Рис. 4.36.

и можно считать, что амплитуды  $A$  волн, приходящих к микрофону от всех трёх громкоговорителей, одинаковы. Тогда звуковые колебания в точке  $M$  происходят по закону:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Delta\varphi) + A \cos \omega t + A \cos(\omega t - \Delta\varphi) = A \cos \omega t (1 + 2 \cos \Delta\varphi).$$

Таким образом, микрофон не регистрирует звука ( $x(t) = 0$ ) при  $\cos \Delta\varphi = -1/2$ , то есть  $\Delta\varphi_{\min} = 2\pi/3$ . Это возможно при минимальном расстоянии между громкоговорителями

$$l_{\min} = \frac{\lambda}{3 \cos \alpha} = 0,5 \text{ м.}$$

**4.37\*.** Разность фаз набегаёт за счёт двух эффектов.

(а) Благодаря эффекту Доплера (см. решение задачи 4.3.) частота световой волны, идущей в направлении вращения столика, увеличивается, а частота световой волны, идущей в противоположном направлении — уменьшается. Поскольку угол между направлением светового луча и скоростью источника равен  $\pi/3$ , для изменения частоты волны, идущей по направлению движения источника имеем:

$$\Delta\omega_1 = \omega \frac{v}{c} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\omega v}{2c}.$$

Здесь  $v = \Omega R$  — скорость источника,  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота световой волны. Аналогично для световой волны, идущей против направления движения источника, получаем:

$$\Delta\omega_2 = -\frac{\omega v}{2c}.$$

Таким образом, за счёт эффекта Доплера набегают разность фаз

$$\Delta\varphi_1 = (\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2)t = \omega \frac{v}{c} t,$$

где  $t = 3R\sqrt{3}/c$  — время, за которое свет доходит от источника к приёмнику.

(б) Благодаря вращению системы длины путей, которые проходят световые волны, различны (см. рис. 4.37). Обозначим угловое расстояние между источником «И» во время испускания света и приёмником «П» во время приёма световой волны через  $\alpha$ . Кроме того, введём вспомогательные углы  $\beta = \frac{2\pi - \alpha}{3}$  и  $\gamma = \frac{2\pi + \alpha}{3}$ . Очевидно, что  $\alpha \approx vt/R \ll 1$ . Длина пути для волны, испущенной в направлении вращения, равна

$$S_1 = 3 \cdot 2R \sin \frac{\gamma}{2} = 6R \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{6} \right).$$

Для волны, идущей в противоположном направлении, длина пути равна

$$S_2 = 3 \cdot 2R \sin \frac{\beta}{2} = 6R \sin \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{6} \right).$$

Поэтому разность длин путей для первой и второй волн равна

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 6R \sin \frac{\alpha}{6} \approx R\alpha \approx vt.$$

За счёт этого набегают дополнительная разность фаз

$$\Delta\varphi_2 = \omega \frac{\Delta S}{c} \approx \omega \frac{v}{c} t.$$

Обе разности фаз  $\Delta\varphi_1$  и  $\Delta\varphi_2$  имеют одинаковый знак и поэтому складываются:

$$\Delta\varphi_{\text{sum}} = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = 2\omega \frac{v}{c} t = \frac{4\pi f \Omega R}{c} \cdot \frac{3R\sqrt{3}}{c} = \frac{12\pi\sqrt{3} \cdot f \Omega R^2}{c^2}.$$

**4.38.** Так как радиус экрана много больше расстояния между соседними интерференционными полосами, то его участок вблизи точки  $A$ , на котором располагаются эти полосы, можно считать плоским. Круговая частота колебаний, соответствующих волне с длиной  $\lambda$ , распространяющейся со скоростью  $c$ , равна  $\omega = 2\pi c/\lambda$ .

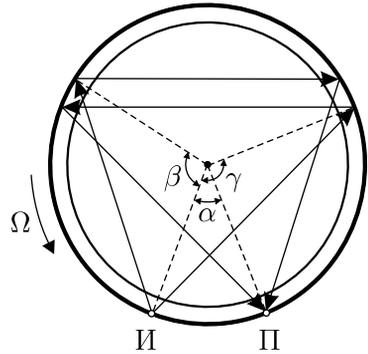


Рис. 4.37.

Угол, который образует направление волны, падающей вдоль радиуса  $BO$  (см. рис. 4.38), с рассматриваемой частью экрана, равен  $\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Для второй волны соответствующий угол равен  $\beta_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi - \alpha$ . Расстояние  $\delta x$  между двумя соседними максимумами на экране находится из условия изменения разности фаз обеих волн на  $2\pi$ :

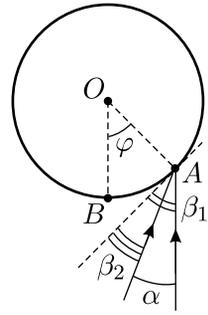


Рис. 4.38.

$$2\pi = \frac{\omega}{c} \cdot \delta x (\cos \beta_1 - \cos \beta_2).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{2\pi c}{\omega} \cdot \frac{1}{\cos \beta_1 - \cos \beta_2} = \frac{\pi c}{\omega \sin \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} \sin \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}} = \\ &= \frac{\pi c}{\omega \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi + \frac{\alpha}{2} \right)}. \end{aligned}$$

**4.39.** Так как нам требуется получить оценку, будем считать, что в одном байте содержится 10 бит, и пренебрежём площадью центральной части компакт-диска, где нет записи. Тогда получается, что на площади  $S = \pi D^2/4$  записано  $N = 10W$  бит информации, а значит, на поверхности диска имеется  $N$  углублений. Таким образом, на одно углубление приходится площадь  $\sim \frac{S}{10W}$ . При максимальной плотности записи размер углубления должен быть порядка длины волны, поскольку в противном случае интерференция света, одновременно отражающегося от соседних углублений, сделает чтение информации с диска невозможным (точнее говоря, технически существенно более сложным). Поэтому

$$\lambda_{\max} \sim \sqrt{\frac{S}{10W}} = \sqrt{\frac{\pi D^2}{40W}} \approx 1,3 \text{ мкм.}$$

Рассуждая аналогично, придём к выводу, что при использовании лазера на нитриде галлия с длиной волны  $\lambda = 0,36$  мкм на компакт-диск можно было бы записать информацию объёмом

$$W_1 = \frac{\pi D^2}{40\lambda^2} \sim 9 \text{ Гбайт.}$$

что составляет примерно 16 часов стандартной звуковой записи.

**4.40.** Для оценки будем считать и Солнце, и стакан абсолютно чёрными телами. Они излучают по одному и тому же закону:  $N = \sigma T^4 S$ , где  $N$  — полная излучаемая мощность,  $S$  — площадь поверхности тела, а  $\sigma$  — некоторая постоянная. Вычислим её по данным, приведённым в условии для Солнца и Земли:

$$w = \sigma T_{\odot}^4 \cdot \frac{4\pi R_{\odot}^2}{4\pi d^2},$$

где радиус Солнца  $R_{\odot} \approx d \cdot \alpha/2$ . Отсюда

$$\sigma \approx 6,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}.$$

Мощность, теряемая стаканом за счёт излучения, равна

$$N_0 = \sigma(T^4 - T_0^4)S_0,$$

где  $S_0 \sim 150 \text{ см}^2$  — площадь поверхности стакана,  $T_0 \approx 20 \text{ }^\circ\text{C} = 293 \text{ К}$  — температура окружающей среды (её необходимо учитывать!),  $T \approx 90 \text{ }^\circ\text{C} = 383 \text{ К}$  — средняя температура остывающего стакана. Отсюда находим, что  $N_0 \approx 14 \text{ Вт}$ .

Считая теряемую стаканом мощность приблизительно постоянной, можно оценить время  $\tau$  остывания  $m = 200 \text{ г}$  воды на  $\Delta t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , используя уравнение теплового баланса:  $cm\Delta t = N_0\tau$ , где удельная теплоёмкость воды  $c = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ . С учётом этого получаем  $\tau \approx 1200 \text{ с} \approx 20 \text{ мин}$ .

На самом деле стакан чая остывает значительно быстрее. Следовательно, вклад теплового излучения в процесс остывания воды не слишком велик по сравнению со вкладами испарения и теплопроводности. Однако при изготовлении термосов, когда потери тепла из-за испарения и теплопроводности сведены к минимуму (жидкость помещают в закрытую колбу с вакуумной рубашкой), принимают специальные меры и для уменьшения потерь на излучение — колбу серебрят. При этом хорошо отражающая и слабо поглощающая тепловое излучение плёнка серебра на стенках стеклянной колбы также слабо испускает это излучение, поэтому содержимое термоса может долго оставаться горячим или холодным. Для хранения жидкого гелия используют сосуды Дьюара, у которых между стенками откачанной оболочки имеется многослойная «экранно-вакуумная» изоляция из металлизированной полимерной плёнки, позволяющая снизить вклад излучения в общий теплоподвод к содержимому сосуда во много раз.

**4.41.** Будем считать, что и астероид, и Солнце излучают и поглощают тепловое излучение, как абсолютно чёрные тела. Пусть радиус

астероида  $r$ , радиус Солнца  $R$ , а расстояние от астероида до Солнца  $L$ . Угловой диаметр Солнца равен  $\alpha = 2R/L$ . На астероид попадает доля тепла, излучаемого Солнцем, равная  $\frac{\pi r^2}{4\pi L^2}$ , что соответствует тепловой мощности, получаемой астероидом от Солнца,

$$N = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_0^4 \cdot \frac{r^2}{4L^2}.$$

Такую же мощность должен излучать и сам астероид, причём для оценки будем считать, что его поверхность из-за быстрого вращения и хорошей теплопроводности равномерно нагрета до температуры  $T$ . Поэтому  $N = 4\pi r^2 \sigma T^4$ . В результате получаем:

$$T^4 = T_0^4 \cdot \frac{R^2}{4L^2} = T_0^4 \cdot \frac{\alpha^2}{16}.$$

Отсюда

$$T = \frac{T_0 \sqrt{\alpha}}{2} \approx 500 \text{ К.}$$

**4.42\***. Свет, падая на шарик с одной стороны, нагревает её (вообще говоря, неравномерно). Примем, что температура освещённой стороны повышается на некоторую максимальную величину  $\Delta T$ , причём  $\Delta T \ll T_0$ . Шарик тепла не проводит, поэтому поступающая к нему энергия идёт, во-первых, на излучение, а во-вторых, на обмен теплом с окружающей газом. Оценим вклад каждого из этих видов теплоотдачи в энергообмен шарика с окружающей средой.

Мощность, рассеиваемая при излучении с единицы поверхности шарика, составляет

$$W_1 \approx \sigma(T_0 + \Delta T)^4 - \sigma T_0^4 \approx 4\sigma T_0^3 \Delta T$$

(в последнем выражении мы пренебрегли малыми слагаемыми, пропорциональными второй и более высоким степеням  $\Delta T$ ).

Если с единицей поверхности шарика в единицу времени сталкивается  $N$  молекул газа, и при каждом ударе молекуле отдаётся энергия  $\Delta W$ , то всего в окружающую среду таким образом отдаётся мощность  $W_2 = N\Delta W$ .

Для оценки будем считать, что к поверхности шарика движется  $1/6$  часть всех молекул аргона, имеющих одинаковые скорости  $v = \sqrt{\frac{3RT_0}{\mu}}$ . Поскольку концентрация молекул в сосуде составляет

$n = \frac{p_0}{kT_0}$ , и  $N = \frac{1}{6}nv$ , то:

$$\Delta W \approx \frac{3}{2}k(T_0 + \Delta T) - \frac{3}{2}kT_0 = \frac{3}{2}k\Delta T,$$

$$W_2 = \frac{1}{6}nv\Delta W \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{p_0 v \Delta T}{T_0}.$$

Заметим, что обе величины  $W_1$  и  $W_2$  пропорциональны  $\Delta T$ , поэтому их отношение одинаково для всех участков нагретой поверхности шарика:

$$\frac{W_2}{W_1} \approx \frac{p_0 \sqrt{3RT_0/\mu}}{16\sigma T_0^4} \approx 0,006.$$

Таким образом,  $W_2 \ll W_1$ , то есть можно пренебречь теплообменом шарика с окружающим его газом и считать, что вся поступающая к единице поверхности шарика мощность  $W_{\text{пост}}$  в дальнейшем рассеивается путём переизлучения. Поэтому для оценки величины изменения температуры нагретой стороны шарика там, где свет падает перпендикулярно его поверхности, имеем:

$$\Delta T \approx \frac{W_{\text{пост}}}{4\sigma T_0^3} = \frac{w_0}{4\sigma T_0^3} \approx 17,5 \text{ К}.$$

Остаётся выяснить, под действием какой силы при освещении горизонтальным пучком света шарик отклоняется от положения равновесия. Вначале оценим силу светового давления на шарик, действующую в горизонтальном направлении и возникающую из-за поглощения импульса падающего пучка и дальнейшего изотропного переизлучения света:

$$F_{\text{изл}} \sim \frac{3}{2}\pi r^2 \frac{w_0}{c} \approx 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Н}$$

(здесь  $c$  — скорость света). Кроме этой силы, надо учесть взаимодействие неравномерно нагретого шарика с окружающим его разреженным газом — так называемую «радиометрическую» силу. Давление газа на освещённую (и поэтому более нагретую) часть шарика больше, чем на неосвещённую, так как молекулы при столкновении с освещённой половиной приобретают бóльшую энергию, а значит, и уносят больший импульс. Величину добавочного давления на освещённую часть шарика можно оценить, приняв, что в среднем температура нагретой стороны равна  $T_0 + (\Delta T/2)$ . Тогда:

$$\Delta p \approx nk \left( T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right) - p_0 = \frac{nk\Delta T}{2} = \frac{p_0 \Delta T}{2T_0}.$$

Следовательно, действующая на шарик средняя сила давления со стороны газа, направленная горизонтально, равна

$$F_d \approx \Delta p \pi r^2 \approx \frac{p_0 \Delta T \pi r^2}{2T_0} \approx 9,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \gg F_{\text{изл}},$$

так что силой светового давления можно пренебречь по сравнению с радиометрической силой.

В вертикальном направлении на шарик действует сила тяжести:

$$F_T = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g \approx 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

Под действием этих двух сил, уравновешиваемых силой натяжения нити, шарик отклоняется от исходного равновесного положения так, что нить составляет с вертикалью некоторый угол  $\alpha$ . Поскольку  $F_d \ll F_T$ , то  $\alpha \approx F_d/F_T$ , и искомое смещение шарика от положения равновесия:

$$\Delta x \approx l \alpha \approx \frac{3p_0 l \Delta T}{8gr \rho T_0} = \frac{3p_0 l w_0}{32gr \rho \sigma T_0^4} \approx 0,2 \text{ мм}.$$

**4.43.** Для того, чтобы лампа взлетела, нужно, чтобы действующая на неё реактивная сила была больше веса лампы  $mg$ . Каждый фотон с частотой  $\omega$  уносит импульс  $\hbar\omega/c$ . Следовательно, если за время  $\Delta t$  испускается  $\Delta n$  фотонов, то уносимый ими за единицу времени импульс равен  $\frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t}$ . Таким образом, лампа взлетит, если

$$\frac{\hbar\omega}{c} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t} > mg.$$

При этом мощность лампы  $N$  должна удовлетворять условию

$$N = \hbar\omega \cdot \frac{\Delta n}{\Delta t} > mgc \approx 3 \cdot 10^9 \text{ Вт} = 3 \text{ млн кВт},$$

что составляет около 50% максимальной мощности Красноярской ГЭС!

**4.44\*.** Рассмотрим отражение фотона от движущегося поршня, причем будем считать поршень нерелятивистской частицей массой  $m$ . Пусть  $v$  и  $\omega$  — скорость поршня и частота фотона до столкновения,  $v'$  и  $\omega'$  — после столкновения. Направим ось  $X$  в сторону движения поршня и запишем законы сохранения импульса и энергии в процессе столкновения. Учитывая, что энергия фотона даётся формулой  $E_f = \hbar\omega$ , а импульс — формулой  $p_f = \frac{\hbar\omega}{c}$ , получим:

$$mv - \frac{\hbar\omega}{c} = mv' + \frac{\hbar\omega'}{c}, \quad \frac{mv^2}{2} + \hbar\omega = \frac{mv'^2}{2} + \hbar\omega'.$$

Так как  $\frac{\hbar\omega}{c} \ll mv$ , то  $v \approx v'$ ,  $\omega \approx \omega'$ , и

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega' + \omega} = \frac{v + v'}{2c} \approx \frac{v}{c},$$

откуда для изменения частоты фотона  $\Delta\omega = \omega' - \omega$  имеем:

$$\Delta\omega \approx \frac{2v}{c}\omega.$$

Если в некоторый момент времени  $t$  расстояние между поршнем и дном цилиндра равно  $L$ , то интервал между двумя последовательными столкновениями фотона с поршнем равен  $\Delta t = \frac{2L}{c}$ , а изменение расстояния между поршнем и дном за время  $\Delta t$  составляет

$$\Delta L = -v\Delta t = -\frac{2v}{c}L.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta L}{L} = -\frac{2v}{c} = -\frac{\Delta\omega}{\omega},$$

то есть  $\omega\Delta L + \Delta\omega L = 0$ . Отсюда  $\Delta(\omega L) = 0$ , а значит,  $\omega L = \text{const}$ . Полученное соотношение представляет собой уравнение адиабаты для одномерного «однофотонного газа».

Если объём цилиндра уменьшается в  $k$  раз, то и его длина уменьшается во столько же раз. Значит, в соответствии с уравнением адиабаты, частота фотона должна возрасти в  $k$  раз, то есть  $\omega = k\omega_0$ .

**4.45.** Частица находится в точках А и Б (и испускает свет) в разные моменты времени. Так как  $l_1 < l_2$  (см. чертёж в условии), то частица движется от точки Б к точке А — в противном случае свет, испущенный в точке Б, приходил бы к прибору П всегда позже, чем свет, испущенный в точке А. Запишем условие того, что свет от точек Б и А приходит к прибору П одновременно. Обозначая время движения частицы от Б к А через  $t$  и принимая во внимание, что скорость света в жидкости с показателем преломления  $n$  равна  $c/n$  ( $c$  — скорость света в вакууме), получим:

$$\frac{l_2}{c/n} = t + \frac{l_1}{c/n}.$$

Отсюда  $t = \frac{n}{c}(l_2 - l_1)$ , и искомая скорость частицы:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{c}{n} \cdot \frac{l}{l_2 - l_1}.$$

Видно, что в правую часть последней формулы входит отношение длин  $l$  и  $l_2 - l_1$ . Так как схема опыта приведена в определённом масштабе, то для получения численного значения скорости можно просто измерить все длины на чертеже линейкой и подставить получившиеся числа в выражение для  $v$ . Сделав это, получим, что  $l \approx 19$  мм,  $l_1 \approx 32$  мм,  $l_2 \approx 45$  мм, и  $v \approx 0,9c$ .

Следует отметить, что скорость частицы в данном эксперименте превышает фазовую скорость света в жидкости, которая равна  $c/n \approx 0,63c$ . Излучение движущейся таким образом частицы называется излучением Вавилова–Черенкова (или черенковским излучением).

**4.46.** Обозначим количество атомов каждого изотопа непосредственно после взрыва сверхновой через  $N_0$ . Тогда через время  $T_1$  после взрыва количество атомов  $^{235}\text{U}$  стало равно  $N_0/2$ , через время  $2T_1$  — стало равно  $N_0/2^2$ , и так далее. Очевидно, что через время  $t = nT_1$  после взрыва, равное  $n$  периодам полураспада  $^{235}\text{U}$ , количество атомов этого изотопа стало равно  $N_1 = N_0/2^n$ . Аналогично, за то же самое время  $t = kT_2$ , равное  $k$  периодам полураспада  $^{238}\text{U}$ , количество атомов данного изотопа стало равно  $N_2 = N_0/2^k$ . По условию задачи,

$$n_1 = \frac{N_1}{N_1 + N_2}, \quad n_2 = \frac{N_2}{N_1 + N_2}.$$

Отсюда

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{2^n}{2^k} = 2^{n-k}.$$

Учитывая, что  $t = nT_1 = kT_2$ , получаем систему из двух уравнений относительно неизвестных  $n$  и  $k$ . Решая её, найдём, например,  $k$ :

$$k = \frac{\lg(n_2/n_1)}{\lg 2} \cdot \frac{T_1}{T_2 - T_1}.$$

Значит, искомое время  $t$  равно

$$t = kT_2 = \frac{\lg(n_2/n_1)}{\lg 2} \cdot \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} \approx 6 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

Этот результат хорошо согласуется с возрастом Солнечной системы ( $\sim 5$  млрд лет) и с возрастом Земли ( $\sim 4$  млрд лет), определёнными другими способами.

## Приложения

### Программа V (заключительного) этапа Всероссийской олимпиады школьников по физике

#### Программа 9 класса

Измерение физических величин. Погрешность измерения. Построение графика по результатам эксперимента, выбор переменных.

##### **Механика**

Механическое движение. Относительность движения. Система отсчёта. Координаты. Материальная точка. Траектория. Путь и перемещение. Средняя и мгновенная скорость. Ускорение. Прямолинейное движение. Свободное падение.

Движение по окружности. Частота обращения. Угловая скорость. Центростремительное ускорение.

Механические колебания. Амплитуда, период, частота колебаний. Механические волны. Длина волны. Звук.

Взаимодействие тел. Трение. Упругая деформация. Инерция. Масса. Импульс. Первый закон Ньютона. Инерциальная система отсчёта. Сила. Принцип суперпозиции сил. Второй закон Ньютона. Силы в природе: сила тяготения, сила тяжести, сила трения, сила упругости. Закон всемирного тяготения. Искусственные спутники Земли. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса. Ракеты.

Работа. Мощность. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения механической энергии.

Элементы статики. Момент силы. Условие равновесия твёрдого тела.

Давление. Атмосферное давление. Гидростатическое давление. Передача давления твёрдыми телами, жидкостями и газами. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Гидравлический пресс. Уравнение Бернулли.

Применение законов Ньютона и законов сохранения импульса и энергии для анализа и расчёта движения тел. Простые механизмы. КПД механизмов.

##### **Методы исследования механических явлений**

Измерительные приборы: измерительная линейка, штангенциркуль, часы, мерный цилиндр, динамометр, барометр. Измерение расстояний, промежутков времени, силы, объёма, массы, давления. Графики изменения со временем кинематических величин.

##### **Молекулярная физика. Термодинамика**

Гипотеза о дискретном строении вещества. Непрерывность и хаотичность движения частиц вещества. Диффузия. Броуновское движение. Модели газа, жидкости и твёрдого тела. Плотность. Взаимодействие частиц вещества.

Внутренняя энергия. Температура. Термометр. Теплопередача. Необратимость процесса теплопередачи. Связь температуры с хаотическим движением частиц. Тепловое расширение твёрдых тел и жидкостей. Температурные коэффициенты линейного и объёмного расширения. Особенности теплового расширения воды. Количество теплоты. Удельная теплоёмкость. Удельная теплота сгорания топлива. Закон сохранения энергии в тепловых процессах.

Испарение жидкости. Удельная теплота парообразования (конденсации). Влажность воздуха. Кипение жидкости. Плавление твёрдых тел.

Применение основных положений молекулярно-кинетической теории вещества для объяснения разной сжимаемости твёрдого тела, жидкости и газа; процессов испарения и плавления; преобразования энергии при плавлении и испарении вещества. Удельная теплота плавления (кристаллизации).

Преобразования энергии в тепловых двигателях.

### **Методы исследования тепловых явлений**

Измерительные приборы: термометр, манометр, гигрометр. Измерение температуры, давления газа, влажности воздуха. Графики изменения температуры вещества при его нагревании и охлаждении, кипении и плавлении.

### **Электродинамика**

Электризация тел. Электрический заряд. Взаимодействие зарядов. Два вида электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда. Электрическое поле. Действие электрического поля на электрические заряды.

Постоянный электрический ток. Сила тока. Напряжение. Электрическое сопротивление. Электрическая цепь. Закон Ома для участка цепи. Преобразование энергии при нагревании проводника с электрическим током. Носители электрических зарядов в различных средах.

Взаимодействие магнитов. Магнитное поле. Взаимодействие проводников с током. Действие магнитного поля на электрические заряды. Электродвигатель.

Электромагнитная индукция. Преобразование энергии в электрогенераторах.

Электромагнитные волны. Скорость распространения электромагнитных волн. Равенство скоростей электромагнитной волны и света. Свет — электромагнитные волны. Прямолинейное распространение. Луч. Отражение и преломление света. Закон отражения света. Плоское зеркало. Закон преломления света. Линза. Фокусное расстояние.

### **Методы исследования электромагнитных явлений**

Измерительные приборы: амперметр, вольтметр, счётчик электрической энергии. Измерение силы тока, напряжения, сопротивления проводника. Расчёт простейшей электрической цепи. Построение изображения в плоском зеркале, собирающей и рассеивающей линзе. Оптические приборы.

### **Атомная физика**

Опыты Резерфорда. Планетарная модель атома. Радиоактивность. Альфа-, бета- и гамма-излучения. Атомное ядро. Протонно-нейтронная модель ядра. Зарядовое и массовое число. Изотопы.

Ядерные реакции. Деление и синтез ядер. Сохранение заряда и массового числа при ядерных реакциях. Применение законов сохранения для расчёта простейших ядерных реакций. Энергия связи частиц в ядре. Выделение энергии при делении и синтезе ядер. Излучение звёзд. Ядерная энергетика.

Методы наблюдения и регистрации частиц в ядерной физике. Дозиметрия.

## Программа 10 класса

### Механика

Принцип относительности Галилея.

Закон всемирного тяготения. Движение под действием силы тяготения. Первая космическая скорость. Невесомость.

Сила упругости. Закон Гука. Закон сохранения импульса. Работа силы. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Упругий и неупругий удар.

Математический маятник. Гармонические колебания. Амплитуда, частота, период, фаза колебаний. Свободные колебания. Вынужденные колебания. Автоколебания. Резонанс. Волны. Длина волны. Скорость распространения волны. Уравнение гармонической волны.

### Молекулярная физика. Термодинамика

Основы молекулярной физики. Экспериментальные основания молекулярно-кинетической теории. Опыты Штерна и Перрена. Масса и размеры молекул. Количество вещества. Моль. Постоянная Авогадро.

Термодинамика. Тепловое равновесие. Температура. Связь температуры со средней кинетической энергией частиц вещества. Постоянная Больцмана. Абсолютный нуль. Количество теплоты. Теплоёмкость. Первый закон термодинамики. Адиабатический процесс. Второй закон термодинамики и его статистическое истолкование. Тепловые машины. КПД теплового двигателя.

Идеальный газ. Давление газа. Связь между давлением и средней кинетической энергией молекул идеального газа. Уравнение Менделеева–Клапейрона. Работа при изменении объёма идеального газа. Изопроцессы.

Жидкость и твёрдое тело. Относительная влажность. Кипение. Зависимость температуры кипения жидкости от давления. Насыщенный и ненасыщенный пар. Зависимость давления насыщенного пара от температуры. Психрометр. Гигрометр. Кристаллические и аморфные тела. Поверхностное натяжение. Смачивание. Капиллярные явления. Деформация.

### Электростатика

Электрический заряд. Элементарный заряд. Закон Кулона. Электрическое поле. Напряжённость электрического поля. Потенциальность электрического поля. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции полей. Проводники в электрическом поле. Электрическая ёмкость. Конденсатор. Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Энергия электрического поля конденсатора. Плотность энергии.

**Постоянный электрический ток**

Электрический ток. Носители свободных электрических зарядов в металлах, жидкостях и газах. Сила тока. Работа тока. Напряжение. Мощность тока. Электродвижущая сила. Закон Ома для полной электрической цепи. Сопротивление при последовательном и параллельном соединении проводников. Шунты и добавочные сопротивления. Правила Кирхгофа.

Полупроводники. Собственная и примесная проводимость полупроводников,  $p-n$  – переход.

**Программа 11 класса**

*В программу 11 класса включается весь материал программ 9 и 10 классов, а также следующие темы.*

**Магнитное поле**

Индукция магнитного поля. Сила Ампера. Сила Лоренца. Магнитный поток.

Электромагнитное поле. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Вихревое электрическое поле. Самоиндукция. Индуктивность. Электромагнитные колебания в колебательном контуре. Переменный ток. Производство, передача и потребление электрической энергии.

Идеи теории Максвелла. Электромагнитное поле. Электромагнитные волны. Свойства электромагнитных волн. Радио. Телевидение.

**Волновые свойства света**

Свет — электромагнитные волны. Скорость света и методы её измерения. Интерференция света. Когерентность. Дифракция света. Дифракционная решётка. Поляризация света. Закон преломления света. Призма. Дисперсия света. Формула тонкой линзы. Получение изображения при помощи тонкой линзы. Оптическая сила линзы. Глаз. Очки. Лупа. Микроскоп. Зрительная труба. Фотоаппарат. Проекционный аппарат.

**Основы специальной теории относительности**

Инвариантность скорости света. Принцип относительности. Пространство и время в специальной теории относительности. Релятивистский закон сложения скоростей. Закон взаимосвязи массы и энергии.

**Квантовая физика**

Тепловое излучение. Постоянная Планка. Фотоэффект. Опыты Столетова. Фотоны. Опыты Вавилова. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Корпускулярно-волновой дуализм.

Гипотеза Луи де Бройля. Дифракция электронов. Боровская модель атома водорода. Спектры. Люминесценция. Лазеры.

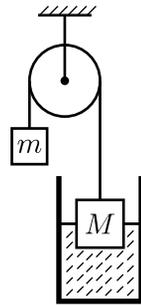
Закон радиоактивного распада. Нуклонная модель ядра. Энергия связи нуклонов в ядре. Деление ядра. Синтез ядра. Ядерная энергетика. Элементарные частицы. Фундаментальные взаимодействия.

## Варианты заданий Московских городских олимпиад школьников по физике для 8-х – 11-х классов

### 8 класс. 1 тур.

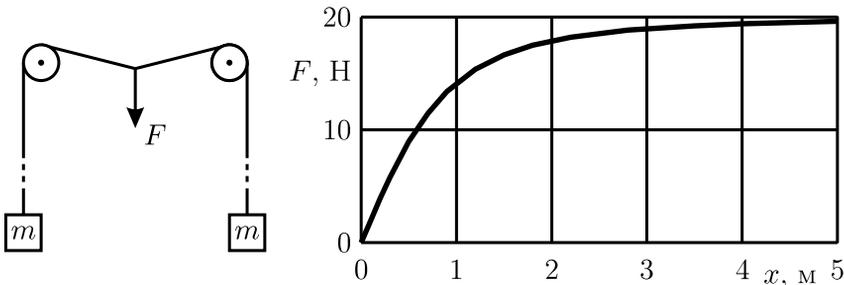
#### Вариант 1.

1. К одному концу нити, перекинутой через блок, подвешен груз массой  $M$ , изготовленный из материала плотностью  $\rho_1$ . Груз погружен в сосуд с жидкостью плотностью  $\rho_2$ . К другому концу нити подвешен груз массой  $m$  (см. рисунок). При каких значениях  $m$  груз массой  $M$  в положении равновесия может плавать в жидкости? Трения нет.



К задаче 1.

2. Через два неподвижных блока, находящихся на одной высоте, перекинута длинная лёгкая нить, к концам которой прикреплены два груза одинаковой массы  $m$  (см. рисунок). Нить начинают медленно оттягивать вниз за точку, находящуюся посередине между блоками. График зависимости силы  $F$ , прикладываемой к нити, от смещения  $x$  этой точки приведён на рисунке. Найдите приблизительно массу  $m$  каждого из грузов. Трения нет.



К задаче 2.

3. В люстре 6 одинаковых лампочек. Она управляется двумя выключателями, имеющими два положения — «включено» и «выключено». От коробки с выключателями к люстре идут три провода. Лампочки в люстре либо:

- а) все не горят;
- б) все горят не в полный накал;
- в) три лампочки не горят, а три горят в полный накал.

Нарисуйте возможные схемы электрической цепи.

**8 класс. 1 тур.****Вариант 2.**

1. На прямой дороге находятся велосипедист, мотоциклист и пешеход между ними. В начальный момент времени расстояние от пешехода до велосипедиста в 2 раза меньше, чем до мотоциклиста. Велосипедист и мотоциклист начинают двигаться навстречу друг другу со скоростями 20 км/ч и 60 км/ч соответственно. В какую сторону и с какой скоростью должен идти пешеход, чтобы встретиться с велосипедистом и мотоциклистом в месте их встречи?

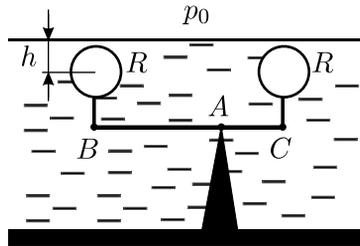
2. Система из двух сообщающихся вертикальных цилиндров, заполненных жидкостью плотностью  $\rho$ , закрыта поршнями массами  $M_1$  и  $M_2$ . В положении равновесия поршни находятся на одной высоте. Если на поршень массой  $M_1$  положить груз массой  $m$ , то поршень массой  $M_2$  поднимется после установления равновесия на высоту  $h$  относительно начального положения. На какую высоту относительно начального положения равновесия поднимется поршень массой  $M_1$ , если груз массой  $m$  положить на поршень массой  $M_2$ ? Трения нет.

3. В фарфоровую чашку массой  $m_{\text{ф}} = 100$  г, находящуюся при комнатной температуре  $T_{\text{к}} = +20$  °С, наливают  $m_1 = 150$  г горячего кофе при температуре  $T_1 = +90$  °С. Затем достают из холодильника брикет мороженого, имеющий температуру  $T_2 = -12$  °С, и серебряной ложкой (масса ложки  $m_{\text{лож}} = 15$  г) кладут понемногу мороженое в кофе, каждый раз размешивая его. Так поступают до тех пор, пока не установится температура  $T_3 = +45$  °С, когда кофе приятно пить. Оцените, сколько граммов мороженого надо положить для этого в кофе? Потерями тепла пренебречь. Считать известными удельные теплоёмкости воды  $C_{\text{в}} = 4,2$  Дж/(г · °С), льда  $C_{\text{л}} = 2,1$  Дж/(г · °С), серебра  $C_{\text{с}} = 0,23$  Дж/(г · °С), фарфора  $C_{\text{ф}} = 0,8$  Дж/(г · °С) и удельную теплоту плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г.

**8 класс. 1 тур.**  
**Вариант 3.**

1. Автомобиль в 12 час. 40 мин. находился на пути из Анискино в Борискино где-то между 25-м и 50-м километровыми столбами. Мимо отметки 75 км автомобиль проехал где-то между 13 час. 50 мин. и 14 час. 20 мин. В 15 час. 10 мин. он находился между 125-м и 150-м километровыми столбами. Когда следует ожидать прибытия автомобиля в Борискино, если он движется с постоянной скоростью, а на въезде в Борискино стоит километровый столб с отметкой 180 км?

2. К рычагу, закреплённому на дне водоёма, прикреплены на нитях два сферических поплавка радиусом  $R$  (см. рисунок). В случае, если рычаг удерживать в горизонтальном положении, центры поплавков расположены на глубине  $h > R$ . На каких глубинах будут расположены центры поплавков, если отпустить рычаг и дождаться установления равновесия? Массами поплавков и рычага пренебречь. Концы рычага в положении равновесия не касаются дна, а  $AB : AC = 2 : 1$ . Считать, что  $AC > h$ .



К задаче 2.

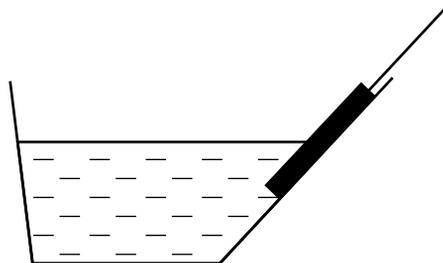
3. Физик хочет изготовить немного льда из дистиллированной воды. Для этого он наливает в открытый сосуд  $M = 1$  кг воды при температуре  $T_1 = 20$  °С и начинает понемногу подливать в сосуд кипящий жидкий азот (которого в лаборатории много), имеющий температуру  $T_2 = -196$  °С. При этом смесь воды и жидкого азота всё время энергично перемешивается. Когда весь азот из сосуда испаряется, его доливают ещё, и так много раз, до получения желаемого количества смеси воды со льдом. Какая масса  $m$  жидкого азота уйдёт на то, чтобы превратить в лёд половину массы воды? Теплоёмкостью сосуда и его теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 3,4 \cdot 10^5$  Дж/кг, удельная теплота парообразования азота  $L = 2,0 \cdot 10^5$  Дж/кг.

## 8 класс. 2 тур.

## Вариант 1.

1. Вдоль железной дороги через каждые 100 м расставлены столбики с номерами 1, 2, ..., 10, 1, 2, ..., 10, .... Через 2 минуты после того, как cabina машиниста равномерно движущегося поезда проехала столбик с цифрой «1», машинист увидел в окне столбик с цифрой «2». Через какое время после проезда этого столбика cabina машиниста может проехать мимо ближайшего столбика с цифрой «3»? Скорость поезда меньше 100 км/ч.

2. Ванна, одна из стенок которой представляет собой наклонную плоскость, заполнена водой с плотностью  $\rho_{\text{в}}$ . В ванну медленно погружают длинный тонкий круглый карандаш, удерживая его нитью за верхний конец, который перемещают вниз вдоль наклонной стенки (см. рисунок). Какая часть карандаша должна погрузиться в воду, чтобы нижний конец перестал касаться стенки? Плотность карандаша  $\rho_{\text{к}} = (3/4)\rho_{\text{в}}$ .



К задаче 2.

3. Горячий суп, налитый доверху в большую тарелку, охлаждается до температуры, при которой его можно есть без риска обжечься, за время  $t = 20$  мин. Через какое время можно будет есть суп с той же начальной температурой, если разлить его по маленьким тарелкам, которые также заполнены доверху и подобны большой? Известно, что суп из большой тарелки помещается в  $n = 8$  маленьких, и что количество тепла, отдаваемое в единицу времени с единицы поверхности каждой тарелки, пропорционально разности температур супа и окружающей среды.

8 класс. 2 тур.  
Вариант 2.

1. Художник нарисовал «Зимний пейзаж» (см. рисунок). Как вы думаете, в каком месте на Земле он мог писать с такой натурой?



К задаче 1.

2. На краю крыши висят сосульки конической формы, геометрически подобные друг другу, но разной длины. После резкого потепления от  $T_1 = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $T_2 = 10\text{ }^{\circ}\text{C}$  самая маленькая сосулька длиной  $l = 10\text{ см}$  растаяла за время  $t = 2\text{ часа}$ . За какое время растает большая сосулька длиной  $L = 30\text{ см}$ , если внешние условия не изменятся?

3. Цилиндрический оловянный брусок массой  $M = 1\text{ кг}$  и высотой  $H = 10\text{ см}$ , подвешенный к одному концу коромысла равноплечих весов так, что ось цилиндра вертикальна, погружен на  $h = 2\text{ см}$  в воду, находящуюся в стакане с площадью сечения  $S = 25\text{ см}^2$ , и удерживается в этом положении при помощи противовеса, подвешенного к другому концу коромысла. На сколько изменится уровень воды в стакане, если изменить массу противовеса на  $\Delta m = 80\text{ г}$ ? Плотность олова  $\rho_o = 7,2\text{ г/см}^3$ , плотность воды  $\rho_v = 1\text{ г/см}^3$ . Считайте, что брусок не касается дна стакана, а вода из стакана не выливается.

**8 класс. 2 тур.****Вариант 3.**

1. В широкий сосуд налит слой жидкости толщиной  $h_2$  и плотностью  $\rho_2$ , поверх него — слой другой жидкости, не смешивающейся с первой, толщиной  $h_1$  и плотностью  $\rho_1 < \rho_2$ . На поверхность жидкости положили плоскую шайбу толщиной  $h$  и плотностью  $\rho$ . Найдите зависимость установившейся глубины погружения  $H$  нижней плоскости шайбы от  $\rho$  и постройте график этой зависимости. Считайте  $h < h_1, h_2$ . Силами поверхностного натяжения пренебречь. Шайба всегда сохраняет горизонтальное положение.

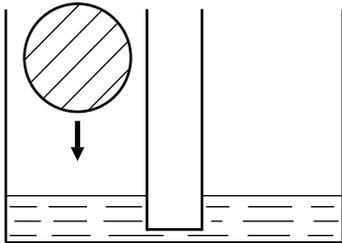
2. Школьник утром вскипятил чайник и стал его остужать, чтобы успеть попить чай до ухода в школу. Он обнаружил, что температура чайника понизилась со  $100\text{ }^\circ\text{C}$  до  $95\text{ }^\circ\text{C}$  за 5 минут, пока чайник стоял на столе на кухне, где температура воздуха была  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Школьник решил ускорить остывание чайника, для чего засунул его в холодильник, где температура составляла  $0\text{ }^\circ\text{C}$ . При этом температура чайника понизилась от  $95\text{ }^\circ\text{C}$  до  $90\text{ }^\circ\text{C}$  за 4 мин 12 сек. Решив ещё ускорить остывание, школьник выставил чайник за окно, на улицу, где температура была равна  $-20\text{ }^\circ\text{C}$ . За сколько времени чайник остынет на улице от  $90\text{ }^\circ\text{C}$  до  $85\text{ }^\circ\text{C}$ ?

3. В двух калориметрах налито по 200 г воды — при температурах  $+30\text{ }^\circ\text{C}$  и  $+40\text{ }^\circ\text{C}$ . Из «горячего» калориметра зачерпывают 50 г воды, переливают в «холодный» и перемешивают. Затем из «холодного» калориметра переливают 50 г воды в «горячий» и снова перемешивают. Сколько раз нужно перелить такую же порцию воды туда-обратно, чтобы разность температур воды в калориметрах стала меньше  $1\text{ }^\circ\text{C}$ ? Потерями тепла в процессе переливаний и теплоёмкостью калориметров пренебречь.

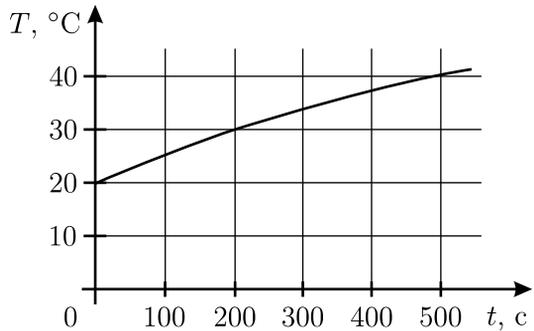
**9 класс. 1 тур.**  
**Вариант 1.**

1. Два корабля находятся в море и движутся равномерно и прямолинейно. Первый в полдень был в 40 милях севернее маленького острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на восток. Второй в 8 часов утра этого же дня был в 100 милях восточнее того же острова и двигался со скоростью 15 миль в час в направлении на юг. На каком минимальном расстоянии друг от друга прошли корабли и в какой момент времени это случилось?

2. В два одинаковых сообщающихся сосуда налита вода (см. рисунок). В один из них кладут ледяной шарик объёмом  $V = 100 \text{ см}^3$ , который через небольшое время, после установления уровня воды в сосудах, оказался погруженным в воду ровно наполовину. Какая масса воды перетекла при этом во второй сосуд и какая перетечёт потом, в процессе таяния льда? Плотность воды  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$ .



К задаче 2.

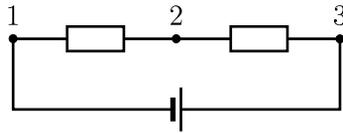


К задаче 3.

3. В калориметр, в котором находилось  $m_0 = 100 \text{ г}$  воды при температуре  $T_0 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , по каплям с постоянной скоростью начинают наливать горячую воду постоянной температуры. График зависимости температуры  $T$  воды в калориметре от времени  $t$  изображён на рисунке. Найдите температуру горячей воды, считая, что между падением капель в калориметре каждый раз успевают установиться тепловое равновесие. Потерями тепла пренебречь.

4. Школьницы Алиса и Василиса решили изготовить самодельные вольтметры из имеющихся в школьной лаборатории миллиамперметров. Алиса соединила миллиамперметр последовательно с резистором сопротивлением  $R_1 = 1 \text{ кОм}$  и приклеила на прибор шкалу напряжений, показывающую произведение текущего через миллиамперметр

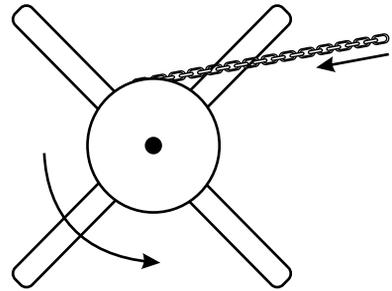
тока  $I$  на  $R_1$ . Василиса собрала ту же схему, используя другой резистор с сопротивлением  $R_2 = 2$  кОм, и приклеила шкалу, показывающую произведение  $IR_2$ . Школьницы решили испытать свои приборы, подключив их к схеме, изображённой на рисунке, с неизвестным напряжением батарейки и неизвестными сопротивлениями резисторов. Прибор Алисы при подключении к контактам 1 и 2 показал напряжение  $U_{12} = 1,8$  В, к контактам 2 и 3 — напряжение  $U_{23} = 1,8$  В, к контактам 1 и 3 — напряжение  $U_{13} = 4,5$  В. Что покажет прибор Василисы при подключении к тем же парам контактов? Внутренним сопротивлением батарейки и миллиамперметров пренебречь.



К задаче 4.

9 класс. 1 тур.  
Вариант 2.

1. На старинных кораблях для подъёма якоря использовался кабе-стан — ворот, представлявший собой цилиндрическое бревно, к которому прикреплены одинаковые длинные ручки (см. рисунок). Матросы, отвечавшие за подъём якоря (якорная команда), наваливались на концы ручек, в результате чего ворот вращался, и якорная цепь наматывалась на бревно. Капитан, собираясь в дальнейшее плавание, приказал



К задаче 1.

утяжелить якорь, после чего выяснилось, что прежняя якорная команда с трудом поднимает якорь только до поверхности воды. Чтобы исправить ситуацию, капитан распорядился переделать ворот. Пренебрегая трением и массой цепи, найдите, во сколько раз нужно удлинить ручки кабестана, чтобы прежняя якорная команда могла поднимать новый якорь до борта. Плотности воды и материала якоря  $1 \text{ г/см}^3$  и  $8 \text{ г/см}^3$  соответственно.

2. Пассажир автобуса, едущего вдоль прямого канала с водой, наблюдает за световым бликом, который отбрасывается спокойной поверхностью воды от фонаря, стоящего на противоположном берегу канала. Найдите скорость движения блика по поверхности воды относительно берегов канала, если высота фонаря над поверхностью воды  $H$ , высота глаз пассажира над поверхностью воды  $h$ , скорость автобуса  $v$ .

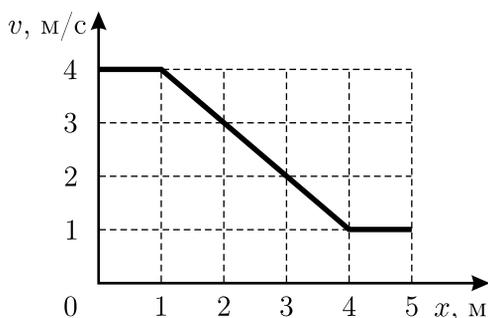
3. У квадратного стола со стороной  $L = 1 \text{ м}$  и высотой  $H = 1 \text{ м}$  одна ножка на  $a = 3 \text{ см}$  короче остальных, и стол может качаться. Если поставить стол ровно, то он стоит, но достаточно лёгкого толчка, чтобы он накренился на короткую ножку. Для того, чтобы после этого стол вернулся в первоначальное положение, нужно поставить на угол, противоположный короткой ножке, грузик массой  $m = 300 \text{ г}$ . Найдите массу крышки стола, пренебрегая массой ножек. Считайте ножки тонкими и расположенными под углами крышки стола.

4. Сплошной шарик из алюминия диаметром  $d = 1 \text{ см}$  бросили в 50%-ный раствор азотной кислоты. В данных условиях с одного квадратного сантиметра поверхности растворяется  $10^{-4} \text{ г}$  алюминия в час. Через какое время шарик полностью растворится в кислоте? Плотность алюминия  $\rho = 2,7 \text{ г/см}^3$ .

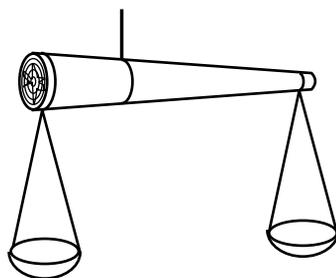
## 9 класс. 1 тур.

## Вариант 3.

1. Тело движется по прямой. График зависимости его скорости  $v$  от координаты  $x$  приведён на рисунке. Найдите ускорение тела в точке с координатой  $x = 3$  м. Найдите также максимальное ускорение тела на отрезке от 0 до 5 м.



К задаче 1.



К задаче 2.

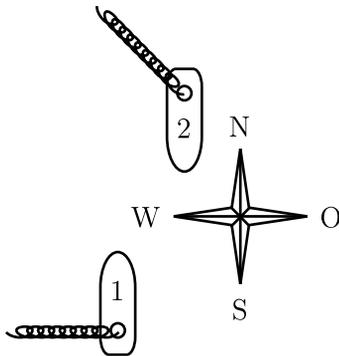
2. «Хитрый» продавец на рынке торгует рыбой, взвешивая её на весах, сделанных из палки и верёвки (см. рисунок), причём не обманывает покупателей. Покупателю разрешается взвесить рыбу самому, но при условии, что рыба помещается только на левую чашку весов и не снимается до момента расплаты. Продавец разрешает провести максимум два взвешивания, предоставляя покупателю набор гирь. Как определить массу понравившейся вам рыбы? «Коромысло» весов с пустыми чашками занимает горизонтальное положение.

3. Кусок однородного гибкого каната массой  $M = 10$  кг находится на горизонтальном столе. На один из концов каната действует сила  $F = 50$  Н, при этом  $2/3$  каната неподвижно лежат на столе. Найдите возможные значения коэффициента трения каната о стол. Считайте, что все точки каната находятся в одной вертикальной плоскости.

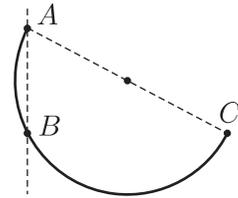
4. В калориметре плавает в воде кусок льда. В калориметр опускают нагреватель постоянной мощности  $N = 50$  Вт и начинают ежеминутно измерять температуру воды. В течение первой и второй минут температура воды не изменяется, к концу третьей минуты увеличивается на  $\Delta T_1 = 2$  °С, а к концу четвёртой ещё на  $\Delta T_2 = 5$  °С. Сколько граммов воды и сколько граммов льда было изначально в калориметре? Удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  Дж/г, удельная теплоёмкость воды  $C = 4,2$  Дж/(г · °С).

9 класс. 2 тур.  
Вариант 1.

1. Один корабль идёт по морю на север с постоянной скоростью 20 узлов, а другой — навстречу ему, на юг, с такой же скоростью. Корабли проходят на очень малом расстоянии друг от друга. Шлейф дыма от первого корабля вытянулся в направлении на запад, а от второго — на северо-запад (см. рисунок). Определите величину и направление скорости ветра. 1 узел = 1 морская миля в час, 1 морская миля = 1852 м.



К задаче 1.



К задаче 2.

2. В вертикальную стену вбиты два гвоздя так, что они лежат на одной вертикальной прямой. Кусок однородной проволоки массой  $m$  согнули в дугу в виде половины окружности и шарнирно прикрепили за один из концов к верхнему гвоздю  $A$  (см. рисунок). Дуга при этом опёрлась на нижний гвоздь  $B$ . Найдите величину силы, с которой проволока давит на верхний гвоздь, если известно, что в отсутствие нижнего гвоздя, когда проволока находится в равновесии, диаметр  $AC$  дуги составляет с вертикалью угол  $\alpha_0$ . Расстояние между гвоздями равно радиусу дуги. Трения нет.

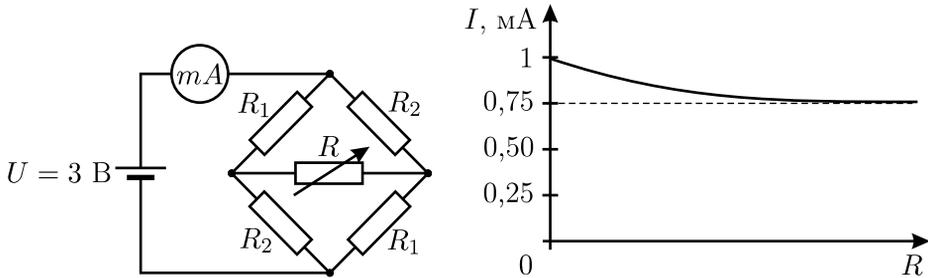


К задаче 3.

3. В системе, изображённой на рисунке, блоки имеют пренебрежимо малые массы, нить невесомая и нерастяжимая, не лежащая на

блоках участки нити горизонтальны. Массы грузов, лежащих на горизонтальной плоскости, одинаковы и равны  $M$ . Нить тянут за свободный конец в горизонтальном направлении с силой  $F$ . С каким ускорением движется конец нити, к которому приложена эта сила? Трения нет, движение грузов считайте поступательным.

4. Электрическая цепь, изображённая на левом рисунке, состоит из источника постоянного напряжения  $U = 3$  В, миллиамперметра с очень маленьким внутренним сопротивлением, четырёх постоянных резисторов и одного переменного. На правом рисунке приведён график зависимости показаний миллиамперметра от величины сопротивления переменного резистора  $R$ . Найдите величины сопротивлений постоянных резисторов  $R_1$  и  $R_2$ .



К задаче 4.

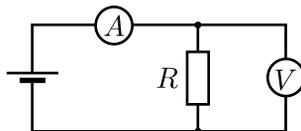
**9 класс. 2 тур.**  
**Вариант 2.**

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположены две одинаковые маленькие шайбы. В начальный момент времени первой шайбе сообщили некоторую скорость вдоль линии, соединяющей центры шайб. Оказалось, что за время  $t$  первая шайба прошла путь  $S_1$ , а вторая — путь  $S_2$ . Чему могут быть равны начальная скорость первой шайбы и начальное расстояние между шайбами? Трение отсутствует, удар шайб друг о друга не обязательно абсолютно упругий.

2. Тело массой  $m = 10$  кг подвешено в лифте при помощи трёх одинаковых лёгких верёвок, натянутых вертикально. Одна из них привязана к потолку лифта, две другие — к полу. Когда лифт неподвижен, натяжение каждой из нижних верёвок составляет  $F_0 = 5$  Н. Лифт начинает двигаться с постоянным ускорением, направленным вверх. Найдите установившуюся силу натяжения верхней верёвки при следующих значениях ускорения лифта:  $a_1 = 1$  м/с<sup>2</sup>,  $a_2 = 2$  м/с<sup>2</sup>. Ускорение свободного падения равно  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Считайте, что сила натяжения верёвки пропорциональна её удлинению.

3. Холодильник поддерживает в морозильной камере постоянную температуру  $T_0 = -12$  °С. Кастрюля с водой охлаждается в этой камере от температуры  $T_1 = +29$  °С до  $T_2 = +25$  °С за  $t_1 = 6$  мин, а от  $T_3 = +2$  °С до  $T_4 = 0$  °С — за  $t_2 = 9$  мин. За сколько времени вода в кастрюле замёрзнет (при 0 °С)? Теплоёмкостью кастрюли пренебречь. Удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 340$  кДж/кг.

4. Для измерения сопротивления резистора  $R$  собрана схема из батарейки, амперметра и вольтметра (см. рисунок). Вольтметр подключен параллельно резистору и показывает  $U_1 = 1$  В, амперметр подключен к ним последовательно и показывает  $I_1 = 1$  А. После того, как приборы в схеме поменяли местами, вольтметр стал показывать  $U_2 = 2$  В, а амперметр  $I_2 = 0,5$  А. Считая батарейку идеальной, определите по этим данным сопротивление резистора, амперметра и вольтметра.



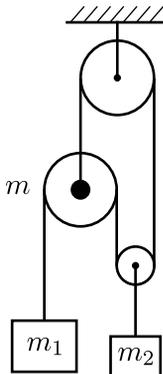
К задаче 4.

**9 класс. 2 тур.**  
**Вариант 3.**

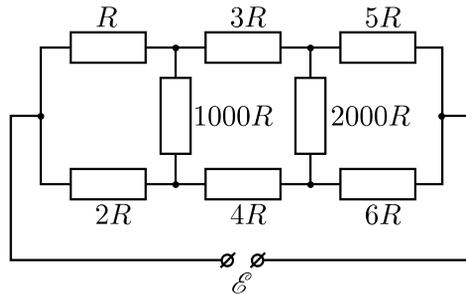
1. Из Анискино (А) в Борискино (Б) можно добраться только на моторной лодке по узкой реке, скорость течения которой всюду одинакова. Лодке с одним подвесным мотором на путь из А в Б требуется время  $t_1 = 50$  минут, а с двумя моторами — время  $t_2 = t_1/2$ . Сила тяги двух моторов вдвое больше силы тяги одного. За какое минимальное время можно добраться из Б в А на лодке с одним и с двумя моторами? Известно, что сила сопротивления движению лодки пропорциональна квадрату скорости движения относительно воды.

2. На гладком горизонтальном столе лежит вытянутая вдоль плоскости стола невесомая и нерастяжимая нить длиной  $L$ , к одному из концов которой прикреплено небольшое тело массой  $m$ . Тело в начальный момент неподвижно. Второй конец нити начинают поднимать вертикально вверх с постоянной скоростью. Тело перестаёт давить на поверхность стола в тот момент, когда нить составляет с вертикалью угол  $\alpha$ . Какова скорость  $v$  подъёма конца нити?

3. В системе, показанной на рисунке, отрезки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Найдите ускорение груза массой  $m_2$ , подвешенного на нити к лёгкой оси подвижного блока. Масса оси другого подвижного блока равна  $m$ , масса первого груза равна  $m_1$ . Трением и массой всех блоков пренебречь. Все нити невесомые и нерастяжимые. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 3.

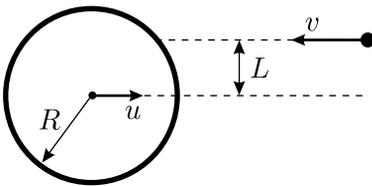


К задаче 4.

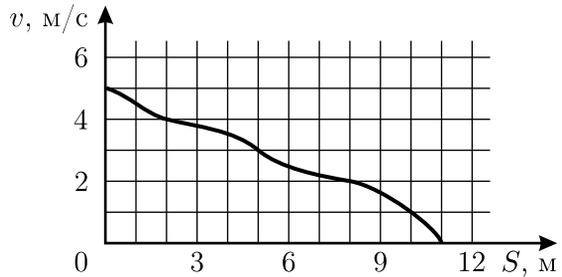
4. Оцените с точностью не хуже 1% силу тока, текущего через резистор  $1000R$  в электрической цепи, изображённой на рисунке.

**10 класс. 1 тур.**  
**Вариант 1.**

1. На массивный гладкий цилиндр радиусом  $R$ , движущийся поступательно со скоростью  $u$ , налетает маленький шарик, движущийся навстречу цилиндру перпендикулярно его оси со скоростью  $v$  (см. рисунок). Расстояние между линией, вдоль которой движется шарик, и плоскостью, в которой движется ось цилиндра, равно  $L$  ( $L < R$ ). Найдите величину скорости шарика  $v_1$  после абсолютно упругого удара о цилиндр. Сила тяжести отсутствует.

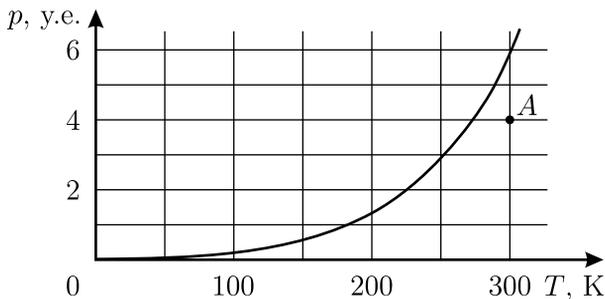


К задаче 1.



К задаче 2.

2. Маленькую шайбу запустили по шероховатой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0 = 5$  м/с. График зависимости скорости шайбы  $v$  от пройденного ею пути  $S$  изображён на рисунке. Какой путь пройдёт шайба до полной остановки, если её запустить из той же точки в том же направлении со скоростью  $v_1 = 4$  м/с?



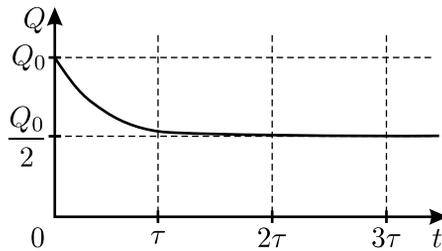
К задаче 3.

3. На рисунке приведён график зависимости давления насыщенного пара некоторого вещества от температуры. Определённое количество этого вещества находится в закрытом сосуде постоянного объёма в равновесном состоянии, соответствующем точке  $A$  на рисунке. До какой

температуры следует охладить эту систему, чтобы половина имеющегося в сосуде вещества сконденсировалась? Объёмом сконденсировавшегося вещества можно пренебречь по сравнению с объёмом сосуда.

4. Маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $q$ , брошенный со скоростью  $v$  под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, пролетев вдоль поверхности земли расстояние  $L$ , попадает в область пространства, в которой, кроме поля силы тяжести, имеется ещё и однородное постоянное горизонтальное электрическое поле. Граница этой области вертикальна. Через некоторое время после этого шарик падает в точку, откуда был произведён бросок. Найдите напряжённость электрического поля  $E$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ , влиянием воздуха пренебречь.

5. В «чёрном ящике» с двумя контактами находится схема, состоящая из незаряженного конденсатора и резистора. К контактам в момент времени  $t = 0$  подсоединили конденсатор ёмкостью  $C$ , имеющий заряд  $Q_0$ . График зависимости заряда на этом конденсаторе от времени изображён на рисунке. Найдите сопротивление резистора и ёмкость конденсатора, находящихся в «чёрном ящике».

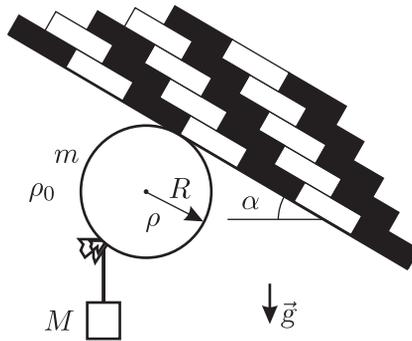


К задаче 5.

**10 класс. 1 тур.**  
**Вариант 2.**

1. Космический корабль движется в открытом космосе со скоростью  $\vec{V}$ . Требуется изменить направление скорости на  $90^\circ$ , оставив величину скорости неизменной. Найдите минимальное время, необходимое для такого манёвра, если двигатель может сообщать кораблю в любом направлении ускорение, не превышающее  $a$ . По какой траектории будет при этом двигаться корабль?

2. В дни празднования 850-летия основания Москвы продавалось много «летающих» воздушных шариков. Некоторые наиболее сообразительные школьники с помощью небольшого грузика «подвешивали» их к наклонным потолкам московского метро (см. рисунок). Грузик какой массы  $M$  годится для этой цели? При решении задачи считайте, что шарик имеет форму сферы радиусом  $R$ , и проскальзывает о потолок отсутствует. Масса резиновой оболочки шарика  $m$ , плотность газа внутри шарика  $\rho$ , плотность атмосферы  $\rho_0$ , потолок имеет угол наклона  $\alpha$ .



К задаче 2.

3. В вертикальном закрытом цилиндре высотой  $H$  и площадью основания  $S$ , заполненном воздухом при давлении  $p_0$ , на дне лежит лёгкая тонкостенная плоская коробка высотой  $h$  и площадью основания  $s$ . В дне коробки имеется отверстие. В цилиндр через кран, расположенный вблизи дна, начинают медленно нагнетать жидкость плотностью  $\rho$ , много большей плотности воздуха. При каком давлении воздуха в цилиндре коробка упрётся в верхнюю крышку цилиндра? Процесс проходит при постоянной температуре, коробка всплывает так, что её верхняя плоскость остаётся горизонтальной.

4. Мы хотим измерить ЭДС батарейки для наручных часов. У нас есть два посредственных, но исправных вольтметра разных моделей. Подключив первый вольтметр к батарейке, мы получили значение напряжения  $U_1 = 0,9$  В. Подключив второй вольтметр —  $U_2 = 0,6$  В. Недоумевая, мы подключили к батарейке оба вольтметра одновременно (параллельно друг другу). Они показали одно и то же напряжение  $U_0 = 0,45$  В. Объясните происходящее и найдите ЭДС батарейки  $\mathcal{E}_0$ .

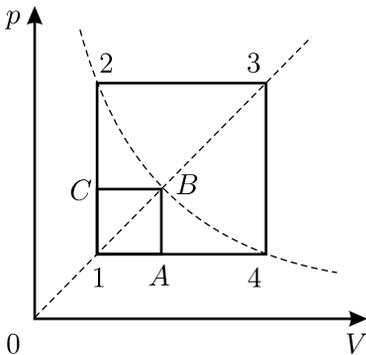
5. Две одинаковые бусинки с одинаковыми одноимёнными зарядами нанизаны на гладкую горизонтальную непроводящую спицу. Известно, что если эти бусинки расположить на расстоянии  $r_0$  друг от друга и отпустить без начальной скорости, то расстояние между ними удвоится через время  $t_0$ . Через какое время  $t_1$  расстояние между бусинками удвоится, если начальное расстояние между ними увеличить в  $k$  раз?

**10 класс. 1 тур.**  
**Вариант 3.**

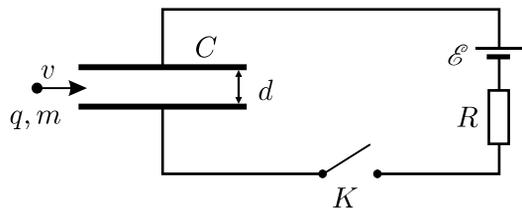
1. Оцените отношение силы сопротивления воздуха к силе тяжести для пули, вылетевшей из ствола пистолета. Скорость пули  $u = 500$  м/с, её диаметр  $d = 7$  мм, масса пули  $m = 9$  г. Плотность воздуха  $\rho = 1,3$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Платформа, установленная на вертикальной невесомой пружине, совершает установившиеся колебания. В момент прохождения платформы через положение своего равновесия о неё абсолютно упруго ударяется маленький шарик, падающий с некоторой высоты, причём после соударения скорости платформы и шарика, оставаясь неизменными по модулю, изменяют свои направления на противоположные. Через некоторое время шарик вновь ударяется о платформу в момент её прохождения через положение равновесия, и далее этот процесс повторяется. Считая известными максимальное отклонение  $A$  платформы от положения равновесия и период её свободных колебаний  $T$ , найдите, каким может быть отношение масс шарика и платформы.

3. Над одним молем идеального одноатомного газа совершают процесс 1–2–3–4–1 (см. рисунок), причём газ получает от нагревателя за один цикл количество теплоты  $Q$ . Какое количество теплоты будет получать газ за один цикл, если совершать над ним процесс 2–3–4–A–B–C–2? Известно, что  $T_3 = 16T_1$ ,  $T_2 = T_4$ , B — точка пересечения изотермы  $T = T_2$  с прямой 1–3, проходящей через начало координат  $pV$ -диаграммы. Ответ выразить через  $Q$ .



К задаче 3.

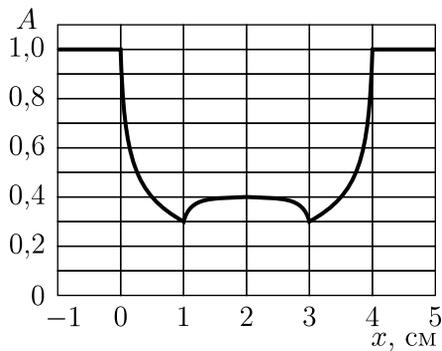
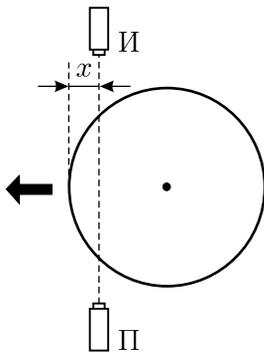


К задаче 4.

4. Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  влетает со скоростью  $v$  в плоский незаряженный конденсатор ёмкостью  $C$  параллельно его пластинам

посередине между ними. В этот момент в схеме, изображённой на рисунке, замыкают ключ  $K$ . Как зависит ускорение частицы  $a$  от времени? Считайте, что время пролёта частицы через конденсатор много меньше  $RC$ , и что заряд распределяется по пластинам равномерно. Расстояние между пластинами конденсатора равно  $d$ , краевыми эффектами можно пренебречь.

5. Рентгеновский аппарат состоит из точечного источника «И» и приёмника «П», жёстко закреплённых на станине. Между источником и приёмником перемещают цилиндрический толстостенный баллон (см. рисунок). При этом интенсивность  $A$  рентгеновского излучения, регистрируемого приёмником, зависит от координаты  $x$  так, как показано на рисунке. Есть ли внутри баллона содержимое, поглощающее рентгеновские лучи?

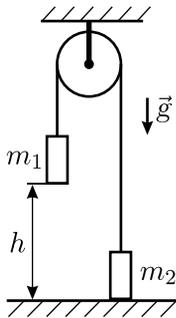


К задаче 5.

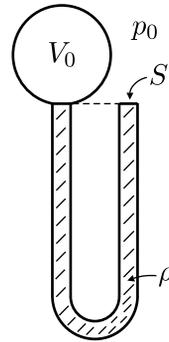
10 класс. 2 тур.  
Вариант 1.

1. На гладком горизонтальном столе находятся два груза массами 1 кг и 2 кг, скреплённые невесомой и нерастяжимой нитью. К середине нити между грузами прикреплена ещё одна такая же нить, за которую тянут с силой 10 Н. В некоторый момент времени все отрезки нитей натянуты, расположены горизонтально и составляют между собой углы  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $150^\circ$ . Известно, что в этот же момент скорость более лёгкого груза равна 1 м/с, более тяжёлого — 2 м/с, а вектор скорости каждого груза направлен перпендикулярно к отрезку нити, который прикреплён к данному грузу. Найдите ускорения грузов в рассматриваемый момент времени, если известно, что они одинаковы по величине.

2. В машине Атвуда (см. рисунок) массы грузов равны  $m_1$  и  $m_2$ , блок и нить невесомы, трение отсутствует. Вначале более тяжёлый груз  $m_1$  удерживают на высоте  $h$  над горизонтальной плоскостью, а груз  $m_2$  стоит на этой плоскости, причём отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны. Затем грузы отпускают без начальной скорости. Найдите, на какую максимальную высоту поднимется груз  $m_1$  после абсолютно неупругого удара о плоскость, если нить можно считать гибкой, неупругой и практически нерастяжимой. Ускорение свободного падения равно  $g$ , блок находится достаточно далеко от грузов.



К задаче 2.

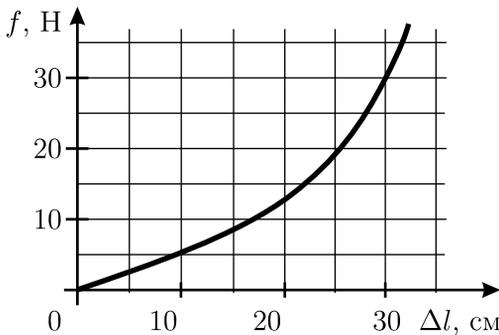


К задаче 3.

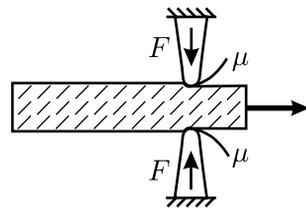
3. В установленной вертикально U-образной трубке площадью  $S$  с внутренним объёмом  $V_0$  находится жидкость плотностью  $\rho$ . Колена трубки одинаковы по высоте, одно из них открыто в атмосферу, а второе герметично соединено с сосудом объёмом  $V_0$ , внутри которого находится идеальный одноатомный газ. Жидкость заполняет всю U-образную трубку (см. рисунок). Найдите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу в сосуде для того, чтобы медленно вытеснить из

трубки половину жидкости. Атмосферное давление постоянно и равно  $p_0$ . Давлением паров жидкости, поверхностным натяжением и потерями тепла пренебречь. Радиус полукруглого участка трубки, соединяющего её колена, считайте много меньшим высоты трубки.

4. На рисунке 1 приведена зависимость силы упругости  $f$ , возникающей при растяжении резинового стержня, от величины  $\Delta l$  его удлинения. Стержень очень медленно протягивают через щель, имеющую достаточно узкие закруглённые края-щёчки, так, как показано на рисунке 2. Каждая из щёчек прижимается к стержню с постоянной силой  $F = 30$  Н. Коэффициент сухого трения между резиной и материалом щёчек  $\mu = 0,5$ , длина стержня в нерастянутом состоянии  $L = 10$  см. Какую работу совершат силы трения, действующие на стержень, к тому моменту, когда он весь будет протянут через щель?

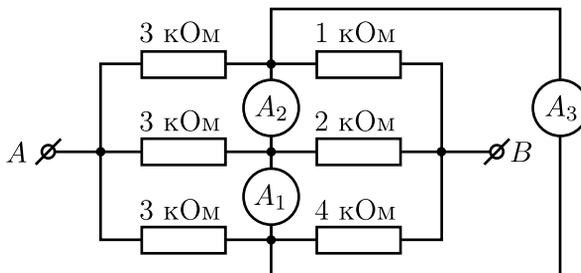


К задаче 4. Рисунок 1.



К задаче 4. Рисунок 2.

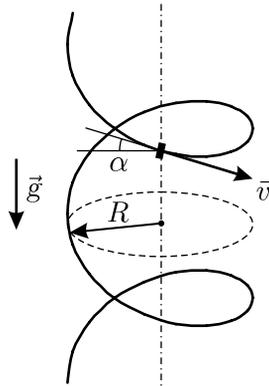
5. Что покажет каждый из трёх одинаковых амперметров  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$  в схеме, изображённой на рисунке, при подключении клемм  $A$  и  $B$  к источнику с напряжением  $U = 3,3$  В? Сопротивления амперметров много меньше сопротивлений резисторов.



К задаче 5.

**10 класс. 2 тур.**  
**Вариант 2.**

1. Маленькая шайба скользит по винтовому желобу с углом наклона  $\alpha$  к горизонту и радиусом  $R$  с постоянной скоростью  $v$  (см. рисунок). Ось желоба вертикальна, ускорение свободного падения равно  $g$ . Чему равен коэффициент трения  $\mu$  между шайбой и желобом?



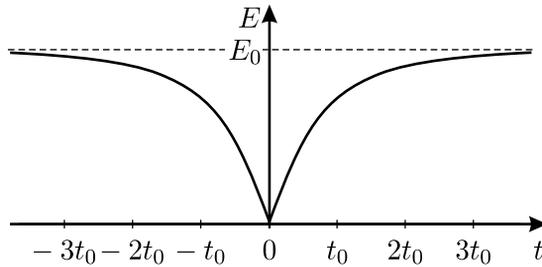
К задаче 1.

2. В горизонтальном прямом желобе на равных расстояниях  $L = 1$  м друг от друга лежат  $N = 2002$  маленьких шарика. Известно, что шарики разложены в порядке убывания их масс и что массы соседних шариков отличаются друг от друга на  $\alpha = 1\%$ . Самому тяжёлому шарикю в момент времени  $t = 0$  сообщили скорость  $v = 1$  м/с в направлении остальных шариков. Считая все удары абсолютно упругими, найдите, через какое время после этого начнёт двигаться самый лёгкий шарик. Трения нет. Временем соударения пренебречь.

3. В вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд с гладкими стенками, закрытый лёгким теплоизолирующим поршнем площадью  $S$ , поместили воду при температуре  $T_0 = 273$  К и  $\nu$  молей гелия при температуре  $T < T_0$ . Через большое время после этого внутри сосуда установилась температура  $T_0$ . Пренебрегая давлением водяных паров, теплоёмкостью сосуда и поршня, а также растворением гелия в воде, найдите, на какое расстояние сместился поршень при установлении теплового равновесия. Удельная теплота плавления льда  $\lambda$ , плотность льда  $\rho_{\text{л}}$ , плотность воды  $\rho_{\text{в}} > \rho_{\text{л}}$ . Давление над поршнем постоянно и равно нормальному атмосферному давлению  $p_0$ .

4. При измерении зависимости величины напряжённости электрического поля от времени в некоторой точке пространства был получен

график, изображённый на рисунке. Электрическое поле создаётся двумя одинаковыми точечными зарядами, один из которых неподвижен и находится на расстоянии  $d$  от точки наблюдения, а другой движется с постоянной скоростью. Найдите величины зарядов, минимальное расстояние от движущегося заряда до точки наблюдения и скорость движущегося заряда.



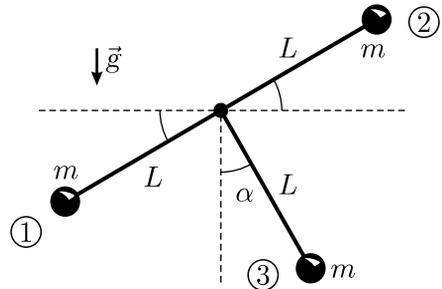
К задаче 4.

5. Плоский воздушный конденсатор ёмкостью  $C$  состоит из двух больших пластин, расположенных близко друг к другу. Вначале одна из пластин была не заряжена, а на другой имелся заряд  $Q$ . Затем пластины соединили проводником, имеющим большое сопротивление  $R$ . Оцените количество тепла, которое выделится в этом проводнике за большое время.

## 10 класс. 2 тур.

## Вариант 3.

1. Т-образный маятник состоит из трёх одинаковых жёстко скреплённых невесомых стержней длиной  $L$ , два из которых являются продолжением друг друга, а третий перпендикулярен им (см. рисунок). К свободным концам стержней, находящихся в одной вертикальной плоскости, прикреплены точечные грузы массой  $m$ . Маятник



К задаче 1.

может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку скрепления стержней и перпендикулярной им. Маятник отклонили от положения равновесия на угол  $\alpha < 90^\circ$  и отпустили без начальной скорости. Найдите величину и направление силы, с которой стержень действует на груз №3 сразу после отпускания маятника.

2. В результате взрыва снаряда массой  $m$ , летевшего со скоростью  $v$ , образовались два одинаковых осколка. Пренебрегая массой взрывчатого вещества, найдите максимальный угол разлёта осколков, если сразу после взрыва их общая кинетическая энергия увеличилась на величину  $\Delta W$ .

3. Раствор этилового спирта в воде, имеющий концентрацию  $n = 40\%$  по объёму, находится в герметично закрытой бутылке, занимая  $90\%$  её объёма. Известно, что раствор заливали в бутылку и закрывали её при температуре  $T_1 = 0^\circ\text{C}$  и атмосферном давлении  $p_0 = 10^5$  Па. Чистый этиловый спирт кипит при этом давлении при температуре  $T_2 = 77^\circ\text{C}$ . Давление насыщенных паров воды при температуре  $T_2$  равно  $p = 4,18 \cdot 10^4$  Па. Какое давление установится над жидкостью в этой бутылке при температуре  $T_2$ ? Давлением насыщенных паров спирта и воды при  $T_1 = 0^\circ\text{C}$ , а также растворением воздуха в растворе можно пренебречь.

4. Имеются батарейка с ЭДС  $\mathcal{E} = 1$  В и два незаряженных конденсатора с ёмкостями  $C_1 = 2$  мкФ и  $C_2 = 3$  мкФ. Какую максимальную разность потенциалов можно получить с помощью этого оборудования и как это сделать?

5. Два плоских зеркала образуют двугранный угол. Точечный источник света находится внутри этого угла и равноудалён от зеркал. При каких значениях угла  $\alpha$  между зеркалами у источника будет ровно  $N = 100$  различных изображений?

## 11 класс. 1 тур.

## Вариант 1.

1. На вбитом в стену гвозде на нити длиной  $L$  висит маленький шарик. Под этим гвоздём на одной вертикали с ним на расстоянии  $l < L$  вбит второй гвоздь. Шарик отводят вдоль стены так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают без толчка. Найдите расстояния  $l$ , при которых шарик перелетит через нижний гвоздь. Нить невесома и нерастяжима, трения нет.

2. К одному концу пружины с коэффициентом жёсткости  $k$  прикрепили груз массой  $M$ , а другой конец закрепили. Насколько мала должна быть масса пружины  $m$  по сравнению с массой груза  $M$ , чтобы при измерениях периода колебаний с точностью до 1% результат совпал с периодом, вычисленным в предположении невесомости пружины?

3. Пластиковая бутылка из-под газированной воды ёмкостью 1 л имеет прочные нерастяжимые, но гибкие стенки. Стекланный сосуд ёмкостью 4 л имеет прочные недеформируемые стенки. В бутылку накачали воздух до давления +1 атм при температуре  $-50^\circ\text{C}$ , а в стеклянном сосуде создали разрежение  $-0,6$  атм при той же температуре  $-50^\circ\text{C}$ . Затем сосуды соединили тонким шлангом и после выравнивания давлений стали медленно поднимать температуру от  $-50^\circ\text{C}$  до  $+50^\circ\text{C}$ . Постройте график зависимости давления внутри сообщающихся сосудов от температуры. Внешнее давление равно атмосферному.

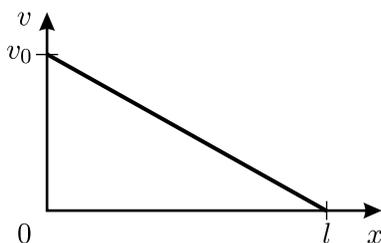
4. Четыре бесконечные плоскости, равномерно заряженные с поверхностной плотностью заряда  $-\sigma$ , пересекаются, образуя правильную пирамиду со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $b$ . В точку, лежащую на высоте этой пирамиды на расстоянии  $h$  от основания, помещают маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $+q$ . Определите, с какой скоростью этот шарик ударится о пирамиду, если его отпустить без начальной скорости. Считайте, что заряды по плоскостям не перемещаются.

5. На вращающейся карусели, имеющей радиус  $R = 5$  метров, катается гармонист. При какой максимальной угловой скорости  $\omega$  вращения карусели музыка, исполняемая гармонистом, не звучит фальшиво для слушателей, находящихся на земле, если хороший слух позволяет различить высоту звуков в четверть тона? Два звука отличаются на четверть тона, когда отношение их частот равно  $\sqrt[24]{2} \approx 1,0293$ . Скорость звука в воздухе в условиях опыта считать равной  $c = 346$  м/с.

## 11 класс. 1 тур.

## Вариант 2.

1. Телу массой  $m$ , находящемуся на горизонтальной поверхности, сообщили скорость  $v_0$  в направлении оси  $X$ . График зависимости скорости тела  $v$  от его координаты  $x$  изображён на рисунке. Найдите зависимость величины силы трения, действующей на тело, от координаты  $x$ .



К задаче 1.

2. Два закрытых сосуда ёмкостью  $V_1 = 10$  литров и  $V_2 = 20$  литров имеют жёсткие стенки и поддерживаются при одинаковой постоянной температуре  $0^\circ\text{C}$ . Сосуды соединены короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В первом сосуде находится воздух под давлением  $p_1 = 2$  атм при относительной влажности  $r_1 = 20\%$ . Во втором сосуде находится воздух под давлением  $p_2 = 1$  атм при относительной влажности  $r_2 = 40\%$ . Кран постепенно открывают так, что процесс выравнивания давлений в сосудах можно считать изотермическим. Найдите минимальную и максимальную относительную влажность воздуха в сосуде ёмкостью 10 литров.

3. Заряженная частица двигалась в некоторой области пространства, где имеются взаимно перпендикулярные однородные поля: электрическое — с напряжённостью  $E$ , магнитное — с индукцией  $B$  и поле силы тяжести  $g$ . Вектор скорости частицы при этом был постоянным и перпендикулярным магнитному полю. После того, как частица покинула эту область пространства и начала движение в другой области, где имеется только поле силы тяжести  $g$ , её скорость начала уменьшаться. Через какое время после вылета частицы из первой области её скорость достигнет минимального значения?

4. Одна из пластин плоского конденсатора в форме квадрата со стороной  $a$  закреплена горизонтально, на неё помещена большая тонкая пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . По гладкой верхней поверхности листа диэлектрика может свободно скользить вторая пластина конденсатора массой  $m$ , имеющая такие же

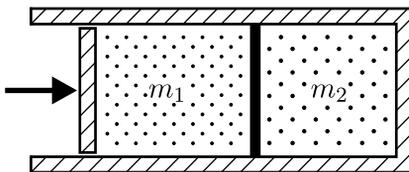
размеры и форму, как и первая. На обкладки конденсатора помещены заряды  $+Q$  и  $-Q$ , и система приведена в равновесие. Верхнюю пластину сдвигают по горизонтали на расстояние  $x \ll a$  параллельно одной из сторон квадрата и отпускают без начальной скорости. Найдите период колебаний этой пластины. Толщина диэлектрика  $d$  существенно меньше смещения верхней пластины  $x$ . Электрическое сопротивление у пластин отсутствует.

5. В случае помутнения хрусталика людям делают операцию по замене естественного хрусталика на искусственный. Искусственный хрусталик для глаза сделан так, что позволяет владельцу без очков чётко видеть далёкие предметы. В отличие от естественного хрусталика, кривизна поверхностей которого может изменяться (при этом глаз фокусируется на выбранных объектах — это называется аккомодацией), искусственный хрусталик жёсткий и «перестраиваться» не может. Оцените оптическую силу очков, дающих возможность без труда читать книгу, находящуюся на расстоянии  $d = 0,3$  м от глаза.

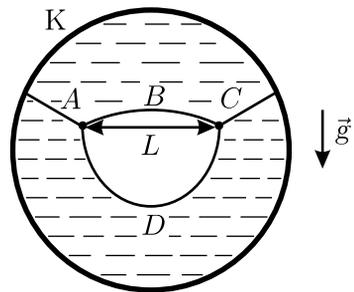
**11 класс. 1 тур.**  
**Вариант 3.**

1. На горизонтальном столе некоторая прямая линия разделяет две области: по одну сторону от этой линии стол гладкий, а по другую — шероховатый. На столе лежит однородная доска длиной  $L = 1$  м. Она расположена перпендикулярно линии и целиком находится на гладкой поверхности. К концу доски прикреплѐн один конец невесомой пружины, имеющей жѐсткость  $k = 4$  Н/м. Другой конец пружины начинают медленно тянуть в горизонтальном направлении вдоль доски так, что она перемещается через линию в сторону шероховатой поверхности. Для того, чтобы полностью перетащить доску на шероховатую поверхность, нужно совершить минимальную работу  $A = 17,5$  Дж. Найдите, какое при этом выделится количество теплоты. Пружина не касается шероховатой поверхности, коэффициент трения доски об эту поверхность — постоянная величина.

2. Идеальный одноатомный газ находится в закреплѐнном теплоизолированном цилиндре, разделѐнном на две части неподвижной теплопроводящей перегородкой и закрытом слева подвижным поршнем, не проводящим тепло (см. рисунок). Масса газа в левой части цилиндра равна  $m_1$ , а в правой —  $m_2$ . Давление на поршень медленно увеличивают, начиная с некоторого начального значения. Найдите молярную теплоѐмкость газа в левой части цилиндра в данном процессе.



К задаче 2.



К задаче 3.

3. К проволочному каркасу  $K$ , имеющему вид окружности, прикрепили нить, которая связана из четырёх кусков  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  с длинами, относящимися друг к другу, как  $1 : 2 : 1 : 3$ . Каркас окунули в мыльный раствор, вынули и, удерживая каркас в вертикальной плоскости, проткнули образовавшуюся мыльную плѐнку между кусками нити  $B$  и  $D$  с длинами, относящимися как  $2 : 3$ . Нить приняла форму, показанную

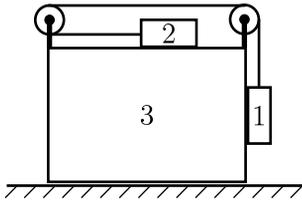
на рисунке. Углы, образованные касательными к кускам нити вблизи узелков, все одинаковы и равны  $120^\circ$ , а куски нити, прикрепленные к каркасу, вблизи узелков наклонены под углами  $30^\circ$  к горизонту. Расстояние между узелками  $L = 4$  см, коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $\sigma = 0,04$  Н/м. Мыльная плёнка настолько тонкая, что её массой можно пренебречь. Какова масса  $M$  всей мокрой нити?

4. Маленький заряженный шарик массой  $m$  шарнирно подвешен на невесомом непроводящем стержне длиной  $l$ . На расстоянии  $1,5l$  слева от шарнира находится вертикальная заземлённая металлическая пластина больших размеров. Стержень отклоняют от вертикали вправо на угол  $\alpha$  и отпускают без начальной скорости. В ходе начавшихся колебаний стержень достигает горизонтального положения, после чего движется обратно, и процесс повторяется. Найдите заряд шарика. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

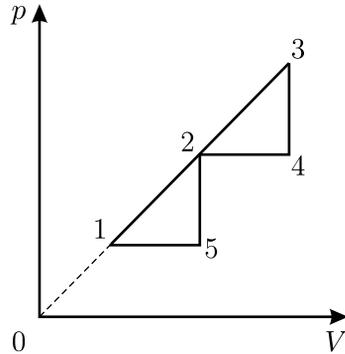
5. В вертикальный цилиндрический стакан налита вязкая жидкость с коэффициентом преломления  $n = 1,5$ . Сверху в стакан вертикально падает параллельный пучок света постоянной интенсивности. Стакан с жидкостью раскрутили вокруг его оси до угловой скорости  $\omega = 1$  рад/с, и при этом высота столба жидкости на оси стакана стала равной  $h = 30$  см. На сколько процентов изменилась после раскручивания интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, поглощением света в жидкости и отражением его внутри стакана пренебречь.

**11 класс. 2 тур.**  
**Вариант 1.**

1. Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Горизонтальная плоскость гладкая, трения между грузами нет, нить и блоки невесомы, нить нерастяжима, массы всех трёх грузов одинаковы. В начальный момент все тела покоятся. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 1.



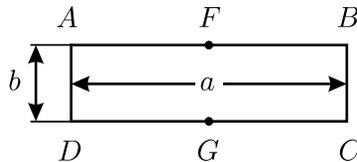
К задаче 2.

2. Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает работу в цикле 1–2–3–4–2–5–1, показанном на  $pV$ -диаграмме (см. рисунок). Точки 1, 2 и 3 лежат на прямой, проходящей через начало координат диаграммы, а точка 2 является серединой отрезка 1–3. Найдите КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если максимальная температура газа в данном цикле больше минимальной температуры в  $n$  раз. Вычислите значение КПД при  $n = 4$ .

3. На горизонтальной поверхности лежит грузик массой  $m$ , соединённый с неподвижной вертикальной стенкой горизонтальной невесомой пружиной жёсткостью  $k$ . Коэффициент трения между грузом и поверхностью  $\mu \ll 1$ . Известно, что после начального отклонения от положения равновесия вдоль оси пружины отпущенный без начальной скорости грузик совершил много колебаний и прошёл до остановки путь  $S$ . Оцените время, которое занял процесс колебаний от начала движения грузика до полной его остановки, а также погрешность полученного результата. Считайте силу трения скольжения не зависящей от скорости и равной максимальной силе трения покоя.

4. Монокристаллы галлия, как и ряда других проводников, обладают анизотропией сопротивления: удельное сопротивление  $\rho_x$  галлия

вдоль главной оси симметрии монокристалла (оси  $X$ ) максимально, а вдоль любой другой оси, перпендикулярной оси  $X$ , минимально и равно  $\rho$ . Из кристалла галлия вырезали тонкую прямоугольную пластинку (см. рисунок) длиной  $a = 3$  см и шириной  $b = 3$  мм так, что ось  $X$  параллельна грани  $ABCD$  пластинки и образует с ребром  $AB$  угол  $\alpha = 60^\circ$ . Если между гранями пластинки, перпендикулярными  $AB$ , создать постоянную разность потенциалов  $V = 100$  мВ, то через пластинку потечёт ток, и в её середине между точками  $F$  и  $G$  поперечного сечения будет существовать разность потенциалов  $U = 6,14$  мВ. Найдите отношение  $\rho_x/\rho$ .

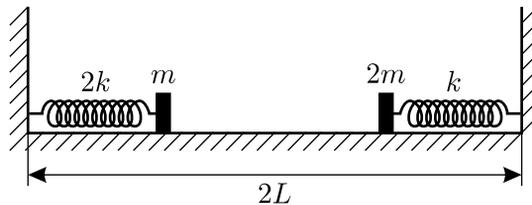


К задаче 4.

5. Путнику, возвращавшемуся тёмной ночью домой, в свою деревню, по дороге, идущей прямо к его дому, с расстояния  $r = 5$  км стал виден огонёк свечи в одном из окон. Внутри дома вблизи соседнего окна стоит наряженная к Новому году ёлка с зеркальными шарами. Оцените, на каком расстоянии от дома путнику станет видно отражение свечи в ёлочном шаре диаметром  $D = 10$  см, если он идеально отражает свет и находится на расстоянии  $a = 1,8$  м от свечи на линии, перпендикулярной дороге? Окна одинаковые, свеча горит ровно.

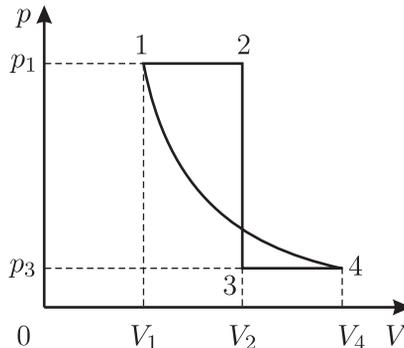
**11 класс. 2 тур.**  
**Вариант 2.**

1. На горизонтальной плоскости лежит полусфера радиусом  $R$  (выпуклой стороной вверх). Из точки, находящейся над центром полусферы, бросают горизонтально маленькое тело, которое падает на плоскость, не касаясь полусферы. Найдите минимально возможную скорость тела в момент его падения на плоскость. Сопротивление воздуха не учитывайте.



К задаче 2.

2. В системе, изображённой на рисунке, прикрепленные к невесомым пружинам грузики при помощи нитей удерживаются на расстояниях  $L/2$  от стенок, к которым прикреплены концы пружин. Длины обеих пружин в недеформированном состоянии одинаковы и равны  $L$ . Нити одновременно пережигают, после чего грузики сталкиваются и слипаются. Найдите максимальную скорость, которую будут иметь грузики при колебаниях, возникших после этого столкновения. Удар при столкновении является центральным. Жёсткости пружин и массы грузиков указаны на рисунке. Трением и размерами грузиков пренебречь.

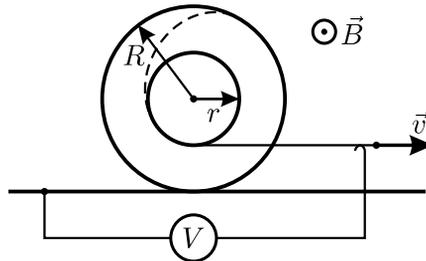


К задаче 3.

3. Тепловая машина, рабочим телом которой является идеальный одноатомный газ, совершает работу в цикле 1–2–3–4–1, состоящем из

двух изобар, изохоры и адиабаты (см. рисунок). Найдите КПД тепловой машины, работающей по такому циклу, если  $V_1 = 5$  л,  $V_2 = 10$  л,  $V_4 = 15$  л,  $p_1 = 3,17 \cdot 10^5$  Па,  $p_3 = 0,51 \cdot 10^5$  Па.

4. Катушка состоит из среднего цилиндра радиусом  $r$  и двух крайних цилиндров радиусами  $R > r$ . Длинный тонкий провод плотно наматывают на катушку следующим образом: сначала обматывают один из крайних цилиндров, а затем продолжают наматывать этот же провод на средний цилиндр в том же направлении, в каком начинали намотку. После завершения намотки катушку кладут на горизонтальный стол, помещённый в однородное постоянное магнитное поле  $B$ , линии индукции которого параллельны оси катушки. К первому концу провода, лежащему на столе, подсоединяют идеальный вольтметр, а другой конец провода, касающийся неподвижного скользящего контакта, соединённого с вольтметром, начинают тянуть вдоль поверхности стола с постоянной скоростью  $v$  в направлении, перпендикулярном оси катушки (см. рисунок). Считая, что катушка катится по столу без проскальзывания, найдите показания вольтметра.



К задаче 4.

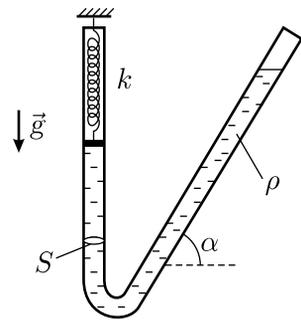
5. На расстоянии  $a = 20$  см от тонкой собирающей линзы вдоль её главной оптической оси расположена тонкая короткая палочка. Длина её действительного изображения, даваемого линзой, в  $k = 9$  раз больше длины палочки. Во сколько раз изменится длина изображения, если сдвинуть палочку вдоль оси на  $\Delta a = 5$  см дальше от линзы?

*Примечание:* при  $|x| \ll 1$  справедлива формула  $1/(1+x) \approx 1-x$ .

**11 класс. 2 тур.  
Вариант 3.**

1. Для подтверждения своей водительской квалификации автомобилист должен выполнить следующее упражнение: за ограниченное время проехать расстояние  $L = 50$  м между точками 1 и 2, начав движение в точке 1 и остановившись в конце пути, в точке 2. Какое наименьшее время  $t$  для этого необходимо, если наибольшая мощность, развиваемая двигателем автомобиля,  $N = 80$  кВт, а тормозной путь автомобиля при скорости  $v = 80$  км/ч составляет  $l_T = 50$  м? Масса автомобиля  $m = 1000$  кг.

2. Одно колено гладкой U-образной трубки с круглым внутренним сечением площадью  $S$  вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом  $\alpha$ . В трубку налили жидкость плотностью  $\rho$  и массой  $M$  так, что её уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто лёгким поршнем, соединённым с вертикальной пружиной жёсткостью  $k$  (см. рисунок). Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

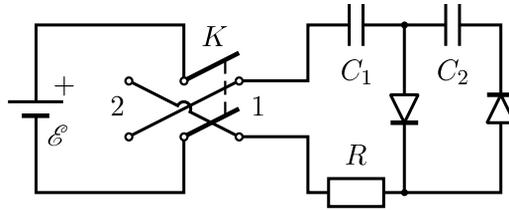


К задаче 2.

3. В покоящемся сосуде объёмом  $V = 31$  л с очень жёсткими и совершенно не проводящими тепло стенками находятся воздух при нормальных условиях и вода в количестве  $m = 9$  г. Сосуд практически мгновенно приобретает скорость  $u$  и движется поступательно. После установления теплового равновесия воздух в сосуде имеет влажность  $r = 50\%$ . Найдите скорость  $u$ . Удельная теплота парообразования воды  $L = 2,5$  МДж/кг, удельная теплоёмкость воды  $C = 4200$  Дж/(кг · К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях  $p = 600$  Па, удельная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме  $c_V = 720$  Дж/(кг · К), средняя молярная масса воздуха  $\mu = 0,029$  кг/моль.

4. В схеме, изображённой на рисунке, конденсаторы ёмкостью  $C_1 = C_2 = C$  первоначально не заряжены, а диоды идеальные. Ключ  $K$  начинают циклически переключать, замыкая его вначале в положение 1, а потом — в положение 2. Затем цикл переключений 1–2 повторяется, и так далее. Каждое из переключений производится после того, как токи в цепи прекращаются. Какое количество  $n$  таких циклов переключений 1–2 надо произвести, чтобы заряд на конденсаторе  $C_2$  отли-

чался от своего установившегося (при  $n \rightarrow \infty$ ) значения не более, чем на 0,1%?



К задаче 4.

5. Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объёму компонентов до смешивания. Показатель преломления света  $n$  смеси зависит от концентраций молекул ацетона  $N_A$  и бензола  $N_B$  следующим образом:

$$n^2 = 1 + K_A N_A + K_B N_B,$$

где  $K_A$  и  $K_B$  — некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится  $V = 200$  мл смеси ацетона и бензола при температуре  $T_1 = 50$  °С. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны  $\lambda = 546$  нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Какое количество и какой жидкости — ацетона или бензола — нужно долить в колбу после её охлаждения до температуры  $T_2 = 20$  °С, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Показатели преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре  $T_2$  равны  $n_A = 1,36$  и  $n_B = 1,50$  соответственно, а у стекла  $n_C = 1,47$ . Коэффициенты объёмного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от  $T_2$  до  $T_1$  одинаковы и равны  $\mu = 0,00124$  К<sup>-1</sup>. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.

## Ответы к вариантам заданий Московских городских олимпиад школьников по физике для 8-х – 11-х классов

Приведены номера задач, использованных в соответствующих вариантах.

### 8 класс.

#### 1 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.242.</b>	1. <b>1.5.</b>	1. <b>1.1.</b>
2. <b>1.173.</b>	2. <b>1.232.</b>	2. <b>1.239.</b>
3. <b>3.40.</b>	3. <b>2.7.</b>	3. <b>2.18.</b>

#### 2 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.2.</b>	1. <b>1.44.</b>	1. <b>1.240.</b>
2. <b>1.245.</b>	2. <b>2.30.</b>	2. <b>2.26.</b>
3. <b>2.27.</b>	3. <b>1.243.</b>	3. <b>2.6.</b>

### 9 класс.

#### 1 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.21.</b>	1. <b>1.174.</b>	1. <b>1.11.</b>
2. <b>2.10.</b>	2. <b>4.7.</b>	2. <b>1.171.</b>
3. <b>2.8.</b>	3. <b>1.177.</b>	3. <b>1.194.</b>
4. <b>3.58.</b>	4. <b>2.4.</b>	4. <b>2.14.</b>

#### 2 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.22.</b>	1. <b>1.108.</b>	1. <b>1.48.</b>
2. <b>1.179.</b>	2. <b>1.49.</b>	2. <b>1.92.</b>
3. <b>1.52.</b>	3. <b>2.29.</b>	3. <b>1.56.</b>
4. <b>3.47.</b>	4. <b>3.59.</b>	4. <b>3.50.</b>

### 10 класс.

#### 1 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.105.</b>	1. <b>1.36.</b>	1. <b>1.254.</b>
2. <b>1.154.</b>	2. <b>1.190.</b>	2. <b>1.210.</b>
3. <b>2.65.</b>	3. <b>2.37.</b>	3. <b>2.59.</b>
4. <b>3.77.</b>	4. <b>3.61.</b>	4. <b>3.76.</b>
5. <b>3.66.</b>	5. <b>3.5.</b>	5. <b>4.30.</b>

2 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.53.</b>	1. <b>1.94.</b>	1. <b>1.137.</b>
2. <b>1.128.</b>	2. <b>1.115.</b>	2. <b>1.119.</b>
3. <b>2.55.</b>	3. <b>2.43.</b>	3. <b>2.70.</b>
4. <b>1.156.</b>	4. <b>3.4.</b>	4. <b>3.24.</b>
5. <b>3.49.</b>	5. <b>3.28.</b>	5. <b>4.13.</b>

11 класс.

1 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.120.</b>	1. <b>1.153.</b>	1. <b>1.155.</b>
2. <b>1.206.</b>	2. <b>2.69.</b>	2. <b>2.52.</b>
3. <b>2.40.</b>	3. <b>3.80.</b>	3. <b>2.79.</b>
4. <b>3.17.</b>	4. <b>3.34.</b>	4. <b>3.10.</b>
5. <b>4.3.</b>	5. <b>4.25.</b>	5. <b>4.33.</b>

2 тур.

Вариант 1.	Вариант 2.	Вариант 3.
1. <b>1.58.</b>	1. <b>1.121.</b>	1. <b>1.152.</b>
2. <b>2.60.</b>	2. <b>1.214.</b>	2. <b>1.218.</b>
3. <b>1.226.</b>	3. <b>2.62.</b>	3. <b>2.71.</b>
4. <b>3.68.</b>	4. <b>3.81.</b>	4. <b>3.32.</b>
5. <b>4.34.</b>	5. <b>4.27.</b>	5. <b>4.17.</b>

## Задачи первых олимпиад. 1939–1948

Задания (с решениями) олимпиад 1939, 1940, 1941, 1944–1948 годов опубликованы в первом (1949 г.) издании книги М. П. Шаскольской и И. А. Эльцина [1]. Здесь без изменений (с сохранением оформления, обозначений, а также нумерации рисунков; переносы в тексте сделаны по современным правилам) воспроизводятся все условия задач олимпиад 1939–1941, 1944–1948 гг. (в оригинале решения даны ко всем задачам, здесь — только к задачам 1939 г.). Отметим, что в те времена задания олимпиады не раздавались школьникам на листочках, как сейчас, а выписывались на доске. Поэтому, естественно, в книге [1] они приведены не буквально, а после редакторской обработки.

### ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ОЛИМПИАДАХ<sup>1</sup>

#### ОЛИМПИАДА 1939 ГОДА

(для учащихся 9–10-х классов)

##### I тур

1. В стакане, наполненном до краёв водой, плавает кусок льда (рис. 57). Перельётся ли вода через край, когда лёд растает? Что произойдёт, если в стакане находится не вода, а 1) жидкость более плотная, 2) жидкость менее плотная?

Решение. По закону Архимеда, вес плавающего льда равен весу вытесненной им воды. Поэтому объём воды, образовавшийся при таянии льда, будет в точности равен объёму вытесненной им воды, и уровень воды в стакане не изменится.

Если в стакане находится жидкость более плотная, чем вода, то объём воды, образовавшийся после таяния льда, будет больше, чем объём жидкости, вытесненной льдом, и вода перельётся через край. Наоборот, в случае менее плотной жидкости, после того как лёд растает, уровень понизится.

2. На замкнутый железный сердечник надеты две обмотки (рис. 58). Как определить число витков в каждой из обмоток, если в распоряжении имеется источник переменного тока, провода и вольтметры любой чувствительности?

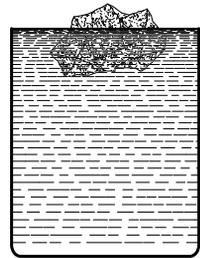


Рис. 57.

<sup>1</sup>Олимпиады проводились для школьников старших классов физическим факультетом Московского ордена Ленина Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Решение. Железный сердечник с двумя обмотками представляет собой обычный трансформатор. Если подключить одну из обмоток трансформатора к источнику переменного тока и измерить вольтметром напряжение на концах обеих обмоток  $v_1$  и  $v_2$ , то можно определить отношение чисел витков в двух обмотках, так как  $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$ , где  $n_1$  и  $n_2$  числа витков в первой и второй обмотках. Однако это измерение не даёт возможности определить  $n_1$  и  $n_2$  порознь. Но если намотать на вторую обмотку ещё некоторое, известное число витков и снова измерить напряжение на концах обмоток, получим второе соотношение  $\frac{v_1}{v'_2} = \frac{n_1}{n_2 + n}$ , где  $n$  — известное число намотанных

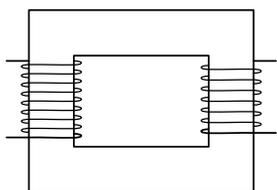


Рис. 58.

витков,  $v'_2$  — напряжение на концах вторичной обмотки с добавочными витками.

Из этих двух уравнений, зная  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v'_2$ , измеряемые вольтметрами, легко определить  $n_1$  и  $n_2$ :

$$n_1 = \frac{nv_1}{v'_2 - v_2}, \quad n_2 = \frac{nv_2}{v'_2 - v_2}.$$

**3.** При определении удельного веса твёрдых тел с помощью гидростатических весов сначала взвешивают тело в воздухе (на обычных весах), а потом погрузив тело в воду. Как нужно изменить этот метод, если удельный вес тела меньше единицы?

Решение. Прикрепить к телу груз с удельным весом, большим единицы, который заставит тело погрузиться в воду, и произвести взвешивание испытуемого тела с грузом сначала в воздухе, а затем в воде. Предварительно нужно определить удельный вес груза, что можно сделать обычным способом. Зная вес груза и его удельный вес, можно найти удельный вес испытуемого тела с помощью следующего расчёта.

Пусть вес испытуемого тела  $P_1$ , вес груза  $P_2$ , его удельный вес  $d_2$ . Вес испытуемого тела и груза в воде  $P'$ . Разность между весом тела с грузом в воздухе и воде позволяет определить объём тела с грузом

$$V = \frac{P_1 + P_2 - P'}{d}$$

( $d$  — удельный вес воды).

Так как  $V$  равно сумме объёмов испытуемого тела  $V_1$  и груза  $V_2$ , а

$$V_2 = \frac{P_2}{d_2},$$

то

$$V_1 = V - \frac{P_2}{d_2},$$

и искомый удельный вес

$$d_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{P_1}{V - \frac{P_2}{d_2}} = \frac{P_1 d d_2}{(P_1 + P_2 - P') d_2 - P_2 d}.$$

4. Прямолинейный проводник начинает двигаться с возрастающей скоростью, пересекая силовые линии однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 59). В одном случае концы проводника замкнуты на омическое сопротивление  $R$ . В другом случае последовательно с омическим сопротивлением  $R$  включена катушка самоиндукции  $L$ . Во что в обоих случаях превращается работа, затрачиваемая на перемещение проводника? В каком из этих двух случаев при одинаковом перемещении будет совершена бóльшая работа?

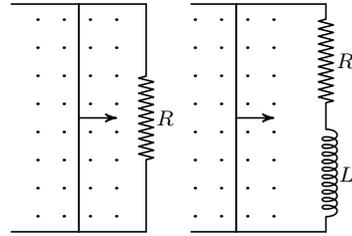


Рис. 59.

Решение. В первом случае работа, затрачиваемая на перемещение проводника, превращается целиком в джоулево тепло, выделяющееся в сопротивлении  $R$ ; во втором случае часть затрачиваемой работы идёт на увеличение магнитной энергии поля, возникающего вокруг катушки самоиндукции.

Работа, затраченная на перемещение проводника в единицу времени, равняется  $EI$ , где  $E$  — электродвижущая сила, возникающая вследствие перемещения проводника в магнитном поле, одинаковая в обоих случаях,  $I$  — ток в контуре. Ток  $I_1$  в первом случае больше, чем ток  $I_2$  во втором случае, так как электродвижущая сила самоиндукции замедляет скорость нарастания тока. Следовательно, и работа в единицу времени  $EI_1 > EI_2$ . Это справедливо также для равномерного движения проводника до установления в контуре стационарного тока, после чего наличие самоиндукции в цепи уже никак не сказывается.

5. Солнечные лучи собираются при помощи вогнутого зеркала и направляются в замкнутую полость через маленькое отверстие в ней (рис. 60). Стенки полости не проводят тепла. Можно ли, увеличивая как угодно размеры зеркала, неограниченно повышать температуру внутри полости?

**Решение.** Нельзя, так как одновременно с поглощением энергии полостью происходит и излучение энергии этой же полостью. Когда температуры Солнца и полости сравняются, полость будет излучать столько же энергии, сколько в неё попадает. Это равенство не зависит от размеров отверстия: при уменьшении размеров отверстия будет уменьшаться излучение полости, но одновременно будет уменьшаться и количество энергии, попадающей в полость через отверстие.

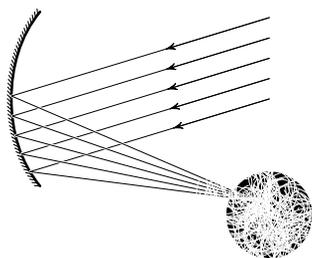


Рис. 60.

### II тур.

**1.** В изогнутой трубке более короткое колено затянута очень тонкой и мягкой непроницаемой плёнкой. Трубка наполнена водородом и помещена отверстием книзу (рис. 61). Какое положение займёт плёнка?

**Решение.** Давление на плёнку изнутри равно давлению воздуха у открытого конца трубки, уменьшенному на вес столба водорода с основанием, равным площади сечения трубки и высотой  $h$ . Давление на плёнку снаружи равно давлению воздуха у открытого конца, уменьшенному на вес столба воздуха с таким же основанием и высотой  $h$ . Так как воздух тяжелее водорода, то давление снаружи уменьшается на бóльшую величину, чем внутри, т. е. наружное давление меньше внутреннего. Поэтому плёнка выгнется наружу.

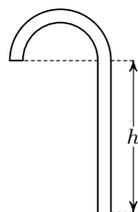


Рис. 61.

**2.** Если широко открытый водопроводный кран зажать пальцем так, чтобы оставалось только маленькое отверстие, то вода из этого отверстия вырывается с большей скоростью, чем при полностью открытом кране. Почему это происходит?

**Решение.** В водопроводной магистрали вода находится под повышенным давлением (в несколько атмосфер). При течении воды по трубе это давление, вследствие действия сил вязкости, постепенно падает почти до атмосферного, под которым и вытекает вода из широко раскрытого крана.

Если зажать кран пальцем, течение воды в трубе почти прекращается, а потому исчезает и падение давления внутри трубы. Таким образом, вода у оставшегося малого отверстия крана оказывается под полным давлением, существующим в магистрали, т. е. под давлением

в несколько атмосфер. Тоненькая струйка воды, выбрасываемая этим высоким давлением, приобретает гораздо большую скорость, чем вода, вытекающая из широко открытого крана.

При совсем маленьком отверстии скорость истечения воды уменьшится вследствие большого падения давления в самом отверстии.

**3.** Даны два цилиндра одинаковых размеров и из одинакового материала. Один цилиндр сплошной, другой сборный и состоит из двух цилиндров, почти без зазора вложенных один в другой, причём трение между внешним и внутренним цилиндрами отсутствует. Какой из цилиндров будет быстрее скатываться без скольжения по одной и той же наклонной плоскости (рис. 62)? Какое положение будет занимать при скатывании внутренний цилиндр, если он не совсем плотно входит во внешний?

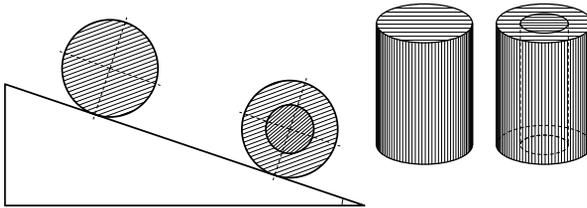


Рис. 62.

Решение. Во втором (сборном) цилиндре играет роль момент инерции лишь наружного цилиндра, так как внутренний цилиндр, вследствие отсутствия сил трения, не вращается. Очевидно, что момент инерции первого (сплошного) цилиндра больше, чем момент инерции внешнего цилиндра во втором случае. С другой стороны, вращающий момент для обоих цилиндров один и тот же (так как веса их одинаковы), а значит, угловое ускорение сплошного цилиндра меньше, т. е. он скатывается медленнее.

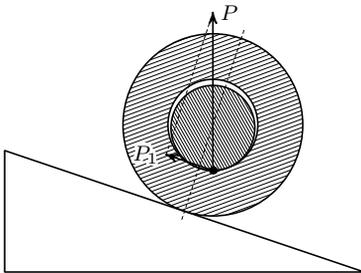


Рис. 63.

Положение внутреннего цилиндра в зазоре можно определить из следующих соображений. Если бы внутренний цилиндр скользил без трения по наклонной плоскости, то его ускорение под действием силы тяжести было бы большим, чем ускорение центра скатывающегося цилиндра. Это видно хотя бы из того, что потенциальная энергия, которой обладает цилиндр в поле тяжести, при скольжении превращается только в кинетическую энергию поступательного

движения, а при скатывании — в энергию и поступательного и вращательного движений. Следовательно, скорость, а значит и ускорение поступательного движения при скольжении должны быть больше, чем при скатывании.

Так как в случае сборного цилиндра оба они опускаются с одинаковым ускорением, то, значит, внешний цилиндр замедляет движение внутреннего. А для этого сила  $P$ , с которой внешний цилиндр давит на внутренний, должна иметь составляющую  $P_1$ , направленную вдоль наклонной плоскости кверху, т. е. сила  $P$  должна быть отклонена несколько назад от направления перпендикуляра к наклонной плоскости. Так как трения нет, то сила  $P$  должна быть нормальна к поверхности цилиндров, и чтобы при этом она была отклонена назад, цилиндры должны касаться друг друга по образующей, лежащей, во всяком случае, впереди радиуса, проведённого к точке касания внешнего цилиндра с наклонной плоскостью (рис. 63).

## ОЛИМПИАДА 1940 ГОДА (для учащихся 9–10-х классов)

### I тур

1. Два одинаковых маятника связаны невесомой пружиной (рис. 64). В одном случае оба маятника колеблются так, что они в каждый момент отклонены на одинаковый угол в одну сторону. В другом случае они колеблются так, что в каждый момент они отклонены на одинаковый угол в противоположные стороны. При каком из этих двух типов колебаний период колебаний будет меньше?

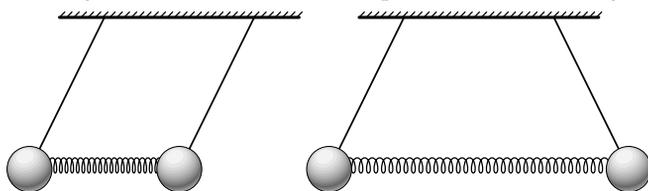


Рис. 64.

2. Два стержня одинаковых размеров, но сделанные из различных металлов, сварены своими торцами (рис. 65). Теплоёмкость стержня  $A$  вдвое больше теплоёмкости стержня  $B$ , но теплопроводность  $A$  вдвое меньше теплопроводности  $B$ . Один из свободных концов стержней нагревается, а другой охлаждается, так что на каждом из концов поддерживается постоянная температура. Будет ли общее количество тепла в стержнях зависеть от



Рис. 65.

Будет ли общее количество тепла в стержнях зависеть от

того, какой из свободных концов стержней ( $A$  или  $B$ ) нагрет и какой охлаждён? (Отдачи тепла через боковые стенки стержней не принимать во внимание.)

3. В U-образную трубку налита вода. Трубка приводится во вращение с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через одно из колен трубки (рис. 66). Как установится уровень воды в обоих коленах трубки?

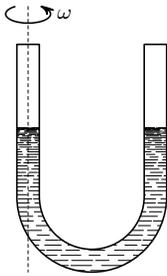


Рис. 66.

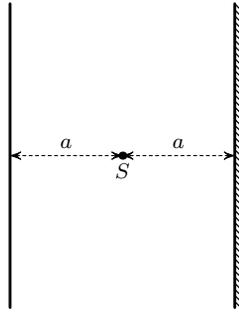


Рис. 69.

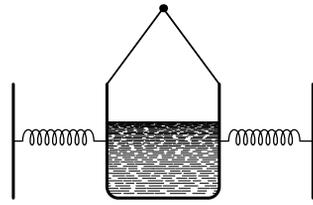


Рис. 70 а.

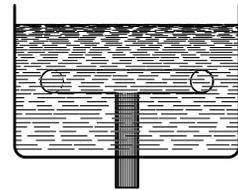
4. На некотором расстоянии  $a$  от точечного источника света  $S$  помещён экран. Как изменится освещённость в центре экрана, если по другую сторону от источника на таком же расстоянии  $a$  поставить плоское зеркало (рис. 69)?

## II тур

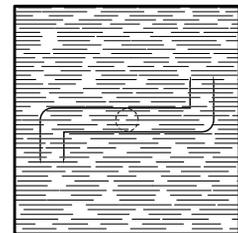
1. Вдоль жёсткого провода, по которому пропускается переменный ток от городской сети, расположена мягкая тонкая металлическая нить. В одном случае через нить пропускается также переменный ток от городской сети. В другом случае через нить пропускается постоянный ток. Что будет происходить с нитью в том и в другом случае?

2. К банке с водой, подвешенной на нитях в виде маятника, прикреплены две натянутые мягкие пружины (рис. 70, а). Что будет происходить с уровнем жидкости в банке, когда маятник будет качаться?

3. В сосуд с водой снизу вставлена трубка, которая может свободно вращаться вокруг своей оси. К верхнему концу трубки припаяны 2 наконечника, изогнутые так, как показано на рис. 71. Что произойдёт с трубкой, когда вода будет вытекать через неё из сосуда?



Вид сбоку



Вид сверху

Рис. 71.

## ОЛИМПИАДА 1941 ГОДА

## I тур

## для учащихся 7–8-х классов

1. В массивную трубку вставлена пружина, которая в свободном состоянии занимает всю длину трубки. На пружину положен шарик, который сжимает её примерно вдвое (рис. 72, *a*). Затем трубка начинает в наклонном положении свободно падать. Что произойдёт с шариком?

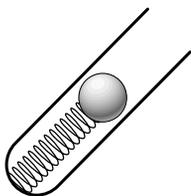
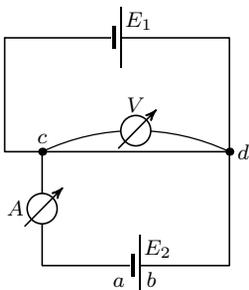
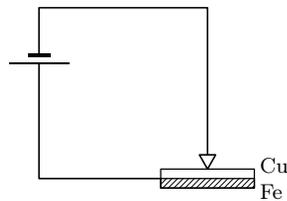
Рис. 72 *a*.

Рис. 73.

Рис. 76 *a*.

2. Две батареи с электродвижущими силами  $E_1$ , и  $E_2$  включены в цепь так, как показано на рис. 73. Сопротивления подобраны так, что амперметр  $A$  показывает отсутствие тока. Что покажет вольтметр  $V$ ?

3. С самолёта, летящего горизонтально с постоянной скоростью, сбрасывается бомба. Где будет находиться самолёт, когда бомба достигнет земли?

4. Две одинаковые по весу оболочки шара, сделанные одна из тонкой резины, а другая из прорезиненной ткани, наполнены одинаковым количеством водорода и у земли занимают одинаковый объём. Который из шаров поднимается выше, если водород из них выходить не может?

## I тур

## для учащихся 9–10-х классов

1. Шофер автомобиля, едущего со скоростью  $v$ , внезапно видит перед собой на расстоянии  $a$  широкую стену. Что ему выгоднее: затормозить или повернуть?

2. Почему монета, катящаяся в вертикальном положении (без наклона), движется по прямой, а наклонённая поворачивает в сторону наклона?

3. Пластина, спаянная из меди и железа, включена в цепь тока, как показано на рис. 76, *a*.

Описать, что произойдёт при прохождении в цепи достаточно сильного тока?

## II тур

### для учащихся 7–8-х классов

1. В калориметре находятся 2 слоя воды — внизу более холодная, сверху более тёплая. Изменится ли общий объём воды при выравнивании температур?

2. Ведро выставлено на дождь. Изменится ли скорость наполнения ведра водой, если подует ветер?

3. Известен опыт Гравезанда: металлический шарик, проходящий сквозь металлическое кольцо (рис. 79), застревает, если его нагреть. Что будет, если нагреть кольцо, а не шарик?

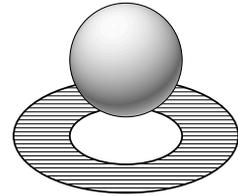


Рис. 79.

4. Почему птицы слетают с провода высокого напряжения, когда включают напряжение?

## II тур

### для учащихся 9–10-х классов

1. Можно ли измерить электроскопом напряжение в цепи переменного тока?

2. Определить период колебаний шарика, скользящего вверх и вниз по двум наклонным плоскостям (рис. 80). Трение и потери скорости при ударе не учитывать.

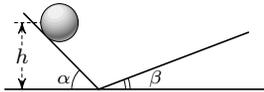


Рис. 80.

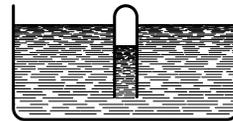


Рис. 81 а.

3. Опрокинутая пробирка укреплена над сосудом с водой (рис. 81, а). Как изменится в ней уровень воды, если вся система начнёт свободно падать?

## ОЛИМПИАДА 1944 ГОДА

Эта олимпиада была рассчитана главным образом на учащихся 9 и 10 классов. Однако в ней принимали участие также и учащиеся 7 и 8 классов. Перед первым туром профессором С. Э. Хайкиным была прочитана лекция по гидро- и аэростатике и гидро- и аэродинамике. Перед вторым туром профессором Г. С. Ландсбергом была прочитана лекция об электричестве и магнетизме. Задачи, предложенные на олимпиаде, являются вопросами к этим лекциям.

## I тур.

1. Почему не устраивают газонапорные башни по аналогии с водонапорными?
2. Будет ли работать гидравлический пресс, если его цилиндр наполнить не жидкостью, а газом?
3. Подводная лодка, опустившись на глинистое или песчаное дно, иногда не может подняться. Как объясняется это явление «присасывания» подводной лодки?
4. В некоторых домах газ в подвале горит лучше, чем в верхних этажах. Почему?

## II тур.

1. Как объяснить опыт Томсона: на железный сердечник, имеющий форму стержня, намотана катушка из большого числа витков медного провода. На сердечник свободно одето кольцо из хорошо проводящего металла (медь). При включении катушки в цепь переменного тока кольцо подскакивает (рис. 84).

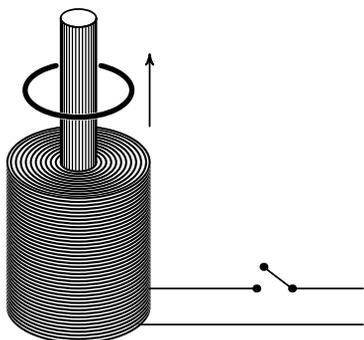


Рис. 84.

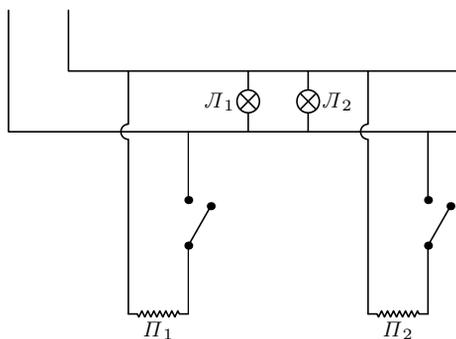


Рис. 85.

2. Как влияет на накал электрических лампочек  $L_1$  и  $L_2$  в квартире включение и выключение в сеть электронагревательных приборов  $P_1$  и  $P_2$ , если эти приборы и лампочки включены так, как это показано на рис. 85.

3. К вертушке, сделанной из железных проволочек, поднесён магнит. Рядом с магнитом под вертушкой поставлена горелка, нагревающая одну из проволочек вертушки (рис. 86). Что будет происходить?

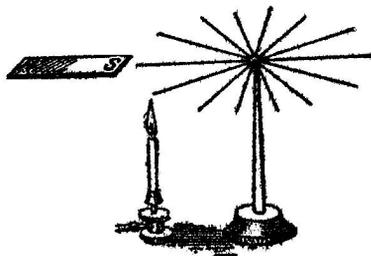


Рис. 86.

4. Распределительный щит трансформаторной подстанции установлен на открытом воздухе. Будут ли вследствие изменений температуры в течении года изменяться показания амперметра и вольтметра, укрепленных на щите?

## ОЛИМПИАДА 1945 ГОДА

### I тур

#### для учащихся 7–8-х классов

1. Для того, чтобы отвести штангу троллейбуса от провода, водитель прежде отдёргивает возможно дальше назад верёвку, привязанную к кольцу, одетому на штангу. Зачем?

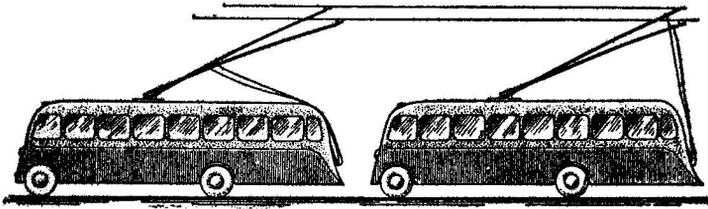


Рис. 87.

2. Почему в кино, когда автомобиль движется вперёд, зачастую кажется, что колёса его вертятся назад?

3. На московских бульварах в некоторых местах установлены автоматические сигналы «Берегись трамвая». Сигнал зажигается заранее, до того, как трамвай подходит, и гаснет, когда трамвай проходит. По какой схеме можно включить этот сигнал?

### I тур

#### для учащихся 9–10-х классов

1. Батарея с электродвижущей силой  $E$  присоединена к схеме, как показано на рис. 90. До какого напряжения в конце концов зарядится конденсатор?

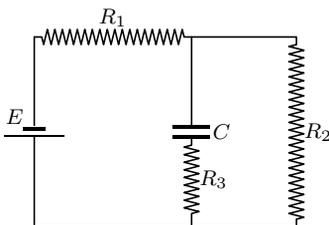


Рис. 90.

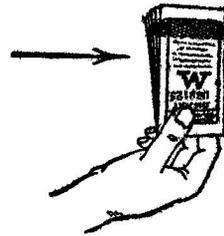


Рис. 91.

2. Для того, чтобы отделить друг от друга тонкие листы (например, билеты в книжечке метро), достаточно подуть сбоку в торец этой пачки. Чем объясняется этот приём?

3. Как выгоднее самолёту взлетать: по ветру или против ветра?

## II тур

### для учащихся 7–8-х классов

1. Сбоку от зеркала (рис. 92) стоит человек  $A$ . Второй человек  $B$  приближается к зеркалу по перпендикуляру, проходящему через середину зеркала. На каком расстоянии от зеркала будет  $B$  в тот момент, когда  $A$  и  $B$  увидят друг друга в зеркале?

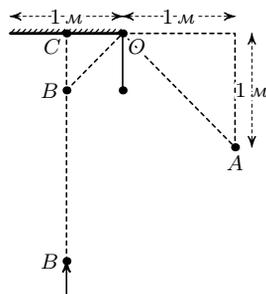


Рис. 92.

2. Смешиваются равные по весу количества воды при температуре  $+50^\circ\text{C}$  и льда при температуре  $-40^\circ\text{C}$ . Какова будет окончательная температура смеси?

3. Если быстро движущийся автомобиль резко затормозить, то его передок опускается к низу. Почему это происходит?

## II тур

### для учащихся 9–10-х классов

1. Конденсатор приключён к аккумулятору (рис. 94). Раздвигая пластины конденсатора, мы преодолеваем силу электростатического притяжения между пластинками конденсатора и, следовательно, совершаем положительную работу. На что идёт эта работа? Что происходит с энергией конденсатора?

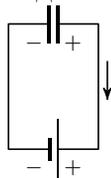


Рис. 94.

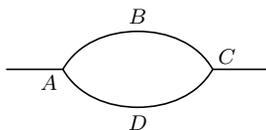


Рис. 95.

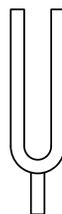


Рис. 96 а.

2. Два однотипных самолёта летят первый по дуге  $ABC$ , а второй по дуге  $ADC$  (рис. 95). Обе дуги лежат в вертикальной плоскости, длины их одинаковы. У которого из самолётов скорость в точке  $C$  будет больше, если оба они имели в точке  $A$  одинаковые скорости, и моторы их развивают одинаковую и постоянную мощность?

3. Зачем камертон (рис. 96, а) делается с двумя ножками? Годился ли бы камертон для своего обычного применения, если бы одну из его ножек отпилили?

## ОЛИМПИАДА 1946 ГОДА

## I тур

## для учащихся 7-х классов

1. В каких случаях герои известной басни Крылова лебедь, рак и щука действительно не сдвинут воза, если считать, что силы их равны и что трения между возом и землёй не существует?

2. Как узнать, намагничена ли пилка от лобзика, не пользуясь никаким другим телом?

3. В некоторых случаях в глубоких скважинах, пробурённых в земле, по трубе, опущенной в скважину, подаётся сжатый воздух. Будет ли избыточное давление (т. е. разность между давлением внутри трубы и снаружи) таким же, как наверху, или другим? Потерей давления в трубе вследствие течения по ней воздуха пренебречь.

## I тур

## для учащихся 8–9-х классов

1. Всегда ли справедливо выражение: как аукнется, так и откликнется, т. е. всегда ли отражённый звук имеет ту же высоту тона, что и падающий?

2. Подсчитать минимальную работу, которую необходимо затратить на то, чтобы перекантовать ящик весом в одну тонну, сначала вокруг ребра  $AB$ , потом ребра  $A'B'$ . Размеры ящика даны на рис. 98, а.

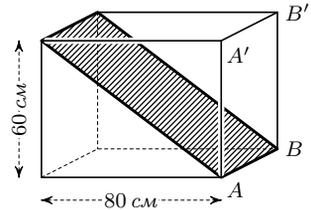


Рис. 98 а.

3. Пуля летит вертикально вверх, достигает высшей точки своего пути и вертикально же падает вниз. В каких местах этой траектории ускорение пули имеет наибольшее и наименьшее значения?

## I тур

## для учащихся 10-х классов

1. Два камня падают в шахту. Второй камень начал своё падение на 1 сек позже первого. Определить движение второго камня относительно первого. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Выделение вещества на катоде при электролизе осуществляется положительными ионами. Полный ток в электролите складывается из двух токов: тока положительных ионов ( $I_+$ ) и тока отрицательных ионов ( $I_-$ ), движущихся в противоположных направлениях. Почему же количество вещества, выделяющееся на катоде, рассчитывается по полному току, т. е. по сумме токов  $I_+$  и  $I_-$ , а не только по току  $I_+$ ?

3. Две катушки, по которым текут токи, взаимодействуют между собой с определённой силой. Как изменится эта сила взаимодействия между катушками, если обе катушки свободно надеты на общий замкнутый железный сердечник, причём все силовые линии магнитного поля проходят внутри сердечника (рис. 99)?

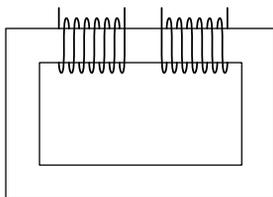


Рис. 99.

**II тур**  
для учащихся 7-х классов

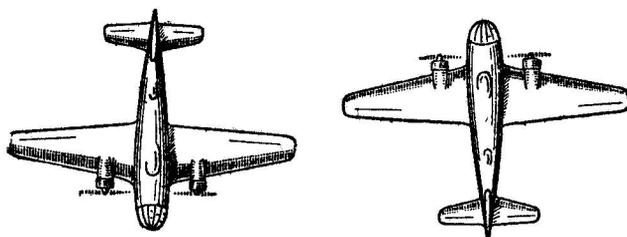


Рис. 100.

1. Два самолёта летят на встречных курсах с одинаковой скоростью  $100 \text{ м/сек}$ . Из пулемёта, расположенного на борту одного самолёта и стреляющего перпендикулярно курсу, обстреливается другой самолёт (рис. 100). На каком расстоянии друг от друга должны расположиться пулевые отверстия в борту второго самолёта, если пулемёт делает 900 выстрелов в минуту? Какую роль играет при этом сопротивление воздуха?

2. Было обнаружено, что в запаянной с обоих концов U-образной трубке уровни воды в обоих коленах стоят на одной высоте, когда трубка вертикальна, а также когда она наклонена в вертикальной плоскости (рис. 101). При каком условии это может быть?

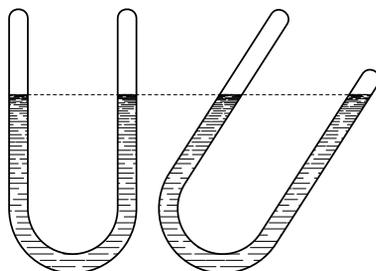


Рис. 101.

3. Может ли человек, стоящий у стены так, что правая нога и правое плечо упираются в стену (рис. 102), поднять левую ногу и не потерять при этом равновесия?

4. Комната освещена с помощью 40 электрических лампочек от карманного фонаря, соединённых последовательно и питаемых от городского тока. После того, как одна лампочка перегорела, оставшиеся 39 лампочек снова соединили последовательно и включили в сеть городского тока. Когда в комнате было светлее, когда горело 40 лампочек или когда горело 39 лампочек?



Рис. 102.

### II тур для учащихся 8–9-х классов

1. Одно колено  $U$ -образного открытого ртутного манометра присоединено к колбе с водой, из которой выкачан воздух. Что будет показывать манометр, когда колба будет погружена в сосуд кипящей водой? Будет ли зависеть показание манометра от высоты над уровнем моря?

2. При лёгкой перегрузке одной из чашек весов коромысло наклоняется, но остаётся в равновесии. Почему оно не опрокидывается?

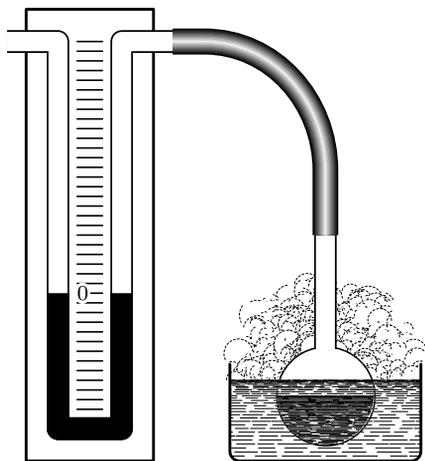


Рис. 103.

### II тур для учащихся 10-х классов

1. Почему окна домов днём кажутся тёмными, темнее наружных стен, даже если стены выкрашены тёмной краской?

2. Как известно, заряженный шарик притягивает бумажку. Как изменится сила притяжения, если окружить металлической сферой а) заряженный шарик, б) бумажку?

3. В свинцовом шаре радиуса  $R$  сделана сферическая полость, поверхность которой касается шара и проходит через его центр. Масса шара до того, как была сделана эта полость, равнялась  $M$ . С какой силой (по закону всемирного тяготения) свинцовый шар будет притяги-

вать маленький шарик массы  $m$ , находящийся на расстоянии  $d$  от центра свинцового шара на прямой, соединяющей центры шаров и полости, со стороны, прилежащей к полости (рис. 105)?

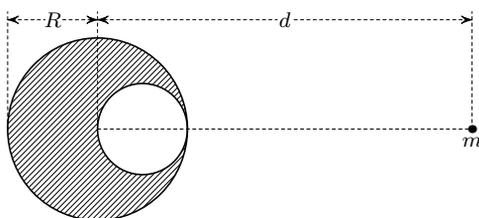


Рис. 105.

## Олимпиада 1947 года

## I тур

## для учащихся 7-х классов

1. К одной из чашек весов подвешена трубка ртутного барометра. Сколько весят гири, лежащие на другой чашке, если весы находятся в равновесии (рис. 106)?

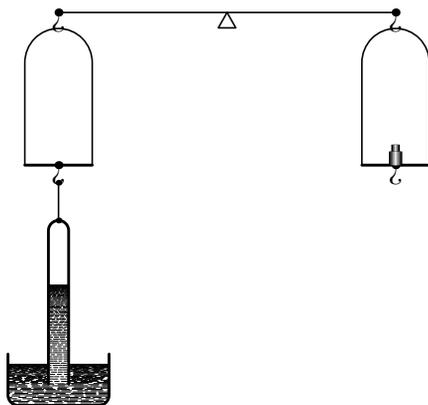


Рис. 106.

2. Хватит ли мощности Днепрогэса, чтобы нагреть до кипения проходящую через его турбины воду? Температура воды в реке  $20^\circ \text{C}$ .

3. Можно ли измерить плотность воздуха, взвешивая мягкий, воздухо непроницаемый мешок сначала пустой (сжатый), а потом наполненный воздухом? Объем мешка в наполненном состоянии известен.

4. Окружная скорость точек земного экватора — около  $460 \text{ м/сек}$ . Что было бы с пулей, вылетевшей из ружья параллельно земной поверхности в западном направлении с такой же скоростью, если бы отсутствовала атмосфера?

**I тур**  
**для учащихся 8–9-х классов**

1. Всасывающим насосом можно поднять воду при  $0^\circ \text{C}$  на 10 м. На какую (большую или меньшую) высоту можно поднять горячую воду при  $90^\circ \text{C}$ ?

2. В сосудах  $A$  и  $B$  находятся углекислый газ ( $\text{CO}_2$ ) и водород ( $\text{H}_2$ ). Манометры  $M_1$  и  $M_2$  показывают одинаковое давление. В каком направлении потечёт газ, если открыть кран  $K$  (рис. 108)? Что произойдёт, если тот же опыт произвести, повернув сосуды манометрами вниз?

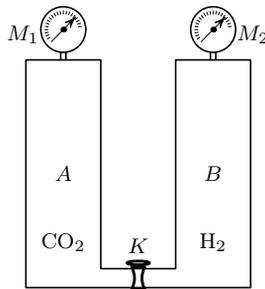


Рис. 108.

3. Мальчик бросает мячи один за другим вверх, каждый следующий в тот момент, когда предыдущий находится в наивысшей точке. На какую высоту поднимаются мячи, если он бросает 2 мяча в секунду?

**I тур**  
**для учащихся 10-х классов**

1. Желая настроить струну в резонанс с камертоном, их заставили звучать одновременно. Появились биения. После того, как к ножке камертона прикрепили грузик, частота биений уменьшилась. Что надо сделать со струной (подтянуть или ослабить), чтобы настроить её в резонанс с камертоном?

2. Если баллон неоновой лампочки потереть, то можно заметить, что она короткое время светится. Как объяснить это явление?

3. На железнодорожной платформе, которая может двигаться, укреплены две одинаковые пушки, направленные в противоположные стороны. Прицелы установлены так, что при одновременных выстрелах оба снаряда попадают каждый в свою цель. Попадут ли снаряды в цели, если одна из пушек выстрелила немного раньше другой? Что произойдёт с платформой после второго выстрела?

**II тур**  
**для учащихся 7-х классов**

1. Три одинаковых гальванических элемента соединили, как показано на рис. 109. Что показывает вольтметр  $V$ , присоединённый параллельно одному из элементов в точках  $A$  и  $B$ ? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

2. На дне закрытой пробирки сидит муха. Пробирка свободно падает, оставаясь в вертикальном положении (рис. 110). Как изменится продолжительность падения, если муха во время падения перелетает из нижней части пробирки в верхнюю?

3. Квадратное зеркальце лежит на столе. Какую форму будет иметь солнечный зайчик от него на вертикальном, достаточно далеко расположенном экране (рис. 111)?



Рис. 110.

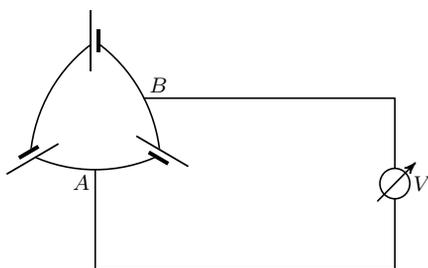


Рис. 109.

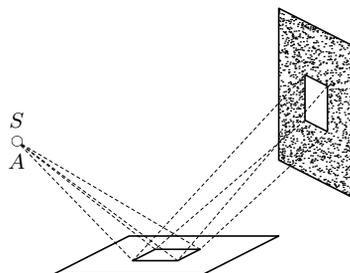


Рис. 111.

**II тур**  
**для учащихся 8–9-х классов**

1. Как надо расположить контакты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  в схеме, показанной на рис. 112, чтобы не было тока в проводниках  $AB$  и  $CD$ ? Проводники  $MACN$  и  $MBDN$  — одинаковой длины, но разного сопротивления. Пойдёт ли ток по  $AB$  и  $CD$ , если после такого подбора соединить между собой какие-нибудь точки  $E$  и  $F$  этих проводников?

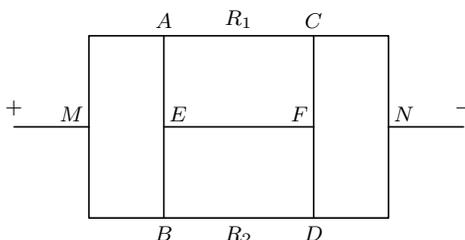


Рис. 112.

2. Батарея  $B$ , состоящая из 60 банок аккумуляторов, заряжается от источника  $E$  постоянного напряжения в 115 в (рис. 113). Зарядный ток должен быть 2,5 а, э.д.с. каждой банки в начале зарядки 1,2 в, внутреннее сопротивление каждой банки 0,02 ом. Каково должно быть сопротивление реостата, включённого между источником и батареей?

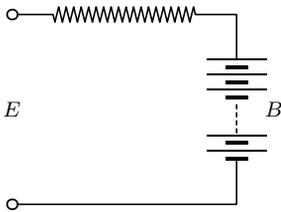


Рис. 113.

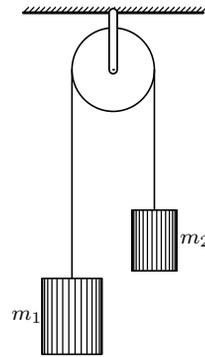


Рис. 114.

3. Через неподвижный блок с моментом инерции  $I$  переброшена нить, на которой висят грузы разных масс  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 114). Каково будет натяжение нити по обе стороны блока?

## II тур

### для учащихся 10-х классов

1. Электронная лампа включена так, как показано на рис. 115. Анодный ток лампы 0,1 а, напряжение батареи накала 5 в, сопротивление накалённой нити 5 ом. Что покажут амперметры 1 и 2? Сопротивлением подводящих проводов, батареи накала и амперметров пренебречь.

2. Два металлических шара одинакового радиуса помещены далеко друг от друга, т. е. расстояние между их центрами много больше их радиуса. Какова ёмкость системы, образованной этими двумя шарами?

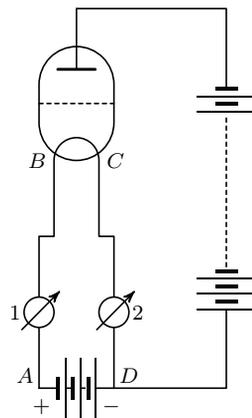


Рис. 115.

3. Пустой ящик, открытый снизу, погружен в вертикальном положении в воду на глубину 18,6 м. Размеры ящика приведены на рис. 116. Найти подъёмную силу, действующую на ящик.

4. Какую форму должна была бы иметь передняя поверхность роговицы глаза воображаемого животного, которое одинаково хорошо видело бы удалённые предметы в воздухе и под водой, без дополнительной аккомодации?

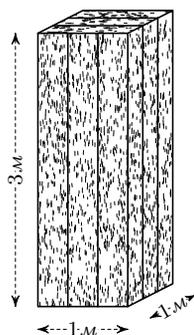


Рис. 116.

## ОЛИМПИАДА 1948 ГОДА

### I тур

#### для учащихся 8-х классов

1. В барометре, изображённом на рис. 117, отверстие  $A$  закрыто пробкой, и барометр наполнен ртутью. Что произойдёт, если вытащить пробку из отверстия  $A$ ?

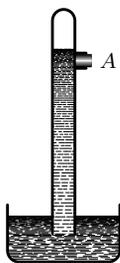


Рис. 117.

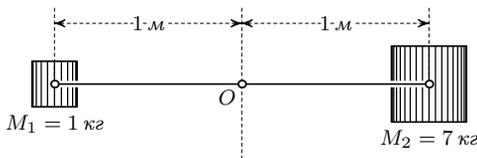


Рис. 119.

2. Почему при ударе кием по нижней части бильярдного шара он движется замедленно, а при ударе по верхней части — первое время ускоренно?

3. Через середину стержня длиной  $2l = 2 \text{ м}$  проходит горизонтальная ось  $O$ , вокруг которой он может вращаться. На концах стержня укреплены грузы  $M_1 = 1 \text{ кг}$  и  $M_2 = 7 \text{ кг}$  (рис. 119). Стержень приведен в горизонтальное положение и освобожден без толчка. Какое давление будет он оказывать на ось в начальный момент после освобождения? Массой стержня и трением в оси пренебречь.

**I тур**  
**для учащихся 9-х классов**

1. На идеально гладкой поверхности лежит груз  $m$ , растянутый пружинами  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 120). Если груз вывести из положения равновесия, он начнёт колебаться с периодом  $T$ . Изменится ли период колебаний, если те же пружины закрепить не в точках  $A_1$  и  $A_2$ , а в  $B_1$  и  $B_2$ . Считать, что при всех растяжениях пружина подчиняется закону Гука.

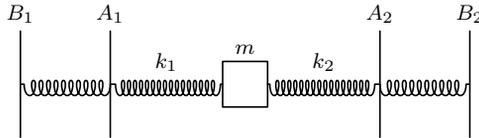


Рис. 120.

2. На подоконнике была оставлена на ночь банка с мутной водой. К утру муть осталась только у той стенки, которая обращена к комнате. В какое время года произведён этот опыт?

3. Стакан горячей воды нужно как можно сильнее охладить за 10 мин. Как выгоднее: сначала положить в воду ложку снега, а потом поставить её на 10 мин. остывать, или дать ей остыть в течение 10 мин., а затем положить такое же количество снега?

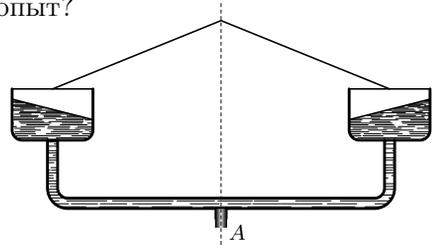


Рис. 121.

4. Сосуд, имеющий такую форму, как показано на рис. 121, наполнен водой и приведён во вращение. Что будет происходить, если вынуть пробку, закрывающую отверстие  $A$ , расположенное на оси вращения?

**I тур**  
**для учащихся 10-х классов**

1. При питании электропечи  $P$  постоянным током нужная температура поддерживается, когда амперметр  $A$  показывает  $5\text{ а}$  (рис. 122). Будет ли поддерживаться та же температура при питании печи пульсирующим током (рис. 123), если тот же амперметр показывает  $5\text{ а}$ ?

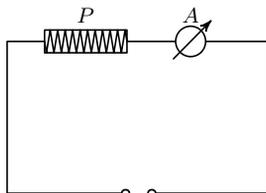


Рис. 122.

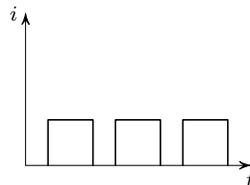


Рис. 123.

2. Где на оптической оси собирающей линзы должен находиться точечный источник света, чтобы ни из одной точки нельзя было одновременно увидеть источник и его изображение?

3. В каких случаях электроны будут достигать анода с большей скоростью: при включении электронной лампы по схеме *A* или по схеме *B* (рис. 126)?

Рассмотреть два случая: 1) анодная батарея не обладает заметным внутренним сопротивлением, 2) анодная батарея имеет большое внутреннее сопротивление.

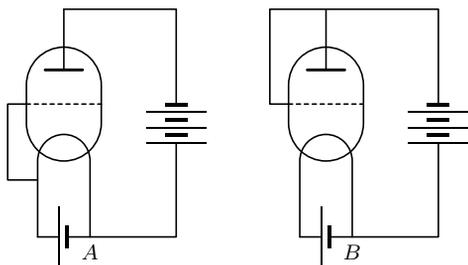


Рис. 126.

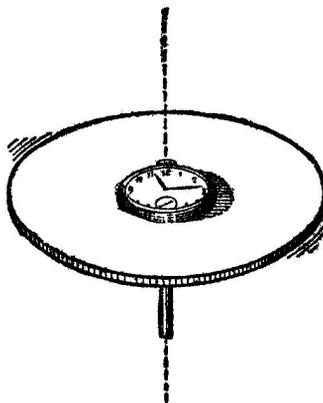


Рис. 127.

4. Карманные часы положены на горизонтальную подставку, которая может вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 127). Как изменится от этого ход часов? Трением диска об ось пренебречь.

## II тур

### для учащихся 8-х классов

1. В сосуде с водой плавает кусок льда, внутри которого заключён кусок свинца (рис. 129). Изменится ли уровень воды в сосуде, когда лёд растает? Что будет, если внутри льда находится не свинец, а пузырёк воздуха?

2. В неподвижный шар ударяет боком (не по линии центров) другой шар такой же массы. Под каким углом разлетятся шары, если они абсолютно упругие и абсолютно гладкие?

3. На абсолютно гладком столе лежит цепочка, свешивающаяся наполовину за край стола. Как изменится время её соскальзывания, если к концам цепочки прикрепить две одинаковые массы?

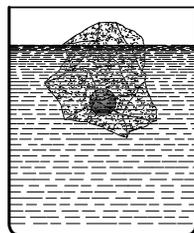


Рис. 129.

4. Два шара одинакового радиуса и из одного и того же материала, но один сплошной, а другой пустой внутри, падают с одинаковой высоты. Который упадёт быстрее?

**II тур**  
**для учащихся 9-х классов**

1. Для измерения объёма порошка пользуются прибором, который носит название волюмометра. Этот прибор имеет следующее устройство (рис. 131). Чашка *A* с помощью шлифа соединяется с изогнутой трубкой, снабжённой краном *K* и пузырьком *B*, оканчивающимся прямой трубкой. Последняя с помощью длинной резиновой трубки соединена с другой прямой трубкой, которую можно перемещать вдоль шкалы вертикально. В верхней и нижней частях на пузырьке *B* нанесены чёрточки, между которыми объём его точно измерен и равен *V*. Обе прямые трубки и резиновая содержат ртуть, образуя манометр. Опишите, как с помощью этого прибора можно произвести измерение объёма порошка?

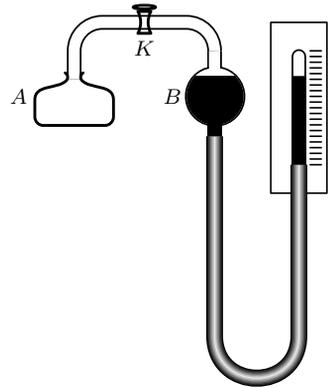


Рис. 131.

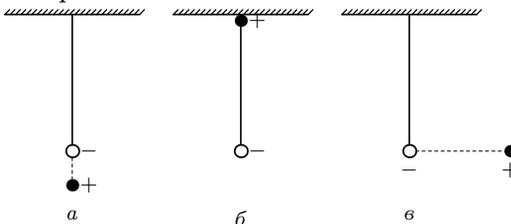


Рис. 132.

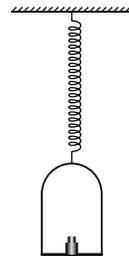


Рис. 133.

2. Имеется маятник, состоящий из металлического шарика, подвешенного на длинной шёлковой нити. Как изменится период колебаний маятника, если шарик зарядить отрицательно, а другой положительный заряд поместить: а) внизу, на одной вертикали с точкой подвеса (рис. 132, *a*), б) в точке подвеса (рис. 132, *б*), в) сбоку, на одном уровне с шариком настолько далеко, что последний, качаясь, не может совсем прикоснуться к этому заряду (рис. 132, *в*)?

3. К спиральной пружине, подчиняющейся закону Гука, прикреплена чашка весов, на которой стоит гиря (рис. 133). С какой силой надо оттянуть чашку вниз, чтобы после того, как её отпустили, гиря в какой-то момент отделилась от чашки?

## II тур для учащихся 10-х классов

1. Электрический ток в металлических проводниках представляет собой движение свободных электронов, сталкивающихся с ионами, из которых построена кристаллическая решётка металла, и отдающих при этом ионам всё то количество движения, которое они приобрели до соударения.

Почему же металлический проводник, по которому идёт ток, не испытывает никаких механических сил в направлении движения электронов?

2. Между шарами *A* и *B*, соединёнными с электростатической машиной и укреплёнными на изоляторе, происходит искровой разряд (рис. 134, *a*). С течением времени у

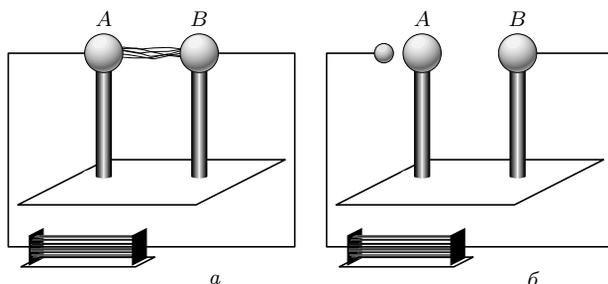


Рис. 134.

изолятора появилась «утечка», т. е. он стал в незначительной степени проводить электричество, и поэтому искровой разряд прекратился.

Почему, устроив дополнительный искровой промежуток между электростатической машиной и шаром *A* (как показано на рис. 134, *б*), удаётся восстановить искровой разряд между шарами *A* и *B*?

3. Плоскопараллельную пластинку разрезали, как показано на рис. 135, после чего получившиеся линзы раздвинули.

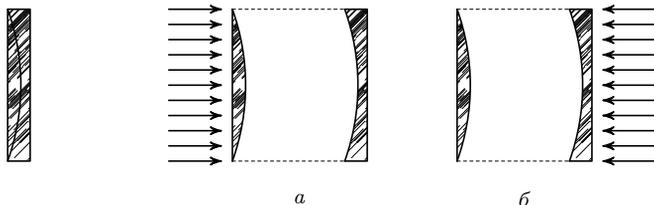


Рис. 135.

Рис. 136.

Что будет с пучком параллельных лучей, падающих на получившуюся систему:

- а) со стороны собирающей линзы (рис. 136, *a*),
- б) со стороны рассеивающей линзы (рис. 136, *б*)?

Рассмотреть случай, когда расстояния между линзами больше и меньше фокусного.

## Когда была первая олимпиада по физике?

Ответить на этот вопрос не очень просто. . .

Во-первых, нужно решить, что именно мы согласны считать школьной олимпиадой. Разного рода соревнования известны человечеству с древнейших времён. Вспомним хотя бы спортивные Олимпийские игры, которые скорее всего проводились уже в IX веке до нашей эры (можно сказать, что хотя бы название школьной *олимпиады* по физике, сборник задач который вы сейчас читаете, относится к тем далёким временам).

Интеллектуальные соревнования, дискуссии, публичные споры тоже имеют очень давнюю историю. Конечно, в те времена не было школьников, да и из программы Всероссийской олимпиады школьников по физике, которой в основном соответствует содержание этой книги, человечеству почти ничего не было известно.

Несколько тысячелетий развивалась наша цивилизация, накапливались научные знания, складывалась и совершенствовалась система образования. Экзамены средневековых университетов (академий, а затем и гимназий) по сути уже не очень сильно отличались от школьных олимпиад 1930–1940-х годов (и те, и другие проводились письменно, участники получали оценки в баллах, определялись лучшие участники — победители).

Так что вопрос о первой школьной олимпиаде (вообще или, в частности, по физике) — в большой степени условный.

Возможна такая точка зрения — первой считать ту (те) школьную олимпиаду по физике, которая считалась первой (с точки зрения организаторов, школьников, учителей и др.) во время её проведения.

К моменту выхода первого издания настоящего сборника задач авторы полагали, что первая (в этом смысле) олимпиада по физике состоялась в 1938 году — это была самая ранняя дата среди всех упоминаний об олимпиаде в известных нам на тот момент источниках информации. Эта дата и была помещена в предисловие к первому изданию.

Как выяснилось в последствии, эта информация всё же не совсем верна — её удалось уточнить. В журнале «Физика в школе» №3 (май–июнь) за 1939 год в разделе «Переписка с читателями» (стр. 70–71) [26] на один из вопросов читателя (С. Я. Халемский (X класс, 20-я средняя школа Киева)) приводится ответ: «Тому же т. Халемскому относительно организации олимпиад по физике сообщаем, что первая такая олимпиада весной текущего года проводится в МГУ. Отчет об этой олимпиаде будет помещен в следующем номере журнала.»

Журнал «Физика в школе» № 3 (май–июнь) за 1939 год с сообщением о первой школьной олимпиаде по физике.

1. С. Я. Халемский (X класс, 20-я средняя школа Киева) просит разъяснить, как получается «отшнурование» силовых линий при электрических колебаниях.

На этот вопрос даем выдержку из книги А. И. Тудоровский «Электричество и магнетизм», ч. II. (ОНТИ, 1935), стр. 478–479. «На рисунке 1 представлено электрическое

очевидно равны длине волны».

Кроме этой выдержки рекомендуем прочитать стр. 360–365 книги Поля «Введение в современное учение об электричестве».

2. Тому же т. Халемскому относительно организации олимпиад по физике сообщаем, что первая такая олимпиада весной текущего года проводится в МГУ. Отчет об этой олимпиаде будет помещен в следующем номере журнала.

3. Тов. Берзилеву. На ваш запрос о получе-

*Фрагмент страницы 70.*

*Фрагмент страницы 71.*

Этот отчет опубликован в журнале «Физика в школе» №4 (июль–август) за 1939 год, стр. 79–80 [27]. Полагаем, что назвав олимпиаду по физике для школьников, состоявшуюся в Московском университете в 1939 году (1 тур — 6 апреля, 2 тур — 30 апреля, 3 тур — дата не выяснена) *первой*, редакция журнала имела для этого веские основания.

Отчет об этой олимпиаде — интересный исторический документ — мы воспроизводим полностью (см. следующую страницу). Вместе с тем обращаем внимание на некоторые явные несоответствия. Так, например, между этим отчетом и первым изданием книги [1] (1949 г.; фрагменты этой книги мы также приводим — см. стр. 586) по материалам олимпиады 1939 года имеются расхождения<sup>2</sup>:

Отчёт [27]	Книга [1]
1-й тур, задача 1	1-й тур, задача 1
1-й тур, задача 2	1-й тур, задача 3
1-й тур, задача 3	2-й тур, задача 2
1-й тур, задача 4	1-й тур, задача 2
2-й тур, задача 1	задача не опубликована
2-й тур, задача 2	2-й тур, задача 1
2-й тур, задача 3	2-й тур, задача 3
2-й тур, задача 4	1-й тур, задача 4
2-й тур, задача 5	1-й тур, задача 5

<sup>2</sup>Очевидно, по крайней мере в одной из публикаций [27, 1] имеется некоторая путаница, к которой следует относиться с осторожностью.

Ещё одно несоответствие — в нумерации олимпиад. Если, следуя [1], считать, что олимпиада проводилась в 1939, 1940, 1941, 1944, 1945 годах и далее ежегодно, то олимпиада 2005 года должна была бы иметь номер 65, а официально она проводилась как 66-я. Возможно, это результат допущенной когда-то арифметической ошибки. Также возможно, что в годы войны (1942, 1943) на самом деле была проведена ещё одна олимпиада, от которой «сохранился» только номер (а остальные материалы не найдены). Это предположение косвенно подтверждается найденными в архиве жюри материалами 20, 21 и 22 олимпиад, состоявшихся соответственно в 1959, 1960 и 1961 годах., см. <http://olympiads.mccme.ru/mfo/19581961/1958-1961.htm>

## ХРОНИКА

### ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ ПРИ I МГУ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

6 апреля 1939 г. при I-м Московском государственном университете началась физическая олимпиада для школьников. Олимпиада имела целью поднять интерес к физике среди учащихся средней школы, дать возможность самостоятельно подумать над некоторыми физическими вопросами. Руководство олимпиадой осуществляло жюри, куда входили преподаватели физического факультета МГУ и работники Научно-исследовательского института физики при МГУ. В состав жюри входили: проф. Хайкин (председатель), проф. Канзов, проф. Конобеевский, доц. Калашников, доц. Фурсов, доц. Ельников.

Участниками олимпиады могли быть все учащиеся девятых и десятых классов, а также лица, окончившие десятилетку, но не поступившие в вуз.

Олимпиада состояла из трех туров. Лица, прошедшие первый тур, допускались на второй. Лица, выдержавшие соревнование второго тура, допускались на третий. Первые два тура содержали задачи по физике, не требующие знаний, выходящих за пределы школьной программы.

Участникам третьего тура было предложено сделать лабораторные работы общего физического практикума физического факультета МГУ.

К первому туру олимпиады приступили 216 человек. Им было предложено 4 задачи и времени на решение этих задач было дано 3 часа.

1. В стакане, наполненном до краев водой, плавает кусок льда. Прольется ли вода через край, когда лед растает? Что произойдет, если в стакане находится не вода, а жидкость более плотная или менее плотная?

2. При определении удельного веса тел с помощью гидростатических весов взвешивают тело сначала обычным способом, а затем, погрузив его в воду.

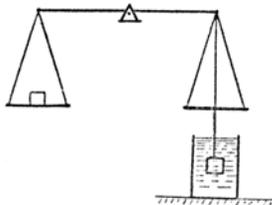


Рис. 1

Как можно применить этот метод для тел, удельный вес которых меньше единицы? (Рис. 1).

3. Если широко открытый водопроводный кран зажать пальцем так, чтобы осталось только маленькое отверстие, то вода из этого отверстия вырывается с гораздо большей скоростью, чем из открытого крана. Объяснить, почему это происходит.

4. На замкнутый железный сердечник одеты две обмотки (рис. 2). Как определить число

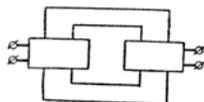


Рис. 2

витков каждой из обмоток, если в вашем распоряжении есть источник переменного тока и вольтметры переменного тока любой чувствительности?

Во втором туре, который состоялся 30 апреля, участвовало 106 человек. Им было предложено пять следующих задач.

1. Массивный диск закреплен на оси. Ось диска лежит на наклонных направляющих, по которым вся система без скольжения скаты-

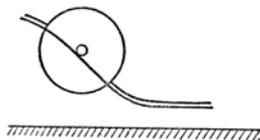


Рис. 3

вается вниз. Внизу наклон направляющих постепенно уменьшается, так что диск плавно опускается на шероховатую горизонтальную плоскость.

Как изменится скорость вращения и поступательного движения диска после того, как он опустится на горизонтальную плоскость?

2. В изогнутой трубке более короткое колено закрыто пленкой. Второе колено трубки открыто. Трубка наполнена водородом и помещена отверстиями книзу. Какое положение займет упругая пленка, закрывающая более короткое колено?

3. Даны два цилиндра одинаковых размеров и из одинакового материала. Первый цилиндр сплошной, второй сборный — состоит из



Рис. 4

двух цилиндров, вложенных один в другой; трение между внешним и внутренним цилиндрами отсутствует. Какой из цилиндров будет быстрее скатываться без скольжения по одной и той же наклонной плоскости? Какое положение будет занимать при скатывании внутренний цилиндр, если он не совсем плотно входит во внешний цилиндр.

4. Прямолинейный проводник начинает двигаться, пересекая силовые линии однородного



Рис. 5

магнитного поля. Один раз концы замыкаются на омическое сопротивление. Другой раз последовательно с омическим сопротивлением включается катушка самоиндукции.

Во что превращается работа, затрачиваемая на перемещение проводника? В каком из этих двух случаев при том же перемещении будет совершаться большая работа?

5. Солнечные лучи собираются при помощи идеального вогнутого зеркала и направляются

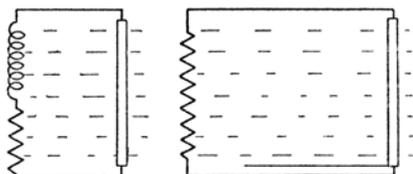


Рис. 6

в замкнутую, непроводящую тепло полость через малое отверстие в полости. Можно ли, увеличивая как угодно размеры зеркала, неограниченно повышать температуру внутри полости?

На третий тур олимпиады было допущено 28 человек. Участникам были предложены для выполнения лабораторные работы, распределенные среди них по жребию.

Описания этих работ содержатся в книге

А. П. Соколова «Физический практикум». ОНТИ, 1937.

Названия лабораторных работ следующие: Изучение законов падения тел на приборе

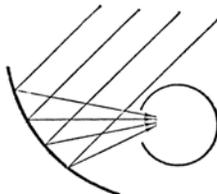


Рис. 7

Атвуда. Определение напряжения тяжести посредством маятника.

Определение плотности жидкостей по способу сообщающихся сосудов при помощи катетометра. Определение удельной теплоемкости твердых тел прибором Реньо.

Градирование амперметра и вольтметра. Определение сопротивления мостиком Уитстона. Определение электродвижущей силы гальванического элемента методом компенсации и при помощи капиллярного электрометра Оствальда. Определение силы света лампочки накаливания и изучения ее светового поля с помощью фотометра. Проверка закона обратных квадратов с помощью фотозлемента и определение чувствительности фотозлемента. Определение главного фокусного расстояния выпуклой и вогнутой линз. Изучение спектров испускания паров и газов, спектральный анализ и градуирование шкалы спектроскопа.

На выполнение этих работ было дано 5 час. От каждого участника требовалось умение разобраться в приборах по описанию, провести все измерения с наибольшей тщательностью, выполнить необходимые подсчеты и составить график или цифровой отчет.

Из 28 участников третьего тура 27 человек вышли победителями олимпиады, из них 1-е место занял Я. Фридлянд (255-я школа); два вторые места заняли Г. Степанов (114-я школа); Г. Косоуров (407-я школа); 4 третьих места заняли: Б. Осинников (344-я школа); С. Кучай (277-я школа); П. Гастев (635-я школа); Б. Самойлов (окончивший десятилетку).

Остальные 20 человек получили похвальные грамоты от физического факультета МГУ.

Информацию об истории Московской городской олимпиады школьников по физике нам помогли собрать участники событий тех лет:

Акива Моисеевич Яглом (студент МГУ 1 курса 1938/1939 уч. г.),  
Ефим Арсеньевич Либерман (выпускник МГУ 1949 г.),  
Михаил Сергеевич Смирнов (выпускник МГУ 1950 г.),  
Николай Николаевич Константинов (выпускник МГУ 1954 г.),  
Игорь Иванович Иванчик (выпускник МГУ 1954 г.).

Благодарим их за помощь, а также за неоценимый вклад в развитие физико-математического образования, результатами которого воспользовались уже многие поколения школьников.

В книге [1] в списке организаторов первых олимпиад была также упомянута фамилия студента Мышкис (без инициалов). Мы предположили, что это — математик Анатолий Дмитриевич Мышкис (студент 1 курса 1937/1938 уч. г.). Однако, обратившись к нему, получили интересное разъяснение<sup>3</sup>:

*К сожалению, я не участвовал в организации школьных олимпиад по физике. Если моя фамилия в связи с этим как-то упоминалась, то, по-видимому, имелся в виду мой двоюродный брат Мышкис Джим Меерович. Он провел детство в США, примерно в 1935 г. с семьей переехал в СССР, тут в 1937 г., как и я, окончил школу и поступил на физфак МГУ (а я на мехмат), где за время учебы показал выдающиеся способности. Однако уже в это время его отца незаконно репрессировали, в 1941 г. Джим пошел в ополчение и вскоре погиб на фронте.*

---

<sup>3</sup>Письмо по электронной почте 12.01.2006.

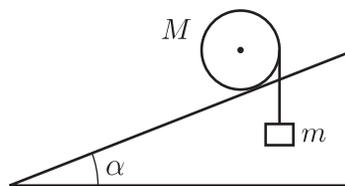
## Олимпиада 2006 года. Условия

**06.1.** [8–9] (2006, 8–1) Школьники побывали в селе Константиново, на родине Сергея Есенина, и возвращались к себе домой в Рязань на автобусах. Автобусы ехали со скоростью  $v_1 = 70$  км/ч. Пошёл дождь, и водители снизили скорость до  $v_2 = 50$  км/ч. Когда дождь кончился, автобусы вновь поехали с прежней скоростью и въехали в Рязань на 10 минут позже, чем было запланировано. Сколько времени шёл дождь?

**06.2.** [8–9] (2006, 8–1) В двухлитровую пластиковую бутылку через короткий шланг накачивается воздух до давления 2 атм. Шланг пережимается, и к нему присоединяется герметичный тонкостенный полиэтиленовый пакет большой ёмкости (больше 10 литров) без воздуха внутри. Бутылку вместе с пакетом кладут на одну чашку весов и уравновешивают гирями, которые помещают на другую чашку, а затем зажим ослабляется. Воздух из бутылки перетекает в пакет, и равновесие весов нарушается. Груз какой массы и на какую чашку весов нужно положить, чтобы равновесие весов восстановилось? Плотность воздуха равна  $1,3$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**06.3.** [8–10] (2006, 8–1) В калориметре находится  $m = 100$  г расплавленного металла галлия при температуре его плавления  $t_{\text{пл}} = 29,8$  °С. Его начали медленно охлаждать, оберегая от внешних воздействий, и в результате температура понизилась до  $t = 19,8$  °С, а галлий остался жидким. Когда переохлаждённый таким образом жидкий галлий размешали палочкой, он частично перешёл в твёрдое состояние. Найдите массу отвердевшего галлия и установившуюся в калориметре температуру. Удельная теплота плавления галлия  $\lambda = 80$  кДж/кг, удельная теплоёмкость жидкого галлия  $c = 410$  Дж/(кг · °С). Теплоёмкостью калориметра и палочки пренебречь.

◇ **06.4.** [9–10] (2006, 9–1) Цилиндр массой  $M$  поместили на рельсы, наклоненные под углом  $\alpha$  к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы  $m$  нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



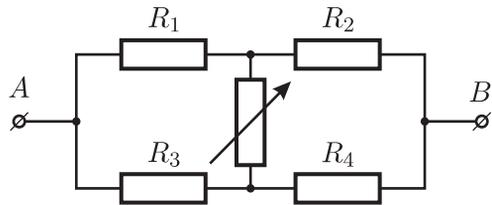
К задаче 06.4.

**06.5.** [8–10] (2006, 9–1) Алюминиевая проволока диаметром  $d = 2,5$  мм, не слишком гнутая, покрыта льдом. Общий диаметр проволоки со льдом равен  $D = 3,5$  мм. Температура

льда и проволоки  $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ . По проволоке пустили ток силой  $I = 15 \text{ A}$ . За какое время лёд растает? Плотность льда  $\rho_{\text{л}} = 0,9 \text{ г/см}^3$ , а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340 \text{ кДж/кг}$ . Удельное сопротивление алюминия  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

◇ **06.6.** [9–10] (2006, 9–1)

Электрическая цепь состоит из трёх резисторов с известными сопротивлениями  $R_1 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 30 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 60 \text{ Ом}$ , одного резистора с неизвестным сопротивлением  $R_3$  и одного переменного резистора



К задаче 06.6.

(см. рисунок). При измерении сопротивления  $R_{AB}$  между точками  $A$  и  $B$  этой электрической цепи выяснилось, что оно не зависит от сопротивления переменного резистора. Найдите величины сопротивлений неизвестного резистора  $R_3$  и всей цепи  $R_{AB}$ .

**06.7.** [8–11] (2006, 9–1) В секстанте, который позволяет определять угол  $\varphi$  возвышения Солнца над горизонтом в полдень и, таким образом, широту местности, используются два плоских зеркала, от которых свет поочерёдно отражается и угол  $\alpha$  между которыми регулируется. Изображение Солнца в этих зеркалах при измерениях с помощью секстанта необходимо совместить с линией горизонта, подбирая угол  $\alpha$ . Найдите связь угла  $\alpha$  с углом  $\varphi$  и объясните, почему использование секстанта сильно упрощает задачу нахождения угла  $\varphi$ , особенно при качке корабля.

**06.8.** [9–10] (2006, 10–1) Однажды летним утром кузнечик сидел на асфальте. Когда Солнце поднялось на угол  $\varphi$  над горизонтом, он прыгнул в сторону Солнца с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. С какой скоростью движется по асфальту тень кузнечика спустя время  $t$  после прыжка?

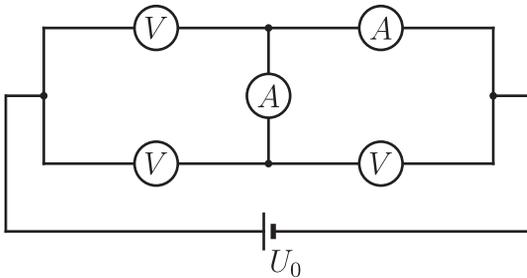
**06.9\*.** [9–11] (2006, 10–1) На шарнирно закреплённой доске на расстоянии  $R$  от шарнира находится маленькая шайба. Доску, первоначально расположенную горизонтально, начали вращать вокруг шарнира в вертикальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . При каком значении угла  $\alpha$  наклона доски к горизонту шайба начнёт скользить по доске? Коэффициент трения шайбы о доску  $\mu < 1$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**06.10.** [10–11] (2006, 10–1) Два космических корабля с массами  $m_1$  и  $m_2$  летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой  $M$  много больше их масс. Скорости кораблей на большом

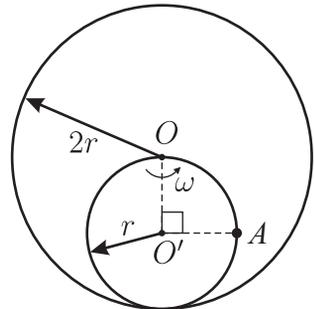
удалении от звезды были равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. После пролёта кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от неё векторы их скоростей изменили свое направление на  $90^\circ$  и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии  $l_1$ . На каком минимальном расстоянии от звезды  $l_2$  пролетел второй корабль?

**06.11\***. [10–11] (2006, 10–1) В цилиндре под поршнем находится при нормальных условиях порция гелия в количестве  $\nu = 2$  моль. Ей сообщают количество теплоты  $Q = 100$  Дж, при этом температура гелия увеличивается на  $\Delta T = 10$  К. Оцените изменение объёма газа в этом процессе, считая его теплоёмкость постоянной.

◇ **06.12\***. [9–11] (2006, 10–1) К идеальной батарейке с ЭДС  $U_0 = 1,3$  В подключена мостовая электрическая цепь, собранная из трёх одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров, причём один из миллиамперметров включён в диагональ мостика. Известно, что показания миллиамперметров отличаются в 3 раза. Каким может быть отношение сопротивлений вольтметра и миллиамперметра? Считая, что сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, определите показания каждого из вольтметров.



К задаче 06.12.



К задаче 06.13.

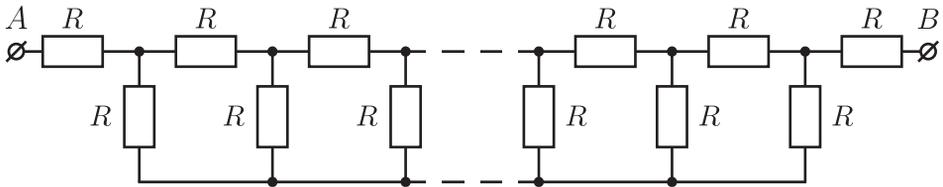
◇ **06.13\***. [11] (2006, 11–1) По внутренней поверхности большого неподвижного обруча радиусом  $2r$  без проскальзывания катится малый обруч радиусом  $r$ . Отрезок  $OO'$ , соединяющий центры обручей, движется с угловой скоростью  $\omega$ . К малому обручу в точке  $A$  прикреплен грузик. В некоторый момент времени обручи и грузик расположены так, как показано на рисунке. Чему равно в этот момент ускорение грузика?

**06.14.** [9–11] (2006, 11–1) На закреплённой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, удерживают лёгкий лист бумаги. На него положили большой деревянный брусок. С каким ускорением начал

двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили? Коэффициент трения между бруском и бумагой  $\mu_1$ , между бумагой и наклонной плоскостью  $\mu_2$ .

**06.15\***. [10–11] (2006, 11–1) Закреплённая непроводящая тонкостенная однородная сфера радиусом  $R$  и массой  $M$  равномерно заряжена по поверхности зарядом  $Q$ . Из неё вырезают маленький кусочек массой  $M/10000$ , сжимают его в крошечный комочек (не меняя заряд) и помещают в центр сферы. Комочек отпускают. Чему будет равна его скорость на большом удалении от сферы? А в момент вылета из сферы? Сила тяжести отсутствует.

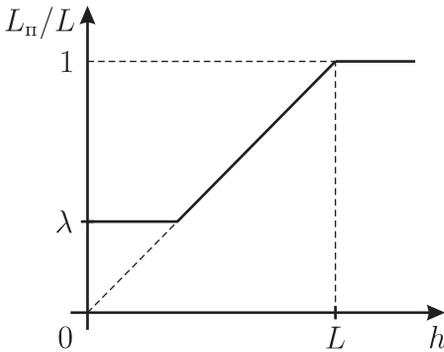
◇ **06.16**. [10–11] (2006, 11–1) Найти сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  цепи, изображённой на рисунке и состоящей из бесконечного числа одинаковых резисторов с сопротивлением  $R$ .



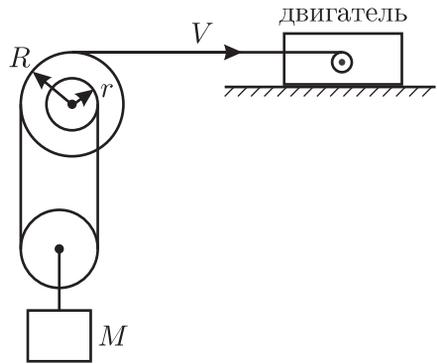
К задаче 06.16.

**06.17**. [11] (2006, 11–1) Для обоснования формулы, связывающей массу и энергию, А. Эйнштейн предложил следующий мысленный эксперимент. Два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  находятся на концах лёгкой неподвижной тележки длиной  $L$ , которая может свободно перемещаться по горизонтальной поверхности без трения. Одно из тел испускает фотон с частотой  $\omega$ , который поглощается вторым телом. Чему будет равна скорость тележки после испускания фотона до его поглощения? А после поглощения фотона? На какое расстояние сместится тележка в рассматриваемом процессе? На какую величину  $\Delta m$  должна уменьшиться масса первого тела и увеличиться масса второго тела, чтобы центр масс системы после поглощения фотона остался на месте? Постоянная Планка равна  $h$ , скорость света  $c$ .

◇ **06.18**. [8–9] (2006, 8–2) Ко дну сосуда при помощи шарнира прикреплена за конец тонкая однородная палочка длиной  $L$ . В сосуд медленно наливают воду и отмечают, какая часть длины палочки  $L_{\text{п}}$  оказывается под водой. График зависимости относительной части длины палочки  $L_{\text{п}}/L$ , находящейся под водой, от высоты  $h$  уровня жидкости над дном сосуда изображён на рисунке. Определите плотность материала палочки, если известна плотность воды  $\rho_в$ .



К задаче 06.18.

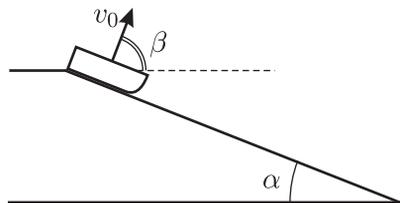


К задаче 06.20.

**06.19.** [8–9] (2006, 8–2) В калориметре находился лёд массой  $m_{\text{л}} = 0,5$  кг при температуре  $t_{\text{л}} = -20$  °С. Удельная теплоёмкость льда  $c_{\text{л}} = 2100$  Дж/(кг·°С), а его удельная теплота плавления  $\lambda = 340$  кДж/кг. В калориметр впустили пар массой  $m_{\text{п}} = 60$  г при температуре  $t_{\text{п}} = 100$  °С. Какая температура установится в калориметре? Удельная теплоёмкость воды  $c_{\text{в}} = 4100$  Дж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды  $r = 2,2 \cdot 10^6$  Дж/кг. Теплоёмкостью калориметра и потерями тепла пренебречь. Ответьте на тот же вопрос, если начальная масса льда равна  $m_{\text{л1}} = 0,3$  кг.

◇ **06.20.** [8–10] (2006, 8–2) Груз массой  $M$  прикреплен к подвижному блоку, подвешенному на нити, один из концов которой намотан на шкив радиусом  $r$ , а другой конец перекинут через соосный, скрепленный с первым шкив радиусом  $R$  и наматывается на вал, приводимый во вращение при помощи двигателя. Скорость горизонтального участка нити равна  $V$ . Найдите мощность, которая развивается двигателем при поднятии груза, считая, что нить не проскальзывает по шкивам.

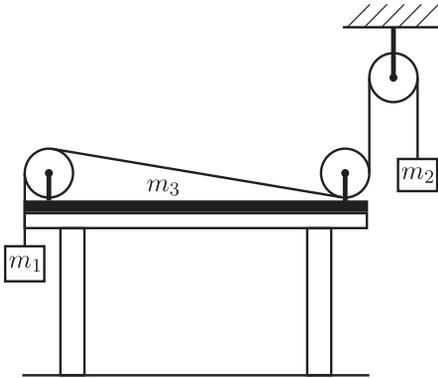
◇ **06.21.** [9–10] (2006, 9–2) Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, школьник бросил снежок под углом  $\beta = 70^\circ$  к горизонту и в этот же момент начал спускаться без начальной скорости с этой горки на санках. Через некоторое время снежок попал в школьника. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.



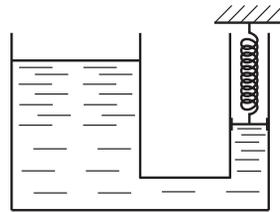
К задаче 06.21.

◇ **06.22.** [9–10] (2006, 9–2) В системе, изображенной на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трения нет. Массы гру-

зов на концах нити равны  $m_1$  и  $m_2$ , однородная доска массой  $m_3$  лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закреплённые на доске блоки, проходят вдоль её торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?



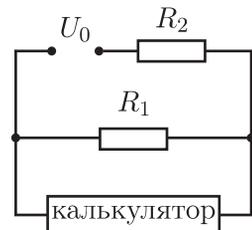
К задаче 06.22.



К задаче 06.23.

◇ **06.23.** [9–10] (2006, 9–2) В два сообщающихся цилиндра налита вода. Один из цилиндров с площадью поперечного сечения  $S_1$  открыт, а другой закрыт сверху поршнем, к которому прикреплена пружина. Система находится в равновесии. Если точку подвеса пружины сместить вниз на расстояние  $a$ , то свободная поверхность воды в первом цилиндре поднимется на расстояние  $\alpha_1 a$ , а поршень опустится на расстояние  $\alpha_2 a$  ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — положительные коэффициенты). Чему равна площадь поперечного сечения  $S_2$  закрытого цилиндра? На какое расстояние  $b_2$  сместился бы поршень, если бы в открытый цилиндр долили объём  $V$  воды, не смещая точку подвеса пружины? Чему равна жёсткость пружины  $k$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ , плотность воды равна  $\rho$ .

◇ **06.24.** [9–11] (2006, 9–2) В технической документации на калькулятор школьник прочитал: «Для нормальной работы калькулятора подаваемое на него напряжение должно быть в пределах от  $U_{\min} = 4,5$  В до  $U_{\max} = 5,5$  В; в зависимости от режима работы калькулятор потребляет ток от  $I_{\min} = 20$  мА до  $I_{\max} = 50$  мА». Не найдя батарейку с нужным напряжением, школьник решил включить данный калькулятор, используя имеющийся в школьной лаборатории аккумулятор с напряжением  $U_0 = 12$  В

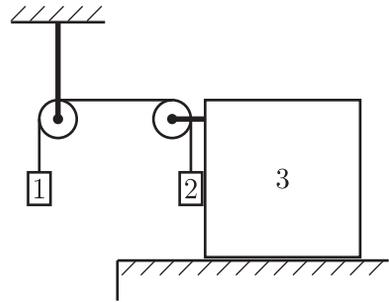


К задаче 06.24.

и малым внутренним сопротивлением и резисторы, включённые в электрическую цепь, схема которой изображена на рисунке. Сопротивление резистора  $R_2 = 40$  Ом. В каком интервале должно лежать сопротивление резистора  $R_1$ , чтобы включённый таким образом калькулятор нормально функционировал?

◇ **06.25\***. [10–11] (2006, 10–2)

В системе, изображённой на рисунке, массы всех трёх грузов одинаковы и равны  $m$ . Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; её участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесома, трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трёх грузов. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



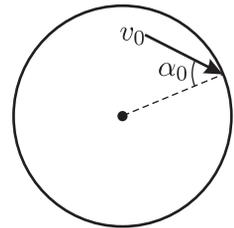
К задаче 06.25.

**06.26\***. [10–11] (2006, 10–2) На гладком горизонтальном столе находится тележка массой  $M = 3$  кг. На её поверхность положили лист бумаги массой  $m_0 = 5$  г, а на него — груз массой  $m = 1$  кг. Коэффициент трения между бумагой и каждым из тел равен  $\mu = 0,7$ . Лист бумаги начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой  $F$ . Считая, что  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, определите значения  $F$ , при которых:

- груз будет неподвижен относительно листа;
- тележка будет неподвижна относительно листа.

Найдите ускорение листа для случаев  $F = 3$  Н и  $F = 10$  Н.

◇ **06.27\***. [10–11] (2006, 10–2) В невесомости внутри сферы радиусом  $R_0$  движется шарик, упруго соударяясь со стенками сферы. Скорость шарика  $v_0$ , угол падения шарика на сферу, то есть угол между вектором его скорости и нормалью к сфере непосредственно перед соударениями, равен  $\alpha_0$ . Сферу начали медленно равномерно сжимать до радиуса  $R_1$ . С какой скоростью  $v_1$  будет двигаться шарик в конце процесса сжатия? Чему при этом будет равен угол  $\alpha_1$  падения шарика на сферу?



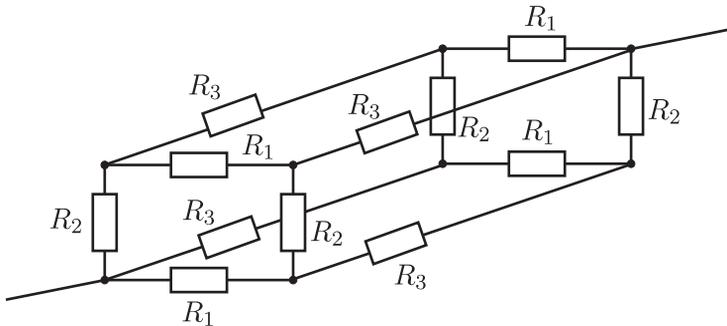
К задаче 06.27.

**06.28.** [10–11] (2006, 10–2) Идеальный одноатомный газ (количество вещества  $\nu$ ) участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изотерм и двух изохор. При изохорическом нагревании газ получает количество теплоты  $Q_1$ , а при изотермическом расширении — количе-

ство теплоты  $Q_2$ . Минимальная температура газа в данном циклическом процессе равна  $T_{\min}$ . Найдите:

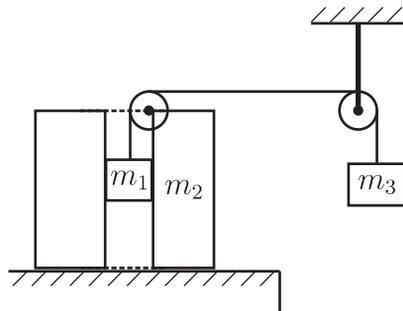
- максимальную температуру газа;
- количества теплоты, отданные газом при изохорическом охлаждении и изотермическом сжатии;
- работу, совершённую газом на каждой из стадий процесса;
- КПД теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу.

**06.29\***. [10–11] (2006, 10–2) Двенадцать резисторов спаяны в виде прямоугольного параллелепипеда таким образом, что сопротивления каждых четырёх параллельных рёбер одинаковы и равны, соответственно,  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Найдите сопротивление этой электрической цепи между точками, лежащими на пространственной диагонали параллелепипеда.



К задаче 06.29.

◇ **06.30\***. [10–11] (2006, 11–2) В системе, изображённой на рисунке, массы всех трёх грузов одинаковы и равны  $m$ . Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; её участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесома, трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трёх грузов. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



К задаче 06.30.

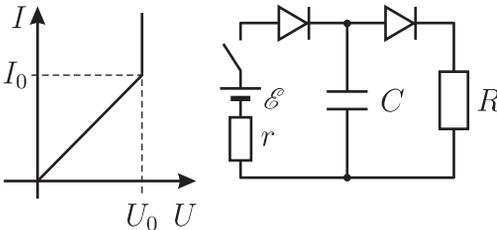
**06.31.** [10–11] (2006, 11–2) Развивая молекулярно-кинетическую теорию, Й. Лошмидт в 1865 г. предложил первый способ оценки разме-

ра и массы молекулы. Он использовал известные в его время данные о длине свободного пробега — расстоянии, которое пролетает молекула газа в промежутке между столкновениями (оно выражается через определяемые из опыта коэффициенты вязкости и теплопроводности). Вслед за Лошмидтом получите формулы для оценки по порядку величины размера молекулы  $r_0$  и её массы  $m_0$  по известным данным — длине свободного пробега  $\lambda$  и плотностям вещества  $\rho_{\text{г}}$  и  $\rho_{\text{ж}}$  в газообразном и жидком состояниях. Получите ответ в общем виде и для числовых значений  $\lambda \approx 10^{-7}$  м,  $\rho_{\text{ж}} \approx 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{\text{г}} \approx 1$  кг/м<sup>3</sup>.

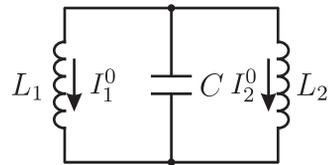
◇ **06.32\***. [10–11] (2006, 11–2) Два одинаковых неидеальных диода с вольтамперной характеристикой, приведённой на графике, включены вместе с конденсатором, двумя резисторами, идеальной батареей и ключом в электрическую цепь, изображённую на рисунке. Сопротивления резисторов  $R = 16$  Ом,  $r = 4$  Ом, ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 4$  В, электрическая ёмкость конденсатора  $C = 100$  мкФ, параметры вольтамперной характеристики диода:  $U_0 = 1$  В,  $I_0 = 50$  мА.

а) Ключ в цепи замкнули. До какого напряжения зарядится конденсатор?

б) После зарядки конденсатора ключ разомкнули. Какое количество теплоты выделится при разрядке конденсатора на резисторе  $R$ ? А на каждом из диодов?



К задаче 06.32.

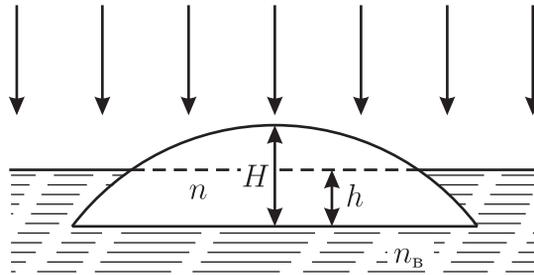


К задаче 06.33.

◇ **06.33\***. [11] (2006, 11–2) Электрическая цепь состоит из катушек с индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  и конденсатора ёмкостью  $C$ , включённых параллельно. В начальный момент времени токи через катушки текут в одну сторону и равны  $I_1^0$  и  $I_2^0$ , а конденсатор не заряжен (см. рисунок). Найдите частоту  $\omega$  возникающих в системе гармонических колебаний и зависимости от времени токов через катушки  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$  и заряда на конденсаторе  $Q(t)$ . Сопротивлением катушек пренебречь.

◇ **06.34\***. [11] (2006, 11–2) В воду (показатель преломления  $n_{\text{в}}$ ) частично погружена тонкая стеклянная плосковыпуклая линза, причём её плоская сторона горизонтальна и находится под водой, а толщи-

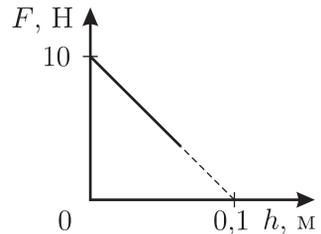
на линзы равна  $H$  (см. рисунок). На эту систему вертикально падает параллельный пучок света. На глубинах  $l$  и  $L > l$  в воде возникают два одинаково ярких изображения. Каковы радиус  $R$  выпуклой поверхности линзы, показатель преломления  $n$  материала линзы и глубина  $h$  её погружения в воду? Отражением света от воды и от линзы, а также поглощением света пренебречь.



К задаче 06.34.

### Олимпиада 2007 года. Условия

◇ **07.1.** [8–9] (2007, 8–1) В широкий сосуд с водой медленно опускают на нити цилиндрический брусок так, что ось цилиндра всё время остаётся вертикальной. График зависимости силы натяжения нити  $F$  от глубины погружения  $h$  нижнего основания цилиндра является отрезком прямой линии, как показано на рисунке. Найдите площадь основания цилиндра  $S$  и его массу  $m$ . Плотность воды  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



К задаче 07.1.

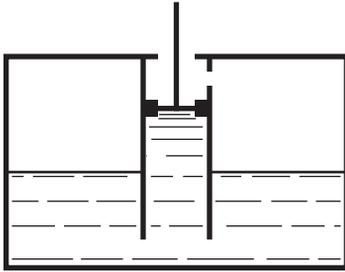
**07.2.** [8–9] (2007, 8–1) В сосуде находился лёд при температуре  $t_{\text{л}} = 0^\circ\text{C}$ . Туда влили воду массой  $m_{\text{в}} = 0,4 \text{ кг}$ , взятую при температуре  $t_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$ . Какая температура установилась в сосуде, если конечный объём его содержимого равен  $V = 1 \text{ л}$ ? Чему равна масса содержимого сосуда? Плотности воды и льда  $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$  и  $\rho_{\text{л}} = 900 \text{ кг/м}^3$ , их удельные теплоемкости  $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$  и  $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$ . Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

**07.3.** [8] (2007, 8–1) В одном из двух одинаково длинных «чёрных ящиков» находится постоянный магнит, а в другом — длинная катушка из медной проволоки, подключённая к источнику постоянного тока

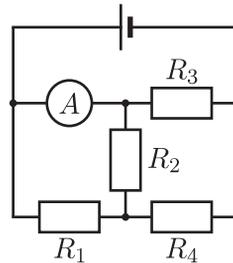
(батарейке). Как, используя только эти «чёрные ящики», определить, в каком из них находится постоянный магнит? Нельзя заглядывать внутрь ящиков, разбирать и разрушать их.

**07.4.** [9–10] (2007, 9–1) Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Марса. Ответ выразите в земных годах. Расстояние от Марса до Солнца в  $n = 1,53$  раза превосходит расстояние от Земли до Солнца. Считайте, что орбиты Земли и Марса являются круговыми.

◇ **07.5.** [9] (2007, 9–1) «Чёрный ящик» представляет собой систему, изображённую на рисунке. Внутри него находятся вода и погружённый в неё узкий вертикальный цилиндр с поршнем. К поршню прикреплен выходящий наружу вертикальный шток. Потянув за шток и подвигав его вверх-вниз, школьник решил, что в «чёрном ящике» находится прикрепленная к штоку пружина, и измерил её коэффициент жёсткости. Он оказался равным  $k = 100$  Н/м. Чему равна площадь  $S$  поршня? Трением и массой поршня можно пренебречь. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



К задаче 07.5.



К задаче 07.7.

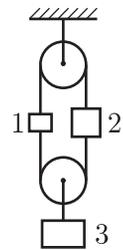
**07.6.** [9–11] (2007, 9–1) В сосуде находился лёд при температуре  $t_{\text{л}} = -20$  °С. Туда влили воду массой  $m_{\text{в}} = 0,4$  кг, взятую при температуре  $t_{\text{в}} = 60$  °С. Каким может быть конечный объём  $V$  содержимого сосуда, если установившаяся в системе температура выше 0 °С? Плотности воды и льда  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, их удельные теплоемкости  $c_{\text{в}} = 4200$  Дж/(кг · °С) и  $c_{\text{л}} = 2100$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг. Теплоёмкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой пренебречь.

◇ **07.7.** [9–10] (2007, 9–1) В электрической цепи, изображённой на рисунке, напряжение источника равно  $U = 9$  В, сопротивления резисторов  $R_1 = R_3 = 60$  Ом и  $R_2 = 100$  Ом. Амперметр, который можно считать идеальным, показывает силу тока  $I = 0,185$  А. Найдите силы

токов  $I_2$  и  $I_3$ , текущих через резисторы  $R_2$  и  $R_3$ , и сопротивление резистора  $R_4$ .

**07.8.** [9–11] (2007, 10–1) По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной  $L = 25$  см. В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки направлены перпендикулярно к ней в разные стороны и равны  $v_1 = 10$  см/с и  $v_2 = 30$  см/с. Какая скорость  $v$  будет у центральной точки линейки через время  $t = 5$  с после начального момента? За какое время  $\tau$  от начального момента линейка повернётся на угол  $90^\circ$  от исходного положения?

**07.9.** [9–11] (2007, 10–1) В системе, изображённой на рисунке, грузы 1 и 2 прикреплены к нитям, массы грузов 1, 2 и 3 равны  $M$ ,  $2M$  и  $3M$  соответственно. Найдите их ускорения. Трение отсутствует. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны.

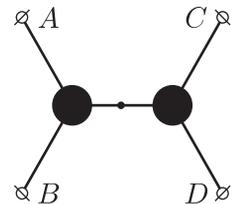


К задаче 07.9.

**07.10.** [9–11] (2007, 10–1) По горизонтальному столу катится без трения тележка массой  $M$  со скоростью  $v_0$ . На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой  $m$ , начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич прошёл по тележке путь  $l$  и остановился относительно неё. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

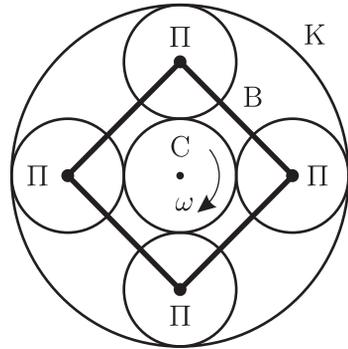
**07.11.** [10–11] (2007, 10–1) В сосуде постоянного объёма находится смесь гелия и кислорода. Смесь нагревают от температуры  $T_1 = 300$  К до температуры  $T_2 = 4T_1/3 = 400$  К, при этом половина атомов гелия покидает сосуд, а давление газа остаётся прежним. Во сколько раз при этом изменяется плотность смеси? Молярная масса кислорода  $\mu_k = 32$  г/моль, гелия  $\mu_r = 4$  г/моль.

◇ **07.12\***. [10–11] (2007, 10–1) Изображённая на рисунке электрическая цепь состоит из двух соединённых друг с другом «чёрных ящиков», каждый из которых имеет три вывода. При подключении к клеммам  $A$  и  $C$  омметр показывает значение сопротивления  $R_{AC}$ , при подключении к клеммам  $B$  и  $D$  — значение  $R_{BD}$ , при подключении к клеммам  $A$  и  $D$  — значение  $R_{AD}$ . Что покажет омметр при подключении к клеммам  $B$  и  $C$ ? Известно, что в «чёрных ящиках» находятся только различным образом соединённые резисторы.



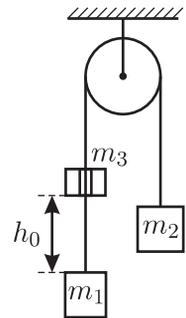
К задаче 07.12.

◇ **07.13\***. [10–11] (2007, 11–1) Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни (С), нескольких планетарных шестерён (П), оси которых соединены жёсткой рамой — водилом (В) и кольцевой шестерни (К), имеющей внутреннее зацепление с планетарными. Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерён равны, и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью  $\omega$ . С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?



К задаче 07.13.

◇ **07.14\***. [10–11] (2007, 11–1) На длинной нити, перекинутой через блок, висят грузы массами  $m_1$  и  $m_2$ . На высоте  $h_0$  над более лёгким грузом держат шайбу из пластилина массой  $m_3$  (см. рисунок). Известно, что  $m_3 > m_2 - m_1 > 0$ . В некоторый момент грузы  $m_1$  и  $m_2$  приходят в движение без начальной скорости. Когда груз  $m_1$  доходит до шайбы, её отпускают без начальной скорости, и пластилиновая шайба прилипает к грузу  $m_1$ . На какую максимальную высоту  $h$  над начальным положением поднимется шайба? Трение и масса блока пренебрежимо малы. Нить невесомая и нерастяжимая, а её участки, не лежащие на блоке, вертикальны.



К задаче 07.14.

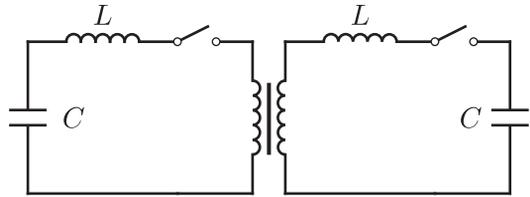
**07.15.** [11] (2007, 11–1) Если направить поток протонов на кусок льда из тяжёлой воды  $D_2O$ , то при минимальной кинетической энергии протонов  $E_1 = 1,4$  МэВ происходит ядерная реакция с образованием ядер  ${}^3_2\text{He}$ . Какую минимальную кинетическую энергию  $E_2$  надо сообщить ядрам дейтерия, чтобы при их попадании на кусок льда из обычной воды произошла эта же ядерная реакция?

**07.16\***. [10–11] (2007, 11–1) В сосуде находился лёд при температуре  $t_{\text{л}} = -20$  °С. Туда влили воду массой  $m_{\text{в}} = 0,4$  кг, взятую при температуре  $t_{\text{в}} = 60$  °С. Каким может быть конечный объём системы  $V$ , если установившаяся в системе температура: а) положительна? б) отрицательна? в) равна нулю? Плотности воды и льда  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_{\text{л}} = 900$  кг/м<sup>3</sup>, их удельные теплоёмко-

сти  $c_{\text{в}} = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $c_{\text{л}} = 2100 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$ , удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335 \text{ кДж}/\text{кг}$ . Теплоёмкостью сосуда и потерями тепла пренебречь.

◇ **07.17.** [11] (2007, 11–1)

Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов ёмкостью  $C$ , двух одинаковых катушек индуктивности  $L$  и идеального трансформатора с коэффициентом трансформации, равным 1.

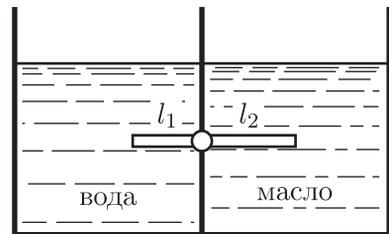


К задаче 07.17.

Если зарядить один из конденсаторов и замкнуть ключ, подсоединяющий его к трансформатору, в цепи возникнут гармонические колебания с частотой  $\omega$ . Найдите возможные частоты гармонических электрических колебаний в цепи, если оба ключа замкнуты.

**07.18\*.** [8–9] (2007, 8–2) Два велосипедиста одновременно выезжают навстречу друг другу из деревень Липовка и Дёмушкино, находящиеся на расстоянии  $L = 10 \text{ км}$  друг от друга. Каждый планирует ехать со скоростью  $V = 20 \text{ км}/\text{ч}$  и, достигнув противоположной деревни, сразу повернуть обратно. Но вдоль дороги всё время дует ветер, скорость и направление которого постоянны. При движении по ветру скорость увеличивается на столько же, на сколько уменьшается при движении против ветра. Велосипедист, который сначала ехал по ветру, достигнув противоположной деревни, сразу повернул назад, а велосипедист, который сначала ехал против ветра, задержался в противоположной деревне, чтобы отдохнуть, и только потом повернул обратно. Известно, что велосипедисты встречались в точках  $A$  и  $B$ , находящихся на расстояниях  $L_A = 2 \text{ км}$  и  $L_B = 6 \text{ км}$  от Липовки. Найдите времена движения  $t_1$  и  $t_2$  из Липовки в Дёмушкино и из Дёмушкино в Липовку. В какой деревне и в течение какого промежутка времени  $\Delta t$  отдыхал велосипедист, ехавший сначала против ветра?

◇ **07.19.** [8–9] (2007, 8–2) Плотность масла измеряют в опыте, схема которого показана на рисунке. Сосуд разделён на две части вертикальной перегородкой. В одну часть сосуда налита вода, в другую — масло. В перегородку встроены шарнир, который может вращаться без трения. В шарнир вставлена однородная сосновая линейка, которая находится в равновесии. Длина левой части линейки равна  $l_1 = 40 \text{ см}$ , правой —

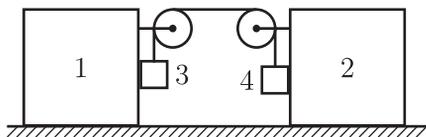


К задаче 07.19.

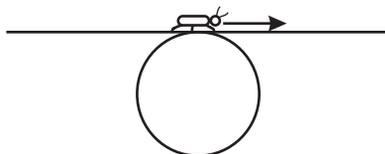
$l_2 = 60$  см. Плотность воды равна  $\rho_{\text{в}} = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, плотность линейки  $\rho = 600$  кг/м<sup>3</sup>. Чему равна плотность масла  $\rho_{\text{м}}$ ?

**07.20.** [8–9] (2007, 8–2) Вазон для цветов, стоящий на улице, имеет плоское дно и вертикальные стенки. Толщина слоя земли в вазоне равна  $h = 15$  см, а температура земли равна  $t = 11$  °С. На улице похолодало, и пошёл снег. Снежинки состоят из льда, имеют массу  $m = 50$  мг, объём  $V = 0,5$  см<sup>3</sup> и температуру  $t_0 = 0$  °С. Они падают вертикально с постоянной скоростью  $v = 1$  м/с. В объёме воздуха  $V_0 = 1$  м<sup>3</sup> находится  $N_0 = 100$  снежинок. За какое время  $\tau$  на земле в вазоне нарастёт слой снега толщиной  $H = 10$  см? Считайте, что вся земля в вазоне равномерно пропитывается водой, имеет в любой момент одинаковую температуру во всём объёме и почти не обменивается теплом со стенками вазона и с воздухом. Плотность земли  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>, удельная теплоёмкость земли  $c = 900$  Дж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг.

◇ **07.21.** [9–11] (2007, 9–2) Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Массы грузов 1 и 2 равны  $M$ , массы грузов 3 и 4 равны  $m$ . Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трения нет.



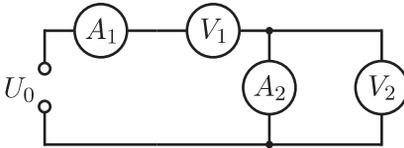
К задаче 07.21.



К задаче 07.22.

◇ **07.22.** [9–11] (2007, 9–2) На неподвижно закреплённом цилиндре радиусом  $R$  лежит тонкая линейка длиной  $l = 2\pi R$  и массой  $M$ . Линейка расположена горизонтально, перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой  $0,2M$ , который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за её шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекаtywаясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии  $x_0$  от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползёт до конца линейки? Под каким углом  $\alpha_0$  к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  между цилиндром и линейкой возможно такое её перекаtywание без проскальзывания?

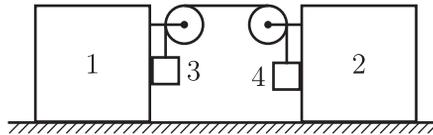
◇ **07.23.** [9–11] (2007, 9–2) Электрическая цепь, изображённая на рисунке, состоит из идеальной батарейки, двух одинаковых вольтметров и двух одинаковых миллиамперметров. Показание миллиамперметра  $A_1$  равно  $I_1 = 1,6$  мА, показания вольтметров равны  $U = 1,2$  В и  $U' = 0,3$  В. Какой из вольтметров —  $V_1$  или  $V_2$  — показывает меньшее значение напряжения? Найдите показание  $I_2$  миллиамперметра  $A_2$  и напряжение батарейки  $U_0$ .



К задаче 07.23.



К задаче 07.24.



К задаче 07.26.

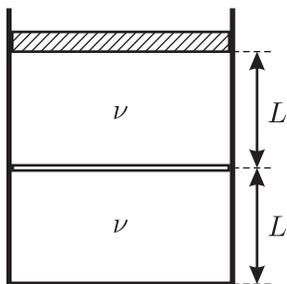
◇ **07.24.** [9–11] (2007, 9–2) Длинное наклонное зеркало соприкасается с горизонтальным полом и наклонено под углом  $\alpha$  к вертикали (см. рисунок). К зеркалу приближается школьник, глаза которого расположены на высоте  $h$  от уровня земли. На каком максимальном расстоянии от нижнего края зеркала школьник увидит: а) изображение своих глаз? б) своё изображение полностью, во весь рост?

**07.25.** [9–11] (2007, 10–2) Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом  $\alpha_1 = 30^\circ$  к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость  $v_1 = v$ , а при броске под углом  $\alpha_2 = 60^\circ$  — начальную скорость  $v_2 = v/2$ . На какой высоте  $h$  над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом  $\beta$  к горизонту наклонён отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения  $g$ .

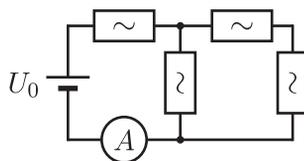
◇ **07.26\*.** [10–11] (2007, 10–2) Найдите ускорения грузов 1 и 2 и силу натяжения нити в системе, изображённой на рисунке. Массы грузов 1, 2, 3 и 4 равны соответственно  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$ . Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трение отсутствует.

◇ **07.27.** [10–11] (2007, 10–2) На столе стоит вертикальный теплоизолированный цилиндрический сосуд. В него вставлены два поршня (см. рисунок). Верхний поршень — тяжёлый, теплонепроницаемый и может двигаться в цилиндре без трения. Нижний поршень — лёгкий и теплопроводящий, но между ним и стенками сосуда существует трение. В каждой из частей сосуда находится по  $\nu$  молей идеального одноатомного газа. Вначале система находилась в тепловом равновесии, а обе части сосуда имели высоту  $L$ . Потом систему медленно нагрели, сообщив ей количество теплоты  $\Delta Q$ . На какую величину  $\Delta T$  изменилась температура газов, если нижний поршень при этом не сдвинулся с места? При каком наименьшем значении  $F$  силы трения между нижним поршнем и стенками это возможно?

Какова теплоёмкость  $C$  системы в этом процессе? Теплоёмкостью стенок сосуда и поршней пренебречь.



К задаче 07.27.



К задаче 07.28.

◇ **07.28.** [10–11] (2007, 10–2) Электрическая цепь (см. рисунок) состоит из идеальной батарейки с ЭДС  $U_0$ , идеального амперметра и четырёх одинаковых нелинейных элементов, для каждого из которых, в отличие от закона Ома, связь силы тока  $I$  и напряжения  $U$  имеет вид  $I = \alpha U^2$ . Какой ток  $I_0$  показывает амперметр?

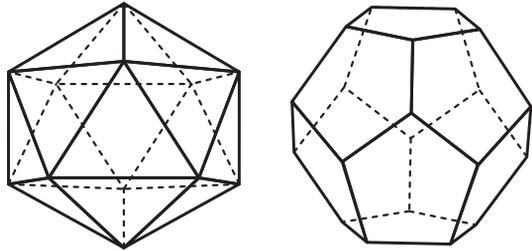
◇ **07.29\*.** [9–11] (2007, 10–2) Тридцать одинаковых резисторов сопротивлением  $R$  каждый соединены между собой в пространстве так, что они являются рёбрами выпуклого правильного многогранника:

в случае а) — двадцатигранника (икосаэдра);

в случае б) — двенадцатигранника (додекаэдра).

Какое сопротивление будет представлять описанная выше система (а) или (б), если подключиться к паре её наиболее удалённых вершин? Сколько разных значений сопротивления можно получить в случае (а) и в случае (б), если подключаться к всевозможным парам вершин этих многогранников?

*Справка:* грани икосаэдра — 20 правильных треугольников, в каждой из 12 вершин сходятся по 5 треугольников; грани додекаэдра — 12 правильных пятиугольников, в каждой из 20 вершин сходятся по 3 пятиугольника (см. рисунки).

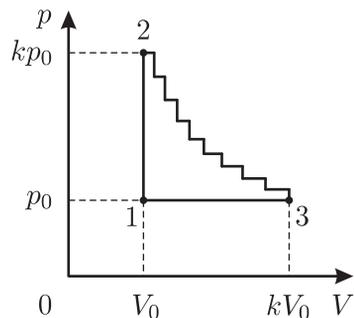


К задаче 07.29.

**07.30\***. [10–11] (2007, 11–2) Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три осколка массами  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = 3m$  и  $m_3 = 4m$ , которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками  $m_1$  и  $m_2$  оказалось равным  $L$ . Чему было равно в этот момент расстояние между осколками  $m_1$  и  $m_3$ , если ни один из осколков ещё не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебечь.

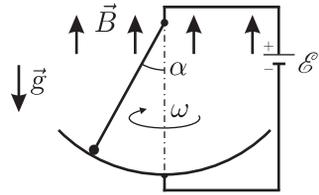
**07.31\***. [11] (2007, 11–2) Велосипедное колесо, вся масса которого сосредоточена в его ободе, раскрутили вокруг оси, удерживая её неподвижной в горизонтальном положении. При этом пришлось совершить работу  $A$ , и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колёса. Затем колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность доски такой же массы, которая может без трения двигаться по столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет доску? Колесо при движении всё время остаётся в вертикальной плоскости.

◇ **07.32\***. [10–11] (2007, 11–2) Над  $\nu$  молями идеального одноатомного газа проводят циклический процесс, график которого изображён на  $pV$ -диаграмме. Цикл состоит из вертикального (1–2) и горизонтального (3–1) участков и «лестницы» (2–3) из  $n$  ступенек, на каждой из которых давление и объём газа изменяются в одно и то же количество раз. Отношение максимального давления газа к минимальному равно  $k$ ; отношение максимального объёма к минимальному также равно  $k$ . Найдите КПД тепловой машины, работающей по данному циклу.



К задаче 07.32.

◇ **07.33\***. [11] (2007, 11–2) На конце невесомого проводящего стержня закреплён маленький металлический шарик, касающийся гладкой проводящей сферической поверхности радиусом  $R = 0,8$  м. Второй конец стержня закреплён в центре сферы при помощи проводящего шарнира так, что стержень может вращаться без трения вокруг него, сохраняя электрический контакт со сферой. Эта система помещена в однородное вертикальное магнитное поле с индукцией  $B = 0,5$  Тл и подключена к батарее так, как показано на рисунке. Если стержень закрутить вокруг вертикальной оси в определённом направлении с частотой  $\omega = 5$  рад/с и под некоторым углом  $\alpha$  к вертикали, то этот угол и частота вращения в дальнейшем не будут меняться. Определите угол  $\alpha$  и ЭДС батареи. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



К задаче 07.33.

**07.34.** [11] (2007, 11–2) Звуковая волна от удалённого источника падает на стену, имеющую вогнутую цилиндрическую форму, под углом, близким к  $\alpha$ , причём эта волна идёт перпендикулярно оси цилиндра. Определите, в какую точку  $A$  вблизи стены следует поместить чувствительный микрофон, чтобы он зарегистрировал максимальную возможную интенсивность звука. Найдите расстояние от этой точки  $A$  до стены и до оси цилиндра. Радиус цилиндра  $R$  много больше размеров стены, но много меньше расстояния до источника. Длина волны звука много меньше размеров стены.

### Олимпиада 2006 года. Решения

**06.1.** Сделаем рисунок и введём на нём следующие обозначения:  $K$  — Константиново;  $R$  — Рязань;  $AB$  — участок, который автобус проехал под дождём за искомое время  $t$ ;  $AC$  — участок, который проехал бы автобус за то же время  $t$ , если бы не было дождя.

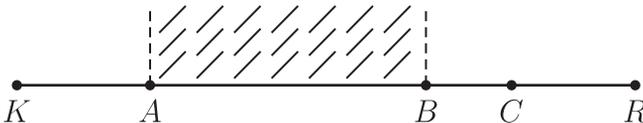


Рис. 06.1.

Ясно, что  $BC = AC - AB = (v_1 - v_2)t$ . С другой стороны, автобус прошёл путь  $KA + AB + CR$  за то же время, за какое было запланировано пройти весь путь  $KR$ . Значит,  $BC = v_1 \Delta t$ , где  $\Delta t = 10$  минут —

время, на которое опоздали автобусы. Приравнивая полученные выражения, имеем:  $(v_1 - v_2)t = v_1 \Delta t$ , откуда  $t = v_1 \Delta t / (v_1 - v_2) = 35$  мин.

**06.2.** Суммарная масса воздуха внутри бутылки и пакета после перетекания воздуха из бутылки в пакет не изменилась. Следовательно, суммарная сила тяжести, действующая на обе оболочки и воздух внутри них, осталась прежней. Однако изменился суммарный объём, который занимают вместе бутылка и пакет, так как после ослабления зажима часть воздуха из бутылки перешла в пакет. Давление в пакете стало равным 1 атм, значит, такое же давление установилось и в бутылке. Воздух, который в бутылке занимал объём 2 л при давлении 2 атм, теперь при давлении 1 атм занимает объём 4 л. Таким образом, в пакете оказалось 2 литра воздуха, и суммарный объём увеличился на 2 литра. На бутылку и пакет со стороны воздуха действует выталкивающая (Архимедова) сила. Приращение этой силы равно:  $\Delta F_A = 0,002 \text{ м}^3 \cdot (1,3 \text{ кг/м}^3) \cdot (10 \text{ м/с}^2) = 0,026 \text{ Н}$ .

Таким образом, для того, чтобы равновесие весов восстановилось, нужно на ту же чашку, где находятся бутылка и пакет, добавить гирьки суммарной массой  $M = \Delta F_A / g = 2,6$  г.

**06.3.** При отвердевании галлия выделяется теплота кристаллизации, что приводит к нагреванию системы до температуры плавления галлия  $t_{\text{пл}} = 29,8$  °С, поскольку только при этой температуре жидкий и твёрдый галлий будут находиться в равновесии.

Количество теплоты, выделяющееся при отвердевании массы  $m_1$  галлия, равно  $\lambda m_1$ . Оно идёт на нагревание всего галлия до температуры плавления; для этого требуется количество теплоты  $cm(t_{\text{пл}} - t)$ . Следовательно,  $m_1 = cm(t_{\text{пл}} - t) / \lambda \approx 5,1$  г.

Заметим, что если бы переохлаждение было очень сильным, то теплоты кристаллизации могло бы не хватить для нагревания всей массы галлия до температуры плавления. Однако, поскольку  $m_1 < m$ , то в нашем случае галлий действительно нагреется до этой температуры.

**06.4.** На цилиндр действуют приложенная к его центру сила тяжести  $Mg$  и приложенная к его краю сила натяжения нити, равная  $mg$ . Цилиндр покатится вверх, если момент силы тяжести относительно оси, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости рисунка, будет меньше момента силы натяжения нити. Посколь-

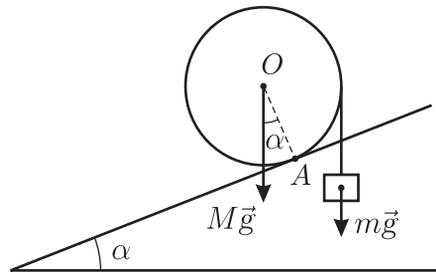


Рис. 06.4.

ку плечи сил тяжести и натяжения нити равны  $R \sin \alpha$  и  $R(1 - \sin \alpha)$ , то искомое условие имеет вид:  $MgR \sin \alpha < mgR(1 - \sin \alpha)$ , или  $m > (M \sin \alpha)/(1 - \sin \alpha)$ .

**06.5.** При прохождении тока через проволоку в ней выделяется теплота, равная, в соответствии с законом Джоуля–Ленца,  $Q = I^2 R \tau$ , где  $\tau$  — искомое время таяния льда, а  $R$  — сопротивление проволоки. Это сопротивление равно  $R = \rho l/S = 4\rho l/\pi d^2$  (здесь  $l$  — длина проволоки,  $S$  — площадь её поперечного сечения). Указанное количество теплоты расходуется на плавление льда:  $Q = \lambda m$ . Масса льда  $m$  равна произведению его плотности на объём:  $m = \rho_l V = \rho_l \pi (D^2 - d^2) l/4$ .

Приравнивая полученные выражения для количеств теплоты, окончательно получаем:  $\tau = \lambda \rho_l \pi^2 d^2 (D^2 - d^2)/(16 I^2 \rho) \approx 19$  мин.

**06.6.** Идея решения заключается в том, что при условиях задачи ток через переменный резистор не идёт, и напряжение на нём равно нулю (в противном случае изменение сопротивления этого резистора неизбежно приводило бы к изменению величины  $R_{AB}$ ). Отсюда вытекает, что напряжения  $U_1$  и  $U_3$  на резисторах  $R_1$  и  $R_3$  совпадают. Так как

$$U_1 = U_{AB} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad U_3 = U_{AB} \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4},$$

то отсюда  $R_1 R_4 = R_2 R_3$ , и сопротивление неизвестного резистора  $R_3 = R_1 R_4/R_2 = 40$  Ом. Сопротивление всей цепи можно найти, пользуясь формулой для параллельного соединения резисторов:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}, \quad \text{откуда} \quad R_{AB} = \frac{(R_1 + R_2)R_4}{R_2 + R_4} \approx 33 \text{ Ом.}$$

**06.7.** Построим ход луча света от Солнца в секстанте при двух отражениях света от плоских зеркал, угол между которыми равен  $\alpha$  (см. рис.). Обозначим вершину угла  $\alpha$  точкой  $O$ , точки падения луча на первое и второе зеркала —  $A$  и  $B$ , точку пересечения перпендикуляров, восстановленных к зеркалам в точках  $A$  и  $B$  — через  $C$ , точку пересечения входящего в прибор и выходящего из него лучей — через  $D$ . В момент снятия показаний при правильном положении зеркал прямая  $BD$  горизонтальна, а углы падения света на зеркала равны, соответственно,  $i_1$  и  $i_2$ . В четырёхугольнике  $AOBC$  два угла —  $OBC$  и  $OAC$  — прямые, поэтому угол  $BCA$  равен  $(\pi - \alpha)$ , а смежный с ним равняется  $\alpha$ . Но этот же угол является внешним углом треугольника  $ABC$ , поэтому  $\alpha = i_1 + i_2$ . В свою очередь, угол  $\varphi$  возвышения Солнца над горизонтом равен углу  $BDA$  в треугольнике  $ABD$ , остальные углы которого равны, соответственно,  $2i_1$  и  $2i_2$ . Поэтому  $\varphi = \pi - 2(i_1 + i_2) = \pi - 2\alpha$ .

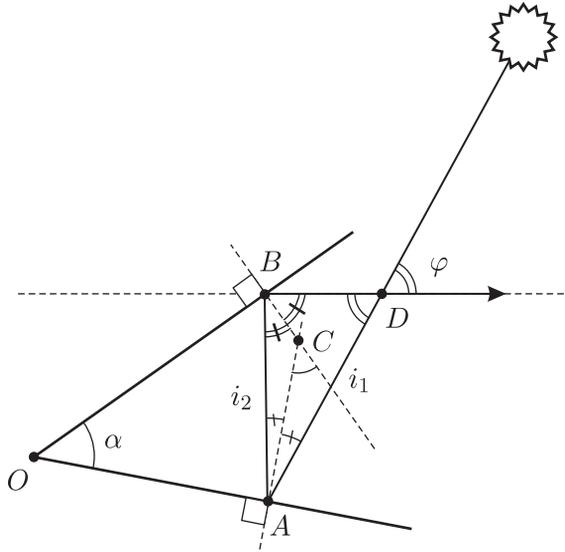


Рис. 06.7.

Таким образом,  $\alpha = (\pi - \varphi)/2$  и не зависит от угла падения света на зеркала. Поэтому даже при качке корабля и изменении угла  $i_1$  луч света от Солнца, выходящий из секстанта, сохраняет своё направление (горизонтальное при правильном подборе угла  $\alpha$ ). При этом совместить изображение Солнца с горизонтом гораздо проще, чем визировать на угломерном инструменте сразу два направления — на Солнце и на горизонт, да ещё если всё качается!

**06.8.** Направим ось  $X$  по горизонтали в сторону Солнца, ось  $Y$  — вертикально вверх, а начало координат поместим в точку, где сидел кузнечик. Закон движения кузнечика имеет вид:

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \quad \text{причём } 0 < t < \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

Координату тени кузнечика на асфальте  $X(t)$  можно определить из условия  $y(t)/(x(t) - X(t)) = \text{tg } \varphi$ . Отсюда

$$X(t) = x(t) - y(t) \text{ctg } \varphi = v_0(\cos \alpha - \sin \alpha \text{ctg } \varphi)t + \frac{gt^2}{2} \text{ctg } \varphi.$$

Следовательно, движение тени кузнечика на асфальте является равноускоренным с ускорением  $g \text{ctg } \varphi$  и начальной скоростью

$V_0 = v_0(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi) = v_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi}$ . Следовательно, скорость тени в момент времени  $t$  равна

$$V(t) = v_0 \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\sin \varphi} + gt \operatorname{ctg} \varphi, \quad 0 < t < \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

**06.9\***. Ясно, что если резко начать вращать доску, опуская её свободный конец, то в момент начала вращения шайба сразу оторвётся от доски. Поэтому мы будем рассматривать случай, когда свободный конец доски поднимают.

При сообщении доске достаточно большой угловой скорости шайба сразу же начнёт скользить по доске. При не слишком большой угловой скорости шайба некоторое время будет неподвижна относительно доски, двигаясь при этом по окружности, а затем начнётся скольжение.

На шайбу действуют сила тяжести, сила реакции опоры  $N$  и сила трения покоя  $F_{\text{тр}}$  (см. рисунок). Поскольку ускорение шайбы при движении по окружности равно  $\omega^2 R$  и направлено к шарниру, имеем:

$$N = mg \cos \alpha, \quad mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = m\omega^2 R.$$

Для шайбы, неподвижной относительно доски, должно выполняться условие  $|F_{\text{тр}}| \leq \mu N$ . Следовательно, шайба не будет скользить по доске при  $|mg \sin \alpha - m\omega^2 R| \leq \mu mg \cos \alpha$ .

Отсюда получаем, что при  $\omega^2 R > \mu g$  шайба начнёт скользить по доске сразу же, при  $\alpha = 0$ .

Пусть теперь  $\omega^2 R \leq \mu g$ , и  $\alpha \neq 0$ . Определим, при каких условиях возможно скольжение шайбы к шарниру и от него.

1. Шайба будет скользить к шарниру, если начнёт выполняться условие  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha > \omega^2 R/g$ . Введём обозначение:

$\beta = \operatorname{arctg} \mu = \operatorname{arccos} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}$ . Тогда приведённое условие можно записать в виде:

$$\sin(\alpha - \beta) > \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}, \quad \text{или} \quad \alpha > \beta + \operatorname{arcsin} \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

Отметим, что ввиду того, что  $\mu < 1$ , имеем  $\beta + \operatorname{arcsin} \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{1 + \mu^2}} < \frac{\pi}{2}$ ,

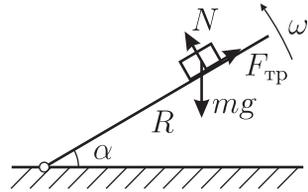


Рис. 06.9.

поэтому, начиная с некоторой величины угла  $\alpha$ , рассматриваемое условие будет выполняться.

2. Аналогично, шайба может начать скользить от шарнира, если  $\sin \alpha - \mu \cos \alpha < \omega^2 R/g$ .

Это условие можно записать в виде:  $\alpha > \pi - \beta - \arcsin \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}$ ,

однако при  $0 < \alpha < \pi/2$  оно не выполняется.

Комбинируя полученные результаты, приходим к ответу: при  $\omega^2 R > \mu g$  шайба начнёт скользить по доске при  $\alpha = 0$ ; при  $\omega^2 R \leq \mu g < g$  шайба начнёт скользить по доске к шарниру при

$$\alpha > \arctg \mu + \arcsin \frac{\omega^2 R}{g\sqrt{\mu^2 + 1}}.$$

**06.10.** Прежде всего, заметим, что траектория движения материальной точки в поле тяжести звезды не зависит от массы материальной точки. Угол поворота корабля  $\varphi$  поэтому однозначно зависит от его минимального расстояния до звезды  $l$ , его скорости на бесконечности  $v$  и величины  $GM$ , входящей в закон всемирного тяготения ( $G$  — гравитационная постоянная). Эти величины имеют следующие размерности:

$$[GM] = \text{м}^3 \cdot \text{с}^{-2}, \quad [l] = \text{м}, \quad [v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Из них можно составить только одну независимую безразмерную комбинацию:  $GM/(lv^2)$ . Следовательно, угол поворота корабля  $\varphi$  является однозначной функцией от такой комбинации, и для обоих кораблей эти величины должны совпадать:  $\frac{GM}{l_1 v_1^2} = \frac{GM}{l_2 v_2^2}$ , откуда  $l_2 = l_1 (v_1/v_2)^2$ .

Данный ответ можно также подтвердить, используя соображения подобия. Действительно, уравнение движения для корабля, движущегося в поле тяжести звезды, имеет вид:  $\vec{a} = -GM\vec{r}/r^3$ . Если увеличить все расстояния в  $\lambda$  раз, а промежутки времени в  $\lambda^{3/2}$  раза, то скорости изменятся в  $\lambda^{-1/2}$  раза, а ускорение  $\vec{a}$  и величина  $GM\vec{r}/r^3$  — в  $\lambda^{-2}$  раз. Если в какой-то момент времени радиус-векторы и скорости двух материальных точек, движущихся в поле тяготения звезды, связаны соотношениями  $\vec{r}_1 = \lambda \vec{r}_2$ ,  $\vec{v}_1 = \lambda^{-1/2} \vec{v}_2$ , то эти соотношения будут справедливы во все моменты времени. Значит, если два корабля одновременно пролетают на минимальном расстоянии от звезды таким образом, что справедливы эти соотношения, то из них, исключая  $\lambda$ , получим написанный выше ответ для  $l_2$ .

**06.11.** Вначале определим, как меняется объём гелия в данном процессе. Если бы объём не менялся, а температура увеличилась

на  $\Delta T$ , то всё сообщаемое количество теплоты пошло бы на изменение внутренней энергии гелия:  $\Delta U = (3/2)\nu R \Delta T \approx 250$  Дж. Поскольку  $\Delta U > Q = 100$  Дж, то газом, согласно первому началу термодинамики, совершается работа  $A = Q - \Delta U \approx -150$  Дж, то есть объём гелия должен уменьшаться. При этом температура гелия растёт, и давление должно возрастать быстрее, чем при изотермическом процессе.

Поскольку  $\Delta T = 10$  К  $\ll T_0 = 273$  К, то будем считать, что величина изменения объёма  $|\Delta V| \ll V_0 = 2 \cdot 22,4$  л, и изменение давления  $\Delta p$  также невелико по сравнению с начальным давлением  $p_0 \approx 10^5$  Па. Тогда при грубой оценке можно положить  $p \approx p_0$  и  $A \approx p_0 \Delta V$ . Отсюда получаем, что  $\Delta V \approx A/p_0 = (Q - (3/2)\nu R \Delta T)/p \approx -1,5$  л. Видно, что действительно  $|\Delta V| \ll V_0 = 44,8$  л, поэтому приближение малого изменения объёма действительно оправдано.

На самом деле (см. выше) давление в процессе возрастает до

$$p_{\text{к}} = \nu R \frac{T_0 + \Delta T}{V_0 + \Delta V} = p_0 \frac{1 + \frac{\Delta T}{T_0}}{1 + \frac{\Delta V}{V_0}} \approx 1,07 p_0,$$

и более точная оценка получится, если в выражение для работы  $A$  подставить не  $p_0$ , а среднее значение давления в процессе  $p_{\text{ср}} = (p_0 + p_{\text{к}})/2$ . Тогда уточнённое таким образом изменение объёма будет равно  $\Delta V \approx -1,45$  л, что почти не отличается от предыдущей, более грубой оценки.

*Замечание.* В условии сказано, что теплоёмкость гелия в данном процессе можно считать постоянной. Это означает, что процесс является политропическим (так называются процессы, проходящие при постоянной теплоёмкости), однако исследование этих процессов выходит за рамки школьной программы. Точный расчёт, использующий теорию политропических процессов, даёт  $\Delta V \approx -1,43$  л, так что даже наша грубая оценка совсем неплоха!

**06.12\*.** Пусть  $I$  — ток через миллиамперметр, включённый в диагональ мостика, тогда  $\lambda I$  — ток через другой миллиамперметр (см. рисунок). Возможные значения  $\lambda$  равны 3,  $1/3$ ,  $-3$  и  $-1/3$ . Токи через вольтметры обозначим, согласно первому правилу Кирхгофа, как  $J$ ,  $(\lambda - 1)I$  и  $J + I$ .

Обозначим через  $R_A$  и  $R_V$  сопротивления миллиамперметра и вольтметра и запишем второе правило Кирхгофа для двух соседних

контуров, не содержащих ЭДС:

$$(J + I)R_V + IR_A = (\lambda - 1)IR_V, \quad JR_V = IR_A + \lambda IR_A.$$

Подставляя  $JR_V$  из второго соотношения в первое, получаем:

$$(\lambda + 2)IR_A = (\lambda - 2)IR_V, \quad \text{откуда} \quad \frac{R_V}{R_A} = \frac{\lambda + 2}{\lambda - 2}.$$

При  $\lambda = 1/3$  и  $\lambda = -1/3$  отношение сопротивлений оказывается отрицательным, следовательно, эти случаи невозможны. В остальных случаях имеем:  $R_V/R_A = 5$  при  $\lambda = 3$  и  $R_V/R_A = 1/5$  при  $\lambda = -3$ .

Поскольку по условию сопротивление вольтметра больше сопротивления миллиамперметра, имеем:  $R_V/R_A = 5$ ,  $\lambda = 3$ .

Отсюда находим токи, текущие через вольтметры  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$ :

$$J = (\lambda + 1)I \frac{R_A}{R_V} = \frac{4}{5}I; \quad (\lambda - 1)I = 2I; \quad J + I = \frac{9}{5}I.$$

Следовательно, показания этих вольтметров  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  относятся, как числа  $\frac{4}{5}$ , 2 и  $\frac{9}{5}$ .

Поскольку  $U_1 + U_3 = U_0 = 1,3$  В, получаем:  $U_1 = 0,4$  В,  $U_2 = 1$  В,  $U_3 = 0,9$  В.

**06.13\***. Поместим начало координат в точку  $O$  и направим ось  $X$  вправо, а ось  $Y$  — вниз. Тогда точка  $O'$  — центр малого обруча — движется по закону

$$X(t) = r \sin \omega t, \quad Y(t) = r \cos \omega t,$$

если отсчитывать время от момента, указанного в условии задачи.

Обозначим через  $\varphi(t) = \varphi_0 - \omega_1 t$  угол поворота малого обруча, вращающегося при

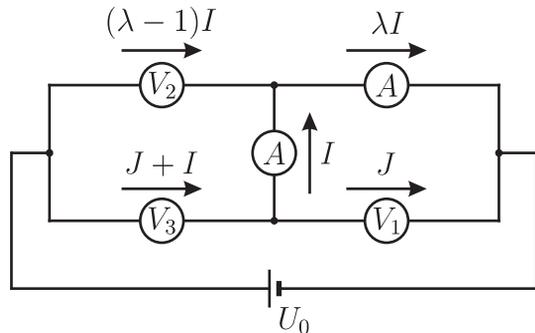


Рис. 06.12.

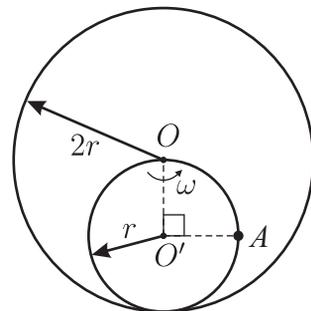


Рис. 06.13.

качении по большому обручу в противоположную сторону с угловой скоростью  $\omega_1$ . Закон движения точки на малом обруче можно записать в виде

$$x(t) = r \sin \omega t + r \sin \varphi(t), \quad y(t) = r \cos \omega t + r \cos \varphi(t),$$

а скорость и ускорение этой точки — в виде

$$\begin{aligned} v_x(t) &= r\omega \cos \omega t - r\omega_1 \cos \varphi(t), \\ v_y(t) &= -r\omega \sin \omega t + r\omega_1 \sin \varphi(t), \\ a_x(t) &= -\omega^2 r \sin \omega t - \omega_1^2 r \sin \varphi(t), \\ a_y(t) &= -\omega^2 r \cos \omega t - \omega_1^2 r \cos \varphi(t). \end{aligned}$$

В момент времени, когда  $\varphi(t) = \omega t$ , рассматриваемая точка на малом обруче касается большого обруча, поэтому её скорость должна обращаться в ноль. Отсюда получаем:

$$\omega_1 = \omega, \quad \text{и} \quad a_x = -\omega^2 x, \quad a_y = -\omega^2 y.$$

Следовательно, в каждый момент времени ускорение точки  $A$  на малом обруче направлено к центру большого обруча и выражается через расстояние до центра большого обруча как  $\omega^2 R$ . В момент времени, показанный на рисунке в условии задачи,  $R = r\sqrt{2}$ . Таким образом, вектор ускорения точки  $A$  направлен к точке  $O$  под углом  $45^\circ$  к отрезку  $AO'$  и по величине равен  $a = \omega^2 r\sqrt{2}$ .

**06.14.** На брусок массой  $M$  действуют сила тяжести  $Mg$ , сила реакции опоры  $Mg \cos \alpha$  и сила трения  $F_{\text{тр}1}$  со стороны листа. Ускорение бруска определяется из второго закона Ньютона:

$$Ma = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}1}.$$

На лист бумаги действуют силы реакции опоры со стороны бруска и наклонной плоскости, противоположные по направлению и равные по величине  $Mg \cos \alpha$ , и силы трения со стороны бруска  $F_{\text{тр}1}$  и наклонной плоскости  $F_{\text{тр}2}$ , также противоположные по направлению и, поскольку лист лёгкий, равные по величине:  $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = M(g \sin \alpha - a)$ . При этом должны выполняться условия:

$$F_{\text{тр}1} \leq \mu_1 Mg \cos \alpha, \quad F_{\text{тр}2} \leq \mu_2 Mg \cos \alpha.$$

Равенства в этих соотношениях достигаются только при скольжении поверхностей друг относительно друга.

Таким образом, возможны следующие случаи:

1. Система покоится, при этом  $a = 0$ . Случай возможен при  $\mu_1 > \operatorname{tg} \alpha$  и  $\mu_2 > \operatorname{tg} \alpha$ .

2. Брусок движется, а лист бумаги покоится. В этом случае

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = \mu_1 Mg \cos \alpha, \quad a = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha).$$

Случай возможен при  $\mu_1 < \mu_2$  и  $\mu_1 < \operatorname{tg} \alpha$ .

3. Брусок движется вместе с бумагой. В этом случае

$$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = \mu_2 Mg \cos \alpha, \quad a = g(\sin \alpha - \mu_2 \cos \alpha).$$

Случай возможен при  $\mu_1 > \mu_2$  и  $\mu_2 < \operatorname{tg} \alpha$ .

Отсюда получаем:

$$a = 0 \quad \text{при} \quad \min(\mu_1, \mu_2) > \operatorname{tg} \alpha,$$

$$a = g(\sin \alpha - \min(\mu_1, \mu_2) \cos \alpha) \quad \text{при} \quad \min(\mu_1, \mu_2) < \operatorname{tg} \alpha.$$

**06.15\*.** Сферу с вырезанным кусочком можно представить как совокупность целой сферы с зарядом  $Q$  (будем считать, что  $Q > 0$ ) и маленького диска с зарядом противоположного знака, расположенного в месте нахождения вырезанного кусочка. Заряд этого диска равен  $-q = -Q/10000$ , а поверхностная плотность заряда на нём равна  $\sigma = -Q/(4\pi R^2)$ . Пока комочек движется внутри сферы, он притягивается к этому отрицательно заряженному диску, поскольку целая равномерно заряженная сфера не создаёт поля внутри. После вылета за пределы сферы комочек отталкивается от неё.

Скорость комочка на большом удалении от сферы и в момент вылета из неё можно найти из закона сохранения энергии. Можно считать, что потенциал в центре сферы, создаваемый всеми зарядами на её поверхности, равен  $\varphi_0 = kQ/R$ , где  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , поскольку потенциалом, который создаёт маленький отрицательно заряженный диск в центре сферы, можно пренебречь. В середине отверстия потенциал складывается из  $\varphi_0$  — постоянного потенциала внутри равномерно заряженной сферы — и потенциала в центре отрицательно заряженного диска, который можно найти следующим образом.

Пусть диск имеет радиус  $r$  и поверхностную плотность заряда  $\sigma$ . Участок диска, ограниченный окружностями с радиусами  $r'$  и  $r' + \Delta r'$ , создаёт в центре диска потенциал  $k\sigma \cdot 2\pi r' \Delta r' / r' = 2\pi k\sigma \Delta r'$ . Следовательно, потенциал всего диска в его центре равен  $\varphi_{\text{д}} = 2\pi k\sigma r = -2k\sqrt{q\pi|\sigma|}$ , а потенциал в середине отверстия равен

$\varphi_0 + \varphi_d$ . На большом удалении от сферы её потенциал равен нулю:  $\varphi_\infty = 0$ .

Таким образом, энергия электростатического взаимодействия комочка со сферой изменится к моменту его вылета из сферы (достижения центра отверстия) на величину

$$\begin{aligned}\Delta W_{\text{выл}} &= q\Delta\varphi = q((\varphi_0 + \varphi_d) - \varphi_0) = \\ &= -2kq\sqrt{q\pi\frac{Q}{4\pi R^2}} = -k\frac{q\sqrt{qQ}}{R} = -\frac{kQ^2}{10^6 R},\end{aligned}$$

а на большом удалении от сферы — на величину

$$\Delta W_\infty = q\Delta\varphi_\infty = q(\varphi_\infty - \varphi_0) = -q\varphi_0 = -\frac{kqQ}{R} = -\frac{kQ^2}{10^4 R}.$$

Скорости комочка в момент вылета из сферы  $v_{\text{выл}}$  и на большом удалении от неё  $v_\infty$  выражаются через его массу  $m = 10^{-4}M$  с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_{\text{выл}}^2}{2} + \Delta W_{\text{выл}} = 0, \quad \frac{mv_\infty^2}{2} + \Delta W_\infty = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}v_\infty &= \sqrt{\frac{-2\Delta W_\infty}{m}} = \sqrt{\frac{2kQ^2}{MR}} = \frac{Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 MR}}, \\ v_{\text{выл}} &= \sqrt{\frac{-2\Delta W_{\text{выл}}}{m}} = 10^{-1}\sqrt{\frac{2kQ^2}{MR}} = \frac{10^{-1}Q}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 MR}}.\end{aligned}$$

**06.16.** Ясно, что на большом удалении от клемм  $A$  и  $B$  данной цепи ток течёт только по нижнему проводнику, а по верхней части цепи ток не идёт, и поэтому её можно разорвать. Тогда изображённую на рисунке в условии задачи электрическую цепь можно представить, как совокупность двух электрических цепей  $AC$  и  $CB$ , соединённых последовательно (см. рисунок 06.16.1).

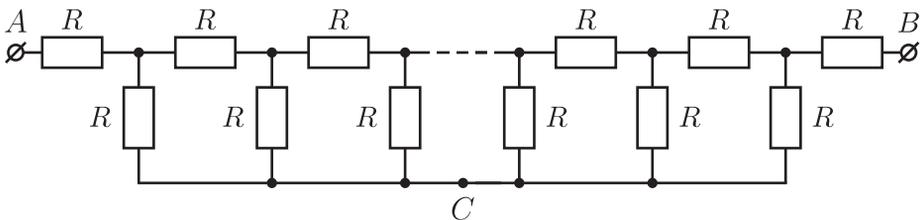


Рис. 06.16.1.

Сопротивление всей электрической цепи  $R_{AB}$  складывается из сопротивлений  $R_{AC}$  и  $R_{CB}$  цепей  $AC$  и  $CB$ , которые совпадают:  $R_{AC} = R_{CB} = R_x$ . Поэтому  $R_{AB} = 2R_x$ .

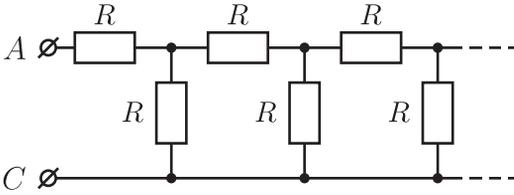


Рис. 06.16.2.

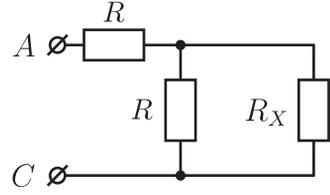


Рис. 06.16.3.

Перерисуем электрическую цепь  $AC$  (см. рисунок 06.16.2). Поскольку эта цепь бесконечная и её сопротивление не изменяется при добавлении ещё одного звена в начале, представим её так, как показано на рисунке 06.16.3. Тогда из законов последовательного и параллельного соединения проводников получим:

$$R_x = R + \frac{RR_x}{R + R_x} \quad \text{или} \quad R_x^2 - RR_x - R^2 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:  $R_x = R(1 + \sqrt{5})/2$ . Отсюда  $R_{AB} = 2R_x = R(1 + \sqrt{5})$ .

**06.17.** Поскольку импульс фотона равен  $p = \hbar\omega/c$ , после его испускания именно на эту величину изменится суммарный импульс тележки и тел. Поэтому после испускания фотона скорость тележки будет равна  $v_1 = p/(m_1 + m_2) = (\hbar\omega/c)/(m_1 + m_2)$ .

Фотон достигнет второго тела за время  $\Delta t = L/c$ , и после его поглощения тележка остановится, то есть её скорость станет равной нулю:  $v_2 = 0$ .

За время  $\Delta t$  тележка сдвинется на расстояние

$$\Delta L = v_1 \Delta t = \frac{\hbar\omega/c}{m_1 + m_2} \cdot \frac{L}{c} = \frac{\hbar\omega}{c^2} \cdot \frac{L}{m_1 + m_2}.$$

Чтобы центр масс системы остался на месте, нужно, чтобы масса первого тела уменьшилась, а второго — увеличилась на величину  $\Delta m$ , определяемую из соотношения  $\Delta m \cdot L - (m_1 + m_2) \cdot \Delta L = 0$ . Отсюда  $\Delta m = \hbar\omega/c^2$ .

**06.18.** Из графика понятно, что  $L_{\text{п}} = h$  при  $\lambda \leq L_{\text{п}}/L < 1$ , и  $L_{\text{п}} = L$  при  $h \geq L$ , то есть, начиная с  $L_{\text{п}}/L = \lambda$ , палочка стоит в воде вертикально — сначала частично, а затем полностью погруженной в

воду. Это может иметь место, только если плотность материала палочки  $\rho_{\text{п}}$  меньше, чем плотность воды  $\rho_{\text{в}}$ . В то же время  $L_{\text{п}}/L = \lambda = \text{const}$  при  $0 < h \leq \lambda L$ , то есть в воду при этом погружена постоянная часть длины палочки, а угол  $\alpha$  её наклона к горизонту по мере роста уровня воды в сосуде от 0 до  $\lambda L$  растёт от 0 до  $90^\circ$ .

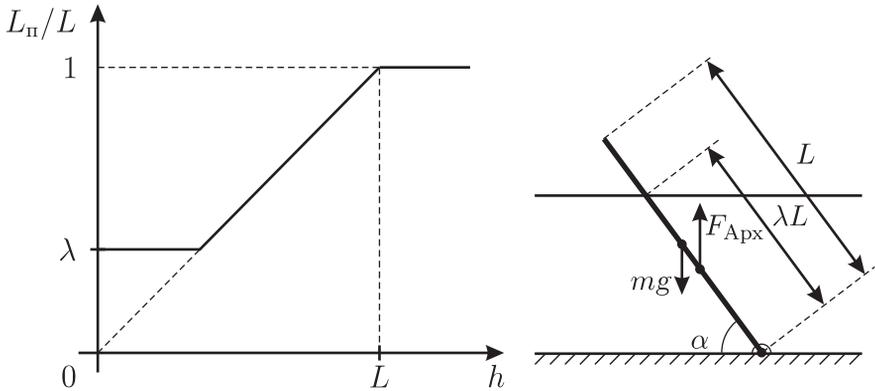


Рис. 06.18.

Рассмотрим условия равновесия палочки при неполном её погружении в воду в наклонном положении (см. рисунок). На палочку действуют: сила тяжести  $mg = \rho_{\text{п}}gSL$  (здесь  $S$  — площадь сечения палочки), направленная вниз и приложенная к её середине, выталкивающая сила Архимеда  $F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{в}}gS \cdot \lambda L$ , направленная вверх и приложенная к середине погруженной в воду части палочки, и сила реакции шарнира, приложенная в точке прикрепления палочки к дну сосуда (на рисунке не показана). В состоянии равновесия сумма моментов этих сил относительно точки крепления палочки в шарнире должна быть равна нулю. Поскольку момент силы реакции шарнира равен нулю, то должно выполняться равенство:  $\rho_{\text{п}}gSL \cdot (L/2) \cos \alpha = \rho_{\text{в}}gS \cdot \lambda L \cdot (\lambda L/2) \cos \alpha$ , откуда получаем, что  $\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{в}}\lambda^2$ .

**06.19.** Сначала нужно выяснить, что будет находиться в калориметре в конечном состоянии — только лёд, смесь льда и воды или только вода.

Сравним количества теплоты, которые входят в уравнение теплового баланса, в первом случае. Теплота, выделяющаяся при конденсации всего пара, равна

$$Q_1 = r \cdot m_{\text{п}} = 2,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ кг} = 132 \text{ кДж}.$$

Теплота, необходимая для нагревания всего льда до температуры плав-

ления, то есть до  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , равна

$$Q_2 = c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0\text{ }^{\circ}\text{C} - t_{\text{л}}) = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}} \cdot 0,5 \text{ кг} \cdot 20\text{ }^{\circ}\text{C} = 21 \text{ кДж}.$$

Теплота от конденсации всего пара больше, значит, лёд будет плавиться.

Общее количество теплоты, выделяющееся при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , составляет

$$\begin{aligned} Q_3 &= Q_1 + c_{\text{в}} m_{\text{п}} (t_{\text{п}} - 0\text{ }^{\circ}\text{C}) = \\ &= 1,32 \cdot 10^5 \text{ Дж} + 4100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}} \cdot 60 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 156,6 \text{ кДж}, \end{aligned}$$

что меньше теплоты  $Q_4$ , нужной для того, чтобы весь лёд, взятый при начальной температуре, расплавился:

$$Q_4 = Q_2 + \lambda m_{\text{л}} = 21 \cdot 10^3 \text{ Дж} + 340 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0,5 \text{ кг} = 191 \text{ кДж}.$$

Значит, растает только часть льда, и конечная температура смеси будет  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Во втором случае в конечном состоянии в калориметре, очевидно, будет только вода. Рассчитаем  $Q'_4$  для этого случая:

$$\begin{aligned} Q'_4 &= Q'_2 + \lambda m_{\text{л1}} = \\ &= 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}} \cdot 0,3 \text{ кг} \cdot 20\text{ }^{\circ}\text{C} + 340 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0,3 \text{ кг} = 114,6 \text{ кДж}. \end{aligned}$$

Эта величина меньше общего количества теплоты  $Q_3$ , выделяющегося при конденсации пара и охлаждении образовавшейся из него воды до  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Поэтому для расчёта температуры, которая установится в калориметре в этом случае, надо записать уравнение теплового баланса:

$$Q'_4 + c_{\text{в}} m_{\text{л1}} (t - 0\text{ }^{\circ}\text{C}) = Q_1 + c_{\text{в}} m_{\text{п}} (t_{\text{п}} - t),$$

или

$$c_{\text{в}} (m_{\text{л1}} + m_{\text{п}}) t = Q_1 - Q'_4 + c_{\text{в}} m_{\text{п}} t_{\text{п}}.$$

Выражая отсюда температуру  $t$ , окончательно получаем:

$$t = \frac{r m_{\text{п}} - \lambda m_{\text{л1}} + c_{\text{л}} m_{\text{л1}} t_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{п}} t_{\text{п}}}{c_{\text{в}} (m_{\text{л1}} + m_{\text{п}})} \approx 28\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

**06.20.** При движении с постоянной скоростью мощность силы можно рассчитать по формуле  $N = F \cdot v$ , где  $F$  — сила, с которой тянут

груз, а  $v$  — скорость поднятия груза. Скорость  $v$  найдём из уравнения кинематической связи. Направим ось  $OX$  вверх, начало отсчёта выберем на уровне начального положения груза. Обозначим скорость вращения крайних точек малого шкива через  $V'$ . Поскольку скорость вращения крайних точек большого шкива равна скорости горизонтального участка нити  $V$ , то изменение координаты груза  $\Delta x$  за время  $\Delta t$  можно выразить из уравнения

$$2\Delta x = V\Delta t - V'\Delta t,$$

где первое слагаемое в правой части уравнения равно длине нити, наматывающейся через большой шкив на вал двигателя за время  $\Delta t$ , а второе слагаемое — длине нити, разматывающейся с малого шкива за то же время  $\Delta t$ . Учитывая, что шкивы скреплены, можно записать:  $V'/r = V/R$ . Выразим отсюда  $V'$ , подставим это выражение в предыдущее уравнение и разделим его на  $\Delta t$ . В результате получаем:

$$\frac{2\Delta x}{\Delta t} = V - \frac{V}{R}r = V\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Отсюда находим скорость  $v$  поднятия груза:  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{2}V\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ .

Поскольку груз поднимается равномерно, то сумма действующих на него сил равна нулю:  $F = Mg$ . Таким образом, получаем окончательное выражение для мощности, развиваемой двигателем при поднятии груза:  $N = \frac{1}{2}MgV\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ .

**06.21.** Введём систему координат следующим образом: направим ось  $OX$  вниз вдоль горки, ось  $OY$  — перпендикулярно горке вверх. При данном выборе координатных осей проекции на них ускорения свободного падения равны

$$g_x = g \sin \alpha, \quad g_y = -g \cos \alpha.$$

Санки движутся с ускорением  $a$ , определяемым из второго закона Ньютона:

$$ma = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha,$$

где  $\mu < \tan \alpha$  — коэффициент трения.

Обозначим через  $v_{0x} = v_0 \cos(\alpha + \beta)$  и  $v_{0y} = v_0 \sin(\alpha + \beta)$  проекции начальной скорости снежка на координатные оси. Законы движения снежка (1) и санок (2) имеют вид

$$x_1 = v_{0x}t + \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2}, \quad y_1 = v_{0y}t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}, \quad (1)$$

$$x_2 = \frac{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)t^2}{2}, \quad y_2 = 0. \quad (2)$$

Снежок попадёт в мальчика, если в некоторый момент времени  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ . Отсюда получаем соотношения:

$$0 = v_{0x}t + \frac{\mu g \cos \alpha \cdot t^2}{2} \quad \text{и} \quad 0 = v_{0y}t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2}.$$

Следовательно,  $v_{0x}/v_{0y} = -\mu$ , и  $\mu = -\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) \approx 0,17$ .

Для приведённых в условии числовых данных соотношение  $\mu < \operatorname{tg} \alpha \approx 0,58$  действительно выполнено.

**06.22.** Обозначим длину доски через  $l$ , а силу натяжения, одинаковую вдоль всей нити, через  $T$  (см. рисунок). Ясно, что доска может подняться под действием силы  $T$ , приложенной к её правому концу, в то время как левый её конец — точка  $O$  — прижимается к столу такой же по величине силой  $T$ , а со стороны стола в этой точке на доску действует сила реакции опоры  $N$ . Таким образом, доска останется в горизонтальном положении, если момент силы тяжести относительно точки  $O$  будет больше, чем момент силы  $T$ , то есть  $m_3g(l/2) \geq Tl$ , или  $T \leq m_3g/2$ .

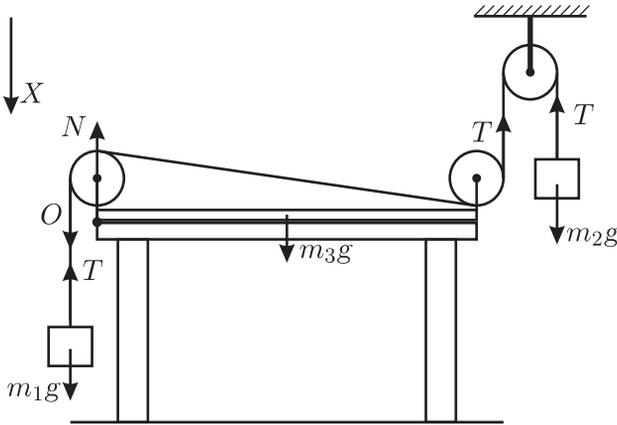


Рис. 06.22.

При этом сумма сил, действующих на доску по горизонтали, равна нулю, так что при движении грузов она останется неподвижной.

Уравнения движения грузов в проекции на вертикальную ось  $X$  имеют вид:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T, \quad m_2 a_2 = m_2 g - T.$$

Из условия нерастяжимости нити получаем:  $a_1 = -a_2$ . Отсюда

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1}, \quad a_2 = g - \frac{T}{m_2}, \quad T \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = 2g.$$

Таким образом,  $T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$ , и искомое условие горизонтальности доски имеет вид:

$$\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g \leq \frac{m_3}{2}g, \quad \text{или} \quad m_3 \geq \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}.$$

**06.23.** Из условия задачи вытекает, что объём воды в левом цилиндре увеличился на  $S_1\alpha_1a$ , на такую же величину должен уменьшиться объём и в правом цилиндре; отсюда

$$S_1\alpha_1a = S_2\alpha_2a, \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{S_1\alpha_1}{\alpha_2}.$$

Добавление воды в левый цилиндр можно провести в два этапа. Сначала дольём в левый цилиндр объём  $V$  воды и поднимем точку подвеса пружины на расстояние  $V/(S_1 + S_2)$ . Тогда равновесие в системе не нарушится, и поршень также поднимется на такое же расстояние. После этого вернём точку подвеса в прежнее положение, опустив её на расстояние  $V/(S_1 + S_2)$ . Тогда поршень опустится на расстояние  $\alpha_2V/(S_1 + S_2)$ . Общее смещение поршня равно

$$b_2 = \frac{V(1 - \alpha_2)}{S_1 + S_2} = \frac{V}{S_1} \cdot \frac{\alpha_2(1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Найдём жёсткость пружины  $k$ . Вернём поршень в первоначальное (до наливания воды) положение, сместив его вниз на расстояние  $b_2$ , а точку подвеса — вниз на расстояние

$$\frac{b_2}{\alpha_2} = \frac{V}{S_1} \cdot \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Тогда пружина сожмётся по сравнению с начальной длиной на величину  $\frac{V}{S_1} \cdot \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ , а в левом цилиндре уровень воды будет выше на величину  $V/S_1$ . Запишем условие равенства давлений:

$$\frac{k}{S_2} \cdot \frac{V}{S_1} \cdot \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \rho g \frac{V}{S_1}.$$

Отсюда

$$k = \rho g S_2 \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2} = \rho g S_1 \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \alpha_2}.$$

**06.24.** Из текста технической документации следует, что сопротивление  $R$  калькулятора зависит от режима его работы и может колебаться в пределах

$$R_{\min} = \frac{U_{\min}}{I_{\max}} \leq R \leq R_{\max} = \frac{U_{\max}}{I_{\min}}.$$

В соответствии с формулами для последовательного и параллельного соединения проводников, напряжение на калькуляторе выражается через сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  следующим образом:

$$U = \frac{U_0}{R_2 + \frac{R_1 R}{R_1 + R}} \cdot \frac{R_1 R}{R_1 + R} = \frac{U_0}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R}}.$$

При увеличении сопротивления  $R$  напряжение на калькуляторе  $U$  возрастает; следовательно, калькулятор будет нормально функционировать при соблюдении следующих неравенств:

$$\frac{U_0}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_{\min}}} \geq U_{\min} \quad \text{и} \quad \frac{U_0}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_{\max}}} \leq U_{\max}.$$

Эти неравенства можно переписать в виде:

$$\frac{U_0}{U_{\max}} - 1 - \frac{R_2}{R_{\max}} \leq \frac{R_2}{R_1} \leq \frac{U_0}{U_{\min}} - 1 - \frac{R_2}{R_{\min}}.$$

Для числовых данных, указанных в условии задачи, оба предела в данном неравенстве положительны; следовательно, сопротивление резистора  $R_1$  должно лежать в следующем интервале:

$$\frac{U_{\min} R_2}{U_0 - U_{\min} - I_{\max} R_2} \leq R_1 \leq \frac{U_{\max} R_2}{U_0 - U_{\max} - I_{\min} R_2}.$$

Подставляя в эти неравенства числовые значения, получаем:  $32,7 \text{ Ом} \leq R_1 \leq 38,6 \text{ Ом}$ .

**06.25\*.** При условиях задачи сила натяжения нити везде одинакова и равна  $T$ . Груз 1 будет двигаться по вертикали с ускорением  $a_1$ , груз 3 — по горизонтали с ускорением  $a_3$ , груз 2 — по вертикали с ускорением  $a_{2y}$  и вместе с грузом 3 по горизонтали с ускорением  $a_{2x} = a_3$ .

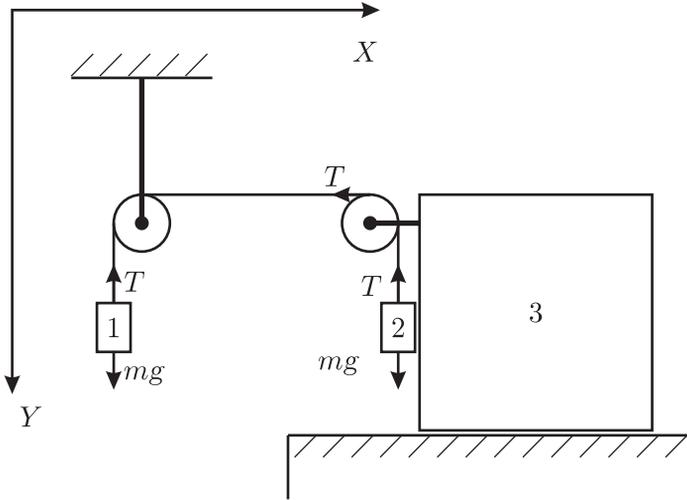


Рис. 06.25.

Введём систему координат, как показано на рисунке, и запишем уравнения движения грузов в проекциях на оси  $X$  и  $Y$ :

$$\begin{aligned} ma_1 &= mg - T && (\text{груз 1}); \\ ma_{2y} &= mg - T && (\text{груз 2}); \\ 2ma_{2x} &= -T && (\text{грузы 2 и 3}). \end{aligned}$$

При написании последнего уравнения мы учли, что силы давления грузов 2 и 3 друг на друга — внутренние для системы этих грузов, так что они движутся только под действием силы натяжения нити  $T$ .

Из условия нерастяжимости нити  $y_1 + y_2 + x_2 = \text{const}$  следует уравнение кинематической связи  $a_1 + a_{2y} + a_{2x} = 0$ .

Из двух первых уравнений полученной системы следует, что  $a_1 = a_{2y} = g - \frac{T}{m}$ , а из третьего — что  $a_{2x} = -\frac{T}{2m}$ . Подставляя эти выражения в уравнение кинематической связи, получаем:

$$g - \frac{T}{m} + g - \frac{T}{m} - \frac{T}{2m} = 0, \quad \text{или} \quad T = \frac{4}{5}mg.$$

Следовательно,  $a_1 = a_{2y} = g/5$  и  $a_{2x} = a_3 = -2g/5$ . Отсюда найдём величину ускорения второго груза:  $a_2 = \sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2} = g/\sqrt{5}$ . Вектор ускорения второго груза направлен вниз под углом  $\varphi = \arctg \left| \frac{a_{2y}}{a_{2x}} \right| = \arctg \frac{1}{2}$  к горизонту.

**06.26\***. Рассмотрим силы, действующие на каждое из тел по вертикали. На груз действуют сила тяжести  $mg$  и сила реакции опоры со стороны бумаги, также равная по величине  $mg$ . На лист бумаги действуют силы реакции со стороны груза и тележки, а действующей на него силой тяжести можно пренебречь, так как  $m_0 \ll m < M$ .

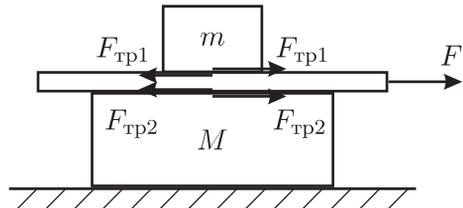


Рис. 06.26.

На тележку действует сила давления со стороны листа, равная  $mg$ , и такая же по величине сила со стороны стола.

Следовательно, как сила трения  $F_{\text{тр1}}$  между листом и грузом, так и сила трения  $F_{\text{тр2}}$  между листом и тележкой не могут превосходить  $\mu mg$ . При этом каждая из сил трения равна  $\mu mg$  только при скольжении поверхностей.

Запишем уравнения движения, из которых можно найти ускорения груза  $a_1$ , листа  $a_0$  и тележки  $a_2$ , в проекциях на горизонтальную ось, направленную вдоль силы  $F$ :

$$ma_1 = F_{\text{тр1}}; \quad m_0 a_0 = F - F_{\text{тр1}} - F_{\text{тр2}}; \quad Ma_2 = F_{\text{тр2}}.$$

Рассмотрим четыре возможных случая.

1. Лист скользит относительно груза и тележки. В этом случае силы трения максимальны; данный случай возможен только при

$$F > 2\mu mg.$$

2. Лист скользит вместе с грузом относительно тележки. В этом случае имеем:

$$F_{\text{тр2}} = \mu mg, \quad F_{\text{тр1}} \approx F - F_{\text{тр2}} = F - \mu mg, \quad a_2 = \frac{\mu mg}{M}, \quad a_1 = \frac{F}{m} - \mu g.$$

Данный случай возможен при

$$F_{\text{тр1}} < \mu mg \quad \text{и} \quad a_1 > a_2,$$

или при

$$\mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right) < F < 2\mu mg.$$

3. Лист скользит вместе с тележкой относительно груза. В этом случае  $F_{\text{тр1}} = \mu mg$ , поэтому ввиду того, что  $M > m$ , должно быть

$a_2 < a_1$ . Поэтому при числовых данных, приведённых в условии, данный случай невозможен.

4. Лист движется вместе с тележкой и грузом с ускорением  $a_0 = a_1 = a_2 = F/(M + m)$ . При этом

$$F_{\text{тр1}} = \frac{m}{M + m}F, \quad F_{\text{тр2}} = \frac{M}{M + m}F.$$

Этот случай возможен при  $F_{\text{тр2}} < \mu mg$ , то есть при  $F < \mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right)$ .

В итоге получаем следующий ответ.

(а) Груз будет неподвижен относительно листа при

$$\mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right) < F < 2\mu mg \quad \text{то есть при} \quad 9,33 \text{ Н} < F < 14 \text{ Н}.$$

(б) Тележка будет неподвижна относительно листа при

$$F < \mu mg \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 9,33 \text{ Н}.$$

При  $F = 3 \text{ Н}$  реализуется случай 4, и ускорение листа

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0,75 \text{ м/с}^2;$$

при  $F = 10 \text{ Н}$  реализуется случай 2, и ускорение листа

$$a_0 = a_1 = \frac{F}{m} - \mu g = 3 \text{ м/с}^2.$$

**06.27\***. Пусть в момент времени, когда радиус сферы равен  $R$ , шарик движется со скоростью  $v$ , падая на поверхность под углом  $\alpha$  к нормали, а сфера сжимается со скоростью  $u \ll v$ . После соударения составляющая скорости шарика, параллельная стенке, остаётся неизменной, а нормальная составляющая изменяется на величину  $2u$ . Следовательно, изменение кинетической энергии шарика

$$\Delta W = \frac{m}{2} \left( (v \cos \alpha + 2u)^2 - (v \cos \alpha)^2 \right) \approx 2m v u \cos \alpha$$

(слагаемым, пропорциональным  $u^2$ , можно пренебречь ввиду его малости), а изменение величины скорости шарика равно

$$\Delta v = \frac{\Delta W}{m v} = 2u \cos \alpha.$$

За промежуток времени между соударениями  $\Delta t = (2R \cos \alpha)/v$  радиус сферы изменяется на величину  $\Delta R = -u\Delta t = -(2Ru \cos \alpha)/v$ . Следовательно,  $\Delta v/\Delta R = -v/R$ , и  $\Delta(vR) = 0$ , то есть  $vR = \text{const}$ . Отсюда  $v_1 R_1 = v_0 R_0$ .

Во время каждого столкновения сохраняется величина  $v \sin \alpha = \text{const}$ , при этом угол  $\alpha$  уменьшается таким образом, что  $\Delta v \cdot \sin \alpha + v \cdot \Delta(\sin \alpha) = 0$  и  $\Delta(\sin \alpha) = -\frac{\Delta v}{v} \sin \alpha$ . Однако за время движения шарика между столкновениями радиус сферы уменьшается, поэтому по теореме синусов  $\sin \alpha$  увеличивается обратно пропорционально  $R$ . Поэтому на стадии движения шарика между столкновениями  $\Delta \sin \alpha = -\frac{\Delta R}{R} \sin \alpha$ . Следовательно, суммарное изменение угла  $\alpha$  во время столкновения и за время пролёта между столкновениями равно нулю.

Таким образом, мы приходим к ответу:

$$v_1 = v_0 \frac{R_0}{R_1}, \quad \alpha_1 = \alpha_0.$$

**06.28.** Количество теплоты  $Q_1$ , сообщаемое газу при изохорическом нагревании от температуры  $T_{\min}$ , которую газ имел на нижней изотерме (см. рисунок), до максимальной температуры  $T_{\max}$  на верхней изотерме, идёт на изменение его внутренней энергии:  $Q_1 = (3/2)\nu R(T_{\max} - T_{\min})$ . Следовательно,

$$T_{\max} = T_{\min} + \frac{Q_1}{(3/2)\nu R}.$$

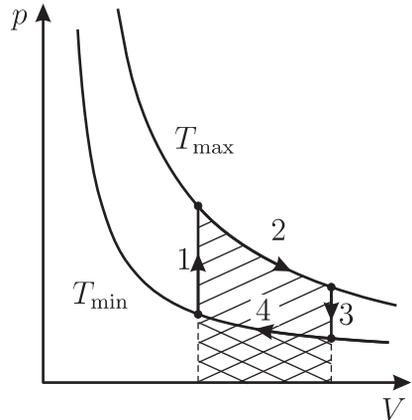


Рис. 06.28.

Заметим, что величины работ  $A_2$  и  $A_4$ , совершаемых газом на изотермических стадиях, относятся, как площади криволинейных трапеций (см. рисунок) под гиперболами, описываемыми следующими уравнениями:  $p = \nu RT_{\max}/V$  (верхняя изотерма) и  $p = \nu RT_{\min}/V$  (нижняя изотерма). Поскольку при изменении объёма на малую величину  $\Delta V$  газ совершает работу  $\Delta A = (\nu R \Delta V/V)T$ , то величина работы, совершённой в изотермическом процессе, пропорциональна температуре  $T$ , которую имеет газ в этом процессе. Поэтому  $A_2/|A_4| = T_{\max}/T_{\min}$ .

Таким образом, можно найти работы, совершаемые газом на каждой из стадий данного циклического процесса.

- 1) Изохорическое нагревание:  $A_1 = 0$ .
- 2) Изотермическое расширение:  $A_2 = Q_2$ , так как внутренняя энергия газа не изменяется.
- 3) Изохорическое охлаждение:  $A_3 = 0$ .
- 4) Изотермическое сжатие:

$$A_4 = -A_2 \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = -Q_2 \frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}.$$

При изохорическом охлаждении (стадия 3) газ отдаёт количество теплоты  $|Q_3| = (3/2)\nu R(T_{\max} - T_{\min}) = Q_1$ , а при изотермическом сжатии (стадия 4) — количество теплоты

$$|Q_4| = |A_4| = Q_2 \frac{(3/2)\nu RT_{\min}}{(3/2)\nu RT_{\min} + Q_1}.$$

КПД  $\eta$  теплового двигателя, работающего по рассматриваемому циклу, равен отношению совершённой работы

$$A = A_2 + A_4 = A_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right) = Q_2 \left(1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}\right).$$

к полученному количеству теплоты  $Q_1 + Q_2$ . Следовательно,

$$\eta = \frac{Q_1 Q_2}{(Q_1 + Q_2) \left(\frac{3}{2}\nu RT_{\min} + Q_1\right)}.$$

**06.29\***. Обозначим через  $I_1, I_2, I_3, I'_1, I'_2$  и  $I'_3$  токи через соответствующие резисторы, через  $I$  — полный ток в цепи. Запишем закон сохранения электрического заряда для каждой из трёх граней, прилегающих к вершине  $A$ , в которую втекает ток. Например, в грань  $ABB'A'$  втекает ток  $I$  и вытекают 4 тока: 2 тока  $I_1$  из вершин  $A$  и  $B'$  и 2 тока  $I'_1$  из вершин  $A'$  и  $B$ . Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} I &= 2I_1 + 2I'_1 && \text{(грань } ABB'A'); \\ I &= 2I_2 + 2I'_2 && \text{(грань } ADD'A'); \\ I &= 2I_3 + 2I'_3 && \text{(грань } ABCD). \end{aligned}$$

Поэтому удобно переобозначить токи:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I}{4} + J_1, & I_2 &= \frac{I}{4} + J_2, & I_3 &= \frac{I}{4} + J_3; \\ I'_1 &= \frac{I}{4} - J_1, & I'_2 &= \frac{I}{4} - J_2, & I'_3 &= \frac{I}{4} - J_3. \end{aligned}$$

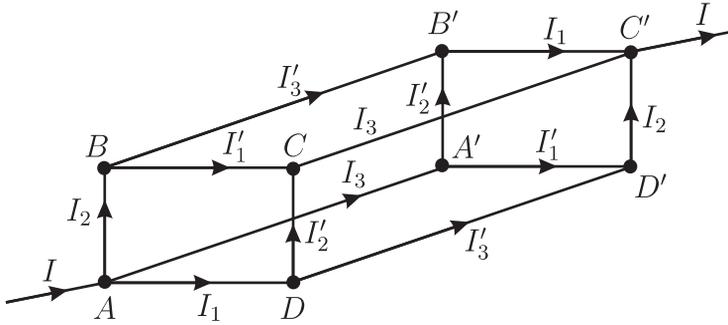


Рис. 06.29.

Запишем для каждого из контуров  $ABB'A'$ ,  $ADD'A'$  и  $ABCD$  второе правило Кирхгофа. Для контура  $ABCD$  имеем:

$$\left(\frac{I}{4} + J_1\right) R_1 + \left(\frac{I}{4} - J_2\right) R_2 = \left(\frac{I}{4} - J_1\right) R_1 + \left(\frac{I}{4} + J_2\right) R_2,$$

откуда  $J_1 R_1 = J_2 R_2$ . Рассматривая аналогично другие контуры, получаем:  $J_1 R_1 = J_2 R_2 = J_3 R_3 = U_0$ .

Следовательно, все токи выражаются через один неизвестный параметр  $U_0$ :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_1}, & I_2 &= \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_2}, & I_3 &= \frac{I}{4} + \frac{U_0}{R_3}; \\ I'_1 &= \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_1}, & I'_2 &= \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_2}, & I'_3 &= \frac{I}{4} - \frac{U_0}{R_3}. \end{aligned}$$

Параметр  $U_0$  можно определить из закона сохранения электрического заряда в точке  $A$ :

$$I_1 + I_2 + I_3 = I, \quad \text{откуда} \quad U_0 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{I}{4}.$$

Следовательно, напряжение между точками  $A$  и  $C'$  электрической цепи выражается через ток следующим образом:

$$\begin{aligned} U &= U_{AC'} = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I'_3 R_3 = \frac{I}{4} (R_1 + R_2 + R_3) + U_0 = \\ &= \frac{I}{4} \left( R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right), \end{aligned}$$

а искомое сопротивление электрической цепи равно

$$R = \frac{1}{4} \left( R_1 + R_2 + R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \right).$$

**06.30\***. Введём систему координат, как показано на рисунке.

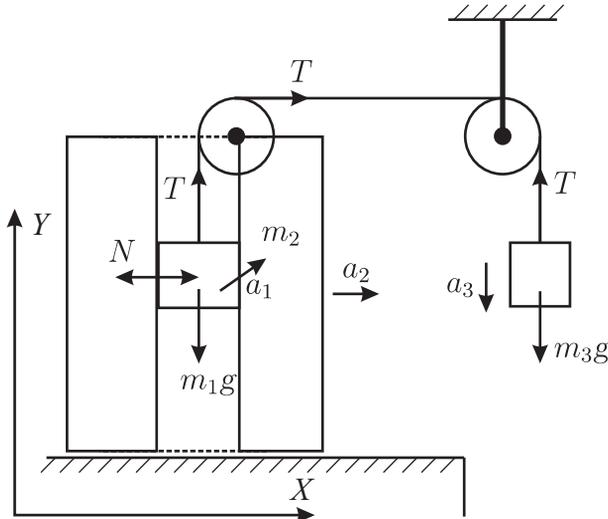


Рис. 06.30.

Пусть  $T$  — сила натяжения нити,  $a_{1x}$  и  $a_{1y}$  — проекции ускорения первого груза на координатные оси,  $a_2 = a_{1x}$  — ускорение второго груза,  $a_3$  — ускорение третьего груза. Запишем уравнения движения грузов и уравнения кинематической связи в проекциях на координатные оси.

$$m_3 a_3 = T - m_3 g \quad (\text{уравнение движения третьего груза});$$

$(m_1 + m_2) a_2 = T$  (уравнение движения системы из первого и второго грузов);

$$m_1 a_{1y} = T - m_1 g \quad (\text{уравнение движения первого груза});$$

$$a_{1y} + a_2 + a_3 = 0 \quad (\text{кинематическая связь}).$$

Заметим, что последнее уравнение следует из условия нерастяжимости нити.

Выразим из первых трёх уравнений ускорения грузов:

$$a_3 = \frac{T}{m_3} - g, \quad a_2 = \frac{T}{m_1 + m_2}, \quad a_{1y} = \frac{T}{m_1} - g.$$

Подставив их в уравнение кинематической связи, получим соотношение для определения силы натяжения нити:

$$T = \frac{2g}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_1 + m_2} + \frac{1}{m_3}} = \frac{2m_1m_3(m_1 + m_2)g}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1m_3}.$$

Отсюда определим проекции ускорения первого груза:

$$a_{1x} = a_2 = \frac{2m_1m_3}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1m_3}g;$$

$$a_{1y} = \frac{m_2(m_3 - m_1) - m_1^2}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1m_3}g.$$

Следовательно, величина ускорения первого груза

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \frac{\sqrt{(2m_1m_3)^2 + (m_2(m_3 - m_1) - m_1^2)^2}}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_3) + m_1m_3}g,$$

а угол  $\varphi$  между его направлением и горизонтальной осью определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{1y}}{a_{1x}} = \frac{m_2(m_3 - m_1) - m_1^2}{2m_1m_3}.$$

**06.31.** За время  $\Delta t$  движущаяся в газе со скоростью  $v$  молекула площадью  $\sim r_0^2$  столкнётся с молекулами, находящимися в объёме  $\Delta V \sim v \Delta t r_0^2$ , а их количество в этом объёме можно оценить как  $\Delta N \sim v \Delta t r_0^2 (\rho_r / m_0)$ . Следовательно, время между двумя последовательными столкновениями молекулы составляет порядка

$$\tau \sim \frac{1}{\Delta N / \Delta t} = \left( v r_0^2 \frac{\rho_r}{m_0} \right)^{-1} = \frac{m_0}{\rho_r r_0^2 v}.$$

За это время молекула проходит расстояние, равное длине её свободного пробега:

$$\lambda \approx v \tau = \frac{m_0}{\rho_r r_0^2}.$$

Для получения ещё одного уравнения заметим, что для жидкого состояния вещества расстояния между молекулами по порядку величины совпадают с их размерами. Учитывая это, можно записать:

$$m_0 \approx \rho_{\text{ж}} r_0^3.$$

Из написанных соотношений получаем:

$$r_0 \approx \lambda \frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\text{ж}}}, \quad m_0 \approx \frac{\lambda^3 \rho_{\Gamma}^3}{\rho_{\text{ж}}^2}.$$

Подставляя числовые данные, находим:

$$r_0 \approx 10^{-10} \text{ м}, \quad m_0 \approx 10^{-27} \text{ кг}.$$

что по порядку величины согласуется с современными данными.

**06.32\*.** Для приведённых в задаче числовых данных  $\mathcal{E} > 2U_0 + I_0(R + r)$ , поэтому на каждом из диодов падает напряжение  $U_0$ , а ток через диоды больше  $I_0$ . Он равен  $I = (\mathcal{E} - 2U_0)/(R + r) = 0,1 \text{ А}$ , следовательно, на резисторе  $R$  падает напряжение  $IR = 1,6 \text{ В}$ , а на конденсаторе — напряжение  $U_1 = U_0 + IR = (rU_0 + R(\mathcal{E} - U_0))/(r + R) = 2,6 \text{ В}$ . Именно до такого напряжения и зарядится конденсатор после замыкания ключа.

При размыкании ключа ток через левый диод не течёт, поэтому на нём тепло не выделяется.

Процесс разрядки конденсатора можно разбить на два этапа: на первом этапе на диоде падает напряжение  $U_0$ , а ток оказывается больше, чем  $I_0$ . Этот случай реализуется, пока напряжение на конденсаторе превосходит величину  $U_2 = U_0 + I_0R = 1,8 \text{ В}$ .

Далее диод ведёт себя как резистор с сопротивлением  $R_{\text{д}} = U_0/I_0 = 20 \text{ Ом}$ . Найдём количества теплоты, выделяющиеся на диоде и резисторе на каждом из этапов.

1. На первом этапе на диоде выделяется теплота, равная произведению напряжения  $U_0$  на протёкший через диод заряд  $C(U_1 - U_2)$ :

$$Q_{\text{д}}^{\text{I}} = C(U_1 - U_2)U_0 = CU_0R \left( \frac{\mathcal{E} - 2U_0}{r + R} - I_0 \right) = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Для того, чтобы рассчитать количество теплоты, выделяющееся на резисторе, заметим, что при напряжении  $U$  на конденсаторе ток через резистор в рассматриваемом процессе оказывается таким же, как и в случае разрядки конденсатора с напряжением  $U - U_0$  без диода. Поэтому количество теплоты

$$\begin{aligned} Q_{\text{R}}^{\text{I}} &= \frac{C(U_1 - U_0)^2}{2} - \frac{C(U_2 - U_0)^2}{2} = \\ &= \frac{CR^2}{2}(I^2 - I_0^2) = \frac{CR^2}{2} \left( \left( \frac{\mathcal{E} - 2U_0}{r + R} \right)^2 - I_0^2 \right) = 0,96 \cdot 10^4 \text{ Дж}. \end{aligned}$$

Отметим, что для суммарного количества теплоты, выделяющегося на первом этапе, справедлив закон сохранения энергии:

$$Q_{\text{д}}^{\text{I}} + Q_{\text{R}}^{\text{I}} = \frac{CU_1^2}{2} - \frac{CU_2^2}{2}.$$

2. На втором этапе количества теплоты, выделяющиеся на диоде и резисторе, относятся друг к другу, как величины сопротивлений диода и резистора, то есть

$$\frac{Q_{\text{д}}^{\text{II}}}{Q_{\text{R}}^{\text{II}}} = \frac{R_{\text{д}}}{R} = \frac{5}{4}.$$

Поскольку  $Q_{\text{д}}^{\text{II}} + Q_{\text{R}}^{\text{II}} = CU_2^2/2$ , то отсюда получаем:

$$Q_{\text{R}}^{\text{II}} = \frac{R}{R_{\text{д}} + R} \cdot \frac{CU_2^2}{2} = \frac{CI_0R(U_0 + I_0R)}{2} = 0,72 \cdot 10^{-4} \text{ Дж},$$

$$Q_{\text{д}}^{\text{II}} = \frac{R_{\text{д}}}{R_{\text{д}} + R} \cdot \frac{CU_2^2}{2} = \frac{CU_0(U_0 + I_0R)}{2} = 0,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

Складывая количества теплоты, выделившиеся на первом и втором этапах, находим:

$$Q_{\text{R}} = Q_{\text{R}}^{\text{I}} + Q_{\text{R}}^{\text{II}} = \frac{CR^2}{2} \left( \left( \frac{\mathcal{E} - 2U_0}{r + R} \right)^2 + \frac{I_0U_0}{R} \right) = 1,68 \cdot 10^{-4} \text{ Дж},$$

$$Q_{\text{д}} = Q_{\text{д}}^{\text{I}} + Q_{\text{д}}^{\text{II}} = \frac{CU_0R}{2} \left( \frac{(2\mathcal{E} - 3U_0)R + U_0r}{R(r + R)} - I_0 \right) = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

**06.33\***. Пусть  $I_1$  и  $I_2$  — токи, текущие через катушки,  $Q$  — заряд на конденсаторе. Из закона сохранения электрического заряда следует:  $\Delta Q/\Delta t = I = I_1 + I_2$ .

В контуре, состоящем только из катушек, суммарный магнитный поток сохраняется:  $L_1I_1 - L_2I_2 = \Phi_0 = L_1I_1^0 - L_2I_2^0 = \text{const}$ . Следовательно, текущие через катушки токи выражаются через ток, текущий через конденсатор, и постоянную величину магнитного потока:

$$I_1 = \frac{L_2I}{L_1 + L_2} + \frac{\Phi_0}{L_1 + L_2}, \quad I_2 = \frac{L_1I}{L_1 + L_2} - \frac{\Phi_0}{L_1 + L_2}.$$

ЭДС самоиндукции, действующая в каждой из катушек, равна

$$\mathcal{E} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t} = -\frac{L_1L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Поскольку  $Q/C = \mathcal{E}$ , то заряд на конденсаторе и текущий через него ток удовлетворяют уравнению гармонических колебаний:

$$\frac{L_1L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{L_1L_2}{L_1 + L_2} \cdot \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{C} = 0.$$

Частота этих колебаний равна  $\omega = \sqrt{\frac{L_1 + L_2}{L_1 L_2 C}}$ .

Следовательно, зависимости от времени заряда на конденсаторе и текущего через него тока имеют вид:

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$I(t) = Q_0 \omega \cos(\omega t + \varphi) = I_1(t) + I_2(t).$$

Из начальных условий находим:  $\varphi = 0$ ,  $Q_0 = (I_1^0 + I_2^0)/\omega$ .  
Следовательно,

$$Q(t) = \frac{I_1^0 + I_2^0}{\omega} \sin \omega t,$$

$$I_1(t) = \frac{L_1 I_1^0 - L_2 I_2^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_2 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t,$$

$$I_2(t) = \frac{L_2 I_2^0 - L_1 I_1^0}{L_1 + L_2} + \frac{L_1 (I_1^0 + I_2^0)}{L_1 + L_2} \cos \omega t.$$

**06.34.** Изображения формируются следующим образом: часть пучка попадает на линзу в воздухе, преломляется на ней, затем преломляется на плоской поверхности линзы в воде и образует одно изображение на глубине  $l$ ; другая часть пучка попадает на линзу в воде и образует после преломлений второе изображение на глубине  $L > l$  (см. рис.).

Выразим расстояния до изображений  $l$  и  $L$  через радиус  $R$  выпуклой поверхности линзы и показатели преломления воды  $n_{\text{в}}$  и материала линзы  $n$ .

Для этого рассмотрим луч света, проходящий на расстоянии  $x \ll R$  от главной оптической оси линзы и попадающий на неё в воздухе. Он падает на сферическую поверхность линзы под углом  $\alpha = x/R$  и преломляется под углом  $\beta = x/(Rn)$ , поворачивая при этом на угол  $\gamma = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . Под этим же углом он падает на плоскую поверхность

линзы и преломляется под углом  $\delta = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n_{\text{в}}}$ , выходя в воду. Поскольку по условию линза тонкая, то  $\delta = x/l$ , и расстояние  $l$  до изображения можно определить из следующего соотношения:

$$\frac{x}{l} = \frac{x}{R} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n_{\text{в}}}, \quad \text{то есть} \quad l = \frac{Rn_{\text{в}}}{n - 1}.$$

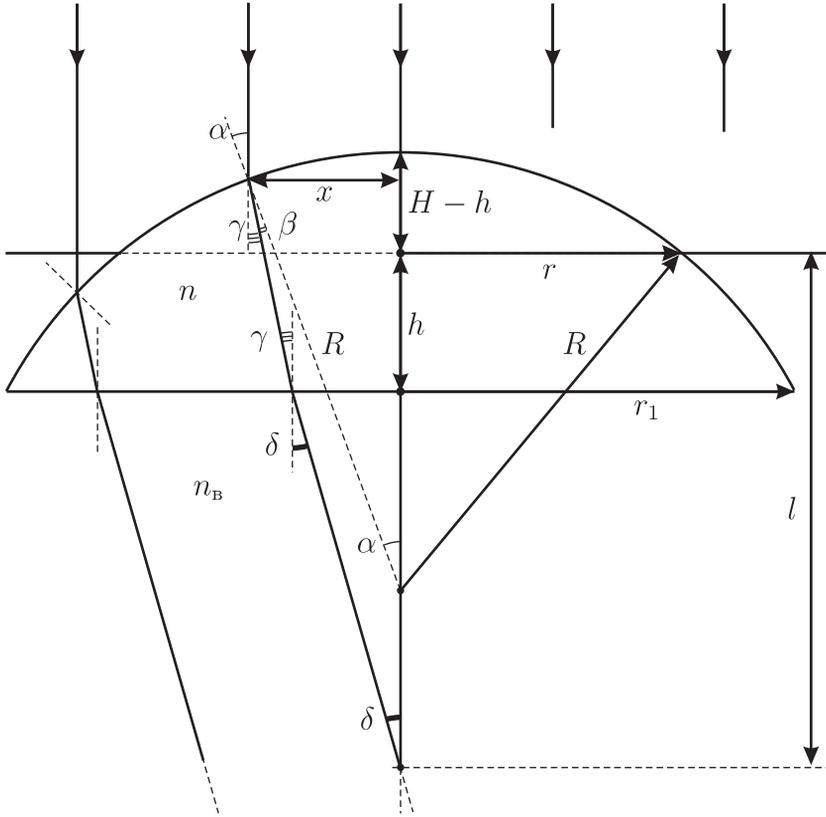


Рис. 06.34.

Аналогичным образом, рассматривая часть пучка, падающую на линзу в воде, находим расстояние до второго изображения:

$$L = \frac{R}{\frac{n}{n_B} - 1} = \frac{Rn_B}{n - n_B}$$

(эта формула получается заменой в выражении для  $l$  показателя преломления воздуха, равного 1, на показатель преломления воды  $n_B$ ).

Из полученных соотношений находим:

$$\frac{l}{L} = \frac{n - n_B}{n - 1}, \quad \text{и} \quad n = \frac{n_B L - l}{L - l}, \quad R = \frac{lL(n_B - 1)}{n_B(L - l)}.$$

Найдём теперь глубину  $h$  погружения линзы в воду. Поскольку изображения оказываются одинаково яркими, то части пучка, падающие на линзу в воздухе и воде, переносят одинаковую энергию. Поэтому площади горизонтальных оснований частей линзы, покрытых и не

покрытых водой, должны совпадать, и площадь основания выступающей из воды части линзы составляет  $1/2$  от площади основания всей линзы.

Найдём связь высоты  $(H - h)$  выступающей из воды части линзы с радиусом  $r$  её основания (см. рисунок). По теореме Пифагора с учётом малости  $H$  по сравнению с  $R$  имеем:

$$r^2 = R^2 - (R - (H - h))^2 \approx 2R(H - h),$$

откуда площадь основания выступающей из воды части линзы равна  $S_1 = \pi r^2 \approx 2\pi R(H - h)$ .

Аналогичным образом, площадь основания всей линзы равна  $S = \pi r_1^2 \approx 2\pi RH$ , и поскольку  $S_1 = S/2$ , то  $h = H/2$ .

### Олимпиада 2007 года. Решения

**07.1.** Как следует из графика, сила  $F$  является линейной функцией глубины погружения:  $F(h) = F_0(1 - (h/h_0))$ , где  $F_0 = 10$  Н, а  $h_0 = 0,1$  м. Учтём, что сила  $F$  складывается из двух противоположных по направлению сил: силы тяжести  $mg$  и силы Архимеда  $\rho_0 gSh$ , то есть  $F = mg - \rho_0 gSh$ . Отсюда получаем:

$$F = mg - \rho_0 gSh = F_0 - \frac{F_0 h}{h_0}.$$

При  $h = 0$  отсюда находим, что  $mg = F_0$ , и  $m = F_0/g = 1$  кг. После этого при  $h \neq 0$  из написанного уравнения следует, что  $\rho_0 gS = F_0/h_0$ .

Отсюда  $S = \frac{F_0}{\rho_0 gh_0} = 0,01$  м<sup>2</sup>.

**07.2.** Масса воды  $m_{\text{в}}$  при охлаждении до  $0$  °С отдаёт количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}$ , достаточное для плавления массы льда  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}/\lambda \approx 0,3$  кг. Объём  $m_{\text{в}} = 0,4$  кг воды и  $0,3$  кг растаявшего льда составит  $\frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda\rho_{\text{в}}} \approx 0,7$  л, что меньше объёма  $V$  содержимого сосуда. Следовательно, оставшиеся  $0,3$  л объёма занимает лёд в твёрдом состоянии массой  $\rho_{\text{л}} \left( V - \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda} \right) \right) \approx 0,27$  кг, конечная температура смеси равна  $0$  °С, масса содержимого сосуда равна

$$\begin{aligned} m &= \rho_{\text{л}} \left( V - \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda} \right) \right) + m_{\text{в}} + \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda} = \\ &= \rho_{\text{л}}V + m_{\text{в}} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} \right) \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{\lambda} \right) \approx 0,97 \text{ кг.} \end{aligned}$$

**07.3.** Если поднести к «чёрному ящику» сбоку внешний магнит, то намагниченность постоянного магнита изменится, и он будет притягиваться к внешнему магниту; катушка, сделанная из медной проволоки, притягиваться к внешнему магниту не будет (медь — немагнитный материал). В качестве внешнего магнита можно использовать второй «чёрный ящик». Следовательно, конец «чёрного ящика» с катушкой будет притягиваться к середине «чёрного ящика» с постоянным магнитом, а конец «чёрного ящика» с постоянным магнитом не будет притягиваться к середине «чёрного ящика» с катушкой.

Другой способ заключается в наблюдении за ящиками в течение длительного времени: «чёрный ящик» с катушкой будет нагреваться, что можно заметить на ощупь; кроме того, со временем ток через катушку и создаваемое им магнитное поле станут меньше из-за разрядки батарейки.

**07.4.** Найдём отношение периодов обращения Марса и Земли  $T_M$  и  $T_Z$ . При движении планеты массой  $m$  вокруг Солнца массой  $M$  по круговой орбите радиусом  $r$  с угловой скоростью  $\omega$  на планету со стороны Солнца действует сила тяготения  $\frac{GmM}{r^2}$ . В соответствии со вторым законом Ньютона, она равна произведению массы планеты  $m$  на её центростремительное ускорение  $\omega^2 r$ , то есть  $\frac{GmM}{r^2} = m\omega^2 r$ .

Отсюда  $\omega = \sqrt{GM/r^3}$  и, следовательно,  $\omega \sim r^{-3/2}$ . Так как  $T = 2\pi/\omega$ , то  $T \sim r^{3/2}$ ; поэтому отношение периодов обращения Марса и Земли составляет  $\frac{T_M}{T_Z} = \left(\frac{r_M}{r_Z}\right)^{3/2} = n^{3/2} \approx 1,89$ .

Заметим, что последняя формула выражает собой третий закон Кеплера (мы его вывели, исходя из предположения, что планеты движутся по круговым орбитам, хотя этот закон справедлив и в более общем случае эллиптических орбит).

За промежуток времени  $T$  от одного противостояния до другого Марс совершает  $k$  оборотов, а Земля  $k + 1$  оборот ( $k$  не обязательно целое!). Этот промежуток времени выражается через периоды обращения Земли и Марса вокруг Солнца  $T_Z$  и  $T_M$  следующим образом:  $T = (k + 1)T_Z = kT_M$ . Отсюда находим  $k = T_Z/(T_M - T_Z)$  и

$$T = \frac{T_Z T_M}{T_M - T_Z} = \frac{n^{3/2}}{n^{3/2} - 1} T_Z \approx 2,12 T_Z.$$

Таким образом, противостояния Марса повторяются приблизительно через 2,12 земных лет.

**07.5.** Пусть  $x$  — высота столба жидкости. Давление у свободной поверхности жидкости равно атмосферному давлению, а на высоте  $x$  над этой поверхностью давление в жидкости меньше атмосферного на величину  $\rho gx$ . Следовательно, разность давлений, оказываемых на поршень сверху и снизу, равна  $\rho gx$ . Поэтому на поршень действует направленная вниз сила  $F = \rho gxS$ , пропорциональная смещению поршня  $x$ . Школьник, измеряя жёсткость предполагаемой пружины, на самом деле измерил коэффициент пропорциональности  $k = F/x = \rho gS$ .

Отсюда  $S = \frac{k}{\rho g} = 0,01 \text{ м}^2$ .

**07.6.** Обозначим через  $m_{\text{л}}$  начальную массу льда в сосуде, через  $t$  — установившуюся в системе температуру, которая по условию выше  $0^\circ\text{C}$ . В процессе установления равновесия масса воды  $m_{\text{в}}$  отдала количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t)$ . Масса льда  $m_{\text{л}}$  получила количество теплоты  $c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|$  на этапе нагревания до  $0^\circ\text{C}$ , затем количество теплоты  $\lambda m_{\text{л}}$  при плавлении и, наконец, количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{л}}t$  при нагревании образовавшейся из льда воды до установившейся температуры  $t$ . Поскольку теплоемкостью сосуда и теплообменом с окружающей средой можно пренебречь, то из уравнения теплового баланса получаем:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t) = c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}}m_{\text{л}}t.$$

Определяемая из данного соотношения конечная температура  $t$  положительна, если  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} > c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda m_{\text{л}}$ . Таким образом, масса льда  $m_{\text{л}}$  лежит в интервале  $0 \leq m_{\text{л}} < \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda}$ . Конечный объём

содержимого сосуда связан с массой льда соотношением  $V = \frac{m_{\text{в}} + m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}$ .

Отсюда находим ответ:  $\frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \leq V < \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda} \right)$ . Подстановка числовых данных в полученную формулу даёт:  $0,4 \text{ л} \leq V < 0,67 \text{ л}$ .

**07.7.** Поскольку амперметр можно считать идеальным, падение напряжения на нём равно нулю. Поэтому на резисторе  $R_3$  падает напряжение  $U_3 = U$ . Следовательно, сила тока, текущего через этот резистор, равна  $I_3 = U_3/R_3 = U/R_3 = 0,15 \text{ А}$ . Далее, сила тока  $I$ , текущего через амперметр, равна сумме сил токов  $I_2$  и  $I_3$ ; отсюда  $I_2 = I - I_3 = I - \frac{U}{R_3} = 0,035 \text{ А}$ .

На резисторе  $R_2$  падает напряжение  $U_2 = I_2R_2$ ; такое же напряжение, ввиду идеальности амперметра, падает и на резисторе  $R_1$ . Поэтому

сила тока, текущего через резистор  $R_1$ , равна  $I_1 = U_2/R_1 = I_2R_2/R_1$ . Отсюда находим силу тока  $I_4$ , текущего через резистор  $R_4$ , и напряжение  $U_4$  на этом резисторе:

$$I_4 = I_1 + I_2 = I_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) = \left( I - \frac{U}{R_3} \right) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right),$$

$$U_4 = U - U_2 = U - I_2 R_2 = U - \left( I - \frac{U}{R_3} \right) R_2.$$

Следовательно, сопротивление резистора  $R_4$  равно

$$R_4 = \frac{U_4}{I_4} = \frac{U - I_2 R_2}{I_2(1 + (R_2/R_1))} = \frac{R_1(U R_3 - R_2(IR_3 - U))}{(IR_3 - U)(R_1 + R_2)} \approx 59 \text{ Ом.}$$

**07.8.** Перейдём в систему отсчёта, движущуюся со скоростью  $(v_2 - v_1)/2$  в направлении скорости  $\vec{v}_2$ . В движущейся системе отсчёта концы линейки имеют скорости  $(v_1 + v_2)/2$ , направленные перпендикулярно линейке в разные стороны. Следовательно, в этой системе отсчёта линейка совершает только вращательное движение вокруг центральной точки, поворачиваясь на угол  $\pi/2$  за время

$$\tau = \frac{\pi L/4}{(v_1 + v_2)/2} = \frac{\pi L}{2(v_1 + v_2)} \approx 1 \text{ с.}$$

Далее заметим, что в движущейся системе отсчёта центр масс линейки покоится. Следовательно, скорость центра масс линейки в неподвижной системе отсчёта равна  $(v_2 - v_1)/2$ . Так как стол горизонтальный и гладкий, то импульс, а значит, и скорость центра масс линейки остаются неизменными. Поэтому через время  $t = 5$  с после начального момента времени (как, впрочем, и через любой другой промежуток времени) скорость центральной точки линейки будет равна  $v = (v_2 - v_1)/2 = 10$  см/с.

**07.9.** Из чертежа видно, что груз массой  $3M$  двигаться не может, и поэтому его ускорение равно нулю.

Так как блоки и нити невесомы и трение отсутствует, то сила натяжения  $T_1$  верхней нити, перекинутой через верхний блок, постоянна вдоль всей её длины. То же самое справедливо и для силы натяжения  $T_2$  нижней нити, на которой висит нижний блок. Направим координатную ось  $OX$  вниз и обозначим ускорение груза массой  $2M$  через  $a$ . Тогда груз массой  $M$ , движущийся в противоположном направлении, имеет ускорение  $-a$ .

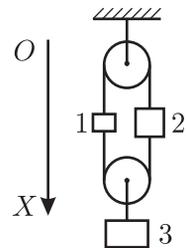


Рис. 07.9.

Запишем второй закон Ньютона для грузов массами  $M$  и  $2M$ :

$$-Ma = Mg - T_1 + T_2, \quad 2Ma = 2Mg - T_1 + T_2.$$

Вычитая первое уравнение из второго, получим, что  $3Ma = Mg$ . Отсюда  $a = g/3$ .

Таким образом, груз массой  $M$  движется с ускорением  $g/3$  вверх, груз массой  $2M$  — с ускорением  $g/3$  вниз, ускорение груза массой  $3M$  равно нулю.

**07.10.** Нормальная составляющая силы реакции, действующая на кирпич со стороны тележки, равна по величине силе тяжести  $mg$ . Следовательно, на кирпич при его движении относительно тележки действует с её стороны сила трения  $\mu mg$ , сообщающая кирпичу ускорение  $\mu g$  относительно земли. Такая же по величине и противоположная по направлению сила трения действует на тележку со стороны кирпича; тележка при этом получает ускорение, равное по величине  $\mu mg/M$ . Скорости кирпича  $u$  и тележки  $v$  относительно стола зависят от времени  $t$  по законам:  $u(t) = \mu gt$  и  $v(t) = v_0 - \mu g \frac{m}{M} t$ . Кирпич и тележка перестанут ускоряться в тот момент, когда их скорости сравняются:  $u(t_0) = v(t_0)$ , откуда  $t_0 = \frac{v_0}{\mu g(1 + (m/M))}$ . За время движения  $t_0$  кирпич

сместится относительно стола на расстояние  $x_0 = \frac{1}{2} \mu g t_0^2$ , а тележка — на расстояние  $X_0 = v_0 t_0 - \frac{1}{2} \mu g \frac{m}{M} t_0^2$ . Следовательно, кирпич пройдёт по тележке до остановки относительно неё путь

$$l = X_0 - x_0 = v_0 t_0 - \mu g \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{t_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2\mu g(1 + (m/M))}.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{v_0^2}{2gl(1 + (m/M))}.$$

**07.11.** Поскольку объём сосуда и давление в нём постоянны, то количество вещества в сосуде, в соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона, изменяется обратно пропорционально абсолютной температуре газа. В рассматриваемом процессе температура газа возросла в  $4/3$  раза, поэтому количество вещества в сосуде после завершения нагревания составило  $3/4$  от исходного количества. Следовательно, сосуд покинула четверть от общего числа атомов, что по условию равно половине от начального числа атомов гелия. Поэтому

начальное количество гелия  $\nu_{\Gamma}$  равно половине общего количества вещества, первоначально находившегося в сосуде. Отсюда следует, что начальное количество гелия было равно количеству  $\nu_{\kappa}$  находящегося в сосуде кислорода:  $\nu_{\Gamma} = \nu_{\kappa}$ .

Отношение  $n$  конечной и начальной плотностей смеси равно отношению масс содержимого сосуда до и после нагревания. С учётом проведённых выше рассуждений, получаем:

$$n = \frac{\rho_{\text{кон}}}{\rho_{\text{нач}}} = \frac{\mu_{\kappa}\nu_{\kappa} + \mu_{\Gamma}(\nu_{\Gamma}/2)}{\mu_{\kappa}\nu_{\kappa} + \mu_{\Gamma}\nu_{\Gamma}} = \frac{2\mu_{\kappa} + \mu_{\Gamma}}{2(\mu_{\kappa} + \mu_{\Gamma})} = \frac{17}{18} \approx 0,94.$$

**07.12\***. Примем, что потенциал электрического поля в средней точке, лежащей на проводнике, который соединяет «чёрные ящики», равен нулю. Так как исследуемая электрическая схема состоит только из элементов, для которых справедлив закон Ома, то потенциалы  $\varphi_A$  клеммы  $A$  и  $\varphi_B$  клеммы  $B$  должны линейно зависеть от сил токов  $I_A$  и  $I_B$ , протекающих через эти клеммы при подключении к ним омметра:

$$\varphi_A = I_A r_{AA} + I_B r_{BA} \quad \text{и} \quad \varphi_B = I_A r_{AB} + I_B r_{BB},$$

где  $r_{AA}$ ,  $r_{BA}$ ,  $r_{AB}$  и  $r_{BB}$  — некоторые постоянные коэффициенты. Аналогичные соотношения можно записать для потенциалов  $\varphi_C$  и  $\varphi_D$  клемм  $C$  и  $D$  (при этом нужно учесть, что потенциалы этих клемм отрицательны в силу выбора нулевого значения потенциала в средней точке):

$$-\varphi_C = I_C r_{CC} + I_D r_{DC} \quad \text{и} \quad -\varphi_D = I_C r_{CD} + I_D r_{DD},$$

где  $r_{CC}$ ,  $r_{DC}$ ,  $r_{CD}$  и  $r_{DD}$  — также некоторые постоянные коэффициенты.

При подключении омметра к клеммам  $A$  и  $C$  токи  $I_A$  и  $I_C$  совпадают:  $I_A = I_C = I_{AC}$ , а  $I_B = I_D = 0$ . Следовательно,  $\varphi_A = I_{AC} r_{AA}$  и  $-\varphi_C = I_{AC} r_{CC}$ . Отсюда получаем:  $\varphi_A - \varphi_C = I_{AC}(r_{AA} + r_{CC})$ . Следовательно, показание омметра  $R_{AC} = r_{AA} + r_{CC}$ . При подключении омметра к клеммам  $B$  и  $D$  токи  $I_B$  и  $I_D$  совпадают:  $I_B = I_D = I_{BD}$ , а  $I_A = I_C = 0$ . Отсюда  $\varphi_B = I_{BD} r_{BB}$  и  $-\varphi_D = I_{BD} r_{DD}$ , то есть  $\varphi_B - \varphi_D = I_{BD}(r_{BB} + r_{DD})$ , и  $R_{BD} = r_{BB} + r_{DD}$ . При помощи аналогичных рассуждений можно показать, что  $R_{AD} = r_{AA} + r_{DD}$  и  $R_{BC} = r_{BB} + r_{CC}$ . Отсюда следует, что  $R_{AC} + R_{BD} = R_{AD} + R_{BC}$ , то есть  $R_{BC} = R_{AC} + R_{BD} - R_{AD}$ . Заметим, что решение задачи существует только при условии  $R_{AC} + R_{BD} \geq R_{AD}$ , так как значение сопротивления  $R_{BC}$  не может быть отрицательным.

Существует и другой способ решения задачи. Он основан на том, что «чёрный ящик» с тремя выводами, содержащий только резисторы, можно заменить на эквивалентную схему, в которой между выводами включены всего три резистора, соединённые либо «звездой», либо «треугольником». В данном случае удобнее заменить каждый из «чёрных ящиков» на схему, состоящую из трёх резисторов, соединённых «звездой», как показано на рисунке. Тогда

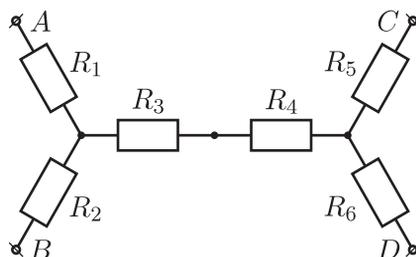


Рис. 07.12.

$$\begin{aligned} R_{AC} &= R_1 + R_3 + R_4 + R_5, \\ R_{AD} &= R_1 + R_3 + R_4 + R_6, \\ R_{BC} &= R_2 + R_3 + R_4 + R_5, \\ R_{BD} &= R_2 + R_3 + R_4 + R_6. \end{aligned}$$

Отсюда снова получаем соотношение  $R_{AC} + R_{BD} = R_{AD} + R_{BC}$ , из которого следует ответ задачи.

**07.13\***. Пусть  $R$  — радиус солнечной шестерни, совпадающий с радиусом каждой из планетарных шестерён,  $\omega_{\text{п}}$  — угловая скорость каждой из планетарных шестерён,  $\omega_{\text{в}}$  — угловая скорость водила,  $\omega_{\text{к}}$  — угловая скорость кольцевой шестерни. В качестве положительного направления вращения примем направление по часовой стрелке; при вращении в этом направлении будем считать угловую скорость положительной, а при вращении в противоположном направлении — отрицательной.

Если водило зафиксировано, то из условия равенства линейных скоростей соприкасающихся точек солнечной и планетарной шестерён находим, что  $\omega_{\text{п}} = -\omega$ . Линейные скорости соприкасающихся друг с другом точек планетарных и кольцевой шестерён равны  $v_{\text{п}} = \omega_{\text{п}}R$  и  $v_{\text{к}} = \omega_{\text{к}} \cdot 3R$  соответственно. Так как между кольцевой и планетарными шестернями имеется зацепление, то  $v_{\text{п}} = v_{\text{к}}$ , откуда  $\omega_{\text{к}} = \omega_{\text{п}}/3 = -\omega/3$ . Следовательно, кольцевая шестерня вращается в направлении, противоположном направлению вращения солнечной шестерни, с угловой скоростью, равной по величине  $\omega/3$ .

Пусть теперь зафиксирована кольцевая шестерня. Так как точка соприкосновения планетарной и кольцевой шестерён неподвижна, то она является мгновенной осью вращения планетарной шестерни. Центр

планетарной шестерни, находящийся на водиле на расстоянии  $2R$  от центра солнечной шестерни, движется со скоростью  $\omega_{\text{в}} \cdot 2R = -\omega_{\text{п}}R$ , а точка соприкосновения планетарной шестерни с солнечной, вдвое более удалённая от мгновенной оси вращения — с вдвое большей скоростью, равной  $4\omega_{\text{в}}R = -2\omega_{\text{п}}R$ . С такой же линейной скоростью движутся точки обода солнечной шестерни. Следовательно,  $\omega R = 4\omega_{\text{в}}R = -2\omega_{\text{п}}R$ , откуда  $\omega_{\text{в}} = \omega/4$ , а  $\omega_{\text{п}} = -\omega/2$ . Таким образом, в данном случае водило вращается в том же направлении, что и солнечная шестерня, с угловой скоростью, равной  $\omega/4$ . Планетарная шестерня при этом вращается в направлении, противоположном направлению вращения солнечной шестерни, с угловой скоростью, равной по величине  $\omega/2$ .

**07.14\***. Рассмотрим движение грузов до момента их столкновения с шайбой из пластилина. Пусть  $T$  — сила натяжения нити,  $a_0$  — направленное вниз ускорение груза  $m_2$ . В силу нерастяжимости нити это ускорение равно по величине и противоположно по направлению ускорению груза  $m_1$ . Запишем уравнения движения для грузов  $m_1$  и  $m_2$  в проекции на вертикальную ось, направленную вниз:

$$m_2 a_0 = m_2 g - T, \quad -m_1 a_0 = m_1 g - T.$$

Вычитая эти уравнения друг из друга, получаем:  $a_0 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$ .

Аналогичным образом можно найти, что после прилипания пластилина к грузу  $m_1$  его ускорение направлено вниз и равно  $a = \frac{m_1 + m_3 - m_2}{m_1 + m_3 + m_2} g$ . Этот результат можно получить и без записи уравнений движения: достаточно в найденном выше выражении для  $a_0$  заменить массу  $m_1$  на суммарную массу  $m_1 + m_3$  и учесть, что после прилипания пластилина ускорение груза  $m_1$  будет положительным (так как  $m_3 > m_2 - m_1$ ).

Пусть скорость грузов до соударения с шайбой из пластилина была равна по величине  $v_0$ . Так как нить нерастяжимая и блок невесомый, то при неупругом столкновении груза  $m_1$  с пластилином возникнет кратковременное увеличение силы натяжения нити — рывок, после которого скорости всех трёх тел станут одинаковыми по модулю и равными некоторой величине  $v$ . Грузы  $m_1$  и  $m_2$ , жёстко связанные нерастяжимой нитью, при столкновении с неподвижной пластилиновой шайбой ведут себя, как одно тело с массой  $m_1 + m_2$ , движущееся со скоростью  $v_0$ . При этом проекция импульса системы на направление нити, очевидно, сохраняется:  $(m_1 + m_2)v_0 = (m_1 + m_2 + m_3)v$ . Следовательно, после прилипания пластилина к грузу массой  $m_1$  получившееся

тело массой  $m_1 + m_3$  будет двигаться вверх с начальной скоростью  $v$ , причём равнозамедленно.

Скорости  $v_0$  и  $v$  связаны с расстояниями  $h_0$  и  $h$  следующими кинематическими соотношениями:

$$v_0 = \sqrt{2a_0h_0} = \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}},$$

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{m_1 + m_3 - m_2}{m_1 + m_3 + m_2}}.$$

Учитывая записанное выше уравнение, связывающее скорости  $v_0$  и  $v$ , получаем:

$$(m_1 + m_2) \sqrt{2gh_0} \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}} = (m_1 + m_2 + m_3) \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{m_1 + m_3 - m_2}{m_1 + m_3 + m_2}},$$

откуда

$$h = h_0 \frac{m_2^2 - m_1^2}{(m_1 + m_3)^2 - m_2^2}.$$

**07.15.** Рассмотрим оба опыта в системе отсчёта, связанной с центром масс реагирующих частиц. Для того чтобы ядерная реакция произошла, необходимо сблизить частицы на некоторое минимальное расстояние. При этом в системе центра масс частицы, двигавшиеся навстречу друг другу со скоростями  $u_1$  и  $u_2$ , останавливаются, и их кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию взаимодействия. Ясно, что для начала реакции нужно, чтобы суммарная кинетическая энергия частиц (а значит, и скорость их сближения  $v = u_1 + u_2$ ) превосходила некоторое пороговое значение. Таким образом, минимально возможная для реакции скорость сближения частиц в обоих опытах должна быть одинакова. Релятивистскими эффектами в данной задаче можно пренебречь, поскольку кинетическая энергия протона намного меньше его энергии покоя (примерно 1000 МэВ). Поэтому скорость сближения частиц, то есть их относительная скорость, в системе центра масс и в неподвижной лабораторной системе одинакова. В первом опыте скорость сближения частиц равна  $v_1 = \sqrt{2E_1/m_1}$ , а во втором —  $v_2 = \sqrt{2E_2/m_2}$ , где  $m_1$  — масса протона, а  $m_2$  — масса ядра дейтерия. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\sqrt{\frac{2E_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{2E_2}{m_2}}, \quad \text{откуда} \quad E_2 = E_1 \frac{m_2}{m_1}.$$

Учитывая, что  $\frac{m_2}{m_1} = 2$ , получаем  $E_2 = 2E_1 = 2,8$  МэВ.

**07.16\***. Обозначим через  $m_{\text{л}}$  начальную массу льда в сосуде. Рассмотрим возможные значения установившейся в системе температуры  $t$ .

а) Пусть  $t > 0$  °С. Тогда масса воды  $m_{\text{в}}$  отдала количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t)$ , а масса льда  $m_{\text{л}}$  получила количество теплоты  $c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|$  на этапе нагревания до 0 °С, затем  $\lambda m_{\text{л}}$  при плавлении и  $c_{\text{в}}m_{\text{л}}t$  при нагревании образовавшейся воды до установившейся температуры. Поскольку теплоёмкостью сосуда и потерями тепла можно пренебречь, то из уравнения теплового баланса получаем:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_{\text{в}} - t) = c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}}m_{\text{л}}t.$$

Определяемая из данного соотношения конечная температура  $t$  положительна, если  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} > c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda m_{\text{л}}$ . Таким образом, масса льда  $m_{\text{л}}$  лежит в интервале  $0 \leq m_{\text{л}} < \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda}$ . Конечный объём содержимого сосуда связан с массой льда соотношением  $V = (m_{\text{в}} + m_{\text{л}})/\rho_{\text{в}}$ ; отсюда

$$\frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \leq V < \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda} \right),$$

подстановка числовых данных даёт  $0,4 \text{ л} \leq V < 0,67 \text{ л}$ .

б) Пусть  $t < 0$  °С. Тогда масса воды  $m_{\text{в}}$  отдала количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}$  при охлаждении до 0 °С, затем  $\lambda m_{\text{в}}$  при замерзании, и  $c_{\text{л}}m_{\text{в}}(0 - t)$  при охлаждении образовавшегося льда до конечной температуры, а лёд получил количество теплоты  $c_{\text{л}}m_{\text{л}}(t - t_{\text{л}})$ . Из уравнения теплового баланса получаем:

$$c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda m_{\text{в}} - c_{\text{л}}m_{\text{в}}t = c_{\text{л}}m_{\text{л}}(t - t_{\text{л}}).$$

Определённая из этой формулы установившаяся температура отрицательна, если  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda m_{\text{в}} < -c_{\text{л}}m_{\text{л}}t_{\text{л}}$ ; при этом начальная масса льда превосходит критическое значение  $m_{\text{л}} > \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|}m_{\text{в}}$ . Конечный объём системы  $V = (m_{\text{в}} + m_{\text{л}})/\rho_{\text{л}}$  должен удовлетворять неравенству

$$V > \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|} \right),$$

подстановка числовых данных даёт  $V > 6,7 \text{ л}$ .

в) Из проведённого выше рассмотрения следует, что конечная температура системы равна 0 °С, если начальная масса льда удовлетворяет неравенству

$$\frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda}m_{\text{в}} \leq m_{\text{л}} \leq \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|}m_{\text{в}}.$$

В процессе установления равновесия вода отдала количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}}$ , лёд получил количество теплоты  $c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|$ ; следовательно, количество теплоты  $c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} - c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|$  пошло либо на плавление массы льда  $\Delta m = \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} - c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|}{\lambda}$  (если  $\Delta m > 0$ ), либо на кристаллизацию массы воды  $-\Delta m$  при  $\Delta m < 0$ . При этом объём системы изменяется на величину  $-\Delta m \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right)$  и оказывается равным

$$\begin{aligned} V &= \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \Delta m \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right) = \\ &= \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} - \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}t_{\text{в}} - c_{\text{л}}m_{\text{л}}|t_{\text{л}}|}{\lambda} \left( \frac{1}{\rho_{\text{л}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}} \right). \end{aligned}$$

Учитывая неравенство для начальной массы льда, приходим к соотношению:

$$\frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}| + \lambda} \right) \leq V \leq \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left( 1 + \frac{c_{\text{в}}t_{\text{в}} + \lambda}{c_{\text{л}}|t_{\text{л}}|} \right).$$

Подстановка числовых данных даёт  $0,67 \text{ л} \leq V \leq 6,7 \text{ л}$ .

**07.17.** При разомкнутом втором ключе трансформатор ведёт себя, как катушка индуктивности  $L_1$ . Частота электромагнитных колебаний в такой цепи  $\omega = \frac{1}{\sqrt{(L + L_1)C}}$ , откуда  $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C} - L$ .

Пусть теперь оба ключа замкнуты. При этом в цепи возможны два вида гармонических колебаний: первый — когда силы токов, текущих через обмотки трансформатора, одинаковы по амплитуде и по фазе; второй — когда силы токов, текущих через обмотки трансформатора, одинаковы по амплитуде, но имеют противоположные фазы. В первом случае магнитные потоки через сердечник трансформатора будут складываться. Поэтому ЭДС индукции в обмотках трансформатора удвоится по сравнению со случаем разомкнутого ключа, что можно представить как эффективное удвоение индуктивности обмотки трансформатора. Частота колебаний в этом случае будет равна

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(L + 2L_1)C}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\omega^2} - LC}} = \frac{\omega}{\sqrt{2 - \omega^2 LC}}.$$

Во втором случае магнитные потоки через сердечник трансформатора будут вычитаться и скомпенсируют друг друга, поэтому ЭДС

индукции в обмотках трансформатора наводиться не будет. При этом индуктивность обмотки трансформатора можно считать равной нулю, и частота колебаний будет равна  $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Заметим, что эту задачу можно решать и другим способом, записывая закон Ома для цепей переменного тока и решая получившуюся систему дифференциальных уравнений. Однако такой способ решения выходит за рамки школьной программы.

**07.18\***. Построим графики зависимости от времени  $t$  расстояния  $x$  от каждого из велосипедистов до деревни, из которой дует ветер. Если бы второй велосипедист (ехавший сначала против ветра) не отдыхал в деревне (пунктирный график), точки встречи велосипедистов располагались бы симметрично относительно середины пути, соединяющего деревни. С учётом же отдыха оказывается, что вторая точка встречи находится на меньшем расстоянии от ближайшей деревни, чем первая. Следовательно, велосипедисты встретились сначала в точке  $B$ , затем в точке  $A$ , и именно из деревни, расположенной вблизи точки  $A$ , дует ветер. Этой деревней оказывается Липовка — ветер дует из Липовки в Дёмушкино.

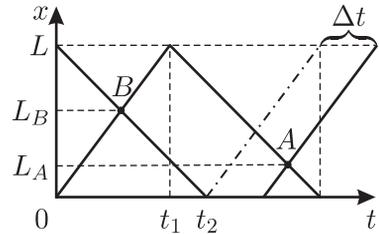


Рис. 07.18.

Найдём скорости велосипедистов  $V_1 = V + u$  и  $V_2 = V - u$  при движении по ветру и против ветра (здесь  $u$  — величина изменения их скоростей из-за ветра). Поскольку велосипедисты сначала встретились в точке  $B$ , отношение их скоростей совпадает с отношением расстояний от точки  $B$  до деревень, то есть  $\frac{V + u}{V - u} = \frac{L_B}{L - L_B} = \frac{3}{2}$ . Отсюда  $u = \frac{2L_B - L}{L}V = 0,2V = 4$  км/ч. Следовательно,  $V_1 = \frac{2L_B}{L}V = 24$  км/ч и  $V_2 = \frac{2(L - L_B)}{L}V = 16$  км/ч. Искомые времена равны:

$$t_1 = \frac{L}{V_1} = \frac{L^2}{2VL_B} = 25 \text{ мин.}; \quad t_2 = \frac{L}{V_2} = \frac{L^2}{2V(L - L_B)} = 37,5 \text{ мин.}$$

Из второй точки встречи  $A$  второй велосипедист доедет до Дёмушкино за время  $\Delta t_2 = \frac{L(L - L_A)}{2VL_B} = 20$  мин., а первый велосипе-

дист доедет до Липовки за время  $\Delta t_1 = \frac{LL_A}{2V(L - L_B)} = 7,5$  мин. Следовательно, второй велосипедист возвратится в Дёмушкино через  $\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{L^2(L - L_A - L_B)}{2VL_B(L - L_B)} = 12,5$  мин. после возврата первого велосипедиста в Липовку — и именно эти  $\Delta t = 12,5$  мин. второй велосипедист отдыхал в Липовке.

**07.19.** На левую часть линейки объёмом  $V_1$  действует направленная вниз сила тяжести  $\rho g V_1$  и направленная вверх сила Архимеда  $\rho_B g V_1$ . Сумма этих сил равна  $(\rho_B - \rho)g V_1$  и направлена вверх. Аналогично, на правую часть линейки объёмом  $V_2$  действует направленная вверх суммарная сила  $(\rho_M - \rho)g V_2$ . Плечи этих сил, приложенных к центрам левой и правой частей линейки, относятся, как  $l_1 : l_2$ . По правилу рычага при его равновесии отношение плеч равно обратному отношению величин сил:  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{(\rho_M - \rho)g V_2}{(\rho_B - \rho)g V_1}$ . Поскольку  $V_2/V_1 = l_2/l_1$ , находим:

$$\frac{\rho_M - \rho}{\rho_B - \rho} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2. \text{ Отсюда } \rho_M = \rho + (\rho_B - \rho) \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \approx 780 \text{ кг/м}^3.$$

**07.20.** Пока температура земли в вазоне выше  $0^\circ\text{C}$ , снег будет таять и превращаться в воду, а земля будет охлаждаться и пропитываться водой. Как только мокрая земля охладится до  $0^\circ\text{C}$ , снежинки перестанут таять, и в вазоне начнёт нарастать слой снега.

Найдём вначале время  $\tau_1$  охлаждения земли до  $0^\circ\text{C}$ . Пусть  $S$  — площадь вазона. Охлаждаясь от температуры  $t = 11^\circ\text{C}$  до  $0^\circ\text{C}$ , земля отдаёт количество теплоты  $chS\rho t$ , которое идёт на плавление массы снега  $M_1 = chS\rho t/\lambda$ . Поскольку за время  $\tau_1$  выпадает масса снега, равная  $M_1 = Sv\tau_1 m N_0/V_0$ , имеем:  $chS\rho t/\lambda = Sv\tau_1 m N_0/V_0$ , откуда

$$\tau_1 = \frac{ch\rho t V_0}{m\lambda N_0 v} \approx 1,33 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 22 \text{ мин.}$$

Теперь найдём время  $\tau_2$  нарастания слоя снега толщиной  $H = 10$  см. Будем считать, что снежинки при падении на землю не уплотняются, и плотность снега равна  $m/V$ . Масса такого слоя снега в вазоне равна  $M_2 = SHm/V$ , и она выпадает за время  $\tau_2$ , причём  $M_2 = Sv\tau_2 m N_0/V_0$ . Отсюда имеем:  $SHm/V = Sv\tau_2 m N_0/V_0$ , и

$$\tau_2 = \frac{HV_0}{VN_0 v} = 2 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 33 \text{ мин.}$$

Таким образом, слой снега толщиной  $H = 10$  см нарастёт в вазоне

за время

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{chptV_0}{m\lambda N_0v} + \frac{HV_0}{VN_0v} = \frac{V_0}{N_0v} \left( \frac{chpt}{m\lambda} + \frac{H}{V} \right) \approx 3,33 \cdot 10^3 \text{ с} \approx 55 \text{ мин.}$$

**07.21.** Направим ось  $OX$  горизонтально, а ось  $OY$  — вертикально вверх. Пусть  $A$  — искомое ускорение груза 1,  $a$  — величина вертикальной составляющей ускорения груза 3. Как вытекает из соображений симметрии, все проекции ускорений грузов выражаются через  $A$  и  $a$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{1x} &= A, & a_{2x} &= -A, & a_{3x} &= A, \\ a_{3y} &= -a, & a_{4x} &= -A, & a_{4y} &= -a. \end{aligned}$$

Используя условие нерастяжимости, то есть постоянства длины нити, получим соотношение, связывающее  $A$  и  $a$ . При смещении грузов 1 и 2 по горизонтали на  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  изменение длины нити равно  $\Delta x_2 - \Delta x_1$ ; при смещении грузов 3 и 4 по вертикали на  $\Delta y_3$  и  $\Delta y_4$  изменение длины нити равно  $-\Delta y_3 - \Delta y_4$ . Ввиду нерастяжимости нити, полное изменение её длины равно нулю:  $\Delta x_2 - \Delta x_1 - \Delta y_3 - \Delta y_4 = 0$ . Отсюда  $a_{2x} - a_{1x} = a_{3y} + a_{4y}$ , и  $a = A$ .

Для нахождения ускорения  $A = a$  обозначим через  $T$  силу натяжения нити. Запишем уравнение движения груза 3 по вертикали:  $T - mg = -ma$ , а также уравнение движения системы грузов 1 и 3 по горизонтали:  $T = (M + m)A$ . Отсюда  $A = \frac{mg}{M + 2m}$ .

**07.22.** Когда жук доползёт до конца линейки (см. рисунок), условие её равновесия, в соответствии с правилом рычага, можно записать в виде:  $Mgx_0 = 0,2Mg((l/2) - x_0)$ . Отсюда  $x_0 = l/12 = \pi R/6$ .

Если  $\alpha$  — угол между линейкой и горизонтом в момент, когда расстояние от точки соприкосновения линейки и цилиндра до центра линейки равно  $x$ , то при повороте линейки на угол  $\Delta\alpha$  изменение  $x$  равно  $\Delta x = R\Delta\alpha$ . Следовательно, когда жук доползёт до конца линейки, она повернётся на угол  $\alpha_0 = x_0/R = \pi/6$ .

Действующая на линейку со стороны цилиндра сила реакции опоры направлена вертикально, то есть под углом  $\alpha$  к нормали к поверх-

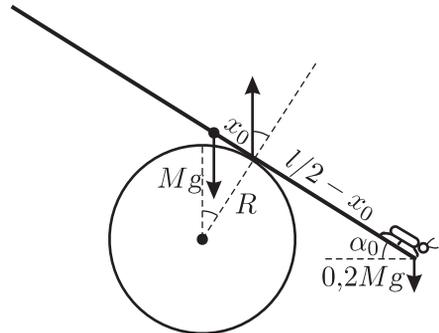


Рис. 07.22.

ности в точке соприкосновения линейки и цилиндра. Следовательно, отношение силы трения покоя  $F_{\text{тр}}$  к нормальной составляющей  $N$  силы реакции опоры равно  $F_{\text{тр}}/N = \text{tg } \alpha$ . Поскольку максимальная величина силы трения покоя равна  $F_{\text{тр}} = \mu N$ , перекачивание линейки по цилиндру будет происходить без проскальзывания при значениях коэффициента трения между цилиндром и линейкой, удовлетворяющих неравенству:  $\mu > \text{tg } \alpha_{\text{max}} = \text{tg } \alpha_0 = \text{tg}(\pi/6)$ , то есть  $\mu > 1/\sqrt{3} \approx 0,58$ .

**07.23.** Сила тока, текущего через вольтметр  $V_1$ , больше силы тока, текущего через вольтметр  $V_2$ , следовательно, показание вольтметра  $V_1$  больше показания вольтметра  $V_2$ . При этом сила тока, текущего через вольтметр  $V_2$ , меньше силы тока, текущего через вольтметр  $V_1$ , в  $U/U' = 4$  раза и составляет  $I_1 U'/U = I_1/4 = 0,4$  мА. Поэтому сила тока, текущего через миллиамперметр  $A_2$ , равна  $I_2 = I_1 - (I_1 U'/U) = I_1 - (I_1/4) = 3I_1/4 = 1,2$  мА.

Поскольку сила тока, текущего через миллиамперметр  $A_1$ , в  $I_1/I_2 = U/(U - U') = 4/3$  раза больше силы тока, текущего через миллиамперметр  $A_2$ , то напряжение на миллиамперметре  $A_1$  должно быть в такое же количество раз больше напряжения на миллиамперметре  $A_2$  (последнее равно  $U' = 0,3$  В). Следовательно, напряжение на миллиамперметре  $A_1$  составляет  $U' I_1/I_2 = U U'/(U - U') = 0,4$  В. Поэтому напряжение батарейки равно

$$U_0 = \frac{U U'}{U - U'} + U + U' = 0,4 \text{ В} + 1,2 \text{ В} + 0,3 \text{ В} = 1,9 \text{ В}.$$

**07.24.** а) Школьник начнёт видеть изображение своего глаза тогда, когда прямая, соединяющая глаз и его изображение, пройдёт через зеркало. Это произойдёт в момент, когда расстояние от школьника до зеркала  $L_1$  будет таким, что  $\frac{h}{L_1} = \text{tg } \alpha$ . Отсюда  $L_1 = h/\text{tg } \alpha$ .

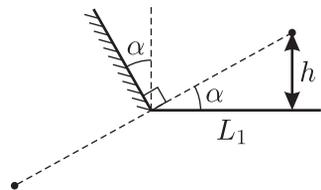


Рис. 07.24.1.

б) Пусть  $\alpha < 45^\circ$ . Тогда школьник увидит своё изображение в зеркале полностью, во весь рост, в момент, когда прямая, соединяющая глаза школьника и изображение его ног, пройдёт через зеркало. Как вытекает из построения, это произойдёт, когда расстояние  $L_2$  от школьника до зеркала будет таким, что  $h/L_2 = \text{tg}(2\alpha)$ . Отсюда  $L_2 = h/\text{tg}(2\alpha)$ .

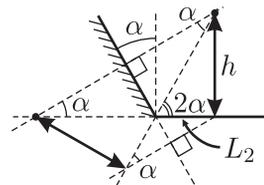


Рис. 07.24.2.

При  $\alpha > 45^\circ$  школьник сможет увидеть своё изображение в зеркале полностью, во весь рост, только подойдя к нижнему краю зеркала вплотную.

**07.25.** Введём систему координат, направив ось  $OX$  горизонтально по направлению к кольцу, а ось  $OY$  — вертикально вверх. Совместим начало координат с точкой бросания. Если в качестве начала отсчёта времени выбрать момент броска, то закон движения мяча, брошенного с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, запишется следующим образом:  $x = (v_0 \cos \alpha) \cdot t$  и  $y = (v_0 \sin \alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ . Следовательно, траектория движения тела задаётся уравнением  $y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$ . Пусть  $(L, h)$  — координаты кольца; получаем систему уравнений:

$$h = L \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{gL^2}{2v_1^2 \cos^2 \alpha_1}; \quad h = L \operatorname{tg} \alpha_2 - \frac{gL^2}{2v_2^2 \cos^2 \alpha_2}.$$

Учитывая данные из условия задачи, приводим систему к виду:

$$h = L \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2gL^2}{3v^2}; \quad h = L\sqrt{3} - \frac{8gL^2}{v^2}.$$

Приравнявая эти два соотношения для  $h$ , находим координату  $L$ :  $L = \frac{\sqrt{3}}{11} \cdot \frac{v^2}{g}$ . Отсюда  $h = \frac{9}{121} \cdot \frac{v^2}{g}$ , и  $\beta = \operatorname{arctg} \frac{h}{L} = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{11} \approx 25^\circ$ .

**07.26\*.** Направим ось  $OX$  вправо по горизонтали, а ось  $OY$  — вертикально вверх. Обозначим через  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  и  $\vec{a}_4$  ускорения грузов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Отметим, что ускорения  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  направлены горизонтально, а горизонтальные компоненты ускорений  $\vec{a}_3$  и  $\vec{a}_4$  совпадают с ускорениями  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ :  $a_{3x} = a_{1x}, a_{4x} = a_{2x}$ .

Используя свойство нерастяжимости, то есть постоянства длины нити, получим уравнение кинематической связи. При смещении грузов 1 и 2 по горизонтали на  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  изменение длины нити равно  $\Delta x_2 - \Delta x_1$ ; при смещении грузов 3 и 4 по вертикали на  $\Delta y_3$  и  $\Delta y_4$  изменение длины нити равно  $-\Delta y_3 - \Delta y_4$ . Ввиду нерастяжимости нити, полное изменение её длины при одновременном смещении всех четырёх грузов равно нулю:  $\Delta x_2 - \Delta x_1 - \Delta y_3 - \Delta y_4 = 0$ . Отсюда следует уравнение кинематической связи:  $a_{2x} - a_{1x} - a_{3y} - a_{4y} = 0$ .

Для получения остальных уравнений обозначим через  $T$  силу натяжения нити. Запишем для третьего и четвёртого грузов уравнения

движения по вертикали (по оси  $OY$ ):

$$m_1 a_{3y} = T - m_1 g, \quad m_2 a_{4y} = T - m_2 g.$$

Далее, запишем уравнения движения по горизонтали (по оси  $OX$ ) для системы грузов 1 и 3, а также для системы грузов 2 и 4:

$$(M_1 + m_1) a_{1x} = T, \quad (M_2 + m_2) a_{2x} = -T.$$

Из полученных соотношений выразим все ускорения через силу натяжения нити  $T$ :

$$a_{3y} = -g + \frac{T}{m_1}; \quad a_{4y} = -g + \frac{T}{m_2};$$

$$a_{1x} = \frac{T}{M_1 + m_1}; \quad a_{2x} = -\frac{T}{M_2 + m_2}.$$

Подставим их в уравнение кинематической связи и получим уравнение для нахождения  $T$ :

$$-\frac{T}{M_2 + m_2} - \frac{T}{M_1 + m_1} + \left(g - \frac{T}{m_1}\right) + \left(g - \frac{T}{m_2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{2g}{\frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}.$$

Таким образом, искомые ускорения равны

$$a_{1x} = \frac{2g}{(M_1 + m_1) \left( \frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)},$$

$$a_{2x} = \frac{2g}{(M_2 + m_2) \left( \frac{1}{M_1 + m_1} + \frac{1}{M_2 + m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}.$$

**07.27.** Обозначим через  $V_1 = SL$  объём нижней части цилиндра,  $S$  — площадь поршней,  $p_0$  — давление в верхней части цилиндра,  $\Delta V_2$  — изменение объёма верхней части цилиндра.

Сообщённое системе количество теплоты  $\Delta Q$  идёт на изменение внутренней энергии всего газа в сосуде  $\Delta U = 2\nu \cdot \frac{3}{2} R \Delta T$

и на совершение работы  $\Delta A = p_0 \Delta V_2 = \nu R \Delta T$ . Следовательно,  $\Delta Q = \Delta U + \Delta A = 4\nu R \Delta T$ , и  $\Delta T = \frac{\Delta Q}{4\nu R}$ . Теплоёмкость  $C$  системы в этом процессе равна отношению сообщённого ей количества теплоты к изменению температуры:  $C = \Delta Q / \Delta T = 4\nu R$ .

Поскольку объём нижней части сосуда постоянен, изменение давления  $\Delta p$  в нижней части сосуда определяется из соотношения  $\Delta p V_1 = \nu R \Delta T$ , и  $\Delta p = \frac{\nu R \Delta T}{V_1} = \frac{\Delta Q}{4V_1}$ . Так как давление в верхней части сосуда постоянно и равно  $p_0$ , а в нижней части сосуда давление вначале также было равно  $p_0$ , то в конце нагрева разность давлений, оказываемых газами на поршень, станет равной  $\Delta p$ . Чтобы поршень остался неподвижным, сила трения между ним и стенками сосуда должна быть не меньше  $F = \Delta p \cdot S = \frac{\Delta Q}{4L}$ .

**07.28.** Пронумеруем нелинейные элементы так, как показано на рисунке. Пусть  $U_2$  — напряжение на нелинейном элементе 2, тогда на каждом из последовательно соединённых элементов 3 и 4 падает напряжение  $U_2/2$ . Следовательно, сила тока, текущего через элемент 2, равна  $I_2 = \alpha U_2^2$ , а ток, текущий через элементы 3 и 4, равен  $I_3 = \alpha U_2^2/4$ . Поэтому сила тока, текущего через амперметр, батарейку и элемент 1, равна  $I_0 = I_2 + I_3 = 5\alpha U_2^2/4$ . Напряжение на элементе 1 определяется из соотношения  $I_0 = \alpha U_1^2$ , откуда  $U_1 = \sqrt{I_0/\alpha} = (\sqrt{5}/2) U_2$ . Таким образом, напряжение на батарейке равно  $U_0 = U_1 + U_2 = (1 + (\sqrt{5}/2)) U_2$ , откуда  $U_2 = \frac{U_0}{1 + (\sqrt{5}/2)}$ , и

$$I_0 = \alpha U_0^2 \frac{5/4}{(1 + (\sqrt{5}/2))^2} = \frac{5\alpha U_0^2}{9 + 4\sqrt{5}} = 5\alpha U_0^2 (9 - 4\sqrt{5}).$$

**07.29\*.** (а) Из произвольной вершины икосаэдра выходят пять рёбер, заканчивающихся в пяти вершинах, образующих правильный пятиугольник и соединённых пятью рёбрами-перемычками. Назовём этот пятиугольник ближайшим к исходной вершине слоем. Затем следующими по удалённости от исходной вершины идут пять вершин с пятью перемычками, также образующие правильный пятиугольник, равный предыдущему и лежащий в следующем слое, параллельном первому.

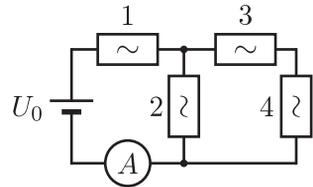


Рис. 07.28.

Из каждой вершины первого слоя выходят, а в каждую вершину второго слоя входят по два ребра, соединяющих первый слой со вторым — всего десять рёбер. И, наконец, самая дальняя вершина, равноудалённая от пяти вершин второго слоя, соединена с ними пятью рёбрами. Общую систему вершин икосаэдра, таким образом, можно представить в виде двух правильных пятиугольных пирамид, телесные высоты которых лежат на общей прямой, а основания параллельны и повёрнуты друг относительно друга на угол  $36^\circ$ . Поэтому при подключении контактов источника питания к паре наиболее удалённых вершин пять вершин первого слоя будут электрически эквивалентны, то есть будут иметь одинаковый потенциал, и их можно накоротко соединить друг с другом. Пять вершин второго слоя также будут иметь одинаковый потенциал, отличный от потенциала вершин первого слоя, и их также можно закоротить. Таким образом, эквивалентная схема в этом случае состоит из пяти соединённых параллельно резисторов, к которым присоединено последовательно сначала десять параллельных резисторов (из рёбер-резисторов икосаэдра, соединяющих два слоя), а потом ещё пять параллельных резисторов. Поэтому искомое сопротивление будет равно  $R_{\text{общ.}} = \frac{R}{5} + \frac{R}{10} + \frac{R}{5} = \frac{R}{2}$ .

(б) Рассмотрим в этом же ключе додекаэдр и стартуем от какой-нибудь его вершины, подключив к ней один из контактов источника питания. Ближайшими соседями этой вершины окажутся три вершины первого эквипотенциального слоя, с которыми она связана напрямую тремя выходящими из неё рёбрами. Из каждой вершины этого слоя выходят по два ребра (всего в каждой вершине соединяются три ребра), попадающих в шесть вершин следующего (второго) эквипотенциального слоя. Дальше из этих шести вершин выходят двенадцать рёбер, при этом шесть идут к следующему (третьему) слою, состоящему опять-таки из шести вершин, а другие шесть рёбер замыкаются парами, образуя три перемычки между предыдущими шестью эквипотенциальными вершинами второго слоя. Из каждой вершины третьего слоя выходят по два ребра, из них одно замыкается парой с ребром от соседней вершины этого слоя, а второе идёт к одной из трёх вершин следующего (четвёртого) слоя, к каждой из которых приходят по два ребра из вершин третьего слоя. Из трёх вершин четвёртого слоя выйдут три оставшихся ребра, которые встречаются в последней из 20 вершин — той наиболее удалённой, к которой подключается второй контакт источника. Таким образом, из-за условий геометрической и физической симметрии наша цепь будет эквивалентна последовательному соедине-

нию пяти пучков параллельно соединённых резисторов: сначала трёх, потом шести, затем снова шести (из-за исключённых шести перемычек), потом опять шести, и, наконец, трёх. Отсюда получаем, что искомое сопротивление будет равно  $R_{\text{общ.}} = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{7}{6}R$ .

Для ответа на второй вопрос надо подсчитать, через какое минимальное количество рёбер соединяются наиболее удалённые вершины многогранников. В случае (а) это, очевидно, три, и в силу симметрии возможно не более 3 разных значений сопротивления между вершинами: между соседними вершинами, через одну и через две (то есть как раз между наиболее удалёнными вершинами). В случае (б) это пять, и возможно не более 5 разных значений сопротивления между вершинами: между соседними вершинами, через одну, две, три и четыре<sup>4</sup>.

**07.30\***. Из закона сохранения импульса следует, что начальные скорости осколков лежат в одной плоскости. Перейдём в систему отсчёта, падающую на землю с ускорением свободного падения  $g$ . В этой системе отсчёта осколки после взрыва движутся в разные стороны равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями, равными начальной скорости, приобретённой в результате взрыва. Следовательно, в рассматриваемой системе отсчёта все осколки после взрыва снаряда в любой момент времени располагаются на окружности с центром в точке взрыва.

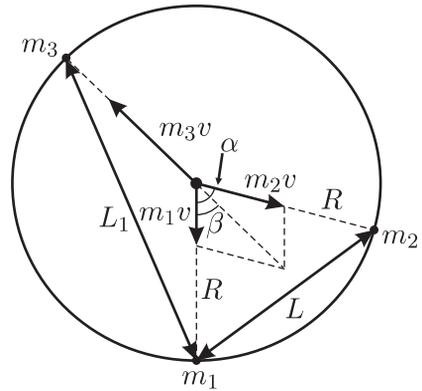


Рис. 07.30.

Изобразим эту окружность на рисунке, обозначив угол между направлениями разлёта осколков  $m_1$  и  $m_2$  через  $\alpha$ , а угол между направлениями разлёта осколков  $m_1$  и  $m_3$  через  $(\pi - \beta)$ . Рассмотрим положение осколков в момент времени, когда расстояние между осколками  $m_1$  и  $m_2$  оказалось равно  $L$ . Тогда из рисунка следует, что

$$L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \quad L_1 = 2R \sin \frac{\pi - \beta}{2} = 2R \cos \frac{\beta}{2},$$

где  $R$  — радиус изображённой окружности,  $L_1$  — искомое расстояние.

<sup>4</sup>На самом деле, в случае (а) имеется ровно три различных значения сопротивления между вершинами, а в случае (б) — пять, но, формально говоря, необходимо это доказать!

Поскольку, как уже говорилось, импульс рассматриваемой системы в процессе разрыва снаряда на осколки сохраняется неизменным, то из теоремы косинусов, применённой к треугольнику, построенному из векторов импульсов осколков, следует:

$$(m_3v)^2 = (m_1v)^2 + (m_2v)^2 - 2m_1m_2v^2 \cos(\pi - \alpha),$$

где  $v$  — начальная скорость осколков. Отсюда, с учётом заданных соотношений между  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$ , находим:  $\cos \alpha = \frac{m_3^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1m_2} = \frac{1}{4}$ , то есть угол разлёта осколков  $m_1$  и  $m_2$  составляет  $\alpha \approx 75,5^\circ$ . Из теоремы синусов, применённой к тому же треугольнику, получаем:

$$\frac{m_2v}{\sin \beta} = \frac{m_3v}{\sin(\pi - \alpha)},$$

откуда  $\sin \beta = \frac{m_2}{m_3} \sin \alpha = \frac{m_2}{m_3} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$  и  $\cos \beta = \frac{11}{16}$ . Используя тригонометрические формулы для половинного угла, найдём:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \beta)} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{L^2}{2R^2} = \frac{1}{4},$$

откуда  $R = \sqrt{2/3}L$ . Подставляя эти выражения в формулу для  $L_1$ , получим ответ:  $L_1 = (3/2)L$ .

**07.31\***. Пока колесо движется относительно доски с проскальзыванием, на него со стороны доски действует сила трения, увеличивающая скорость поступательного движения колеса и уменьшающая угловую скорость его вращательного движения. Доска при этом разгоняется в противоположном направлении. Когда скорость доски сравняется со скоростью точки колеса, соприкасающейся с доской, колесо начнёт катиться по доске без проскальзывания, сила трения скольжения перестанет действовать в системе, и скорости тел изменяться перестанут, если пренебречь трением качения.

Обозначим через  $m$  массу колеса, совпадающую с массой доски,  $R$  — радиус колеса,  $u$  — скорость поступательного движения колеса, совпадающую по модулю и противоположную по направлению скорости доски,  $\omega$  — угловую скорость вращения колеса,  $\mu$  — коэффициент трения скольжения. Заметим, что  $A = m\omega_0^2 R^2/2$ , где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость колеса.

Поскольку действующая между колесом и доской сила трения скольжения равна  $\mu mg$ , а их массы одинаковы, уравнения поступательного движения для колеса и для доски запишутся также одинаковым

образом:  $m \frac{\Delta u}{\Delta t} = \mu mg$ , или  $\frac{\Delta u}{\Delta t} = \mu g$ ; следовательно, центр колеса и доска движутся с ускорениями, равными по величине  $\mu g$  и противоположными по направлению.

Для расчёта зависимости угловой скорости вращения колеса от времени заметим, что изменение  $\Delta E$  кинетической энергии системы за время  $\Delta t$ , равное

$$\Delta E = \Delta \left( \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} \right) = 2mu\Delta u + mR^2\omega\Delta\omega,$$

совпадает с работой силы трения  $\Delta A_{\text{тр}}$  за этот промежуток времени. Данная работа отрицательна и равна по модулю произведению величины силы трения  $\mu mg$  на величину относительной скорости соприкасающихся участков тел  $\omega R - 2u$  и на промежуток времени  $\Delta t$ , то есть  $\Delta A_{\text{тр}} = -\mu mg(\omega R - 2u)\Delta t$ . Таким образом, справедливо уравнение:

$$2mu\Delta u + mR^2\omega\Delta\omega = -\mu mg(\omega R - 2u)\Delta t,$$

из которого, с учётом выражения для  $\Delta u/\Delta t$ , получаем уравнение для угловой скорости колеса:  $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -\frac{\mu g}{R}$ .

Из полученных выражений для линейных и угловых ускорений находим законы изменения скоростей поступательного и вращательного движения:  $u(t) = \mu gt$  и  $\omega(t) = \omega_0 - \mu gt/R$ . Колесо начнёт двигаться без проскальзывания при условии обращения в нуль относительной скорости нижней точки колеса и доски:  $2u = \omega R$ , откуда для момента времени, в который это произойдёт, получаем  $t_0 = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$ . В этот момент времени  $u = \omega_0 R/3$  и  $\omega = 2\omega_0/3$ , а кинетическая энергия системы равна

$$E_0 = \frac{mu^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + \frac{m\omega^2 R^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{m\omega_0^2 R^2}{2} = \frac{2}{3} A.$$

Следовательно, за время  $t_0$  в системе выделится количество теплоты, равное  $Q = A/3$ , если колесо к этому моменту ещё не успеет скатиться с доски.

**07.32\***. Поскольку тепловая машина совершает за цикл положительную работу, рассматриваемый цикл проходит по часовой стрелке, в направлении 1–2–3. Для расчёта КПД этой тепловой машины, равного отношению совершённой работы  $A$  к количеству теплоты  $Q^+$ , полученному от нагревателей, обозначим через  $p_0$  и  $V_0$  минимальные давление

и объём газа; тогда максимальные давление и объём будут равны  $kp_0$  и  $kV_0$ . Заметим, что на горизонтальном участке ступеньки объём возрастает в  $k^{1/n}$  раз, а на вертикальном участке давление уменьшается в такое же число раз.

В данном цикле газ получает тепло на участке 1–2, а также на горизонтальных участках лестницы 2–3. Количество теплоты, полученное на участке 1–2, равно изменению внутренней энергии газа:  $Q_{12} = \frac{3}{2}kp_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$ . Далее, на  $i$ -м горизонтальном участке лестницы ( $i$  изменяется в пределах от 1 до  $n$ ) газ расширяется от объёма  $V_0k^{(i-1)/n}$  до  $V_0k^{i/n}$  при постоянном давлении  $p_0k^{1-((i-1)/n)}$ . При этом он совершает работу  $\Delta A = kp_0V_0(k^{1/n} - 1)$ , изменяет свою внутреннюю энергию на  $\Delta U = 1,5\Delta A$  и получает количество теплоты  $\Delta Q = 2,5\Delta A$ . На вертикальных участках «лестницы» газ не совершает работы и отдаёт тепло. На участке 3–1 газ отдаёт тепло и совершает отрицательную работу  $A_{31} = -(k-1)p_0V_0$ .

Следовательно, суммарное количество теплоты, полученное от нагревателей, равно

$$Q^+ = Q_{12} + n\Delta Q = \frac{3}{2}(k-1)p_0V_0 + \frac{5}{2}nk(k^{1/n} - 1)p_0V_0,$$

а совершённая работа

$$A = A_{31} + n\Delta A = -(k-1)p_0V_0 + nk(k^{1/n} - 1)p_0V_0.$$

Искомый КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A}{Q^+} = \frac{nk(k^{1/n} - 1) - (k-1)}{\frac{3}{2}(k-1) + \frac{5}{2}nk(k^{1/n} - 1)}.$$

**07.33\***. Рассмотрим вначале процессы, которые будут происходить в данной системе, если не сообщать стержню сразу заданную скорость вращения  $\omega$  вокруг вертикальной оси под определённым углом ней. При помещении нашей системы в магнитное поле и подключении её к батарее в цепи пойдёт ток. Если отклонить стержень от вертикали, то на него со стороны магнитного поля начнёт действовать сила Ампера, направленная перпендикулярно магнитному полю и стержню и заставляющая стержень раскручиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через шарнир. При таком раскручивании стержня в магнитном поле на его концах возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ . Полярность

батареи, направление магнитного поля  $\vec{B}$  и соответствующее этим условиям направление вращения стержня показаны на рисунке в условии задачи; в соответствии с правилом Ленца направление  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  противоположно направлению ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ .

При вращении один конец стержня неподвижен, а другой описывает за период времени  $T = 2\pi/\omega$  окружность радиуса  $R \sin \alpha$  в плоскости, перпендикулярной  $\vec{B}$ . Площадь окружности  $S = \pi(R \sin \alpha)^2$ . Тогда

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{BS}{T} = \frac{B\pi(R \sin \alpha)^2}{2\pi/\omega} = \frac{BR^2\omega \sin^2 \alpha}{2}.$$

Поскольку  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  возрастает по мере увеличения частоты  $\omega$  вращения стержня и угла  $\alpha$  между стержнем и вертикалью,  $\mathcal{E}_{\text{инд}}$  в конце концов сравняется с ЭДС батареи  $\mathcal{E}$ , ток перестанет протекать через стержень, сила Ампера станет равной нулю, и угол  $\alpha$  и частота  $\omega$  вращения стержня прекратят изменяться. В результате получится, что стержень движется, как конический маятник длиной  $R$ , вращающийся с угловой скоростью  $\omega$  под углом  $\alpha$  к вертикали.

Найдём этот угол  $\alpha$ . На шарик действуют сила тяжести  $mg$  и суммарная сила реакции подвеса и опоры  $T$ . Поскольку трения нет, то сила реакции опоры направлена, как и сила реакции подвеса, вдоль стержня. Равнодействующая всех сил является центростремительной силой  $F_{\text{ц}} = m(R \sin \alpha)\omega^2$ , обеспечивающей вращение шарика вокруг оси. Уравнения движения шарика имеют вид:

$$T \sin \alpha = m(R \sin \alpha)\omega^2, \quad mg - T \cos \alpha = 0.$$

Отсюда  $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 R}$ , и  $\alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 R} = 60^\circ$ , а ЭДС батареи равна

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{инд}} = \frac{BR^2\omega \sin^2 \alpha}{2} = \frac{BR^2\omega}{2}(1 - \cos^2 \alpha) = \frac{BR^2\omega}{2} \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right) = 0,6 \text{ В}.$$

Теперь представим себе, что мы с самого начала закрутили стержень, как показано на рисунке, задав начальные параметры  $\omega$ ,  $\alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 R}$  и  $\mathcal{E} = \frac{BR^2\omega}{2} \left(1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right)$ . Тогда, очевидно, в дальнейшем это вращение и будет происходить с неизменной частотой  $\omega$  и под найденным выше постоянным углом  $\alpha$  к вертикали.

Заметим, что если закрутить стержень в противоположном направлении, то ЭДС индукции будет складываться с ЭДС батареи, в цепи пойдёт большой ток, сила Ампера быстро затормозит вращение стержня, и он остановится в вертикальном положении.

*Замечание.* У электродвигателей постоянного тока, вращающихся без нагрузки, ток холостого хода очень мал, несмотря на большое напряжение питания и небольшое сопротивление обмотки. Как и в только что разобранный задаче, в обмотке, вращающейся в магнитном поле, возникает «противоЭДС», почти полностью компенсирующая напряжение питания; малый ток через обмотку обеспечивает силу Ампера, необходимую только для преодоления небольших сил трения в двигателе.

**07.34\*.** Из условия следует, что при решении можно пользоваться приближением геометрической оптики и строить ход «лучей», как в оптических задачах. Рассмотрим звуковые волны, падающие на стену в близких точках  $B$  и  $C$ . Поскольку источник звука находится далеко от стены, падающие на неё «лучи» звука вблизи стены идут практически параллельно (смотри рисунок). После отражения вблизи точки  $C$  луч распространяется по направлению  $CA$ ; после отражения вблизи точки  $B$ , где угол падения (то есть угол между направлением распространения падающей волны и нормалью к стене) больше — по направлению  $BA$ . Лучи  $CA$  и  $BA$  пересекаются в точке  $A$ , где получается «изображение» источника звука. В этой точке колебания складываются, интенсивность звука максимальна — там и должен располагаться микрофон.

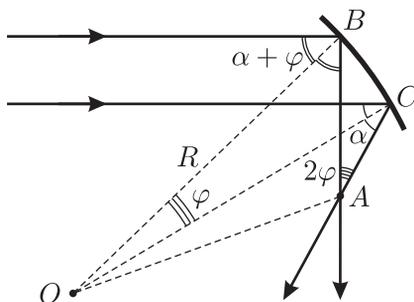


Рис. 07.34.

Пусть угол падения луча в точке  $C$  равен  $\alpha$ , а в точке  $B$  угол падения равен  $\alpha + \varphi$ ; при этом длина дуги  $BC$  равна  $R\varphi$ . Поскольку угол отражения звуковой волны равен углу её падения, то из построения вытекает, что  $\angle BAC = 2\varphi$ . При малых  $\varphi$  из треугольника  $ABC$  по теореме синусов получаем, что

$$\frac{|AC|}{\sin((\pi/2) - (\varphi + \alpha))} \approx \frac{|AC|}{\cos \alpha} \approx \frac{|BC|}{\sin(2\varphi)} \approx \frac{R\varphi}{2\varphi} = \frac{R}{2},$$

откуда  $|AC| \approx 0,5 \cdot R \cos \alpha$ . Это расстояние как раз и можно считать расстоянием до стены, поскольку размеры стены намного меньше  $R$ .

Далее, поскольку  $\angle ACO = \alpha$ , то расстояние  $|OA|$  можно найти из треугольника  $OAC$  по теореме косинусов:

$$|OA|^2 = |OC|^2 + |AC|^2 - 2|OC| \cdot |AC| \cos \alpha \approx R^2(1 - (3/4) \cos^2 \alpha).$$

Отсюда  $|OA| \approx R\sqrt{1 - (3/4) \cos^2 \alpha}$ .

## Программы курса элективных занятий по физике

Для элективных занятий по физике в 10-х – 11-х профильных классах с углублённым изучением предметов физико-математического цикла предлагаются следующие почасовые программы (по 2 часа в неделю, всего 144 часа). Списки с номерами задач составлены с некоторым запасом, так что не обязательно на каждом занятии разбирать все рекомендованные задачи. Перед решением задач полезно изложить теорию, относящуюся к теме занятия.

### Кинематика (10 часов)

1. Движение по прямой: 1.2, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9.
2. Графическое изображение движений: 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.19, 1.24, 1.25, 1.26.
3. Равномерное движение по плоскости: 1.16, 1.17, 1.18, 1.20, 1.21, 1.22, 1.23.
4. Сложение движений: 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32.
5. Равнопеременное движение: 1.35, 1.36, 1.37, 1.38, 1.40, 1.41, 1.43.

### Динамика (18 часов)

1. Сложение сил: 1.46, 1.48, 1.49, 1.50, 1.51, 1.53.
2. Движение систем с блоками: 1.52, 1.54, 1.55, 1.56, 1.57, 1.58, 1.59.
3. Движение при наличии сил сухого трения: 1.60, 1.61, 1.62, 1.63, 1.64, 1.65.
4. Движение при наличии сил сухого трения (продолжение): 1.66, 1.67, 1.68, 1.69, 1.70.
5. Движение при наличии сил вязкого трения: 1.71, 1.72, 1.73, 1.74, 1.75.
6. Динамика движения по окружности: 1.76, 1.79, 1.80, 1.81, 1.82, 1.83.
7. Динамика движения по окружности (продолжение): 1.84, 1.85, 1.87, 1.88, 1.89, 1.90.
8. Динамика движения по окружности (продолжение): 1.91, 1.92, 1.93, 1.94, 1.95.
9. Движение под действием гравитационных сил: 1.86, 1.96, 1.97, 1.98, 1.99.

### Законы сохранения импульса и механической энергии (20 часов)

1. Абсолютно упругий удар: 1.101, 1.102, 1.104, 1.105, 1.106, 1.107.
2. Столкновения тел: 1.109, 1.110, 1.112, 1.113, 1.114, 1.116.
3. Решение задач динамики с помощью законов сохранения: 1.117, 1.119, 1.120, 1.121, 1.122, 1.123.
4. Решение задач динамики с помощью законов сохранения (продолжение): 1.125, 1.126, 1.127, 1.128, 1.129, 1.130.
5. Решение задач динамики с помощью законов сохранения (продолжение): 1.131, 1.133, 1.134, 1.135, 1.137, 1.138.
6. Движение искусственных спутников Земли: 1.139, 1.140, 1.141, 1.142, 1.143.
7. Мощность: 1.146, 1.147, 1.149, 1.150, 1.151, 1.152.

8. Работа: 1.153, 1.154, 1.155, 1.156, 1.157.
9. Расчёт систем с потерями механической энергии: 1.159, 1.160, 1.161, 1.162, 1.163, 1.164.
10. Расчёт систем с потерями механической энергии (продолжение): 1.165, 1.166, 1.167, 1.168, 1.169.

### Статика (10 часов)

1. Простейшие задачи статики: 1.171, 1.172, 1.173, 1.175, 1.176, 1.177.
2. Поиск условий равновесия системы: 1.179, 1.180, 1.181, 1.182, 1.183, 1.184.
3. Устойчивость равновесия: 1.178, 1.185, 1.186, 1.187, 1.188, 1.192.
4. Равновесие при наличии сил трения: 1.189, 1.190, 1.191, 1.193, 1.194, 1.196.
5. Упругость тел: 1.197, 1.198, 1.199, 1.200, 1.201, 1.202.

### Механические колебания (10 часов)

1. Колебания простейших механических систем: 1.203, 1.204, 1.205, 1.206, 1.207, 1.208.
2. Кинематика колебательного движения: 1.209, 1.210, 1.211, 1.212, 1.213, 1.214.
3. Колебания жидкости: 1.215, 1.216, 1.217, 1.218.
4. Колебания сложных механических систем: 1.219, 1.220, 1.221, 1.222, 1.223, 1.224.
5. Колебания при наличии затухания: 1.225, 1.226, 1.227.

### Гидростатика и гидродинамика (10 часов)

1. Закон Паскаля: 1.228, 1.229, 1.230, 1.231.
2. Сообщающиеся сосуды: 1.232, 1.233, 1.234, 1.235, 1.237, 1.244.
3. Плавание тел: 1.238, 1.239, 1.240, 1.241, 1.242, 1.243.
4. Плавание тел (продолжение): 1.245, 1.246, 1.247, 1.248, 1.249.
5. Основы гидродинамики: 1.250, 1.251, 1.252, 1.253, 1.254.

### Калориметрия и теплообмен (8 часов)

1. Простейшие задачи молекулярной физики: 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7, 2.8.
2. Плавление и кристаллизация: 2.9, 2.10, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15.
3. Парообразование и конденсация: 2.17, 2.18, 2.19, 2.20, 2.21, 2.22, 2.23.
4. Теплообмен: 2.26, 2.27, 2.28, 2.29, 2.30, 2.32.

### Процессы в газах и жидкостях (14 часов)

1. Основы молекулярно-кинетической теории: 2.33, 2.34, 2.35, 2.36.
2. Применение газовых законов: 2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.43.
3. Применение газовых законов (продолжение): 2.45, 2.46, 2.47, 2.48, 2.49, 2.51.
4. Теплоёмкость, первое начало термодинамики: 2.50, 2.52, 2.53, 2.54, 2.55, 2.56.

5. Второе начало термодинамики, вычисление КПД: 2.57, 2.58, 2.59, 2.60, 2.61, 2.63, 2.64.
6. Влажность: 2.65, 2.66, 2.67, 2.68, 2.69, 2.70, 2.71.
7. Поверхностное натяжение: 2.72, 2.74, 2.75, 2.76, 2.77, 2.78, 2.79.

### **Электростатика и конденсаторы (10 часов)**

1. Напряжённость электростатического поля: 3.3, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9.
2. Метод электростатических изображений: 3.10, 3.11, 3.12, 3.13.
3. Потенциал и энергия электростатического поля: 3.15, 3.17, 3.18, 3.22, 3.23.
4. Ёмкость: 3.20, 3.21, 3.24, 3.25, 3.38.
5. Соединение конденсаторов: 3.26, 3.27, 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.34.

### **Расчёт цепей постоянного тока (12 часов)**

1. Соединение резисторов: 3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43, 3.44, 3.45.
2. Расчёт разветвлённых электрических цепей: 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.52, 3.53, 3.57.
3. Цепи с нелинейными элементами: 3.48, 3.54, 3.55, 3.56.
4. Цепи с неидеальными измерительными приборами: 3.58, 3.59, 3.60, 3.61, 3.62.
5. Анализ цепей, находящихся в «чёрных ящиках»: 3.63, 3.64, 3.65, 3.66.
6. Электрический ток в различных средах: 3.35, 3.36, 3.37, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71.

### **Магнитное поле. Электромагнитная индукция и переменные токи (8 часов)**

1. Движение тел в электрических и магнитных полях: 3.74, 3.76, 3.77, 3.78, 3.79, 3.80.
2. Электромагнитная индукция и индуктивность: 3.81, 3.82, 3.83, 3.84, 3.85, 3.86.
3. Переменный ток: 3.87, 3.89, 3.90, 3.91, 3.92, 3.93.
4. Цепи переменного тока с нелинейными элементами: 3.88, 3.94, 3.95.

### **Геометрическая оптика (8 часов).**

1. Отражение света: 4.7, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13.
2. Преломление света: 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19.
3. Линзы: 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.26, 4.27.
4. Фотометрия: 4.28, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35.

### **Волны (6 часов).**

1. Распространение звука: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.
2. Волновые свойства звука и света: 4.36, 4.37, 4.38, 4.39, 4.45.
3. Тепловое излучение, квантовые свойства света, ядерные реакции: 4.40, 4.41, 4.42, 4.44, 4.46.

**Литература**

- [1] Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике / Под ред. С. Э. Хайкина. — М.—Л.: Гостехиздат, 1949. — 132 с. (и все последующие издания до 5-го, переработанного, М.: Наука, 1986).
- [2] Зубов В. Г., Шальнов В. П. Задачи по физике. — М.: Гостехиздат, 1952. — 320 с. (и все последующие издания до 11-го, М.: Новая волна, 2000).
- [3] Бендриков Г. А., Буховцев Б. Б., Керженцев В. В., Мякишев Г. Я. Задачи по физике для поступающих в вузы. — М.: Наука, 1980. — 384 с. (и все последующие издания до 10-го, М.: Физматлит, 2003).
- [4] Буховцев Б. Б., Кривченков В. Д., Мякишев Г. Я., Сараева И. М. Сборник задач по элементарной физике: Пособие для самообразования. — М.: Наука, 1964. — 440 с. (и все последующие издания до 7-го, М.: УНЦ ДО МГУ, 2004).
- [5] Буздин А. И., Ильин В. А., Кривченков И. В., Кротов С. С., Свешников Н. А. Задачи московских физических олимпиад / Под ред. С. С. Кротова. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 192 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 60.)
- [6] Буздин А. И., Зильберман А. Р., Кротов С. С. Раз задача, два задача... — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 240 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 81.)
- [7] Слободенцкий И. Ш., Асламазов Л. Г. Задачи по физике. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 176 с. — (Библиотечка «Квант». Вып. 5). А также 2-е изд. — М.: Бюро Квантум, 2001. — 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 86).
- [8] Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения. — М.: Просвещение, 1964; М.: Просвещение, 1974 — 3-е изд., перераб. и испр. — 430 с.; М.: Просвещение, 1983 — 4-е изд., перераб. и доп. — 432 с.
- [9] Задачи по физике: Учебное пособие / Под ред. О. Я. Савченко. — 4-е изд., испр. — СПб.: Лань, 2001. — 368 с.

- [10] Слободецкий И. Ш., Орлов В. А. Всесоюзные олимпиады по физике: Пособие для учащихся 8–10 кл. сред. школы. — М.: Просвещение, 1982. — 256 с.
- [11] Всероссийские олимпиады по физике. 1992–2004 / Под ред. С. М. Козела, В. П. Слободянина. — 2-е изд., доп. — М.: Вербум-М, 2005. — 534 с.
- [12] Кабардин О. Ф., Орлов В. А. Международные физические олимпиады школьников / Под. ред. В. Г. Разумовского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 160 с. — (Б-чка «Квант». Вып. 43)
- [13] Физика. 10–11 кл.: Сборник задач и заданий с ответами и решениями. Пособие для учащихся общеобразоват. учреждений / С. М. Козел, В. А. Коровин, В. А. Орлов. — М.: Мнемозина, 2001. — 254 с. 2-е изд., дополн. — М.: Мнемозина, 2004. — 333 с.
- [14] Григорьев Ю. М., Муравьев В. М., Потапов В. Ф. Олимпиадные задачи по физике. Международная олимпиада «Туймаада». — М.: МЦНМО, 2007. — 160 с.
- [15] Лукашик В. И. Физическая олимпиада в 6–7 классах средней школы: Пособие для учащихся. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1987. — 192 с.
- [16] Кондратьев А. С., Уздин В. М. Физика. Сборник задач. — М.: Физматлит, 2005. — 392 с.
- [17] Тульчинский М. Е. Сборник качественных задач по физике для средней школы. Пособие для учителя. — Калуга, 1959 (1-е изд.); М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1961 — 240 с. (2-е изд.); и последующие издания.
- [18] Страница Московской физической олимпиады на сервере Кафедры общей физики Физического факультета МГУ:  
<http://genphys.phys.msu.ru/ol/>
- [19] Веб-сайт «Олимпиады для школьников»:  
<http://www.mccme.ru/olympiads/>
- [20] Веб-сайт «Олимпиады для школьников» — страница Московской физической олимпиады:  
<http://www.mccme.ru/olympiads/mfo>

- [21] Материалы журнала «Квант» в интернете:  
<http://kvant.mccme.ru/>
- [22] Архив материалов газеты «Физика» (Издательский дом «Первое сентября»):  
<http://archive.1september.ru/fiz/>
- [23] Интернет-библиотека МЦНМО:  
<http://ilib.mccme.ru/>
- [24] Электронная библиотека math.ru:  
<http://www.math.ru/lib>
- [25] IPhO — International Physics Olympiads. Материалы международных физических олимпиад (на английском языке).  
<http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/>
- [26] Переписка с читателями. «Физика в школе» №3 (май–июнь), 1939 г., стр. 70, 71.
- [27] Физическая олимпиада для школьников при I МГУ. «Физика в школе» №4 (июль–август), 1939 г., стр. 79–80.

## Литературный указатель материалов олимпиад

### Московская физическая олимпиада

В настоящем сборнике опубликованы задачи с решениями за 1986–2005 годы (в приложении — задачи с решениями олимпиад 2006 и 2007 года), а также в качестве исторических материалов воспроизводится [27] и публикуются задачи из приложения к [1] (1939–1948 годы).

Задачи для 7-х классов (для семиклассников олимпиада проводится с 1999 года) в настоящее издание не включены как не соответствующие по сложности остальным материалам сборника.

[27] — Опубликован отчёт о первой олимпиаде по физике, состоявшейся в МГУ в 1939 году.

[1] — В приложении к первому изданию (1949 год) приведены задачи (с решениями) Московских городских олимпиад по физике 1939, 1940, 1941, 1944–1948 годов. В последующих изданиях эти задачи были включены в основной текст (а некоторые — исключены).

[5] — В книге опубликованы задачи Московских городских олимпиад по физике 1968–1985 годов.

[20] — Публикуются текущие материалы олимпиады. Опубликованы задачи 1939, 1961, 2000–2007 г., в том числе задачи 7 классов, задачи окружных туров 11 класса и задания экспериментальных туров. А также электронная версия настоящего издания, библиография, исторические материалы и др.

Материалы Московских городских олимпиад по физике разных лет частично содержатся в [2].

### **Всероссийская олимпиада по физике (РСФСР, Всесоюзная, Межреспубликанская)**

[10] — Опубликованы материалы I (1964 год) и II (1965 год) Всероссийских (РСФСР) олимпиад по физике, I (1967 год) – XV (1981 год) Всесоюзных олимпиад по физике.

[11] — Опубликованы материалы Всероссийских олимпиад по физике за период с 1992 по 2004 год (условия и решения теоретических и экспериментальных заданий двух последних этапов олимпиады — зонального (федерального окружного) и заключительного).

[21] — В журнале «Квант» опубликована большая часть материалов Всесоюзных олимпиад по физике, начиная с 1970 года (год основания журнала).

### **Международная олимпиада по физике**

Международная олимпиада по физике проводится ежегодно, начиная с 1967 года.

[12] — Опубликованы материалы 1967–1984 годов.

[13] — Опубликованы материалы 1985–2003 годов.

[25] — Материалы 1967–2007 годов (на английском языке).

## Краткая информация о физическом факультете МГУ

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова приглашает учащихся 7-х – 11-х классов принять участие в городском этапе Московской региональной олимпиады школьников по физике. Олимпиада является открытой — в ней могут участвовать все желающие, независимо от страны и города проживания, а также от результатов их участия в других олимпиадах. Школьники, ставшие победителями и призёрами городского этапа Московской физической олимпиады в выпускном классе, традиционно пользуются льготами при поступлении на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова является ведущим учебным и научно-исследовательским центром России в области физики и астрономии. На семи отделениях факультета (экспериментальной и теоретической физики, физики твёрдого тела, радиофизики и электроники, ядерной физики, геофизики, астрономии, дополнительного образования), включающих 39 кафедр, можно получить фундаментальное классическое образование и вести научные исследования практически по всем современным направлениям экспериментальной и теоретической физики. На факультете сложилась своя, присущая именно университету, школа подготовки научных кадров, основой которой является привлечение научной молодёжи к активно ведущимся на факультете научным исследованиям. Характерной чертой университетского физического образования является его широта, позволяющая выпускнику физического факультета свободно и квалифицированно ориентироваться в любом из направлений современной физики.

Для физиков, получивших образование на физическом факультете МГУ, открыты перспективы работы в самых престижных научных лабораториях и университетах России и всего мира. Успешно работают физики и в других областях человеческой деятельности (математика, медицина, экология, финансы, бизнес, менеджмент и т. д.). И это не удивительно, так как выпускники факультета получают прекрасное образование по фундаментальной физике, высшей математике и компьютерным технологиям.

Более подробно о физическом факультете МГУ можно узнать по электронному адресу: <http://www.phys.msu.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>Условия задач</b>	<b>9</b>
Механика . . . . .	9
Молекулярная физика . . . . .	73
Электричество и магнетизм . . . . .	93
Волны. Оптика. Кванты . . . . .	118
<b>Решения задач</b>	<b>128</b>
Механика . . . . .	128
Молекулярная физика . . . . .	335
Электричество и магнетизм . . . . .	400
Волны. Оптика. Кванты . . . . .	496
<b>Приложения</b>	<b>544</b>
Программа Всероссийской олимпиады школьников по физике . . . . .	544
Варианты заданий Московских городских олимпиад школьников по физике для 8-х – 11-х классов . . . . .	548
Ответы к вариантам . . . . .	584
Задачи первых олимпиад. 1939–1948 . . . . .	586
Когда была первая олимпиада по физике? . . . . .	610
Олимпиада 2006 года. Условия . . . . .	615
Олимпиада 2007 года. Условия . . . . .	624
Олимпиада 2006 года. Решения . . . . .	633
Олимпиада 2007 года. Решения . . . . .	663
Программы курса элективных занятий по физике . . . . .	688
Литература . . . . .	691
Литературный указатель материалов олимпиад . . . . .	693
Краткая информация о физическом факультете МГУ . . . . .	695



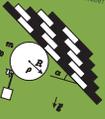
В скорость для обычных несомненно трудно (при равных векторах)

и, так же внутри сферы много точек и величина радиусов. Пусть изучают сферу. Центр сферичности с одной точки. Найдите максимальную

Сборник продвигает традиции предыдущих изданий задач Московских городских олимпиад школьников по физике и содержит 545 задач с подробными решениями. Он рекомендован в качестве учебного пособия для абитуриентов и студентов и может быть полезен ученикам 8-х – 11-х классов, которые жаждут углубить свои знания в области физики и подготовиться к участию в физических олимпиадах различного уровня сложности. Книга также рекомендована школьным учителям, руководителям школьных физических кружков, заслуженным и начинающим физикам школ и преподавателями, ведущим занятия на подготовительных студенческих курсах и занимающихся организацией различных физических олимпиад для школьников и студентов.

ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ 1986 – 2007

# ЗАДАЧИ МОСКОВСКИХ ГОРОДСКИХ ОЛИМПИАД ПО ФИЗИКЕ 1986 – 2007



На цилиндрической оболочке ориентирован узкий кольцевой электрод (рис. 1). Его радиус  $R$ , толщина  $d$  и сопротивление  $R_0$ . Если по оси  $OO'$  течь, чтобы она была гармонической с амплитудой  $a$  и  $\omega$  м, то радиус оболочки  $R$  и частота  $\omega$  ( $\omega = 1000$  Гц) не меняются. ЗДС индукции с амплитудой  $I_0 = 5$  А может быть действующей на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток  $I = 200$  мА?

Возражение 350 летия основанного в 1686 году в Москве Императорского университета с благодарностью и уважением к великому человеку, который в 1755 году в Москве основал Императорский университет. Императорский университет в Москве основан в 1755 году. Императорский университет в Москве основан в 1755 году.