

УДК 530.1 (075.8)
ББК 22.3; 22.2
С 23

Авторы:

С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, В. А. Угаров, И. А. Яковлев

Сборник задач по общему курсу физики. В 5 кн. Кн. I. **Механика** / Стрелков С. П., Сивухин Д. В., Угаров В. А., Яковлев И. А.; Под ред. И. А. Яковлева. — 5-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2006. — 240 с. — ISBN 5-9221-0602-3.

В предлагаемом сборнике задач по физике использован опыт преподавания общего курса физики в МГУ, Московском физико-техническом институте и Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина. По степени трудности задачи охватывают широкий диапазон: от самых элементарных до задач, стоящих на уровне оригинальных научных исследований, выполнение которых возможно на основе углубленного знания общего курса физики.

Сборник состоит из пяти книг: I. Механика. II. Термодинамика и молекулярная физика. III. Электричество и магнетизм. IV. Оптика. V. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц.

Для студентов физических специальностей высших учебных заведений.

Учебное издание

*СТРЕЛКОВ Сергей Павлович, СИВУХИН Дмитрий Васильевич,
УГАРОВ Владимир Александрович, ЯКОВЛЕВ Иван Алексеевич*

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Книга I

МЕХАНИКА

Редактор *Д. А. Миртова*

Оригинал-макет: *О. Б. Широкова*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 30.01.06. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 18,0. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»

153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0602-3



9 785922 106023

ISBN 5-9221-0602-3

© С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин,
В. А. Угаров, И. А. Яковлев, 1977, 2006

СОДЕРЖАНИЕ

	Задачи	Ответы и решения
От издательства	4	
Из предисловия к четвертому изданию	4	
§ 1. Кинематика	5	125
§ 2. Динамика прямолинейного движения материальной точки и простейших систем	15	131
§ 3. Статика	24	138
§ 4. Работа, мощность, энергия	29	141
§ 5. Законы сохранения количества движения и энергии.	32	143
§ 6. Динамика движения материальной точки по окружности. Движение относительно вращающихся систем отсчета.	42	154
§ 7. Динамика твердого тела. Динамика системы	51	165
§ 8. Тяготение	74	186
§ 9. Упругие деформации.	85	200
§ 10. Колебания	91	206
§ 11. Гидростатика и аэростатика.	102	213
§ 12. Гидродинамика и аэродинамика	105	215
§ 13. Акустика	113	221
§ 14. Специальная теория относительности	116	223
Приложение	236	

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Составление этого сборника задач было начато на физическом факультете МГУ по инициативе академика С.И. Вавилова. Однако основная работа по составлению Сборника и подготовке его к изданию выполнена под руководством С.Э. Хайкина. В 1949 г. вышло в свет первое издание Сборника в двух частях: I. Механика. Электричество и магнетизм, под редакцией С.Э. Хайкина; II. Оптика. Молекулярная физика и термодинамика. Атомная физика и физика ядра, под редакцией Д.В. Сивухина. С тех пор Сборник переиздавался в 1960 и 1964 гг.

Предлагаемое, четвертое, издание Сборника существенно отличается от всех предшествующих прежде всего по своему объему, так как число задач, включенных в Сборник, увеличено почти вдвое. Обогащено содержание и повысился уровень задач. По степени трудности, постановки и решения задачи охватывают широкий диапазон: от самых элементарных до задач, стоящих на уровне оригинальных научных исследований, выполнение которых возможно на основе углубленного знания общего курса физики.

В настоящем издании сборник выходит в пяти книгах, каждая из которых может быть использована самостоятельно:

I. Механика. II. Термодинамика и молекулярная физика. III. Электричество. IV. Оптика. V. Атомная физика. Физика ядра и элементарных частиц.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

В подготовке Сборника к изданию был использован опыт преподавания общего курса физики в МГУ и других вузах. Так, все параграфы этой книги в значительной мере дополнены задачами, составленными Д.В. Сивухиным, которые предлагались для решения студентам Московского физико-технического института. В задачник включен новый § 14, содержащий задачи по релятивистской механике и написанный В.А. Угаровым на основе опыта преподавания специальной теории относительности в Московском Государственном педагогическом институте им. В.И. Ленина. Ряд новых задач, связанных, в основном, с расчетами движения искусственных спутников Земли, составлен А.А. Харламовым в ходе его педагогической работы на кафедре общей физики для механико-математического факультета МГУ, когда ею руководил С.П. Стрелков. В задачник включены также новые задачи, составленные сотрудником той же кафедры В.И. Шмальгаузенном и сотрудником кафедры физики кристаллов МГУ О.А. Шустинным.

И. А. Яковлев

ЗАДАЧИ

§ 1. Кинематика

1. Лодка, идущая через реку на веслах, движется относительно воды со скоростью 2 м/с в направлении, перпендикулярном к течению. Течение реки имеет скорость 1 м/с . Найти полную скорость v лодки и направление этого вектора относительно берегов реки.

2. Две пристани перевоза расположены друг против друга на противоположных берегах реки, скорость течения которой составляет $0,5 \text{ м/с}$. Какой курс должна держать лодка перевозчика, чтобы пересекать реку по прямой линии от одной пристани до другой? С какой скоростью v при этом условии лодка будет двигаться поперек реки? Относительно воды лодка развивает скорость $0,8 \text{ м/с}$.

3. На тележке, равномерно движущейся по горизонтальной плоскости, установлена труба. Как должна быть ориентирована на тележке эта труба, чтобы капли дождя, падающие вертикально, пролетали через нее, не задевая внутренних стенок? Движение капель считать равномерным.

4. Корабль идет на запад со скоростью $6,5 \text{ м/с}$. Ветер дует с юго-запада со скоростью $3,5 \text{ м/с}$. Какую скорость v ветра регистрируют приборы, расположенные на корабле? Каково будет показываемое этими приборами направление ветра относительно курса корабля?

5. Два самолета одновременно вылетают из одного места по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Один со скоростью $v_1 = 300 \text{ км/ч}$, другой со скоростью $v_2 = 400 \text{ км/ч}$. Как возрастает со временем расстояние между самолетами? Как велико это расстояние S в момент, когда первый самолет пролетел путь $S_1 = 900 \text{ км}$?

6. Человек, находясь в точке B на расстоянии h от прямого участка дороги (рис. 1), видит в точке A автобус, движущийся по дороге с постоянной скоростью v_a . Расстояние от человека до автобуса в этот момент AB . В каком направлении следует бежать человеку, чтобы оказаться на дороге в точке C с максимальным опережением по времени по отношению к автобусу? Отношение расстояний $h/AB = 1/2$; отношение скоростей человека и автобуса $v_c/v_a = 1/\sqrt{2}$.

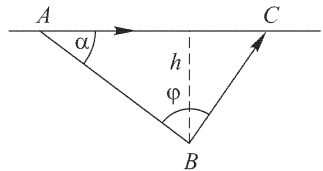


Рис. 1

7. Два корабля движутся параллельно друг другу в противоположные стороны со скоростями v_1 и v_2 . С одного из них стреляют

в другой. Под каким углом φ к курсу обстреливаемого корабля надо направить орудие, чтобы попасть в цель, если выстрел производится в момент, когда оба судна находятся на прямой, перпендикулярной к направлению их движения? Скорость снаряда v_0 считать постоянной.

8. Между двумя пунктами, расположенными на реке на расстоянии $L = 100$ км один от другого, курсирует катер. Катер проходит это расстояние по течению за время $t_1 = 4$ ч, а против течения за время $t_2 = 10$ ч. Определить скорость течения реки v_1 и скорость катера относительно воды v_2 .

9. Рыбак едет на лодке вверх по реке; проезжая под мостом, он роняет в воду багор. Через полчаса рыбак это обнаруживает и, повернув назад, нагоняет багор в 5 км ниже моста. Какова скорость течения реки, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково?

10. С одного из двух встречных поездов, имеющего скорость v_1 , на платформу другого, имеющего скорость v_2 , бросают некоторый предмет горизонтально и перпендикулярно к направлению движения со скоростью v_0 (которую во все время движения предмета можно считать постоянной). 1) Какой угол φ_1 с направлением рельсов образует след проекции движущегося предмета на полотно? 2) Какой угол φ_2 с краем платформы другого поезда, параллельным движению поезда, будет составлять след проекции движущегося предмета на платформе? 3) Каковы величины скорости предмета относительно полотна железной дороги (v') и относительно платформы (v'')?

11. На листе бумаги начерчен прямой угол. Линейка, оставаясь все время перпендикулярной к биссектрисе этого угла, движется по бумаге со скоростью 10 см/с. Концы линейки пересекают стороны начерченного угла. С какой скоростью движутся по сторонам угла точки их пересечения с линейкой?

12. Фотограф, находящийся на расстоянии l от железнодорожного полотна, хочет сфотографировать поезд, идущий со скоростью v , в тот момент, когда луч зрения, проведенный от фотографа к поезду, составляет угол α с полотном дороги. Какую максимальную выдержку $t_{\text{макс}}$ может дать фотограф, если допустимое размытие изображения на фотопластинке не должно превышать d , а фокусное расстояние объектива фотокамеры равно f ?

13. Тело, двигаясь с постоянным ускорением, проходит последовательно два одинаковых отрезка пути S по 10 м каждый. Найти ускорение тела a и скорость v_0 в начале первого отрезка, если первый отрезок пройден телом за время $t_1 = 1,06$ с, а второй за $t_2 = 2,2$ с.

14. Начертить графики зависимости от времени скорости некоторых тел, если графики ускорения a этих тел имеют вид, представленный на рис. 2 (начальная скорость тел во всех случаях равна нулю)¹⁾.

¹⁾ На приведенных графиках зависимость ускорения от времени схематизирована: предполагается, что ускорение в некоторые моменты времени

15. Начертить графики зависимости от времени пути и ускорения некоторого тела, если скорость этого тела как функция времени представлена графиком на рис. 3 (см. примечание к задаче 14).

16. Какова допустимая предельная скорость v приземления парашютиста, если человек может безопасно прыгать с высоты до $h = 2$ м?

17. С вышки одновременно брошены два тела с одинаковой начальной скоростью v_0 : одно вертикально вверх, другое вертикально вниз. Как с течением времени будет меняться расстояние S между этими телами? Сопротивление воздуха движению тел не учитывать.

18. Какой начальной скоростью v_0 должна обладать сигнальная ракета, выпущенная из ракетницы под углом 45° к горизонту, чтобы она вспыхнула в наивысшей точке своей траектории, если время горения запала ракеты 6 с? Сопротивление воздуха движению ракеты не учитывать.

19. В какой точке траектории тела, брошенного под углом к горизонту, его нормальное к траектории ускорение будет максимальным? Сопротивление воздуха движению тела не учитывать.

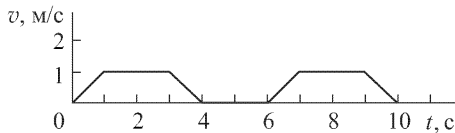


Рис. 3

20. Шарик, которому сообщена горизонтальная скорость v , падает на горизонтальную плиту с высоты h . При каждом ударе о плиту

меняется скачком. Такой характер придан рисункам для упрощения дела. В действительности же ускорения могут изменяться очень быстро, но все же не скачком — ускорения являются непрерывными функциями времени. Предположение о скачкообразных изменениях ускорений приводит к тому, что графики скорости имеют изломы. Аналогичные соображения относятся и к задаче 15.

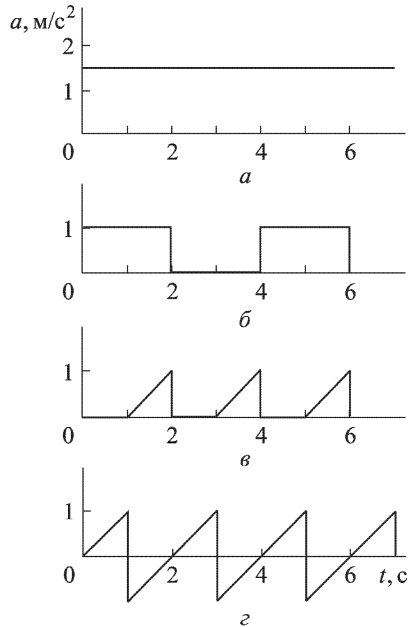


Рис. 2

вертикальная составляющая скорости уменьшается (отношение вертикальной составляющей скорости после удара к ее значению до удара постоянно и равно α). Определить, на каком расстоянии x от места бросания отскоки шарика прекратятся. Считать, что трение отсутствует, так что горизонтальная составляющая скорости шарика v не меняется.

21. Из артиллерийского орудия произведен выстрел под углом φ к горизонту. Величина начальной скорости снаряда v_0 . Исследовать аналитически движение снаряда, пренебрегая сопротивлением воздуха полету снаряда и кривизной поверхности Земли. Найденные зависимости изобразить графически. Найти: 1) вертикальную и горизонтальную компоненты вектора скорости \mathbf{v} и абсолютную величину скорости как функцию времени; 2) время T полета снаряда от орудия до падения на землю; 3) зависимость от времени угла α между вектором скорости снаряда и горизонтом; 4) декартовы координаты (ось X — горизонтальное направление, ось Y — вертикальное направление) снаряда как функции времени; 5) уравнение траектории снаряда $y = f(x)$ (построить согласно этому уравнению траекторию полета снаряда); 6) максимальную высоту h_{\max} полета снаряда над землей; 7) горизонтальную дальность l полета снаряда как функцию его начальной скорости и угла возвышения орудия. При каком угле возвышения φ^* дальность будет максимальной при заданной начальной скорости снаряда?

22. Вычертить график линии, которую составят концы векторов скорости снаряда, выпущенного из орудия под углом φ к горизонту, если все векторы, соответствующие скорости снаряда в каждый момент времени, построить из одной точки. Искомый график называется годографом вектора скорости. Сопротивление воздуха полету снаряда не учитывать.

23. Из трех труб, расположенных на земле, с одинаковой скоростью бьют струи воды: под углом в 60° , 45° и 30° к горизонту. Найти отношение наибольших высот h подъема струй воды, вытекающих из каждой трубы, и отношение дальностей падения l воды на землю. Сопротивление воздуха движению водяных струй не учитывать.

24. На какое максимальное расстояние l можно бросить мяч в спортивном зале высотой 8 м , если мяч имеет начальную скорость 20 м/с ? Какой угол φ с полом зала должен в этом случае составлять вектор начальной скорости мяча? Считать, что высота начальной точки траектории мяча над полом мала по сравнению с высотой зала. Мяч во время полета не должен ударяться о потолок зала. Сопротивлением воздуха полету мяча пренебречь.

25. С палубы корабля, идущего со скоростью v_1 , выпущен вертикально вверх снаряд с начальной скоростью v_0 . Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти величину и направление вектора скорости \mathbf{v} снаряда в зависимости от времени и уравнение траектории снаряда в неподвижной системе отсчета. (Для упрощения решения можно воспользоваться результатами рассмотрения задачи 21.)

26. Следуя аналитическому методу исследования движения, примененному в задачах 21 и 25, найти траекторию, скорость v и ускорение a некоторого тела, координаты которого следующим образом зависят от времени: $x = ct^2$; $y = bt^2$.

27. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \sin \omega t,$$

где A , B , ω — постоянные. Показать, что точка движется по эллипсу. Определить его уравнение и радиусы кривизны в точках пересечения эллипса с осями.

28. Точка движется в плоскости, причем ее прямоугольные координаты определяются уравнениями

$$x = A \operatorname{ch} kt, \quad y = B \operatorname{sh} kt,$$

где A , B , k — постоянные. По какой траектории движется точка? Определить ее ускорение.

29. Концы твердого стержня MN могут свободно скользить по сторонам прямого угла MON (рис. 4). Какую траекторию описывает точка P стержня, делящая его на части MP и PN , длины которых соответственно равны A и B ?

30. Самолет летит на высоте h горизонтально по прямой со скоростью v . Летчик должен сбросить бомбу в цель, лежащую впереди самолета. Под каким углом α к вертикали он должен видеть цель в момент выпуска бомбы? Каково в этот момент расстояние l от цели до точки, над которой находится самолет? Сопротивление воздуха движению бомбы не учитывать.

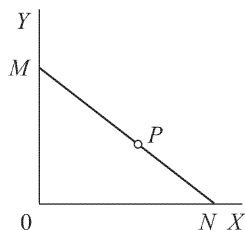


Рис. 4

31. Скорость пули можно найти по понижению ее траектории Δh на заданном расстоянии l при горизонтальном выстреле. Понижение траектории определяется по пробоям, сделанным пулей в двух вертикальных последовательно расположенных на пути пули щитах A и B (рис. 5). Найти скорость пули, считая Δh и l известными и пренебрегая сопротивлением воздуха.

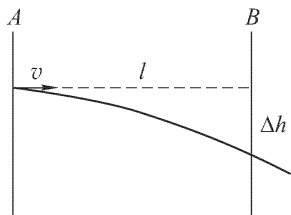


Рис. 5

32. Цель, находящаяся на холме, видна с места расположения орудия под углом α к горизонту. Дистанция (расстояние по горизонтали от орудия до цели) равна l . Стрельба по цели производится при угле возвышения β . Определить начальную скорость v_0 снаряда, попадающего в цель. Сопротивление воздуха не учитывать.

33. Из точки, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра некоторой окружности, по желобам, установленным вдоль различных хорд этой окружности, одновременно начинают скользить без трения грузы. Показать, что все грузы достигнут окружности одновременно.

34. Материальная точка скользит без трения по произвольной наклонной кривой. Показать, что после того как точка опустится на высоту h , скорость ее будет такой же, как и при свободном ее падении с той же высоты h .

35. С вышки одновременно с одинаковыми по величине скоростями выбрасываются по всевозможным направлениям шарики. Показать, что в отсутствие сопротивления воздуха во всякий момент движения все шарики будут расположены на сфере, центр которой опускается с ускорением свободно падающего тела, а радиус равен $v_0 t$, где v_0 — начальная скорость шариков, а t — время, прошедшее с момента их выброса.

36. Вагонетка должна перевезти груз в кратчайший срок с одного места на другое, находящееся на расстоянии l . Она может разогнаться или замедлять свое движение только с одинаковым по величине и постоянным во времени ускорением a , переходя затем или в равномерное движение или останавливаясь. Какой наибольшей скорости v должна достигать вагонетка, чтобы было выполнено указанное выше требование?

37. Лодка, имеющая скорость v_0 , спускает парус в момент времени t_0 , но продолжает двигаться. Во время этого движения произведены измерения скорости лодки, которые показали гиперболическую зависимость скорости от времени ($v \sim 1/t$). Показать, что ускорение a лодки было пропорционально квадрату ее скорости.

38. Пользуясь условиями предыдущей задачи, найти зависимости: 1) пути S , пройденного лодкой, от времени t ; 2) скорости лодки v от пути, после того как на лодке был спущен парус.

39. Снаряд выпущен горизонтально вперед со скоростью $v_{\text{сн}}$ из орудия, находящегося на самолете, летящем горизонтально со скоростью $v_{\text{сам}}$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) уравнение траектории снаряда относительно земли; 2) уравнение траектории снаряда относительно самолета; 3) уравнение траектории самолета относительно снаряда.

40. Лодка пересекает реку с постоянной относительно воды скоростью v , перпендикулярной к течению. Скорость течения реки, ширина которой d , равна нулю у берегов и линейно возрастает по мере приближения к середине реки, где она достигает значения u . Найти траекторию лодки, а также снос лодки x_0 вниз по течению, от пункта ее отправления до места причала на противоположном берегу реки.

41. Провести решение предыдущей задачи в предположении, что скорость течения реки нарастает от берегов к середине реки по параболическому закону $v_x = ky^2$.

42. Точка движется равномерно по плоской траектории, изображенной на рис. 6. В каком месте траектории ускорение точки будет максимальным?

43. Луна обращается вокруг Земли с периодом $T = 27,3$ сут относительно звезд. Средний радиус орбиты Луны $R = 3,8 \cdot 10^5$ км. Найти линейную скорость v движения Луны вокруг Земли и ее нормальное ускорение a .

44. Каковы будут графики зависимости от времени абсолютных величин, скорости и ускорения при равномерном движении точки по кругу?

45. Найти среднюю угловую скорость искусственного спутника Земли, если период обращения его по орбите вокруг Земли составляет 105 мин.

46. Найти среднюю линейную скорость искусственного спутника Земли, если период его обращения по орбите составляет 111 мин, а средняя высота полета 1200 км.

47. Пользуясь данными об искусственном спутнике Земли, приведенными в предыдущей задаче, найти среднее значение его нормального ускорения на орбите.

48. Найти линейную скорость v точек земной поверхности на географической широте φ , вызванную суточным вращением Земли вокруг своей оси. Радиус земного шара $R = 6400$ км.

49. Найти линейную скорость Земли, вызванную ее орбитальным движением. Средний радиус земной орбиты равен $\approx 1,5 \cdot 10^8$ км.

50. Найти нормальное ускорение точек земной поверхности, вызванное суточным вращением Земли. Найти значение проекции этого ускорения на направление земного радиуса в данной точке. Оценить значение искомых величин для широты Москвы (55° северной широты). Радиус Земли $R = 6400$ км.

51. Как показали радиолокационные измерения, Венера вращается вокруг своей оси в направлении, обратном ее орбитальному движению. Период осевого вращения Венеры (относительно звезд) $T_1 = 243$ земных суток. Венера обращается вокруг Солнца с периодом $T_2 = 225$ земных суток. Определить продолжительность солнечных суток на Венере, т. е. время T между двумя последовательными прохождениями Солнца через один и тот же меридиан на этой планете (время от полудня до полудня).

52. Определить скорость, с которой движется тень Луны по земной поверхности во время полного солнечного затмения, если оно наблюдается на экваторе. Для простоты считать, что плоскости солнечной и лунной орбит (относительно Земли) совпадают, а земная ось к ним перпендикулярна. Скорость света считать бесконечно большой по срав-

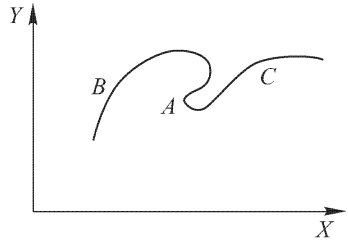


Рис. 6

нению со всеми остальными скоростями, входящими в задачу. Радиус лунной орбиты $R_{\text{л}} = 3,8 \cdot 10^5$ км.

53. В открытом море на экваторе возвышается высокая вертикальная скала. Как будет двигаться по этой скале тень, отбрасываемая сферической поверхностью Земли при заходе Солнца? Найти ускорение такого движения. Радиус Земли $R = 6400$ км. За какое время тень переместится от основания до вершины скалы, если высота последней $h = 1$ км?

54. Якорь электромотора, вращавшегося с частотой N оборотов в секунду, двигаясь после выключения тока равнозамедленно, остановился, сделав n оборотов. Найти угловое ускорение якоря после выключения тока.

55. Автомобиль движется со скоростью 60 км/ч. Сколько оборотов в секунду делают его колеса, если они катятся по шоссе без скольжения, а внешний диаметр покрышек колес равен 60 см.

56. При условии движения автомобиля, описанных в предыдущей задаче, найти величину нормального ускорения внешнего слоя резины на покрышках его колес.

57. Разматывая веревку и вращая без скольжения вал ворота, ведро опускается в колодец с ускорением 1 м/с². С каким угловым ускорением вращается вал ворота? Как зависит от времени угол поворота вала? Радиус вала ворота равен 25 см.

58. Автомобиль, движущийся со скоростью 40 км/ч, проходит закругление шоссе с радиусом кривизны 200 м. На повороте шофер тормозит машину, сообщая ей ускорение $0,3$ м/с². Найти нормальное и полное ускорение автомобиля на повороте. Как направлен вектор полного ускорения $\mathbf{a}_{\text{полн}}$ по отношению к радиусу кривизны \mathbf{R} закругления шоссе?

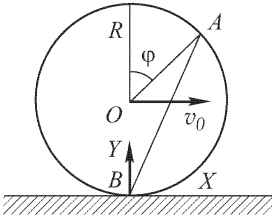


Рис. 7

59. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальной дороге со скоростью v_0 (рис. 7). Найти горизонтальную компоненту v_x линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальную компоненту v_y этой скорости и модуль полной скорости для этой же точки. Найти значение угла α между вектором полной скорости точек на ободе колеса и направлением поступательного движения его оси. Показать, что направление вектора полной скорости произвольной точки A на ободе колеса всегда перпендикулярно к прямой AB и проходит через высшую точку катящегося колеса. Показать, что для точки A $v_{\text{полн}} = BA\omega$. Построить график распределения скоростей для всех точек на вертикальном диаметре (в данный момент времени) катящегося без скольжения колеса.

Выразить все искомые величины через v_0 , R и угол φ , составленный верхним вертикальным радиусом колеса и радиусом, проведенным из центра колеса O в исследуемую точку его обода A .

Указание. Движение точек обода колеса можно рассматривать как результат сложения двух движений: поступательного движения со скоростью v_0 оси колеса и вращения вокруг этой оси. Для этих точек при отсутствии скольжения колеса модули векторов скорости поступательного движения и линейной скорости, обусловленной вращением, равны друг другу.

60. Найти выражение для радиуса кривизны циклоиды в ее вершине (см. задачу 63).

61. Пользуясь общими результатами, найденными в задаче 59, найти величину и направление векторов скорости v_1 для двух точек обода катящегося колеса, расположенных в данный момент на противоположных концах горизонтального диаметра колеса. Как будут направлены ускорения этих двух точек?

62. Колесо радиуса R равномерно катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью v . Найти координаты x и y произвольной точки A на обode колеса, выразив их как функции времени t или угла поворота колеса φ , полагая, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 8). По найденным выражениям для x и y построить график траектории точки на обode колеса.

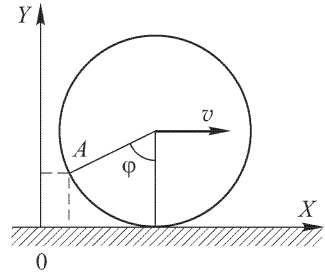


Рис. 8

63. Пользуясь выражением для полной скорости точек, лежащих на обode катящегося колеса (см. задачи 59 и 62), найти длину полного пути каждой точки обода колеса между двумя ее последовательными касаниями полотна дороги.

64. Автомобиль с колесами радиуса R движется со скоростью v по горизонтальной дороге, причем $v^2 > Rg$, где g — ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту h может быть заброшена вверх грязь, срывающаяся с колес автомобиля? Указать положение той точки на крышке колеса, с которой при данной скорости движения автомобиля грязь будет забрасываться выше всего. Сопротивление воздуха движению отброшенной вверх грязи не учитывать.

65. Используя условия качения колеса из задачи 59 и результаты ее решения, найти горизонтальную и вертикальную компоненты вектора ускорения произвольной точки на обode колеса. Указать величину и направление вектора полного ускорения точек, лежащих на обode колеса.

66. Представление о величине и направлении вектора полного ускорения при ускоренном вращательном движении (например, для точек якоря электромотора при его пуске) можно получить, рассмотрев следующую задачу.

Точка движется по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_t , но без начальной скорости. Найти нормальное

и полное ускорения точки, выразив их: 1) как функцию от времени t и ускорения a_t ; 2) как функцию от углового ускорения α и угла поворота φ радиуса-вектора точки из его начального положения. Найти угол β между направлением вектора полного ускорения точки и ее радиусом-вектором.

67. Кинооператор, снимая через телеобъектив поднимающийся самолет, вращает свою камеру вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω_1 и вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_1/5$. Вращению вокруг какой одной мгновенной оси эквивалентны эти два движения камеры? Вращение с какой угловой скоростью вокруг этой одной оси могло бы заменить указанные два вращения?

68. Некоторое твердое тело одновременно вращается с угловыми скоростями ω_1 , $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$ вокруг трех взаимно перпендикулярных мгновенных осей, проходящих через одну точку. Найти, как по отношению к названным трем осям должна быть ориентирована одна ось, вращение вокруг которой могло бы заменить сразу все три указанных независимых вращения. С какой угловой скоростью тогда должно вращаться тело вокруг найденной новой оси вращения?

69. Горизонтальный диск вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси. В некоторой точке на этом диске на расстоянии R от его оси установлен второй диск, ось которого также вертикальна. Второй диск вращается вокруг своей оси в ту же сторону, что и первый диск, но с угловой скоростью ω_2 . Где располагается та мгновенная ось вращения, движение вокруг которой второго диска будет эквивалентно его участию в двух описанных вращательных движениях с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . С какой угловой скоростью ω должен вращаться второй диск вокруг этой мгновенной оси?

70. Вращение от мотора автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал — устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с разной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от мотора?

71. На основании общих соображений о движении автомобиля по криволинейному пути, развитых в предыдущей задаче, рассчитать скорости колес автомобиля на закруглении. Автомобиль с шириной колеи 1,2 м и радиусом колес $r = 30$ см движется по закруглению дороги с радиусом кривизны $R = 50$ м. Скорость центра автомобиля 36 км/ч. Найти линейные скорости v_i внутренних (по отношению к центру кривизны дороги) и внешних v_a колес автомобиля.

72. Горизонтальный диск равномерно вращается с угловой скоростью ω . На расстоянии R от центра диска поставлена вертикальная палочка. Найти закон движения тени палочки на вертикальном экране, если весь прибор освещается горизонтальным пучком параллельных лучей. По найденному закону движения построить график зависимости пути, скорости и ускорения тени на экране от времени.

§ 2. Динамика прямолинейного движения материальной точки и простейших систем

73. В лифте установлены пружинные весы, на которых подвешено тело массы 1 кг . Что будут показывать весы, если лифт: 1) движется вверх с ускорением $4,9 \text{ м/с}^2$, направленным вниз; 2) движется вниз с ускорением $4,9 \text{ м/с}^2$, направленным вверх; 3) движется вниз, ускорение направлено вниз и равно 1 м/с^2 ?

74. На гладком горизонтальном столе лежат 6 одинаковых кубиков с массой $m = 1 \text{ кг}$ каждый. Постоянная сила $F = 1 \text{ кгс}$ действует на первый кубик в направлении, указанном стрелкой (рис. 9). Найти

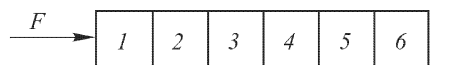


Рис. 9

результатирующую силу f , действующую на каждый кубик. Укажите на рисунке стрелками силы, действующие на соприкасающихся гранях каждого двух кубиков. С какой силой f_1 четвертый кубик действует на пятый?

75. На гладкий горизонтальный стол положена однородная палочка AC массы m и длины l (рис. 10). Постоянная сила F толкает правый

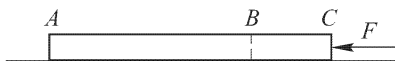


Рис. 10

конец палочки. С какой силой F_1 мысленно выделенный отрезок палочки $AB = \frac{4}{5}l$ действует на отрезок BC той же палочки?

76. На гладкой горизонтальной плоскости находится тело массы M (рис. 11). Другое тело массы m подвешено на нити, перекинутой через блок и привязанной к телу массы M . Найти ускорения тел и натяжение нити. Трением тела массы M о плоскость и трением в блоке, а также массами блока и нити пренебречь.

77. Вернемся к установке, описанной в предыдущей задаче (рис. 11). 1) Рассечем мысленно горизонтальной плоскостью на половине высоты тело массы M . С какой силой верхняя половина тела действует на нижнюю? 2) Рассечем мысленно тело M на половине длины вертикальной плоскостью (перпендикулярной к плоскости рисунка). С какой силой левая половина тела действует на правую?

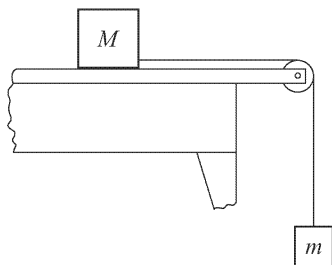


Рис. 11

78. На гладкую горизонтальную плоскость помещены три массы m_1 , m_2 и m_3 , связанные нитями между собой и с массой M , привязанной к нити, перекинутой через блок (рис. 12). 1) Найти ускорение a системы; 2) найти натяжение всех нитей при тех же предположениях, что и в задаче 76.

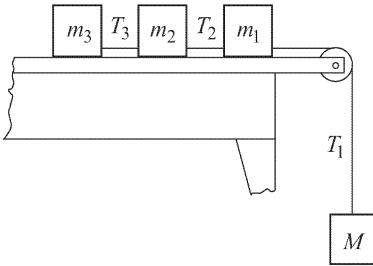


Рис. 12

мися поверхностями тела и плоскости равен k . Найти ускорение a , с которым скользит тело.

80. Два одинаковых тела связаны нитью и лежат на идеально гладком горизонтальном столе, так что нить представляет собой прямую линию (рис. 13). Нить может выдерживать натяжение с силой не более 2 кгс. Какую горизонтальную силу F следует приложить к одному из тел, чтобы нить оборвалась?

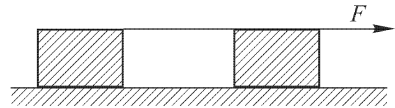


Рис. 13

81. Изменится ли сила, необходимая для разрыва нити в условиях предыдущей задачи, если между телами и столом есть трение и коэффициент трения одинаков для обоих тел?

82. Две пластинки с массами m_1 и m_2 соединены пружиной (рис. 14). С какой силой нужно надавить на верхнюю пластинку, чтобы после прекращения действия этой силы верхняя пластинка, подпрыгнув, приподняла и нижнюю? Массой пружины пренебречь.

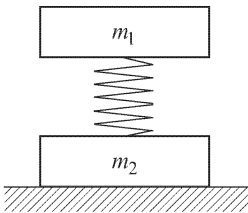


Рис. 14

83. Доска лежит горизонтально на двух опорах, расположенных под ее концами. Посередине доски лежит покоящееся тело. Какие силы действуют на это тело? Какие силы действуют на доску и на опоры? (При рассмотрении этих вопросов собственным весом доски можно пренебречь.)

84. На доске, описанной в предыдущей задаче, стоит человек. Внезапно он приседает. Что произойдет в первый момент: увеличится или уменьшится прогиб доски? Что произойдет, если человек сидел на корточках и внезапно выпрямился?

85. Лошадь равномерно тянет сани. Рассмотреть взаимодействие трех тел: лошади, саней и поверхности земли. Начертить векторы сил,

действующих на каждое из этих тел в отдельности, и установить соотношение между ними.

86. Как изменятся соотношения между силами в примере, разобранном в предыдущей задаче, если лошадь и сани движутся с ускорением a ? Найти величину всех сил, если $a = 20 \text{ см/с}^2$. Масса саней с грузом $M = 0,5 \text{ т}$, масса лошади $m = 0,35 \text{ т}$ и коэффициент трения саней о снег $0,2$.

87. Каков должен быть минимальный коэффициент трения k между шинами ведущих колес автомобиля и дорогой, чтобы автомобиль массой в 2 т с грузом в 4 т двигался с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$? Рассмотреть задачу для двух случаев: 1) все колеса автомобиля ведущие, 2) ведущие — только задние; считать, что центр масс автомобиля находится посередине между осями его колес, а центр масс груза — над задней осью.

88. На горизонтальной доске лежит груз. Коэффициент трения между доской и грузом $0,1$. Какое ускорение в горизонтальном направлении следует сообщить доске, чтобы груз мог с нее соскользнуть?

89. На столе лежит доска массы $M = 1 \text{ кг}$, а на доске — груз массы $m = 2 \text{ кг}$. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы доска выскользнула из-под груза? Коэффициент трения между грузом и доской $0,25$, а между доской и столом $0,5$.

90. Воздушный шар массы M опускается с постоянной скоростью. Какое количество балласта ΔM надо выбросить, чтобы шар начал подниматься с той же скоростью? Подъемную силу P шара считать постоянной.

91. Маятник массы m подвешен к подставке, укрепленной на тележке (рис. 15). Найти направление нити маятника, т. е. угол α нити маятника с вертикалью, и ее натяжение T в следующих случаях: 1) тележка равномерно движется по горизонтальной плоскости; 2) тележка движется горизонтально с ускорением a ; 3) тележка свободно скатывается с наклонной плоскости, образующей угол φ с горизонтом; 4) тележка с некоторым ускорением b , направленным вдоль наклонной плоскости, вкатывается на нее; 5) тележка с тем же ускорением b скатывается с наклонной плоскости.

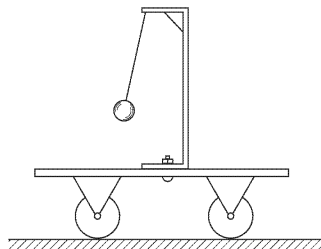


Рис. 15

92. Камень брошен вертикально вверх. В каких точках траектории камень будет иметь максимальное ускорение? Рассмотреть два случая: 1) сопротивление воздуха отсутствует; 2) сопротивление воздуха растет с увеличением скорости камня.

93. Как направлено ускорение артиллерийского снаряда после вылета из ствола орудия, если сопротивление воздуха отсутствует? Как изменится это направление при наличии сопротивления воздуха?

94. В снаряде, выпущенном вертикально вверх, на пружинах укреплен грузик A массы m (рис. 16). Чему будет равняться сила, действующая на грузик со стороны пружинок, при подъеме и спуске снаряда? Рассмотреть вопрос без учета и с учетом сопротивления воздуха движению снаряда.

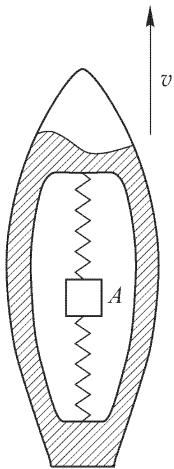


Рис. 16

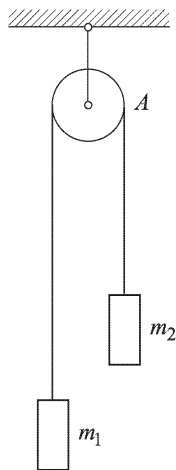


Рис. 17

95. Простейшую машину Атвуда, служащую для проверки законов равноускоренного движения, можно схематически представить так: на нити, перекинутой через блок A , подвешены две неравные массы, m_1 и m_2 (рис. 17). Найти ускорение масс, натяжение нити T и силу f , действующую на ось блока этой машины. Блок и нить считать невесомыми, трения в оси блока не учитывать.

96. На верхнем краю идеально гладкой наклонной плоскости укреплен блок, через который перекинута нить (рис. 18). На одном ее конце привязан груз с массой m_1 , лежащий на наклонной плоскости. На другом конце висит груз с массой m_2 . С каким ускорением a движутся грузы и каково натяжение T нити? Наклонная плоскость образует с горизонтом угол α .

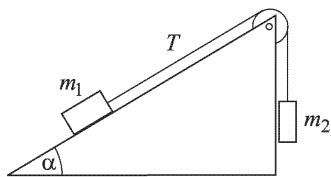


Рис. 18

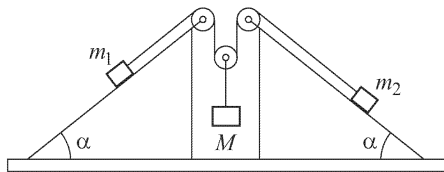


Рис. 19

97. Определить ускорение массы M в системе, изображенной на рис. 19. Массой блоков и силами трения можно пренебречь. Клинья считать закрепленными жестко.

98. Система грузов находится на машине Атвуда (рис. 20). Грузы m_2 и m_3 соединены пружиной. Систему удерживали за груз m_1 , а затем отпустили. Какие ускорения будут у грузов m_1 и m_3 в начальный момент движения?

99. На машине, описанной в задаче 95, массы m_1 и m_2 движутся. Через промежуток времени t после начала движения масса m_1 опустилась на n -ю часть того расстояния, которое она прошла бы за то же время при свободном падении. Каково отношение масс m_1 и m_2 ?

100. Каждый из двух грузов на машине, описанной в задаче 95, висящих по обе стороны блока, имеет массу $m = 250$ г. На один из грузов подложена дополнительно масса (перегрузок) $\Delta m = 5$ г. Определить время t от начала движения, за которое каждый груз пройдет путь $s = 1$ м и скорость v , которую будут иметь грузы, пройдя это расстояние.

101. Определить по данным предыдущей задачи силу давления p перегрузка на основной груз во время движения.

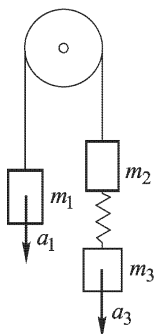


Рис. 20

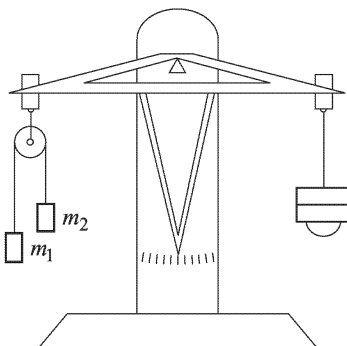


Рис. 21

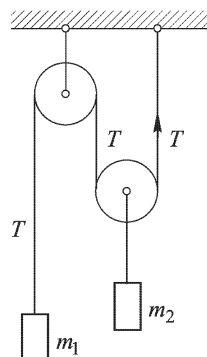


Рис. 22

102. Машина, описанная в задаче 95, уравновешена на весах при заторможенном блоке (рис. 21)¹⁾. 1) В какую сторону нарушится равновесие весов, если освободить тормоз блока? 2) Как уравновесить весы при движущихся массах m_1 и m_2 ?

103. Найти ускорения a_1 и a_2 масс m_1 и m_2 и натяжение нити T в системе, изображенной на рис. 22. Массой блоков и нитей пренебречь.

104. Найти ускорение массы m_1 и натяжения нитей T_1 и T_2 в системе, изображенной на рис. 23. Массой блоков и нитей пренебречь, сил трения не учитывать.

105. На рис. 24 изображен прибор для демонстрации законов динамики. На коромысле весов укреплены два очень легких блока a и c , один на конце, другой в центре коромысла; через блоки перекинута нить, на концах которой прикреплены две одинаковые гирьки A и B по 250 г. Средний блок устроен так, что груз на нити находится под точкой опоры коромысла. На другом конце коромысла подвешена чашка с разновесом.

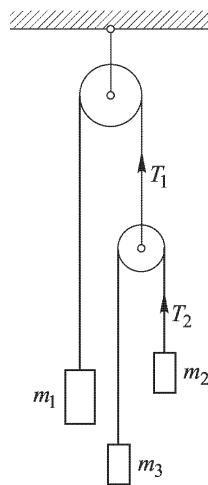


Рис. 23

¹⁾ Вследствие этого массы m_1 и m_2 не движутся.

Пусть весы уравновешены при одинаковых грузах A и B на нити. Как следует изменить груз на чашке весов для того, чтобы восстановить равновесие весов при движущихся грузах в двух следующих случаях: 1) на гирьку, висющую на конце коромысла, положен перегрузок в 25 г; 2) на гирьку под серединой коромысла положен перегрузок в 25 г?

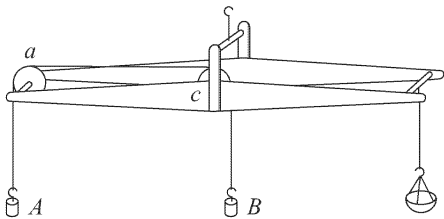


Рис. 24

случаях: 1) на гирьку, висющую на конце коромысла, положен перегрузок в 25 г; 2) на гирьку под серединой коромысла положен перегрузок в 25 г?

106. Система, изображенная на рис. 24 (см. предыдущую задачу), уравновешена при наличии перегрузка в 50 г на средней гирьке при заторможенном блоке. 1) Что следует сделать для восстановления равновесия после того, как блок будет освобожден и грузы начнут двигаться? 2) Ответить на этот же вопрос, если вначале весы были уравновешены при заторможенных блоках при наличии перегрузка в 50 г на крайней гирьке.

107. Через блок, ось которого горизонтальна, перекинута веревка длины l (устройство блока см. на рис. 17). За концы веревки держатся две обезьяны, находящиеся на одинаковых расстояниях $l/2$ от блока. Обезьяны начинают одновременно подниматься вверх, причем одна из них поднимается относительно веревки со скоростью v , а другая со скоростью $2v$. Через сколько времени каждая из обезьян достигнет блока? Массой блока и веревки пренебречь; массы обезьян одинаковы.

108. Обезьяна, движущаяся с большей скоростью (см. условие предыдущей задачи), обладает вдвое большей массой, чем другая. Которая обезьяна достигнет блока раньше?

109. Обезьяна с массой m уравновешена противвесом на подвижном блоке B (рис. 25). Блок B уравновешен грузом с массой $2m$ на неподвижном блоке C . Вначале система была неподвижна. С какой скоростью будет подниматься груз $2m$, если обезьяна начнет выбирать веревку с произвольной скоростью v (относительно себя)? Массой обоих блоков можно пренебречь.

110. Два шарика падают в воздухе. Шарики (сплошные) сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков вдвое больше другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадрату его скорости.

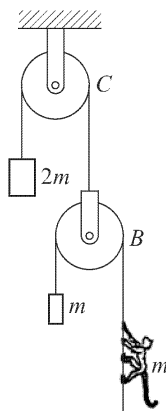


Рис. 25

111. Стальной шарик радиусом 0,05 мм падает в широкий сосуд, наполненный глицерином. Найти скорость v установившегося (равномерного) движения шарика. Коэффициент внутреннего трения в глицерине равен $\eta = 14$ дин · с/см², плотность глицерина $d_1 = 1,26$ г/см³, плотность стали $d_2 = 7,8$ г/см³.

У к а з а н и е. Для решения задачи надо воспользоваться гидродинамической формулой Стокса, выражающей силу сопротивления, испытываемую шариком, движущимся в вязкой жидкости: $f = 6\pi r\eta v$.

112. Как будет изменяться скорость тела, движущегося вертикально вверх с начальной скоростью v_0 , если можно считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела?

113. Тело бросают вертикально вверх в вязкой среде. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения тела. Вычислить время t_1 подъема тела на максимальную высоту его полета вверх и сравнить его со временем t_0 подъема в отсутствие трения. Начальная скорость тела в обоих случаях одинакова.

114. Из одного неподвижного облака через τ секунд одна за другой начинают падать две дождевые капли. Как будет изменяться со временем расстояние между ними? Решить задачу в двух случаях: 1) полагая, что сопротивление воздуха отсутствует; 2) полагая, что сопротивление воздуха пропорционально скорости капель.

115. Лодка под парусом развила скорость v_0 . 1) Как будет убывать во времени скорость движения лодки в стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки можно считать пропорциональным квадрату скорости? 2) Как долго будет двигаться лодка? 3) Какой путь она пройдет до полной остановки?

116. Рассмотреть вопросы, поставленные в предыдущей задаче, в предположении, что сопротивление воды движению лодки пропорционально первой степени ее скорости.

117. Пусть сила сопротивления воды движущейся лодки пропорциональна скорости лодки (см. также условия двух предыдущих задач). Как в таком случае скорость лодки, после спуска паруса будет зависеть от пройденного лодкой пути?

118. Парашютист совершает затыжной прыжок. До раскрытия парашюта он падает со скоростью 60 м/с, после раскрытия приземляется со скоростью 4 м/с. Подсчитать, каково было бы максимальное натяжение T строп парашюта, если бы в конце затыжного прыжка он раскрывался мгновенно. Масса парашютиста 80 кг, а силу сопротивления воздуха движущемуся парашюту можно считать пропорциональной квадрату скорости (см. также следующую задачу). Считать массу парашюта и его строп малой по сравнению с массой парашютиста.

119. При затыжном прыжке, рассмотренном в предыдущей задаче, парашют раскрывается не мгновенно, а постепенно. При этом натяжение T строп все время вплоть до полного раскрытия парашюта остается примерно постоянным и равным 720 кгс. Найти скорость падения v'

к моменту полного раскрытия парашюта и время τ , в течение которого парашют раскрывается.

120. По наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, ускоренно скользит доска массы M (рис. 26). Коэффициент трения доски о наклонную плоскость равен k . На доску кладут тело массы m , которое скользит по доске без трения. Какова должна быть минимальная масса тела $m_{\text{мин}}$, чтобы движение доски по наклонной плоскости стало равномерным?

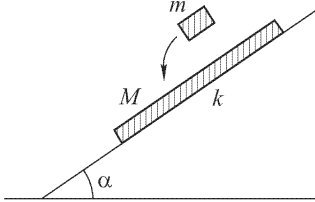


Рис. 26

121. Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. На одном ее конце привязан груз с массой m_1 . По другому концу нити с постоянным отно-

сительно нее ускорением a_2 скользит кольцо с массой m_2 (рис. 27). Найти ускорение a_1 массы m_1 и силу трения R кольца о нить. Массой нити можно пренебречь.

122. Обезьяны, о которых шла речь в задаче 107, начинают подниматься вверх с постоянным ускорением относительно веревки, причем одна из них поднимается с ускорением a , а другая с ускорением $2a$. Через какой промежуток времени каждая из обезьян достигнет блока?

123. Для иллюстрации различных случаев зависимости движения тяжелого маятника от ускорения его точки подвеса могут служить известные опыты Н. А. Любимова с маятником, подвешенным на падающем щитке (рис. 28). Щиток, в верхней части которого укреплена ось вращения маятника, вертикально падает вниз. Щиток скользит без трения по направляющим проволокам. 1) Как будет двигаться относительно щитка маятник, если отклонить его от вертикали, удерживая щиток неподвижным, а затем освободить одновременно и щиток и маятник? 2) Как будет двигаться маятник относительно щитка, если сначала заставить его колебаться на неподвижном щитке, а затем освободить щиток в момент, когда скорость маятника не равна нулю?

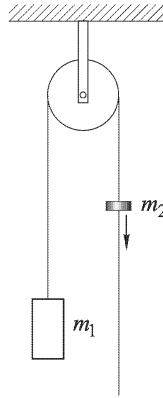


Рис. 27

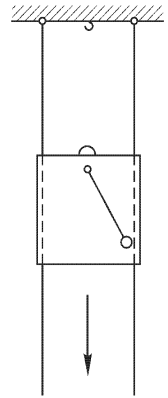


Рис. 28

124. Каков будет период малых колебаний математического маятника длины l , если маятник колеблется в вагоне, движущемся в горизонтальном направлении с ускорением a ?

125. Каков будет период малых колебаний маятника в лифте, опускающемся с постоянным ускорением a ? Каким будет период маятника при $a = g$? Как будет вести себя маятник при $a > g$?

126. Каков будет период малых колебаний T математического маятника длины l , подвешенного в вагоне, свободно скатывающемся по наклонному пути с углом наклона α ?

127. Тяжелое тело подвешено на пружине к потолку кабины лифта. Каково будет движение тяжелого тела относительно кабины, если кабина внезапно начинает свободно падать под действием силы тяжести?

128. Найти выражение ускорения и скорости тележки A , движущейся под действием постоянной горизонтальной силы f (рис. 29),

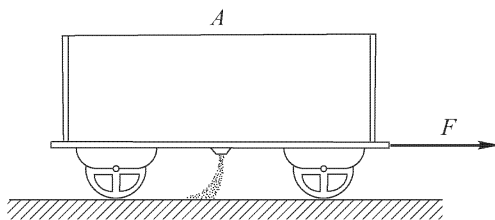


Рис. 29

если на тележке лежит песок, который высыпается через отверстие в платформе тележки. За 1 с высыпается масса Δm песка, в момент времени $t = 0$ скорость тележки v равна нулю, а масса песка и тележки вместе равна M .

129. Два груза соединены весомой нерастяжимой однородной нитью длины l так, как показано на рис. 30. Массы грузов $m_1 = m$, $m_2 = \frac{2}{3}m$, нити $m_n = \frac{1}{3}m$. При какой длине вертикального отрезка нити x_1 силы, действующие на грузы со стороны нити, окажутся равными? Чему равны эти силы? Каково ускорение системы в этом случае? Массой блока и трением во всех частях системы можно пренебречь.

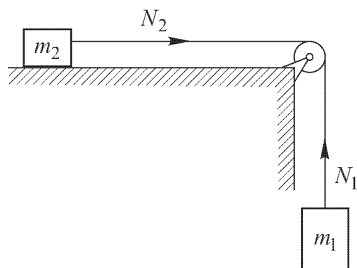


Рис. 30

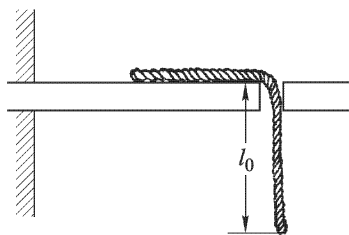


Рис. 31

130. Шнур, положенный на доску, пропущен одним концом в отверстие, просверленное в доске (рис. 31). Найти, с какой скоростью v соскользнет с доски конец шнура, если известна длина всего шнура l и длина его конца l_0 , свешивающегося в момент начала движения.

Найти зависимость от времени длины свисающего с доски отрезка шнура. Трение между шнуром и столом не учитывать.

131. Три одинаковых шарика 1, 2 и 3 подвешены на пружинах один под другим так, что расстояния между ними одинаковы (рис. 32). Следовательно, центр масс этой системы совпадает с центром второго шарика.

Если обрезать нить, удерживающую шарик 1, то система начнет падать, причем ускорение центра масс системы должно быть $3mg/3m = g$ (по известному закону: ускорение центра масс системы тел равно сумме внешних сил, действующих на систему, деленной на массу всей системы). Но пружина I тянет шарик 2 вверх сильнее, чем пружина II тянет этот шарик вниз (сила натяжения пружины I в начальный момент $f_1 = 2mg$, а сила натяжения пружины II в начальный момент $f_2 = mg$), следовательно, шарик 2 начинает падать с ускорением, меньшим чем g .

Таким образом, мы пришли как будто к противоречию. 1) Объяснить кажущееся противоречие; 2) найти ускорения всех шариков в начальный момент; 3) определить начальные ускорения шариков, если мы перережем не нить, а пружину, поддерживающую шарик 3.

132. На горизонтальной плоскости лежит клин массы M (рис. 33). На грань клина кладут тело массы m . Все поверхности соприкасающихся тел гладкие. Найти горизонтальные ускорения обоих тел и силы N и R , с которыми тело давит на клин и клин давит на плоскость.

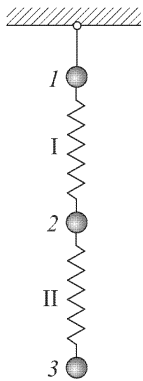


Рис. 32

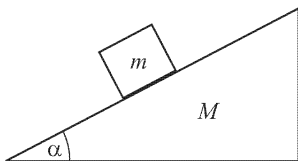


Рис. 33

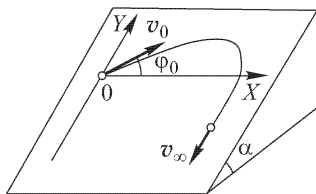


Рис. 34

133. На наклонной плоскости лежит тело (рис. 34). Коэффициент трения тела о плоскость $k \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту. Тело, толчком вдоль наклонной плоскости, приводится в движение с начальной скоростью v_0 . Найти установившуюся скорость скольжения тела в зависимости от величины v_0 и направления толчка.

§ 3. Статика

134. На горизонтальной плоскости стоит человек веса P , который держит на весу с помощью неподвижного блока груз веса Q (рис. 35). Определить, с какой силой F человек давит на плоскость.

135. Фонарь массы $m = 10$ кг подвешен на канатике над серединой улицы шириной $l = 10$ м. Допустимое натяжение канатика $p = 50$ кгс. Какова должна быть высота крепления концов канатика, если точка прикрепления фонаря к канатику должна находиться на высоте $h = 5$ м?

136. Анализируя результат задачи 135, можно прийти к следующему неожиданному выводу: любой канат можно разорвать сколь угодно малой силой. Действительно, представьте канат натянутым и закрепленным на концах; тогда достаточно приложить к середине каната перпендикулярную к нему небольшую силу, чтобы создать сколь угодно большое натяжение каната. Почему же все-таки канат нельзя разорвать сколь угодно малой силой?

137. Подвес фонаря устроен так, как показано на рис. 36. Масса фонаря 5 кг. Определить силы, действующие на брусок AB и проволоку CB (размеры указаны на чертеже).

138. Веревка привязана к крючку A и перекинута через блок C (рис. 37). К веревке в точке D прикреплен груз 20 кг, причем точка D не может смещаться по веревке. Какой груз Q следует прикрепить к концу веревки, чтобы натяжение веревки на участке AD было в два раза больше, чем

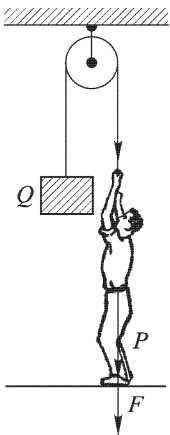


Рис. 35

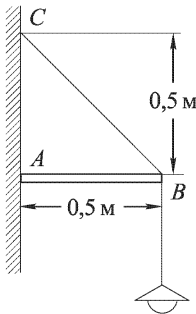


Рис. 36

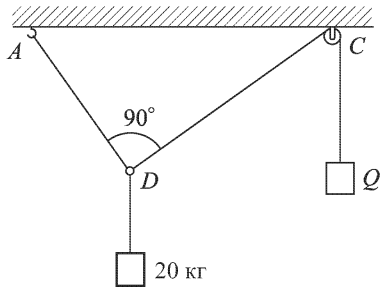


Рис. 37

в остальной ее части, и угол $ADC = 90^\circ$? Определить силу F , вырывающую блок C .

139. Клин заколачивают в бревно. Каков должен быть коэффициент трения, чтобы клин не выскакивал из бревна? Угол клина при вершине равен 30° .

140. С какой силой f человек должен тянуть веревку, чтобы удержать платформу, на которой он стоит (рис. 38), если масса человека $m_1 = 60$ кг, а масса платформы $m_2 = 30$ кг? С какой силой F человек давит на платформу? Какова максимальная масса платформы, которую может удержать человек?

141. Конструкция и размеры крана указаны на рис. 39. Определить силу натяжения F оттяжки AB и силу T , растягивающую

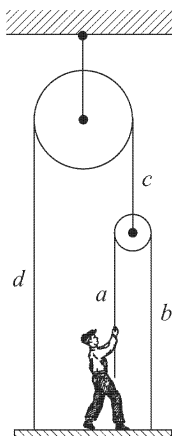


Рис. 38

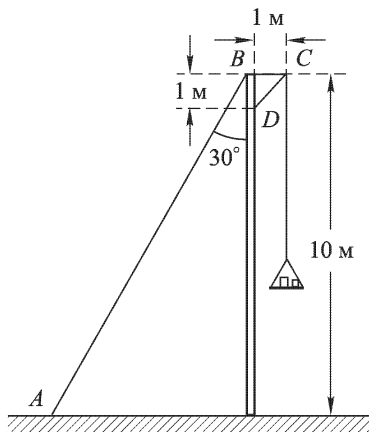


Рис. 39

стержень BC , когда кран поднимает груз в 1 т. Узлы B , C и D считать шарнирами.

142. Однородная палочка AB , концы которой могут скользить без трения по горизонтальной плоскости OA и вертикальной стенке OB , удерживается в положении равновесия натяжением нити OC (рис. 40). Палочка наклонена к горизонтальной плоскости под углом α , а нить — под углом β . Найти натяжение нити T , если вес палочки равен P . При каких положениях точки C равновесие возможно и при каких невозможно?

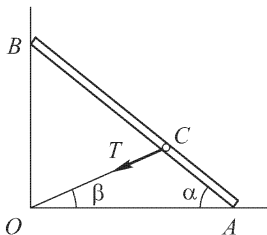


Рис. 40

143. Длина коромысла весов $2l = 30$ см, масса коромысла $m_k = 300$ г, длина стрелки $D = 30$ см. Перегрузок $m = 0,01$ г одной из чашек отклоняет конец стрелки от вертикального положения на расстояние $k = 0,3$ см. Определить расстояние d центра масс коромысла от ребра призмы.

144. Каков должен быть минимальный коэффициент трения k материала стенок куба о горизонтальную плоскость, чтобы можно было его опрокинуть через ребро горизонтальной силой F , приложенной к верхней грани. Чему должна быть равна приложенная сила?

145. Человек везет нагруженные сани с постоянной скоростью по горизонтальной дороге, натягивая веревку, привязанную к саням, под углом φ к горизонту. Определить силу натяжения веревки F , если масса саней с грузом равна M , а коэффициент трения полозьев

о снег k . Направление веревки проходит через центр масс системы. Найти оптимальное значение угла φ . Как меняется оптимальный угол с изменением k от 0 до 1?

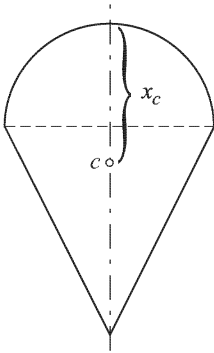


Рис. 41

146. Определить расстояние d центра масс полуокружности радиуса R от стягивающего ее диаметра.

147. Определить расстояние d центра масс пластины, имеющей форму полукруга радиуса R , от ограничивающего ее диаметра.

148. Однородная пластина ограничена полуокружностью радиуса R и равнобедренным треугольником с основанием и высотой, равными $2R$ (рис. 41). Определить расстояние x_c от центра масс с этой фигуры до окружности.

149. Определить положение центра масс пластины, вырезанной в виде кругового сегмента, дуга которого равна 2α , а радиус равен R .

150. Пластина вырезана в форме полукруга радиуса R . Четверо поднимают ее. Двое взялись за концы диаметра, остальные за окружность. На каком расстоянии d от диаметра они должны взяться для того, чтобы каждый поддерживал четверть веса пластины?

151. В вершинах правильного, горизонтально расположенного шестиугольника со стороной a (рис. 42) подвешены грузы, веса которых равны: P , $2P$, $3P$, $4P$, $5P$ и $6P$. Определить величину и точку $M(x, y)$ приложения равнодействующей. Координатные оси расположить так, как показано на чертеже.

152. Однородный сплошной шар массы m , разрезанный вертикальной плоскостью пополам и скрепленный нитью по большому горизонтальному кругу, лежит на столе. Найти натяжение T нити.

153. Кронштейн, перспективный чертеж которого дан на рис. 43, состоит из трех стержней AB , AC и AD . Концы стержней B , C и D укреплены с помощью шарниров в стене, а другие концы сварены вместе в узел A . Стержни AB и AC лежат в горизонтальной плоскости и образуют между собой угол 2γ . Вертикальная плоскость, проходящая через стержень AB , пересекает угол BAC пополам. Стержень AD образует со стеной угол β . На узел A действует сила F в плоскости, параллельной стене, образующая с вертикалью угол α . Найти: 1) силы, развиваемые в стержнях AB , AC и AD ; 2) условие, при котором в стержне AC не развивается никаких усилий.

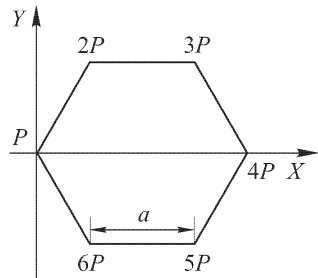


Рис. 42

154. Может ли держаться ящик, висящий на веревке у вертикальной стены так, как указано на рис. 44, в отсутствие сил трения?

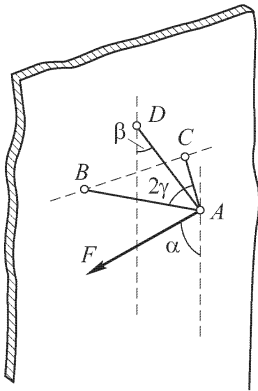


Рис. 43

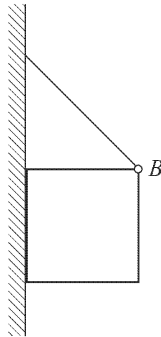


Рис. 44

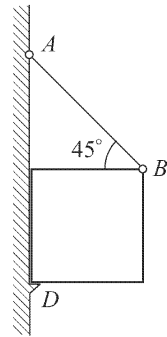


Рис. 45

155. Куб массой в 1 т опирается ребром D на выступ в вертикальной стене, а за ребро B подвешен канат AB к стене (рис. 45). Канат составляет угол 45° со стеной. Определить силу F , с которой куб действует на выступ D .

156. Два одинаковых бруска опираются концами на опоры, как указано на рис. 46. Трение между брусками и опорами отсутствует.

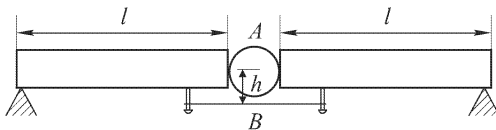


Рис. 46

Между брусками зажат цилиндр A , удерживаемый силами трения, а внизу бруски связаны веревкой B , привязанной к костылям, вбитым в бруски. Определить силу натяжения T веревки и давления F цилиндра на бруски, если известно расстояние h между осью цилиндра A и веревкой, равное 20 см. Длина каждого бруска $l = 1,5$ м, а масса $M = 220$ кг, масса цилиндра $m = 20$ кг.

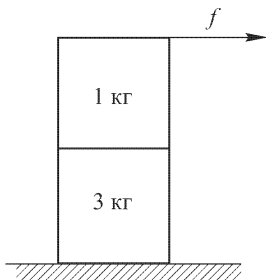


Рис. 47

157. Два куба с ребром 10 см спаяны гранями и образуют призму; масса одного куба 1 кг, масса другого 3 кг. Призма стоит на шероховатой горизонтальной плоскости (рис. 47). Какую горизонтальную силу f нужно приложить к верхнему основанию призмы

перпендикулярно к ее ребру, чтобы опрокинуть призму через ребро? Зависит ли эта сила f от того, находится ли наверху легкий куб или тяжелый?

158. Веревка, оба конца которой свободны, обвита в один ряд вокруг цилиндрического столба. К одному из свободных концов веревки приложена сила натяжения T_1 . Какую силу T_2 надо приложить к другому концу веревки, чтобы она находилась в равновесии? Коэффициент трения между веревкой и поверхностью столба равен k , а число витков веревки n .

159. На горизонтальной плоскости лежат три одинаковых шара, соприкасающиеся между собой, так что их центры расположены в вершинах правильного треугольника. Над центром этого треугольника положен четвертый такой же шар. При каком минимальном значении коэффициента трения k такие соприкасающиеся шары могут удерживаться в равновесии, если коэффициенты трения шара о шар и шара о плоскость опоры одинаковы?

§ 4. Работа, мощность, энергия

160. Действуя постоянной силой в 20 кгс, поднимают груз массой в 10 кг на высоту 10 м. Какая при этом совершается работа? Какой потенциальной энергией будет обладать поднятый груз?

161. Подсчитать работу, которую нужно совершить, чтобы опрокинуть через ребро призму, описанную в задаче 157, для указанных в этой задаче случаев.

162. Коэффициент трения между некоторым телом и плоскостью, наклоненной под углом 45° к горизонту, равен 0,2. На какую высоту поднимается это тело, скользя по наклонной плоскости, если ему будет сообщена скорость 10 м/с, направленная вверх вдоль плоскости? Какова будет скорость тела, когда оно вернется в нижнюю исходную точку своего движения?

163. Какую работу надо совершить, чтобы втащить (волоком) тело массы m на горку с длиной основания L и высотой H , если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен k ? Угол наклона поверхности горки с горизонтом может меняться вдоль горки, но его знак остается постоянным.

164. Какую полезную работу можно получить при соскальзывании тела массы m с горки, длина основания которой равна L , а высота H , если коэффициент трения между телом и поверхностью горки равен k ? Угол наклона поверхности горки с горизонтом может меняться вдоль горки, но его знак остается постоянным.

165. Показать, что если построить кривую, выражающую кинетическую энергию материальной точки как функцию пройденного пути, то сила, действующая в каждой точке в направлении перемещения, будет измеряться тангенсом угла наклона касательной в данной точке кривой энергии к оси абсцисс.

166. Из залитого подвала, площадь пола которого равна 50 м^2 , требуется выкачать воду на мостовую. Глубина воды в подвале $1,5\text{ м}$, а расстояние от уровня воды в подвале до мостовой 5 м . Найти работу, которую необходимо затратить для откачки воды.

167. В цилиндр сегнера колеса налито 2 л воды; высота этого столба воды равна 60 см . Найти энергию U , запасенную в приборе.

168. Оконная штора массой в 1 кг и длиной 2 м свертывается на тонкий валик наверху окна. Какая при этом совершается работа? Трением пренебречь.

169. Горный ручей с сечением потока $S\text{ [м}^2\text{]}$ образует водопад высотой в $h\text{ [м]}$. Скорость течения воды в ручье $v\text{ [м/с]}$. Найти мощность ручья W , выразив ее в лошадиных силах.

170. Определить среднюю полезную мощность при выстреле из гладкоствольного ружья, если известно, что пуля массы m вылетает из ствола со скоростью v_0 , а длина канала ствола l (давление пороховых газов считать постоянным во все время нахождения снаряда в канале ствола).

171. Отвес удерживают вертикально в вагоне, движущемся по горизонтальному пути с постоянным ускорением a , а затем сразу отпускают. Найти: 1) выражение потенциальной энергии U отвеса, отклоненного от вертикали на угол α ; 2) выражение работы A силы, отклонившей отвес на угол α ; 3) значение максимального угла отклонения отвеса $\alpha_{\text{макс}}$ в условиях опыта. 4) Показать, что этот угол максимального отклонения отвеса от вертикали вдвое больше угла, образуемого с вертикалью направлением установившегося отвеса в ускоренно движущемся вагоне (см. также задачу 91). 5) Описать движение отвеса, после того как он был освобожден из вертикального положения.

172. Отвес в железнодорожном вагоне остается в вертикальном положении, пока поезд идет с постоянной скоростью. При торможении поезда отвес начинает качаться, причем его максимальное отклонение от вертикали составляет 3° . Какой путь S пройдет поезд до полной остановки, если считать, что его ускорение все время остается постоянным, а скорость поезда в момент начала торможения была 47 км/ч ?

173. На поверхность Земли с очень большого расстояния падает метеорит. С какой скоростью метеорит упал бы на Землю, если бы атмосфера не тормозила его движения? Считать, что начальная скорость метеорита вдали от Земли равна нулю.

174. Дают ли возможность результаты решения предыдущей задачи ответить на вопрос: какой должна быть минимальная скорость ракеты, запущенной с поверхности Земли, для того чтобы она преодолела силу земного тяготения и ушла в межпланетное пространство?

175. На Землю с очень большого расстояния падает метеорит массой $m = 1\text{ т}$. Найти кинетическую энергию T метеорита на расстоянии $h = 200\text{ км}$ от поверхности Земли. Считать, что начальная скорость метеорита вдали от Земли равна нулю.

176. Какую мощность W затрачивает лошадь на движение саней, если она тянет их в гору равномерно со скоростью v ? Масса саней m и трение между санями и поверхностью горы постоянно, коэффициент трения k . Угол наклона горы α .

177. Показать (для условий задачи 115), что полная работа силы трения лодки о воду будет равна начальной кинетической энергии лодки.

178. Определить потенциальную энергию U сжатой пружины как функцию ее деформации, считая, что сила деформации пропорциональна третьей степени величины деформации с коэффициентом пропорциональности β .

179. Определить отношение потенциальных энергий деформации U_1 и U_2 двух пружин с коэффициентами упругости k_1 и k_2 в двух случаях: 1) пружины соединены последовательно и растягиваются грузом P (рис. 48 а); 2) пружины висят параллельно, причем груз P подвешен в такой точке, что обе пружины растягиваются на одну и ту же величину (рис. 48 б). Деформацией пружин под действием собственного веса пренебречь.

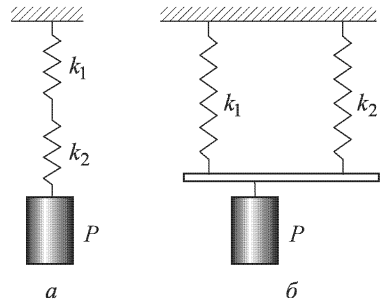


Рис. 48

180. Под действием подвешенного груза спиральная пружина удлинилась от l_0 до l . Потянув рукой за середину пружины, удлинение верхней половины ее довели до $l - l_0$. После этого руку отняли. В пружине возникли быстрые колебания. Какое количество тепла выделится в пружине после того, как колебания затухнут? Коэффициент упругости пружины равен k .

181. Маховик радиуса R [м] делает n оборотов в минуту, передавая ремнем приводу мощность W [л. с]. Найти натяжение T [кгс] ремня, идущего без скольжения.

182. Для определения мощности двигателя его вал A сжимают между двух колодок 1 и 2 (рис. 49). Этот зажим снабжен рычагом,

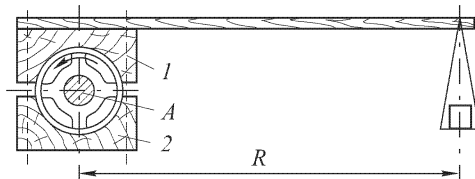


Рис. 49

перпендикулярным к валу, на который подвешивается такой груз, чтобы рычаг сохранял свое горизонтальное положение, когда двигатель

развивает полную мощность, вращаясь в направлении стрелки. Какова мощность двигателя, если при n оборотах вала в минуту на расстоянии R [см] от оси вала находится груз массы m [кг]?

183. Два шкива, находящиеся на одном уровне, соединены ремнем; первый шкив — ведущий (рис. 50). В каком случае предельная мощность, которую можно передать ремнем при определенном числе



Рис. 50

оборотов, будет больше: когда шкивы вращаются по часовой стрелке или против?

184. Через неподвижный блок, массой которого можно пренебречь, перекинута замкнутая тяжелая веревка массы M . В начальный момент времени за точку веревки, расположенную между блоком и нижним заворотом ее, цепляется обезьяна массы m и начинает карабкаться вверх так, чтобы удержаться на неизменной высоте. Какую мощность W должна для этого развивать обезьяна? Через сколько времени она перестанет справляться со своей затеей, если максимальная мощность, которую она может развивать, равна $W_{\text{макс}}$?

185. Два протона с энергией $E = 0,5$ МэВ каждый летят навстречу друг другу и испытывают лобовое столкновение. Как близко они могут сойтись, если учитывать только электростатическое взаимодействие между ними?

186. Идеально упругий шарик движется вверх и вниз в однородном поле тяжести, отражаясь от пола по законам упругого удара. Найти связь между средними по времени значениями его кинетической \bar{K} и потенциальной \bar{U} энергий.

§ 5. Законы сохранения количества движения и энергии

187. С какой скоростью v после горизонтального выстрела из винтовки стал двигаться стрелок, стоящий на весьма гладком льду? Масса стрелка с винтовкой и снаряжением составляет 70 кг, а масса пули 10 г и ее начальная скорость 700 м/с.

188. Определить силу, с которой винтовка действует на плечо стрелка при выстреле, если считать, что со стороны винтовки действует постоянная сила и смещает плечо стрелка на $S = 1,5$ см, а пуля покидает ствол мгновенно. Масса винтовки 5 кг, масса пули 10 г, и скорость ее при вылете равна $v = 500$ м/с.

189. Из пушки, свободно соскальзывающей по наклонной плоскости и прошедшей уже путь l , производится выстрел в горизонтальном направлении. Какова должна быть скорость v снаряда для того, чтобы пушка остановилась после выстрела? Выразить искомую скорость v снаряда через его массу m , массу пушки M и угол α наклона плоскости к горизонту. Учесть, что $m \ll M$.

190. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 19,6$ м на две одинаковые части. Через секунду после взрыва одна часть падает на Землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $S_1 = 1000$ м от места выстрела? Сил сопротивления воздуха при решении задачи не учитывать.

191. Три лодки одинаковой массы m идут в кильватер (друг за другом) с одинаковой скоростью v . Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью u относительно лодки грузы массы m_1 . Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

192. Человек, стоящий в лодке, подтягивает вторую лодку за веревку до их соприкосновения и далее удерживает их вместе (рис. 51). Где

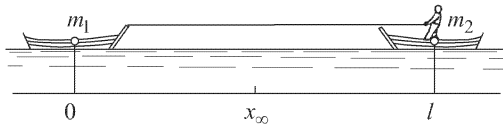


Рис. 51

будут находиться обе лодки, когда их движение в результате трения о воду прекратится? Трение лодок о воду считать пропорциональным их скорости и одинаковым для обеих лодок, массы лодок m_1 и m_2 , начальное расстояние между центрами их масс l .

193. Две лодки идут навстречу параллельным курсом. Когда лодки находятся друг против друга, с каждой лодки во встречную перебрасывается мешок массой в 50 кг, в результате чего первая лодка останавливается, а вторая идет со скоростью 8,5 м/с в прежнем направлении. Каковы были скорости лодок до обмена мешками, если массы лодок с грузом равны 500 кг и 1 т соответственно?

194. В шар массы m_1 , движущийся со скоростью v_1 , ударяется другой шар массы m_2 , догоняющий первый в том же направлении со скоростью v_2 . Считая удар вполне неупругим, найти скорости шаров после удара и их кинетическую энергию.

195. Два идеально упругих шарика с массами m_1 и m_2 движутся вдоль одной и той же прямой со скоростями v_1 и v_2 . Во время столкновения шарики начинают деформироваться, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации в момент, когда она максимальна.

196. На гладком горизонтальном столе лежит шар массы m_1 , соединенный с пружиной жесткости k . Второй конец пружины закреплен (рис. 52). Происходит лобовое упругое соударение этого шара с другим шаром, масса которого m_2 меньше m_1 , а скорость равна v . В какую

сторону будет двигаться второй шар после удара? Определить амплитуду колебаний первого шара после соударения.

197. Система состоит из двух шариков с массами m и M , соединенных между собой невесомой пружиной с коэффициентом жесткости k

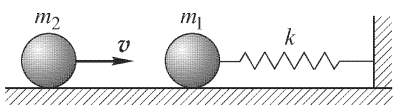


Рис. 52

1) кинетическую энергию K движения системы как целого; 2) внутреннюю энергию системы $E_{\text{вн}}$; 3) амплитуду колебаний одного шарика относительно другого A . До удара система покоилась, а пружина не была деформирована. Какие шарiki могут рассматриваться как абсолютно жесткие?

198. Навстречу друг другу летят два шара с массами m_1 и m_2 . Между шарами происходит неупругий удар. Известно, что кинетическая энергия одного шара в 20 раз больше кинетической энергии другого. При каких условиях шары после удара будут двигаться в сторону движения шара, обладавшего меньшей энергией?

199. С какой скоростью v должен лететь снаряд массы $m = 10$ кг, чтобы при ударе о судно массы $M = 100$ т последнее получило скорость $v_1 = 0,1$ м/с? Удар считать неупругим.

200. Ледокол, ударяясь о льдину массы M , отбрасывает ее, сообщив ей скорость v [м/с]. Положим, что давление ледокола на льдину нарастает равномерно во времени при сближении ледокола со льдиной и также равномерно убывает, когда они расходятся. Найти при этих условиях максимальную силу давления льдины на борт корабля, если удар продолжался τ [с].

201. В одном изобретении предлагается на ходу наполнять платформы поезда углем, падающим вертикально на платформу из соответствующим образом устроенного бункера. Какова должна быть приложенная к платформе сила тяги, если на нее погружают 10 т угля за 2 с, и за это время она проходит равномерно 10 м? Трением при движении платформы можно пренебречь.

202. Подсчитать работу, совершенную паровозом за время погрузки на платформу некоторой массы угля Δm (см. предыдущую задачу), и сравнить ее с кинетической энергией, которую получила погруженная масса угля.

203. Кусок однородного каната висит вертикально, причем нижний конец каната доходит до горизонтального стола. Показать, что если верхний конец каната освободить, то в любой момент падения каната

(рис. 53). Третий шарик с массой m , движущийся вдоль оси пружины со скоростью v , претерпевает упругое столкновение с шариком m , как указано на рис. 53. Считая шарiki абсолютно жесткими, найти после столкновения:

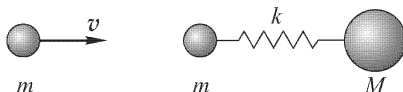


Рис. 53

сила его давления на стол будет в три раза больше веса части каната, уже лежащей на столе.

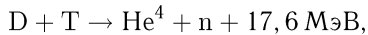
204. На клин, составляющий угол в 45° с горизонтом, вертикально падает шарик. Какова будет траектория шарика после удара о клин? Поверхность клина гладкая, удар вполне упругий.

205. Найти количество движения p , получаемое стенкой при упругом ударе о нее тела массы m , скорость v которого составляет угол α с нормалью к стенке.

206. Движущаяся частица претерпевает упругое столкновение с покоящейся частицей такой же массы. Доказать, что после столкновения, если оно не было лобовым, частицы разлетятся под прямым углом друг к другу. Как будут двигаться частицы после лобового столкновения?

207. Найти изменение кинетической энергии ΔK и импульса Δp тела, движущегося со скоростью v , при упругом ударе его о стенку, движущуюся в том же направлении равномерно со скоростью $u < v$. При каком соотношении между скоростью тела v и скоростью стенки u ударившееся о нее тело остановится?

208. Ядра дейтерия D и трития T могут вступать в реакцию

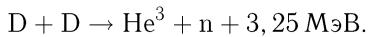


в результате которой образуются нейтроны n и α -частицы, т.е. ядра гелия He^4 . При каждой реакции выделяется энергия 17,6 МэВ. Определить, какую энергию уносит нейтрон и какую α -частица. Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

(Дейтерий — изотоп водорода с атомным весом 2, тритий — изотоп водорода с атомным весом 3, He^4 — гелий с атомным весом 4).

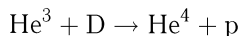
209. Ядра дейтерия D могут вступать друг с другом в реакцию, в результате которой образуется протон и ядро трития T. Каждый протон уносит кинетическую энергию 3 МэВ. Какую кинетическую энергию уносит ядро атома трития и каков общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

210. Ядра дейтерия могут вступать также в реакцию



Какую энергию уносит нейтрон и какую ядро гелия He^3 с атомным весом 3? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

211. В реакции



получаются протоны с энергией 14,6 МэВ. Какую энергию уносит ядро гелия (He^4) и какой общий энергетический выход реакции? Кинетические энергии, которыми обладали частицы до реакции, пренебрежимо малы.

212. При бомбардировке гелия α -частицами с энергией 1 МэВ найдено, что налетающая частица отклонилась на 60° по отношению к первоначальному направлению полета. Считая удар упругим, определить ее энергию и энергию ядра отдачи.

213. Определить долю энергии, теряемую частицей массы m_1 при упругом столкновении ее с неподвижной частицей массы m_2 , если после столкновения частица продолжает двигаться в прежнем (когда $m_1 > m_2$) или прямо противоположном (когда $m_1 < m_2$) направлениях. Показать, что доля теряемой энергии не зависит от того, какая частица движется, а какая покоится. При каком соотношении масс m_1/m_2 потеря энергии максимальна? Используя полученные результаты, объяснить, почему в ядерных реакторах для замедления нейтронов используется рассеяние их на ядрах легких (дейтерий, углерод), а не тяжелых атомов.

214. Определить долю энергии α , теряемую протоном при упругом рассеянии под углом 180° на протоне, дейтроне, ядре гелия и ядре углерода.

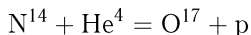
215. Каков максимальный угол θ рассеяния α -частицы и дейтрона при упругом рассеянии на водороде?

216. Альфа-частица, летящая со скоростью v_0 , испытывает упругое столкновение с неподвижным ядром и летит под углом 90° к первоначальному направлению движения. При каком соотношении масс α -частицы m и ядра M это возможно? Определить скорость α -частицы v и ядра V после столкновения. Определить также угол θ между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения α -частицы.

217. Протон, летящий горизонтально со скоростью V , сталкивается с невозбужденным неподвижным атомом массы M , после чего он отскакивает и летит в прямо противоположном направлении с половинной скоростью $V/2$, а атом переходит в возбужденное состояние, т. е. в состояние с более высокой внутренней энергией. Определить скорость атома v после столкновения и энергию E , которая пошла на возбуждение атома. Для каких невозбужденных атомов описанный процесс невозможен?

218. Атомное ядро с массой m и кинетической энергией E сталкивается с другим ядром, которое до столкновения покоилось. Происходит ядерная реакция, в результате которой образуются две частицы с массами m_1 и m_2 , причем на реакцию затрачивается энергия Q . При каких условиях скорости образовавшихся частиц будут направлены вдоль или против скорости падающей частицы?

219. Первая искусственная ядерная реакция

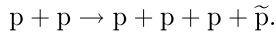


наблюдалась Резерфордом в 1919 г. Она идет с поглощением энергии $E = 1,13$ МэВ. Какую минимальную энергию E_0 надо сообщить в лабораторной системе α -частице (т. е. ядру атома гелия), чтобы при

бомбардировке неподвижной мишени из N^{14} указанная реакция могла пойти?

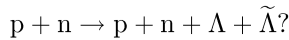
220. Ядерная реакция $Li^7 + p \rightarrow Be^7 + n$ (литий неподвижен) имеет порог $E_{пор} = 1,88 \text{ МэВ}$, т. е. может идти только тогда, когда энергия протона равна или превосходит величину $E_{пор}$. При каких энергиях бомбардирующих протонов E_p нейтроны в такой реакции могут лететь назад от литиевой мишени?

221. При столкновении протонов высоких энергией могут образовываться антипротоны \bar{p} согласно реакции



Какой минимальной (пороговой) кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при столкновении с покоящимся протоном была возможна такая реакция?

222. Какой минимальной кинетической энергией должен обладать протон, чтобы при столкновении с покоящимся нейтроном была возможна реакция



Массы покоя частиц, участвующих в реакции: $m_p = 1836m_e$, $m_n = 1838m_e$, $m_\Lambda = m_{\bar{\Lambda}} = 2183m_e$. Различием масс протона и нейтрона можно пренебречь.

223. Тело массы m_1 ударяется неупруго о тело массы m_2 . Найти долю q потерянной при этом кинетической энергии, если тело m_2 было до удара в покое.

224. Лифт опускается с постоянной скоростью. Каково будет натяжение троса, на котором висит кабина, в момент внезапной полной остановки барабана, с которого сматывается трос? Как будет изменяться натяжение троса после происшедшей задержки?

225. Подсчитать максимальную силу T натяжения каната и его удлинение (см. предыдущую задачу), если коэффициент упругости каната для той его длины, при которой произошла остановка барабана, равен 1 тс/см . Масса лифта 3 т , его скорость 10 м/с .

226. На нити длиной l подвешен груз массы m . Определить, на какую минимальную высоту надо поднять груз m , чтобы он, падая, разорвал нить, если минимальный покоящийся груз M , разрывающий нить, растягивает ее перед разрывом на 1% . Считать, что сила, с которой нить действует на груз, пропорциональна растяжению нити вплоть до ее разрыва.

227. Баллистический маятник — это маятник, употребляющийся для определения скорости снаряда. Принцип его действия заключается в том, что снаряд, скорость которого следует измерить, ударяется в тело маятника (рис. 54). Если известны условия удара и массы снаряда и маятника, то по углу отклонения маятника α можно вычислить скорость v снаряда до удара. Показать, как это сделать для следующих различных случаев: 1) снаряд после удара застревает в маятнике;

2) снаряд отскакивает после удара со скоростью v' назад; 3) снаряд падает вниз, потеряв свою скорость. Масса маятника M [кг] и масса снаряда m [кг] известны; маятник можно рассматривать как математический длины l .

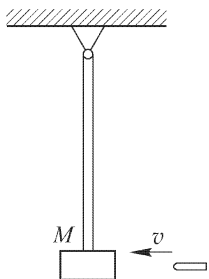


Рис. 54

228. Механическая система, показанная на рис. 55, находится в положении равновесия в поле силы тяжести. Расстояние между осями блоков равно l , а отношение масс грузов равно $m_1/m_2 = \sqrt{2}$. Размерами и массами блоков и трением можно пренебречь. Нить следует считать невесомой и нерастяжимой. Среднему грузу толчком сообщают скорость, направленную вниз, после чего он опускается, а затем начинает подниматься вверх. Какую скорость следует сообщить среднему грузу, чтобы при последующем движении он мог подняться до высоты уровня осей блоков? На сколько в результате толчка должен опуститься средний груз?

подняться до высоты уровня осей блоков? На сколько в результате толчка должен опуститься средний груз?

229. Два маятника в виде шариков разных масс m_1 и m_2 свободно подвешены на нитях разной длины l_1 и l_2 так, что шарики соприкасаются. Первый маятник отводят в плоскости нитей на угол α от первоначального положения и отпускают. Происходит центральный удар шариков. На какие углы α_1 и α_2 относительно отвесной линии отклонятся маятники после удара (углы считать малыми, удар считать упругим)?

230. С гладкой наклонной плоскости, составляющей угол 45° с горизонтом, соскальзывает с высоты h небольшое тело. Как будет двигаться тело, если оно в конце наклонной плоскости встречает: 1) вполне упругую горизонтальную плоскость, 2) горизонтальную плоскость неупругую, но гладкую?

231. На наклонной плоскости стоит ящик с песком; коэффициент трения ящика k о плоскость равен тангенсу угла α наклона плоскости. В ящик вертикально падает некоторое тело и остается в нем. Будет ли двигаться ящик после падения в него тела?

232. От поезда, идущего с постоянной скоростью, отрывается последний вагон, который проходит путь l и останавливается. На каком расстоянии от вагона в момент его остановки будет находиться поезд, если тяга паровоза постоянна, а трение каждой части поезда не зависит от скорости и пропорционально ее весу?

233. Лодка массы M с находящимся в ней человеком массы m неподвижно стоит на спокойной воде. Человек начинает идти вдоль по лодке со скоростью u относительно лодки. С какой скоростью w

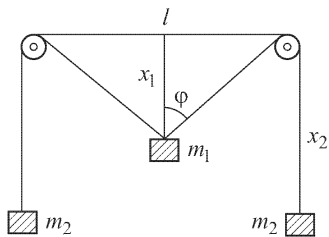


Рис. 55

будет двигаться человек относительно воды? С какой скоростью \mathbf{v} будет при этом двигаться лодка относительно воды? Сопротивление воды движению лодки не учитывать ¹⁾.

234. Пусть человек прошел вдоль по лодке, описанной в предыдущей задаче, путь l . Каковы будут при этом смещения лодки \mathbf{S}_1 и человека \mathbf{S}_2 относительно воды?

235. Пусть человек, находящийся в лодке (см. задачи 233 и 234), начинает бежать вдоль по лодке с ускорением \mathbf{a} относительно лодки. С какими ускорениями \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 будут при этом двигаться, соответственно, человек и лодка относительно воды? С какой силой \mathbf{F} бегущий человек будет действовать на лодку в горизонтальном направлении?

236. На противоположных концах лодки, описанной в задаче 233, стоят два человека одинаковой массы m и перебрасываются мячом массы Δm . Скорость брошенного мяча относительно воды \mathbf{u} . Найти: 1) скорость движения лодки \mathbf{v} в течение времени перелета мяча с одного конца лодки на другой; 2) смещения лодки \mathbf{S}_1 и мяча \mathbf{S}_2 относительно воды после каждого перелета мяча вдоль лодки, если длина пути мяча вдоль лодки равна l .

237. На носу лодки длиной l стоит человек, держа на высоте h ядро массы m . Масса лодки вместе с человеком равна M . Человек бросает горизонтально ядро вдоль лодки. Какую скорость по горизонтали должен сообщить человек ядру, чтобы попасть в корму лодки? Сопротивление воды движению лодки можно не учитывать.

238. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l . Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

239. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M , лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BED массы m (рис. 56). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C . Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b .

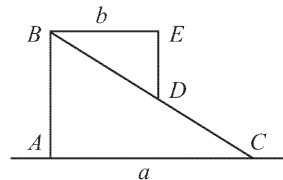


Рис. 56

240. Вопрос о движении тела с переменной массой был впервые исследован И. В. Мещерским. Частную форму уравнения Мещерского можно вывести из рассмотрения одного простого случая движения

¹⁾ При решении задач 233–236 и 240 закон сохранения количества движения надо применять в векторной форме.

ракеты. Пусть для получения ускорения ракета выпускает непрерывную струю газа, вылетающую из ракеты с относительной скоростью u . Масса газа, вылетающая в единицу времени, μ , масса ракеты в данный момент времени M . Найти уравнение движения ракеты.

241. Теория ракет для межпланетных сообщений была разработана К.Э. Циолковским. Им было найдено соотношение, связывающее скорость v , достигнутую ракетой, с ее массой M в один и тот же момент времени. Пользуясь результатами решения предыдущей задачи, найти это соотношение, если масса ракеты на старте равна M_0 , а скорость газовой струи u относительно ракеты постоянна и направлена против ее движения.

242. Реактивный корабль массы M приводится в движение насосом, который забирает воду из реки и выбрасывает ее назад с кормы корабля. Скорость струи воды относительно корабля постоянна и равна u , а масса ежесекундно выбрасываемой насосом воды также постоянна и равна μ . Найти: 1) модуль скорости корабля v как функцию времени; 2) коэффициент полезного действия системы η как функцию величин u и v . Исследовать выражение коэффициента полезного действия на максимум. Силы трения в насосе и сопротивление воды движению корабля не учитывать.

243. В ускорителях на встречных пучках исследуемые частицы, разогнанные до одинаковых релятивистских энергий, движутся навстречу друг другу и реагируют при столкновении. Суммарный импульс таких частиц, а с ним и кинетическая энергия, связанная с движением центра масс, равны нулю как до, так и после столкновения. Поэтому вся кинетическая энергия частиц может быть использована для получения исследуемой реакции. Разобрать выгоду использования ускорителей на встречных пучках на следующем примере. Два протона с одной и той же кинетической энергией $K = 10$ ГэВ движутся навстречу друг другу. До какой кинетической энергии K' надо ускорить только один протон, оставляя второй (мишень) неподвижным, чтобы эта энергия была эквивалентна энергии K (в смысле возможности превращения сталкивающихся частиц)?

244. Для лучшего уяснения закономерностей движения ракеты полезно рассмотреть модель ракеты, когда она выбрасывает вещество не непрерывно, а конечными дискретными порциями одной и той же массы Δm . Пусть при каждом выбрасывании порция вещества Δm получает одну и ту же скорость $v_{\text{отн}}$ относительно ракеты, направленную назад. Определить скорость ракеты v_N , которую она достигнет после N выбрасываний, если начальная масса ракеты равна m_0 . Показать, что в предельном случае, когда $\Delta m \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, но произведение $N\Delta m$ остается постоянным, выражение для v_N переходит в формулу Циолковского.

245. Найти связь между массой ракеты $m(t)$, достигнутой ею скоростью $v(t)$ и временем t , если ракета движется вертикально вверх в поле тяжести Земли. Скорость газовой струи относительно ракеты

u считать постоянной. Сопротивление воздуха и изменение ускорения свободного падения g с высотой не учитывать. Какую массу газов $\mu(t)$ должна ежесекундно выбрасывать ракета, чтобы оставаться неподвижной относительно Земли?

246. Космический корабль движется с постоянной по величине скоростью v . Для изменения направления его полета включается двигатель, выбрасывающий струю газа со скоростью u относительно корабля в направлении, перпендикулярном к его траектории. Определить угол α , на который повернется вектор скорости корабля, если начальная масса его m_0 , конечная m , а скорость u постоянна.

247. Космический корабль, движущийся в пространстве, свободном от поля тяготения, должен изменить направление своего движения на противоположное, сохранив скорость по величине. Для этого предлагаются два способа: 1) сначала затормозить корабль, а затем разогнать его до прежней скорости; 2) повернуть, заставив корабль двигаться по дуге окружности, сообщая ему ускорение в поперечном направлении. В каком из этих двух способов потребуются меньшая затрата топлива? Скорость истечения газов относительно корабля считать постоянной и одинаковой в обоих случаях.

248. Определить коэффициент полезного действия ракеты, т.е. отношение кинетической энергии K , приобретенной ракетой, к энергии сгоревшего топлива Q . Скорость, достигнутая ракетой, $v = 9$ км/с. Теплота сгорания топлива $q = 4000$ ккал/кг, скорость выбрасываемых продуктов сгорания относительно ракеты $u = 3$ км/с.

249. В ракете продукты сгорания (газы) выбрасываются со скоростью $u = 3$ км/с (относительно ракеты). Найти отношение η ее кинетической энергии $K_{\text{рак}}$ к кинетической энергии продуктов сгорания $K_{\text{газ}}$ в момент достижения ракетой скорости $v_{\text{кон}} = 12$ км/с.

250. С поверхности Луны стартует двухступенчатая ракета. При каком отношении масс первой (m_1) и второй (m_2) ступеней скорость контейнера с полезным грузом (массы m) получится максимальной? Скорость истечения газов u в двигателях обеих ступеней постоянна и одинакова. Отношения массы топлива к массе ступени равны соответственно α_1 и α_2 для первой и второй ступеней. Отделение ступеней и контейнера производится без сообщения добавочных импульсов.

251. Обобщить формулу Циолковского (241.1)¹⁾ на случай релятивистских движений ракеты. Считать, что скорости ракеты и газовой струи направлены вдоль одной прямой.

252. Показать, что при $\beta \ll 1$ релятивистская формула (251.4) переходит в формулу Циолковского (241.1).

¹⁾ В книге принята сквозная нумерация формул для каждой задачи, причем начало нумерации может быть дано в условии задачи, а продолжение — в ответе.

253. Для путешествий к звездам требуются скорости, сравнимые со скоростью света. Оцените перспективы использования ракет на химическом топливе для достижения звездных миров. Допустите, что скорость истечения газа $u = 10 \text{ км/с}$ (что для химического топлива сильно завышено) и ракета должна достигнуть скорости $v = c/4$. Определите отношение стартовой массы ракеты m_0 к ее массе m после достижения указанной скорости.

254. Для межзвездных полетов идеальной была бы фотонная ракета, в которой вещество превращается в электромагнитное излучение. Роль газовой струи играет пучок фотонов, излучаемых ракетой в определенном направлении. Определить мощность фотонной ракеты, движущейся за пределами Солнечной системы с нерелятивистской скоростью и постоянным ускорением $g = 10 \text{ м/с}^2$. Масса ракеты $m = 1 \text{ т}$.

255. Человек поддерживается в воздухе на постоянной высоте с помощью небольшого реактивного двигателя за спиной. Двигатель выбрасывает струю газов вертикально вниз со скоростью (относительно человека) $u = 1000 \text{ м/с}$. Расход топлива автоматически поддерживается таким, чтобы в любой момент, пока работает двигатель, реактивная сила уравновешивала вес человека с грузом. Сколько времени человек может продержаться на постоянной высоте, если его масса $m_1 = 70 \text{ кг}$, масса двигателя без топлива $m_2 = 10 \text{ кг}$, начальная масса топлива $m_0 = 20 \text{ кг}$? Какое расстояние l в горизонтальном направлении может пролететь человек, если он разбежался по земле, приобрел горизонтальную скорость $v = 10 \text{ м/с}$, а затем включил двигатель, поддерживающий его в воздухе на постоянной высоте?

256. Сферическая капля воды свободно падает в атмосфере пересыщенного водяного пара. Считая, что скорость возрастания массы капли dm/dt пропорциональна ее поверхности и пренебрегая силой сопротивления среды, определить движение капли. Предполагается, что в момент зарождения капли ($t = 0$) скорость ее падения равна нулю.

§ 6. Динамика движения материальной точки по окружности. Движение относительно вращающихся систем отсчета

257. Найти силу F , с которой тележка массы m , движущаяся со скоростью v , давит на мост в одном из следующих случаев: 1) горизонтальный мост; 2) выпуклый мост (рис. 57); 3) вогнутый мост. (Для случаев 2) и 3) силу F определить для наивысшей и наинизшей точек моста.)

258. Тело движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0 по горизонтальной поверхности стола, которая имеет закругленный край с постоянным радиусом закругления, равным R (рис. 58). Каково

должно быть минимальное значение скорости v_0 , чтобы тело, падая со стола, не касалось закругления?

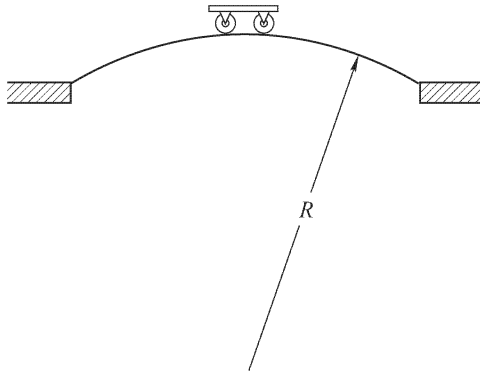


Рис. 57

259. По гладкой внутренней поверхности чаши, имеющей форму параболоида вращения с вертикальной осью Z , с высоты h соскальзывает шарик массы m . Уравнение параболоида: $z = k(x^2 + y^2)$. Найти ускорение a шарика и силу его давления F на дно чаши в ее нижней точке.

260. С какой начальной скоростью v_0 должен вылететь снаряд из орудия в горизонтальном направлении, чтобы двигаться вокруг Земли, не падая на нее? Каким ускорением будет обладать снаряд при этом? (Радиус Земли $R = 6,4 \cdot 10^3$ км.)

261. Выстрел из орудия произведен под некоторым углом к горизонту, начальная скорость снаряда меньше найденной при решении предыдущей задачи. По какой траектории будет двигаться в этом случае снаряд и каково будет его ускорение? Сопротивлением воздуха движению снаряда пренебречь.

262. Тележка массы m скатывается без трения по изогнутым рельсам, имеющим форму, изображенную на рис. 59. 1) С какой минимальной высоты h должна скатиться тележка для того, чтобы она не покинула рельсов по всей их длине? 2) Какие силы действуют на тележку в наивысшей точке B петли? 3) Каково будет движение тележки, если она скатывается с высоты, меньшей h ? При решении задачи считать колеса тележки малого размера и малой массы и их вращательного движения не рассматривать.

263. Каков должен быть минимальный коэффициент трения скольжения k между шинами автомобиля и асфальтом, чтобы автомобиль

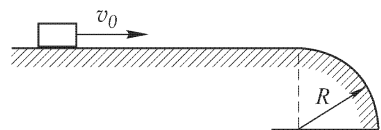


Рис. 58

мог пройти закругление с радиусом $R = 200$ м при скорости $v = 100$ км/ч?

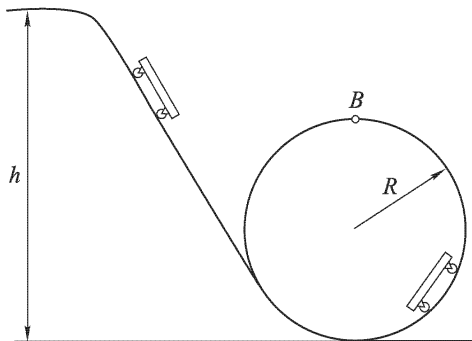


Рис. 59

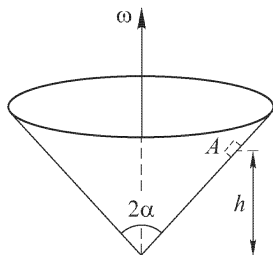


Рис. 60

264. На внутренней поверхности конической воронки с углом 2α при вершине (рис. 60) на высоте h от вершины находится малое тело. Коэффициент трения между телом и поверхностью воронки равен k .

Найти минимальную угловую скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси, при которой тело будет неподвижно в воронке.

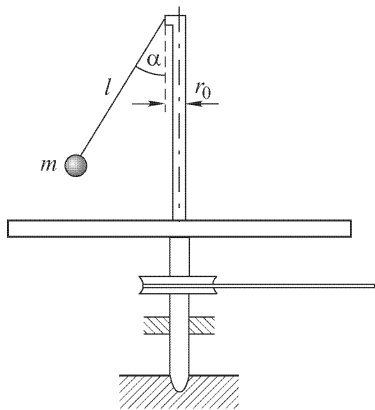


Рис. 61

265. Велосипедист при повороте по кругу радиуса R наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипеда и землей равен α . Найти скорость v велосипедиста.

266. К Г-образной подставке, установленной на оси центробежной машины, привязана нить длины l с грузом m на конце (рис. 61). 1) На какой угол α отклонится от вертикали нить, если центробежная машина вращается с угловой скоростью ω ?

2) Каково будет при этом натяжение нити T ? 3) Будет ли у нити излом при вращении машины, если к середине нити прикрепить небольшую массу?

Рассмотрение вопросов 1) и 2) провести для двух случаев: для малых углов отклонения нити от вертикали, соответствующих малой угловой скорости вращения центробежной машины, и для произвольной угловой скорости вращения машины. Решение получившегося во втором случае тригонометрического уравнения для угла α провести графическим методом.

267. Шарик радиуса R висит на нити длины l и касается вертикального цилиндра радиуса r , установленного на оси центробежной машины (рис. 62). При какой угловой скорости ω вращения центробежной машины шарик перестанет давить на стенку цилиндра?

268. В вагоне поезда, идущего по закруглению железнодорожного пути, сделанному, как обычно, с уклоном внутрь, на пружинных весах подвешено тело. Весы показывают увеличение веса тела на $n\%$ по сравнению с весом того же тела, измеренным в поезде, идущем прямолинейно с постоянной скоростью. Весы могут свободно поворачиваться около точки подвеса и на закруглении остаются висеть перпендикулярно к полу вагона. Найти радиус кривизны пути R , если поезд идет со скоростью v .

269. Шофер, едущий на автомобиле по горизонтальной площади в тумане, внезапно заметил недалеко впереди себя стену, перпендикулярную к направлению движения. Что выгоднее: затормозить или повернуть в сторону, чтобы предотвратить аварию?

270. Автомобиль движется с постоянной скоростью вдоль извилистой горизонтальной дороги. Принимая дорогу за синусоиду, найти максимальную скорость, которую может развивать автомобиль, чтобы не было заноса.

271. Решить ту же задачу, предполагая, что автомобиль движется с постоянной скоростью по эллипсу с полуосями A и B . В каких точках траектории нормальное ускорение автомобиля достигает максимального и минимального значений? Найти эти значения.

272. При выполнении самолетом «мертвой петли», осуществленной впервые русским летчиком П. Н. Нестеровым, сила, действующая на крылья самолета, изменяется по сравнению с их нагрузкой при горизонтальном полете.

Пусть самолет Нестерова массой в $\frac{3}{4}$ т делает «мертвую петлю» радиуса $R = 235$ м и движется по ней со скоростью 120 км/ч. Найти максимальное значение нагрузки на крылья самолета. Указать, в каком месте траектории эта нагрузка будет максимальной.

273. Самолет делает «мертвую петлю» радиуса $R = 100$ м и движется по ней со скоростью $v = 280$ км/ч. С какой силой тело летчика массой в 80 кг будет давить на сиденье самолета в верхней и нижней точках петли?

274. На самолете, делающем «мертвую петлю», подвешен отвес. Указать направление отвеса в различных точках «мертвой петли» при различных значениях скорости самолета v и радиуса петли R .

275. Самолет совершает вираж, двигаясь по окружности с постоянной скоростью v на одной и той же высоте. Определить радиус r этой

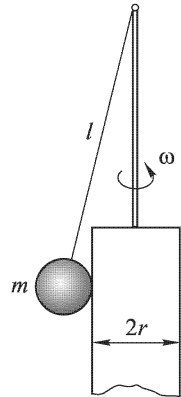


Рис. 62

окружности, если плоскость крыла самолета наклонена к горизонтальной плоскости под постоянным углом α .

276. Груз массы M может скользить без трения по стержню a , укрепленному перпендикулярно к оси вращающейся центробежной машины (рис. 63). Ось машины вертикальна, и сквозь нее проходит нить, на которой висит груз массы m ; нить перекинута через блок c и другой ее конец прикреплен к грузу массы M . Найти положение груза массы M на стержне a , когда центробежная машина вращается с угловой скоростью ω .

277. В предыдущей задаче ось вращения центробежной машины пересекает горизонтальный стержень a . Каков будет ответ, если они не пересекаются?

278. В каком положении будет находиться груз массы M на стержне, если всему прибору, описанному в задаче 276 (рис. 63), сообщить вращение с угловой скоростью ω , а затем отсоединить прибор от привода центробежной машины? Будет ли у груза устойчивое положение на стержне? Моментом инерции прибора по сравнению с моментом инерции груза массы M можно пренебречь. Трения в подшипниках прибора не учитывать.

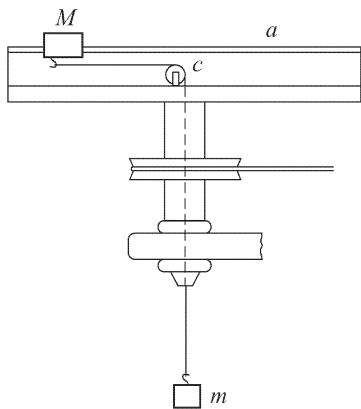


Рис. 63

279. Каково может быть положение груза массы M в предыдущей задаче, если моментом инерции I_0 самого прибора нельзя пренебрегать?

280. В приборе, аналогичном описанному в задаче 276, на стержень насажены по одну сторону от оси вращения два груза с массами m_1 и m_2 , соединенные нитью длины l . Ближайший к оси груз массы m_1 соединен

нитью длины R с осью вращения. Определить натяжение нитей, если угловая скорость ω вращения машины известна.

281. На приборе, описанном в задаче 276, вместо тела массы m к нити прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно. Каковы должны быть свойства пружины, чтобы тело массы M при вращении машины с угловой скоростью ω могло находиться в равновесии на любом расстоянии от оси вращения? Когда тело массы M находится у оси вращения, пружина не натянута.

282. На приборе, описанном в задаче 276, груз массы $M = 100$ г, находящийся на стержне, соединен пружиной с осью. Каков коэффициент жесткости k пружины, если известно, что при угловой скорости вращения $\omega = 120$ об/мин она растянулась на 50% первоначальной длины?

283. Шарик массы m подвешен на идеальной пружине жесткости k и начальной длины l над центром платформы центробежной машины (рис. 64). Затем шарик начинает вращаться вместе с машиной с угловой скоростью ω . Какой угол α образует при этом пружина с вертикалью?

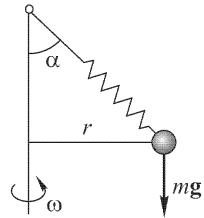


Рис. 64

284. В приборе, изображенном на рис. 65, треугольник CDE вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью ω . По стержню CD , представляющему гипотенузу треугольника, может скользить без трения муфточка K . В каком положении будет находиться муфточка?

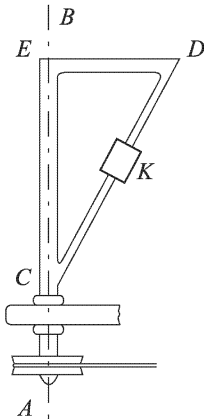


Рис. 65

285. Металлическое кольцо, подвешенное на нити к оси центробежной машины, как указано на рис. 66, равномерно вращается с угловой скоростью ω . Нить составляет угол α с осью. Найти расстояние от центра кольца до оси вращения.

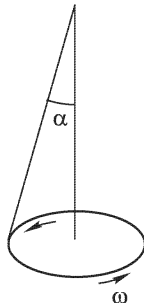


Рис. 66

286. Однородный стержень длины l равномерно вращается вокруг свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость вращения ω , при которой стержень еще не разрывается под действием внутренних напряжений, возникающих в нем при вращении? Максимальная сила натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, равна T . Объемная плотность материала стержня равна ρ .

287. Жесткие стержни образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, который вращается с постоянной угловой скоростью ω

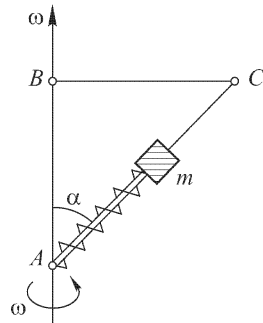


Рис. 67

вокруг вертикального катета AB (рис. 67). На стержень AC надет и скользит без трения муфта массы m . Муфта связана пружиной жесткости k с вершиной A треугольника, имеющей в нерастянутом состоянии длину l . Определить, при каком значении ω муфта будет в равновесии при недеформированной пружине? Будет ли это равновесие устойчивым?

288. Доска качелей с сидящими на ней людьми весит P . Какое наибольшее натяжение T будут испытывать веревки, если отвести качели на 45° от положения равновесия и предоставить им качаться?

289. На закруглениях железнодорожного пути наружный рельс делают немного приподнятым по сравнению с внутренним. Объяснить, для чего это делается, и дать расчет необходимого угла наклона полотна.

290. В качестве аттракциона иногда устраивают комнату, вращающуюся вокруг вертикальной оси. Пол такой комнаты имеет вогнутую форму. Во время вращения все находящиеся в комнате предметы

и люди стоят на этом полу, как на плоском, устойчиво и нормально к его поверхности. Определить форму пола, если угловая скорость вращения комнаты равна ω .

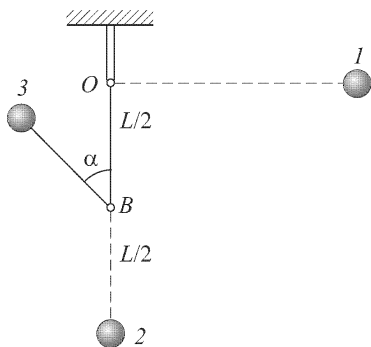


Рис. 68

291. На нити длиной L , привязанной одним концом к штифту в точке O , подвешен как отвес маленький шарик (рис. 68). Отвес отводят вправо, в горизонтальное положение 1 и затем отпускают. В точке B , расположенной на расстоянии $L/2$ от точки O , имеется гвоздь, за который задевает нить возвратившегося в вертикальное положение 2

отвеса. Найти: 1) какой угол α с вертикалью будет составлять направление нити отвеса в положении 3 в тот момент, когда ее натяжение обратится в нуль; 2) какой будет скорость шарика v отвеса в этой точке его траектории; 3) какой геометрической кривой будет траектория шарика после того, как сила натяжения нити обратится в нуль?

292. Суточное вращение Земли приводит к отклонению артиллерийских снарядов и ружейных пуль от начального направления выстрела, заданного в горизонтальной плоскости по земным ориентирам. Рассчитать величину поперечного смещения x пули, выпущенной в плоскости меридиана по горизонтальному направлению, за первую секунду ее полета. Выстрел произведен на широте Москвы ($55^\circ 45'$), начальная скорость пули 1000 м/с. Указать, в какую сторону отклонится пуля, если в момент выстрела ствол ружья был направлен на юг. Силу сопротивления воздуха полету пули не учитывать. Решить задачу в системе отсчета, связанной с Землей.

293. Из орудия, установленного в точке земной поверхности с географической широтой $\varphi = 30^\circ$, производится выстрел в направлении на восток. Начальная скорость снаряда $v_0 = 500$ м/с, угол вылета снаряда (т. е. угол наклона касательной в начальной точке траектории к плоскости горизонта) $\alpha = 60^\circ$. Пренебрегая сопротивлением воздуха и учитывая вращение Земли, определить приближенно отклонение y

точки падения снаряда от плоскости стрельбы. Какое это будет отклонение: к югу или к северу? (Плоскостью стрельбы называется плоскость, проходящая через направление касательной в начальной точке траектории и направление отвеса в той же точке.)

294. На 60° с. ш. паровоз массой в 100 т идет с юга на север со скоростью $v = 72$ км/ч по железнодорожному пути, проложенному по меридиану. Найти величину и направление той силы, с которой паровоз действует на рельсы в направлении, перпендикулярном к ходу поезда.

295. На 60° с. ш. паровоз массой в 100 т идет с запада на восток со скоростью $v = 72$ км/ч по железнодорожному пути, проложенному вдоль географической параллели данной местности. Найти величину и направление вертикальной и горизонтальной компонент кориолисовой силы, действующей на паровоз.

296. Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\varphi = 60^\circ$. Скорость парохода $v = 10$ м/с. Определить вес тела P на пароходе, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0 .

297. На экваторе на рельсах стоит пушка. Рельсы направлены с запада на восток, и пушка может двигаться по ним без трения. Пушка стреляет вертикально вверх. Какую скорость v_0 будет иметь пушка после выстрела? Куда будет направлена эта скорость? Масса пушки M , масса снаряда m , длина ствола l . Считать, что снаряд движется в стволе с постоянным ускорением a .

298. На сколько будут отличаться конечные скорости разбега самолета, если самолет взлетает на экваторе, причем один раз его разбег производится с запада на восток, а второй раз с востока на запад. Подъемная сила, действующая на крылья самолета, пропорциональна квадрату его скорости относительно Земли. Необходимая конечная скорость разбега самолета вдоль меридиана равна v_0 .

299. Методом последовательных приближений получить законы свободного падения тел в поле тяжести Земли с учетом ее вращения. Движение рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна.

300. Вращение Земли приводит к отклонению свободно падающих тел (без начальной скорости) от направления отвеса. В какую сторону направлено это отклонение и чему равна его величина? Провести решение задачи в системе отсчета, связанной с Землей.

301. Вычислить восточное и экваториальное отклонения свободно падающего тела (без начальной скорости) для широты Москвы ($\varphi = 56^\circ$), если высота падения $h = 100$ м, 500 м, 1000 м, 2000 м.

302. Провести решение предыдущей задачи в системе отсчета, связанной не с вращающейся Землей, а с Солнцем и звездами. Рекомендуется воспользоваться двумя методами: 1) непосредственным применением к падающему телу законов Ньютона, 2) применением к падающему телу закона сохранения момента количества движения.

303. Из ружья произведен выстрел строго вверх (т. е. параллельно линии отвеса). Начальная скорость пули $v_0 = 100$ м/с, географическая широта места $\varphi = 60^\circ$. Учитывая осевое вращение Земли, определить приближенно, насколько восточнее или западнее от места выстрела упадет пуля. Сопротивление воздуха движению пули не принимать во внимание.

304. Под каким углом α к вертикали надо произвести выстрел вверх, чтобы пуля упала обратно в точку, из которой был произведен выстрел? Использовать данные предыдущей задачи.

305. Вращение Земли вызывает отклонение поверхности воды в реках от горизонтального положения. Рассчитать наклон поверхности воды в реке к горизонту на широте φ . Река течет с севера на юг.

306. В чем ошибочность следующего рассуждения: пусть A и B — две неподвижные материальные точки, расстояние между которыми равно r . Состояние покоя точки B можно рассматривать как результат сложения двух вращений с одинаковыми, но противоположно направленными постоянными угловыми скоростями: $+\omega$ и $-\omega$. При первом вращении возникает центростремительное ускорение $\mathbf{a}_1 = \omega^2 \mathbf{r}$, при втором — центростремительное ускорение $\mathbf{a}_2 = (-\omega)^2 \mathbf{r} = \omega^2 \mathbf{r} = \mathbf{a}_1$. Результирующее ускорение точки B равно $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = 2\omega^2 \mathbf{r}$. Следовательно, точка A действует на точку B с силой притяжения $\mathbf{F} = 2m\omega^2 \mathbf{r}$, где m — масса точки B . Поскольку ω — величина произвольная, получается абсурдный результат, что точки A и B притягиваются друг к другу с произвольной, наперед заданной силой.

307. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

308. В диаметрально противоположных точках карусели диаметра $D = 20$ м, вращающейся с постоянным угловым ускорением $\dot{\omega}$, расположены стрелок в точке C и мишень M . Стрелок целится в мишень, не вводя поправки на вращение карусели. Каково должно быть угловое ускорение карусели $\dot{\omega}$, чтобы при этих условиях пуля попала в цель, если в момент выстрела угловая скорость карусели была $\omega_0 = 1$ рад/мин, а скорость пули $v_0 = 200$ м/с. Стрелок и условия стрельбы предполагаются идеальными. Влиянием центробежной силы пренебречь.

309. Представим себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу F , с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли,

в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

310. Велосипедное колесо радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг своего центра. По спице колеса без трения может двигаться шарик. В начальный момент времени шарик находился у обода колеса. Какую начальную скорость v_0 следует сообщить шарiku в радиальном направлении, чтобы он мог достигнуть оси вращения? Угловая скорость вращения ω поддерживается постоянной.

311. Один из маятников Фуко установлен в Ленинграде в Исаакиевском соборе. Длина маятника $l = 98$ м, линейная амплитуда колебаний шара маятника (т.е. наибольшее отклонение его из положения равновесия) $x_0 = 5$ м. Маятник отпускался из крайнего положения без начального толчка. Определить боковое отклонение шара маятника от положения равновесия в момент прохождения его через среднее положение. Географическая широта Ленинграда $\varphi = 60^\circ$.

312. Для создания искусственной тяжести на космическом корабле, обращающемся вокруг Земли по круговой орбите, было предложено ускорять корабль до скорости v , превышающей первую космическую скорость. Для удержания корабля на круговой орбите при такой скорости включается двигатель, сообщающий кораблю ускорение, нормальное к траектории корабля. При какой скорости v космонавт на корабле будет испытывать такую же «тяжесть», что и на Земле? Подсчитать расход топлива, который требуется для выведения корабля на круговую орбиту и последующего (однократного) облета по ней вокруг земного шара в этих условиях. Скорость газовой струи (относительно корабля) $u = 3$ км/с. Считать, что орбита проходит недалеко от поверхности Земли, и пренебречь изменением ускорения свободного падения g с высотой.

§ 7. Динамика твердого тела. Динамика системы

313. Найти ускорение грузов и натяжение нитей на машине, изображенной на рис. 69, учитывая момент инерции I вращающегося блока, при условии, что нить не скользит по блоку. Определить усилие в подвеске A , если масса блока равна M .

314. Однородный цилиндр массы M и радиуса R (рис. 70) вращается без трения вокруг горизонтальной оси под действием веса груза P , прикрепленного к легкой нити, намотанной на цилиндр. Найти угол φ поворота цилиндра в зависимости от времени, если при $t = 0$ $\varphi = 0$.

315. Представьте себе, что груз P (см. предыдущую задачу) состоит из двух одинаковых частей, связанных нитью. Определить натяжение этой нити T .

316. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположных направлениях две легкие нити, нагруженные массами m_1 и m_2 (рис. 71). Найти угловое ускорение блока и натяжения T_1 и T_2 нитей, учитывая момент инерции I блока.

317. Модель ворота укреплена на одной чашке весов (рис. 72). На ворот с моментом инерции I намотана нить с грузиком массы m .

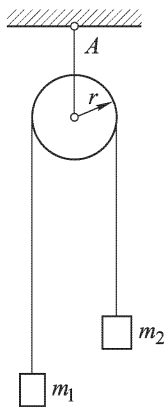


Рис. 69

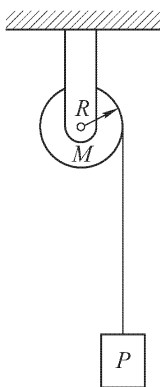


Рис. 70

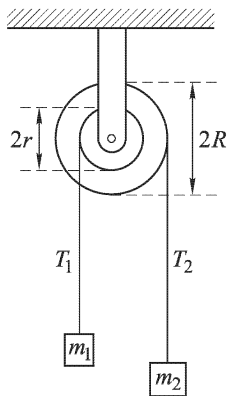


Рис. 71

Весы уравновешены, когда ворот заторможен, и нить не разматывается. Насколько следует изменить вес гирь на другой чашке весов для того, чтобы восстановить равновесие, когда ворот вращается под действием опускающегося вниз грузика?

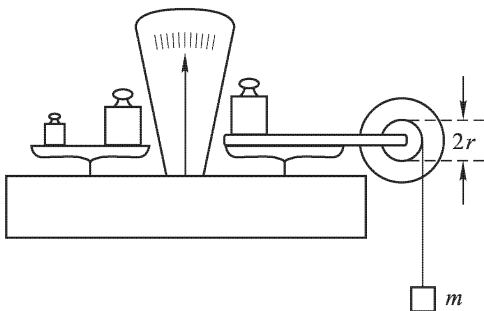


Рис. 72

318. При каких условиях наступит равновесие весов прибора, описанного в предыдущей задаче, в том случае, когда грузик на модели ворота поднимается вверх вследствие инерции раскрутившегося маховичка?

319. Схема демонстрационного прибора (диск Максвелла) изображена на

рис. 73. На валик радиусом r наглухо насажен сплошной диск радиуса R и массы M . Валик и диск сделаны из одного материала, причем выступающие из диска части оси имеют массу m . К валику прикреплены нити одинаковой длины, при помощи которых прибор подвешивается к штативу. На валик симметрично наматываются нити в один ряд, благодаря чему диск поднимается, а затем предоставляют диску свободно опускаться. Найти ускорение, с которым опускается диск.

320. Подсчитать ускорение a , с которым будет опускаться диск, описанный в предыдущей задаче, если к стержню, свободно (без тре-

ния) проходящему через отверстие внутри валика, на нитях подвешено тело массы $m = 314$ г (рис. 74). Размеры диска указаны на рисунке,

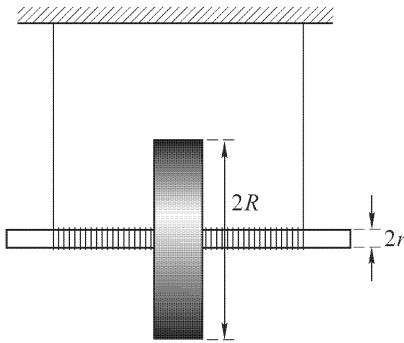


Рис. 73

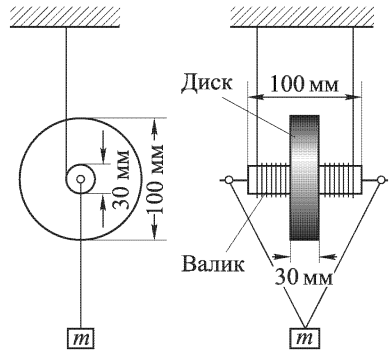


Рис. 74

диск и валик сделаны из стали (плотность 8 г/см^3). Весом нитей и оси пренебречь.

321. На горизонтальную неподвижную ось насажен блок, представляющий собой сплошной цилиндр массы M . Через него перекинута невесомая веревка, на концах которой висят две обезьяны массой m каждая. Первая обезьяна начинает подниматься с ускорением a относительно веревки. Определить, с каким ускорением относительно неподвижной системы координат будет двигаться вторая обезьяна.

322. Автомобиль трогается с места с постоянным ускорением a . Одна из дверок автомобиля открыта и ее плоскость составляет угол 90° с кузовом автомобиля (рис. 75). За какой промежуток времени T дверка закроется? Центр масс дверки находится на расстоянии d от петель дверки автомобиля.

323. С каким ускорением a будет опускаться катушка с массой M и моментом инерции I относительно оси симметрии, если она подвешена аналогично диску с валиком в задаче 319 (рис. 76). На катушку намотаны еще две нити, к которым подвешен груз массы m . Определить натяжения нитей.

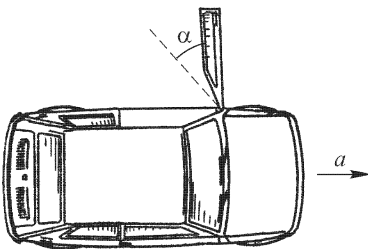


Рис. 75

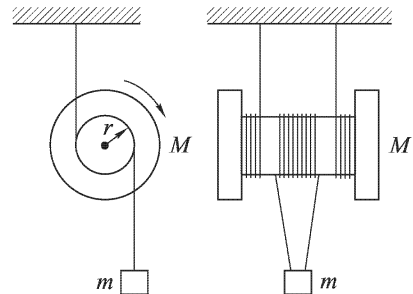


Рис. 76

324. Найти ускорения, с которыми будут опускаться центры двух одинаковых дисков прибора, описанного в задаче 319, если один подвешен к другому так, как указано на рис. 77.

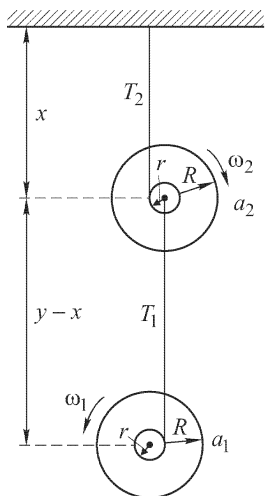


Рис. 77

Момент инерции диска и валика относительно оси диска равен I , масса диска и валика m , радиус валика, на который намотана нить, r .

325. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается без скольжения сплошной однородный диск. Найти линейное ускорение a центра диска.

326. Найти ускорение a центра однородного шара, скатывающегося без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Чему равна сила трения сцепления шара и плоскости?

327. Найти кинетическую энергию K катящегося без скольжения обруча массы M , толщину которого можно считать очень малой по сравнению с его радиусом.

328. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$, скатывается без скольжения сплошной однородный

цилиндр, масса которого равна 300 г. Найти величину силы трения цилиндра о плоскость.

329. Какова должна быть величина коэффициента трения k , чтобы однородный цилиндр скатывался без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом?

330. С одного уровня наклонной плоскости одновременно начинают скатываться сплошные цилиндр и шар одинаковых радиусов. 1) Какое тело будет иметь большую скорость на данном уровне? 2) Во сколько раз? 3) Во сколько раз скорость одного будет больше скорости другого в данный момент времени?

331. Какая из форм конца вала, изображенных на рис. 78, выгоднее (при равных силах давления на опору и скоростях вращения) с точки зрения уменьшения потерь на трение при вращении вала в опорном подшипнике. Трением о боковые стенки можно пренебречь.

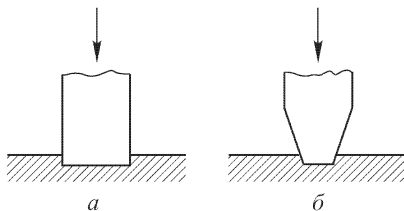


Рис. 78

332. К тележке, стоящей на горизонтальной плоскости, привязана нить, перекинута через блок, укрепленный у края стола; к концу нити прикреплен груз массы $m_3 = 500$ г. Определить ускорение тележки a , если известно, что масса платформы тележки $m_1 = 1,4$ кг, масса каждого колеса $m_2 = 400$ г и колеса представляют собой сплошные диски.

Колеса катятся по поверхности стола без скольжения, а трение качения отсутствует.

333. На горизонтальной плоскости лежит катушка ниток. С каким ускорением a будет двигаться ось катушки, если тянуть за нитку

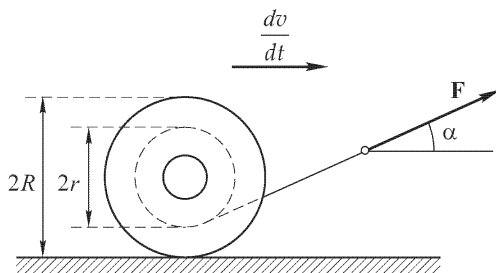


Рис. 79

с силой F (рис. 79)? Каким образом надо тянуть за нитку, чтобы катушка двигалась в сторону натянутой нитки? Катушка движется по поверхности стола без скольжения. Найдите силу трения между катушкой и столом.

334. На шероховатой доске на расстоянии l от ее правого конца находится сплошной цилиндр (рис. 80). Доску начинают двигать с ускорением a_0 влево. С какой скоростью относительно доски будет двигаться центр цилиндра в тот момент, когда он будет находиться над краем доски?

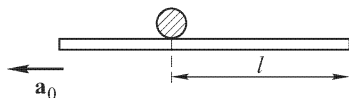


Рис. 80

Движение цилиндра относительно доски происходит без скольжения.

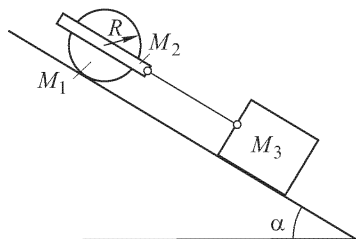


Рис. 81

335. Каток состоит из сплошного цилиндра радиуса R массы M_1 и рамы массы M_2 (рис. 81). К раме катка нитью привязана масса M_3 . Всю эту систему пускают с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Найдите ускорение системы a , если известен коэффициент трения k тела M_3 о плоскость. (Каток скатывается без скольжения.)

Как следует расположить всю систему — массу M_3 впереди и каток позади (как указано на рисунке), или наоборот, чтобы при движении нить была натянута?

336. Какое максимальное ускорение может развить автомобиль с задней ведущей осью, если коэффициент сцепления (трения покоя) колес с дорогой k , расстояние между осями автомобиля l , высота

центра массы автомобиля над дорогой — h , и он расположен посередине колесной базы (рис. 82)?



Рис. 82

339. Какой момент сил следует приложить к Земле, чтобы ее вращение остановилось через 100 000 000 лет (год — 366,25 «звездных» суток)?

340. На краю свободно вращающегося достаточно большого горизонтального диска, имеющего радиус R и момент инерции I , стоит человек массы m . Диск совершает n об/мин. Как изменится скорость вращения диска, если человек перейдет от края диска к центру? Как изменится при этом энергия системы? Размерами человека по сравнению с радиусом диска можно пренебречь.

341. На покоящемся однородном горизонтальном диске массы M и радиуса R находится человек массы m . Диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться. С какой угловой скоростью ω вращается диск, когда человек идет по окружности радиуса r , concentricity диску, со скоростью v относительно диска?

342. Экспериментатор стоит на специальной табуретке и держит в руках вертикальную ось свободно вращающегося колеса, имеющего момент инерции I_1 относительно этой оси AA (рис. 83). Колесо вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω_1 . Табуретка устроена так, что она может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, т. е. представляет собой так называемую скамью Жуковского. Момент инерции табуретки и экспериментатора вокруг вертикальной оси равен I_2 . Ось колеса и ось табуретки лежат на одной прямой. На какую величину ΔE_k изменится кинетическая энергия E_k всей системы табуретки и колеса, если экспериментатор повернет ось колеса на 180° , на 90° ?

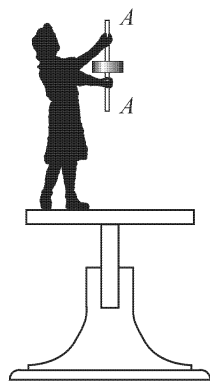


Рис. 83

343. Монета массы m и радиуса r , вращаясь в горизонтальной плоскости вокруг своей геометрической оси с угловой скоростью ω ,

вертикально падает на горизонтальный диск и «прилипает» к нему. В результате диск приходит во вращение вокруг своей оси. Возникающий при этом момент сил трения в оси диска постоянен и равен M_0 . Через какое время вращение диска прекратится? Сколько оборотов N сделает диск до полной остановки? Момент инерции диска относительно его геометрической оси I_0 . Расстояние между осями диска и монеты равно d .

344. Сплошной однородный короткий цилиндр радиуса r , вращающийся вокруг своей геометрической оси со скоростью n об/с, ставят в вертикальном положении на горизонтальную поверхность. Сколько оборотов N сделает цилиндр, прежде чем вращение его полностью прекратится? Коэффициент трения скольжения между основанием цилиндра и поверхностью, на которую он поставлен, не зависит от скорости вращения и равен k .

345. На горизонтальный диск, вращающийся вокруг геометрической оси с угловой скоростью ω_1 , падает другой диск, вращающийся вокруг той же оси с угловой скоростью ω_2 . Моменты инерции дисков относительно указанной оси равны соответственно I_1 и I_2 . Оба диска при ударе сцепляются друг с другом (при помощи острых шипов на их поверхностях). На сколько изменится общая кинетическая энергия вращения системы после падения второго диска? Чем объясняется изменение энергии? Геометрические оси обоих дисков являются продолжением одна другой.

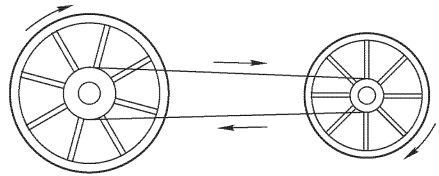


Рис. 84

346. Шкивы двух маховиков соединены ремнем (рис. 84). Радиусы шкивов равны R_1 и R_2 .

Моменты инерции маховиков относительно их геометрических осей равны I_1 и I_2 . Удерживая второй маховик и ремень неподвижными, раскручивают первый маховик до угловой скорости ω_0 , вследствие чего между осью первого маховика и ремнем возникает скольжение. Затем ремень и второй маховик отпускают. Пренебрегая всеми силами

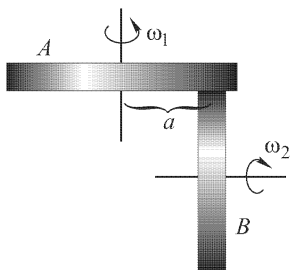


Рис. 85

трения, за исключением сил трения скольжения между ремнем и осями маховиков, найти установившиеся скорости вращения маховиков ω_1 и ω_2 , т.е. скорости после прекращения скольжения. Найти также потерю ΔK кинетической энергии на трение скольжения. Массой ремня пренебречь.

347. Почему в предыдущей задаче полный момент количества движения системы не сохраняется?

348. Однородный диск A массы M_1 и радиуса r_1 (рис. 85) раскручен до угловой

скорости ω_0 и приведен в контакт с диском B , ось вращения которого перпендикулярна к оси диска A . Масса диска B равна M_2 , а расстояние между точкой соприкосновения и осью диска A равно a . Найти установившиеся угловые скорости дисков ω_1 и ω_2 и потерю энергии в процессе установления. Трением в осях, а также трением качения пренебречь.

349. Метеорит массы $m = 10^5$ т, двигавшийся со скоростью $v = 50$ км/с, ударился о Землю на широте $\varphi = 60^\circ$. Вся его кинетическая энергия перешла в тепловую (внутреннюю) энергию, а сам он испарился. Какое максимальное влияние мог оказать удар такого метеорита на продолжительность суток?

350. Оценить, с какой минимальной скоростью v нужно выпустить на экваторе Земли снаряд массы $m = 1000$ т, чтобы изменить продолжительность земных суток на $\Delta T = 1$ мин?

351. Пульсарами называются небесные объекты, посылающие импульсы радиоизлучения, следующие друг за другом с высокостабильными периодами, которые для известных к настоящему времени пульсаров лежат в пределах примерно от $3 \cdot 10^{-2}$ до 4 с. Согласно современным представлениям пульсары представляют собой вращающиеся нейтронные звезды, образовавшиеся в результате гравитационного сжатия. Нейтронные звезды подобны гигантским атомным ядрам, построенным из одних только нейтронов. Плотность вещества ρ в нейтронной звезде не однородна, но при грубых оценках ее можно считать одной и той же по всему объему звезды и по порядку величины равной 10^{14} г/см³. Оценить период вращения T , с каким стало бы вращаться Солнце, если бы оно превратилось в нейтронную звезду. Плотность вещества Солнца возрастает к его центру, а различные слои его вращаются с различными скоростями. При оценке этими обстоятельствами пренебречь и считать, что средняя плотность солнечного вещества $\rho_0 = 1,41$ г/см³, а период вращения Солнца $T_0 = 2,2 \cdot 10^6$ с.

352. Тонкий стержень длины $2l$ и массы m подвешен за середину к нижнему концу длиной вертикально висящей проволоки, верхний конец которой закреплен. На стержне укреплены два одинаковых сплошных шара радиуса R и массы M , каждый таким образом, что центры шаров оказались на концах стержня. Система закручена на некоторый угол и предоставлена самой себе. Предполагая, что возникающий при этом вращающийся момент пропорционален углу кручения α , выразить угловое ускорение $d\omega/dt$ в зависимости от угла α и параметров системы.

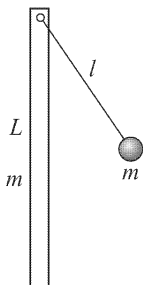


Рис. 86

353. Тонкий стержень массы m и длины L (рис. 86) подвешен за один конец и может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси. К той же оси подвешен на нити длины l шарик такой же массы m . Шарик отклоняется на некоторый угол и отпускается. При какой

длине нити шарик после удара о стержень остановится? Считать удар абсолютно упругим.

354. Математический маятник массы m и стержень массы M (рис. 87) подвешены к одной и той же точке A , вокруг которой они могут свободно колебаться. Длина нити маятника равна длине стержня. Шарик маятника отклоняют в сторону, так что он приподнимается на высоту h относительно своего нижнего положения. Затем шарик отпускают, и он сталкивается неупруго со стержнем. Как будут двигаться шарик и нижний конец стержня после удара и на какие высоты они поднимутся?

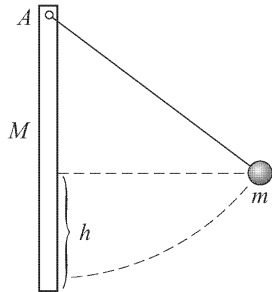


Рис. 87

355. Решить предыдущую задачу в предположении, что до удара был отклонен стержень (нижний конец его был поднят на высоту h).

356. Твердый стержень длины l и массы M может вращаться вокруг горизонтальной оси A , проходящей через его конец (рис. 88).

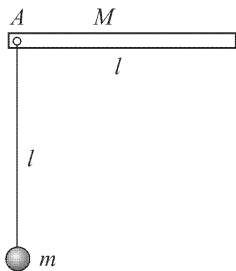


Рис. 88

К той же оси A подвешен математический маятник такой же длины l и массы m . Первоначально стержень занимает горизонтальное положение, а затем отпускается. В нижнем положении происходит идеально упругий удар, в результате которого шарик и стержень деформируются, и часть кинетической энергии переходит в потенциальную энергию деформации. Затем деформация уменьшается, и запасенная потенциальная энергия вновь переходит в кинетическую. Найти значение потенциальной энергии деформации U в момент, когда она максимальна.

357. Вертикально висящая однородная доска длины $L = 1,5$ м и массы $M = 10$ кг может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее верхний конец. В нижний конец доски ударяет пуля, летящая горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 600$ м/с. Пуля пробивает доску и летит далее со скоростью V . Определить скорость V , если после выстрела доска стала колебаться с угловой амплитудой $\alpha = 0,1$ рад. Масса пули $m = 10$ г.

358. В общей точке подвеса A (рис. 89) подвешены шарик на нити длины l и однородный стержень длины L , отклоненный в сторону на некоторый угол. При возвращении стержня в положение равновесия происходит упругий удар. При каком соотношении между массами стержня M и шарика m шарик и точка

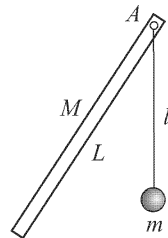


Рис. 89

удара стержня будут двигаться после удара с равными скоростями в противоположных направлениях? При каком соотношении между массами M и m описанный процесс невозможен?

359. Каким участком сабли следует рубить лозу, чтобы рука не чувствовала удара? Саблю считать однородной пластинкой.

360. Однородная тонкая квадратная пластинка массы m_0 может свободно вращаться вокруг вертикальной оси (рис. 90). В точку A ,

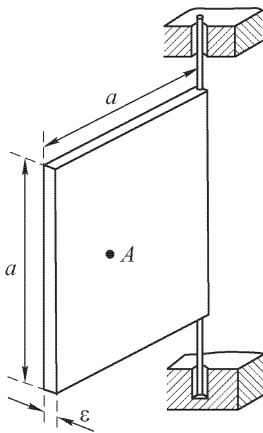


Рис. 90

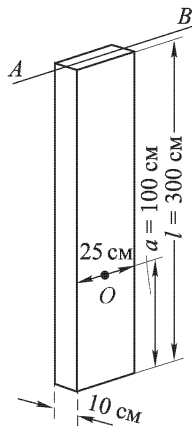


Рис. 91

находящуюся на расстоянии $\frac{2}{3}a$ от оси, нормально к пластинке ударяется шар с массой m , летевший со скоростью v . Как будут двигаться пластинка и шар после соударения, которое происходит по закону упругого удара?

361. Однородный сосновый брус с массой M (плотность $0,5 \text{ г/см}^3$), размеры которого указаны на рис. 91, может свободно вращаться около оси AB . В точку O бруса ударяет горизонтально летящее ядро массы $m = 10 \text{ кг}$. Ка-

кова скорость ядра v , если брус отклонился на угол $\varphi = 28^\circ$, а ядро упало на месте удара?

362. Стержень массы M и длины l , который может свободно вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через один из его концов, под действием силы тяжести переходит из горизонтального положения в вертикальное (рис. 92). Проходя через вертикальное положение, нижний конец стержня упруго ударяет о малое тело массы m , лежащее на гладком горизонтальном столе. Определить скорость тела m после удара.

363. Воспользовавшись условием задачи 362, определить, на какое расстояние S переместится тело m после удара, если коэффициент трения между телом и столом равен k и не зависит от скорости. Стержень после удара остановился. Тело скользит по столу без вращения.

364. На гладком горизонтальном стержне, вращающемся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 40\pi \text{ с}^{-1}$, около оси находится закрепленная неподвижно муфта массы $m = 100 \text{ г}$.

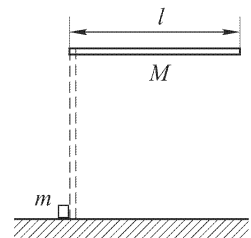


Рис. 92

В некоторый момент муфту отпускают, и она скользит без трения вдоль стержня. Какой момент сил M должен быть приложен к стержню для того, чтобы он продолжал равномерное вращение? Найти расстояния x муфты от оси в любой момент времени t . В начальный момент центр тяжести муфты находится на расстоянии $a_0 = 2$ см от оси.

365. На полюс установлена пушка, ствол которой направлен горизонтально вдоль меридиана и может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через замок орудия. С какой угловой скоростью относительно Земли будет вращаться ствол пушки после выстрела? Считать, что в начальный момент времени снаряд находится на оси вращения и движется внутри ствола при выстреле с постоянным ускорением a . Масса пушки ($M = 1000$ кг) значительно больше массы снаряда ($m = 10$ кг). Длина ствола значительно больше его диаметра.

366. Вертикальный столб высотой l подпиливается у основания и падает на землю, поворачиваясь вокруг нижнего основания. Определить линейную скорость его верхнего конца в момент удара о землю. Какая точка столба будет в этот момент иметь ту же скорость, какую имело бы тело, падая с той же высоты, как и данная точка?

367. Однородный стержень массы m и длины l (рис. 93) падает без начальной скорости из положения 1, вращаясь без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Найти горизонтальную $F_{\text{гор}}$ и вертикальную $F_{\text{верт}}$ составляющие силы, с которыми ось O действует на стержень в горизонтальном положении 2.

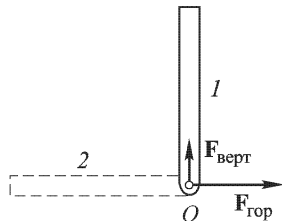


Рис. 93

368. Абсолютно твердая однородная балка веса P и длины L лежит на двух абсолютно твердых симметрично расположенных опорах, расстояние между которыми равно l (рис. 94). Одну из опор выбивают. Найти начальное значение силы давления F , действующей на оставшуюся опору. Рассмотреть частный случай, когда $l = L$. Почему при выбивании опоры сила F меняется скачком?

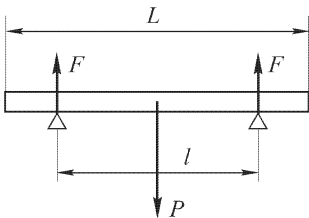


Рис. 94

369. Гимнаст на перекладине выполняет большой оборот из стойки на руках, т. е. вращается, не сгибаясь, вокруг перекладины под действием собственного веса. Оценить приближенно наибольшую нагрузку F на его руки, пренебрегая трением ладоней о перекладину.

370. Человек на аттракционе «гигантские шаги» движется по замкнутой траектории таким образом, что достигаемая им высота относительно положения равновесия меняется в пределах от $h_{\text{мин}}$ до $h_{\text{макс}}$. Определить максимальную и минимальную скорости человека

при таком движении, если длина веревки, на которой он удерживается, равна l .

371. По внутренней поверхности конической воронки, стоящей вертикально, без трения скользит маленький шарик (рис. 95). В начальный момент шарик находился на высоте h_0 , а скорость его v_0 была горизонтальна. Найти v_0 , если известно, что при дальнейшем движении шарик поднимается до высоты h , а затем начинает опускаться. Найти также скорость шарика в высшем положении v .

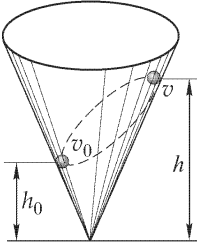


Рис. 95

372. Тяжелая веревка (линейная плотность ρ) длины L перекинута через блок с моментом инерции I и радиусом r . В начальный момент блок неподвижен, а больший из свешивающихся концов веревки имеет длину l . Найти угловую скорость вращения блока ω , когда веревка соскользнет с него. Веревка движется по блоку без скольжения, трение в оси блока не учитывать.

373. На двух параллельных горизонтальных брусках лежит сплошной цилиндр радиуса R и массы m , на который намотана веревка. К опущенному вниз концу веревки приложена вертикальная сила F , равная половине веса цилиндра (рис. 96). Найти горизонтальное ускорение цилиндра и минимальное значение коэффициента трения между цилиндром и брусками, при котором будет происходить качение без скольжения. Ось цилиндра перпендикулярна к брускам, центр его масс и сила F лежат в вертикальной плоскости, проходящей посередине между брусками.

374. К концу веревки, намотанной на цилиндр (см. условие задачи 373) привязан груз массы M . Веревка переброшена через блок, как показано на рис. 97. Определить ускорение груза M . Выяснить

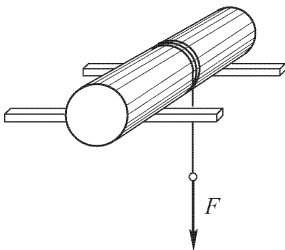


Рис. 96

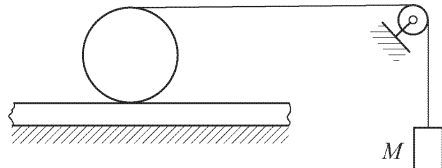


Рис. 97

условия, при которых качение цилиндра будет происходить со скольжением. Весом веревки и блока, а также силами трения на оси блока можно пренебречь. Считать, что во всех случаях движение цилиндра будет плоскопараллельным.

375. Обруч радиуса r свободно скатывается с вершины неподвижной цилиндрической поверхности радиуса $R > r$ (рис. 98). В какой точке поверхности начнется скольжение обруча? Коэффициент трения между обручем и поверхностью $k = 0,5$.

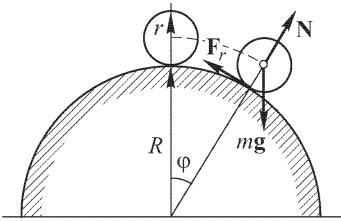


Рис. 98

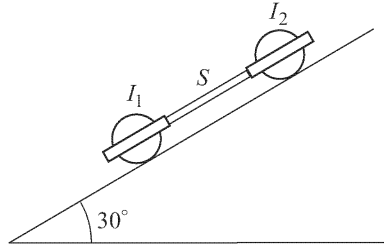


Рис. 99

376. Два катка, связанные штангой S , скатываются без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол в 30° с горизонтом (рис. 99). Катки имеют одинаковые массы $m = 5 \text{ кг}$ и одинаковые радиусы $R = 5 \text{ см}$, момент инерции первого $I_1 = 80 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$, второго $I_2 = 40 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$. Массами рам катков и штанги можно пренебречь. Подсчитать угловое ускорение, с которым катки скатываются без скольжения с наклонной плоскости. Определить силу, передаваемую штангой, если каток с большим моментом инерции движется впереди, и наоборот.

377. На подставке, имеющей массу m_1 , укреплена ось, на которой может свободно вращаться цилиндр радиуса R и массы m_3 . Нить, намотанная на цилиндр, прикреплена к телу массы m_2 . Определить ускорения масс m_1 и m_2 и цилиндра при следующих условиях: 1) к массе m_2 приложена горизонтальная сила F (рис. 100) и сил трения нет; 2) те же условия, но при наличии сил трения между плоскостью и те-

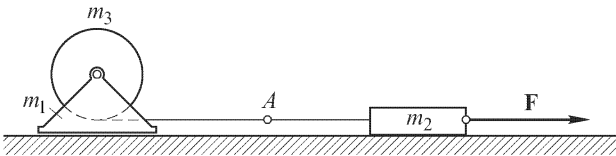


Рис. 100

лами масс m_1 и m_2 . Трением в оси цилиндра пренебречь; 3) к веревке в точке A приложена горизонтальная сила F , масса m_2 убрана; определить ускорения массы m_1 и цилиндра. Движение всех тел считать плоским.

378. Когда диск Максвелла достигает нижнего положения, он начинает подниматься вверх, сообщая «рывок» нитям. С каким ускорением поднимается диск? Найти натяжение нити во время опускания

и поднятия диска, а также оценить приближенно натяжение нити во время рывка. Масса диска $M = 1$ кг, его радиус $R = 10$ см, радиус валика $r = 0,5$ см. Массой валика, а также растяжением нити во время рывка пренебречь. Предполагается, что вначале диск был подвешен на длинных нитях, причем длина намотанной части каждой нити равна $l = 50$ см.

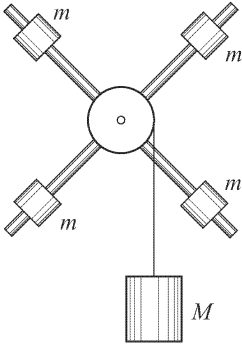


Рис. 101

379. К шкиву креста Обербека (рис. 101) прикреплена нить, к которой подвешен груз массы $M = 1$ кг. Груз опускается с высоты $h = 1$ м до нижнего положения, а затем начинает подниматься вверх. В это время происходит «рывок», т.е. увеличение натяжения нити. Найти натяжение нити T при опускании или поднятии груза, а также оценить приближенно натяжение во время рывка $T_{\text{рыв}}$. Радиус шкива $r = 3$ см. На кресте укреплены четыре груза

с массой $m = 250$ г каждый на расстоянии $R = 30$ см от его оси. Моментом инерции самого креста и шкива пренебречь по сравнению с моментом инерции грузов. Растяжение нити во время рывка не учитывать.

380. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечных сечений желоба изображена на рис. 102.

381. С какой высоты H должен скатиться по наклонному желобу шарик с радиусом инерции ρ , для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиуса R ? Радиусом шарика r по сравнению с R пренебречь.

382. Цилиндр или шар радиуса r катится по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α начинается качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен k .

383. Шарик радиуса r скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения A (рис. 103). Определить точку, в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести.

384. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается массивный полый цилиндр массы m и радиуса r (рис. 104).

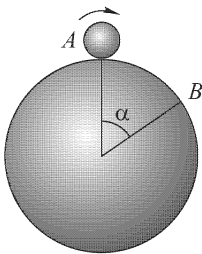


Рис. 103

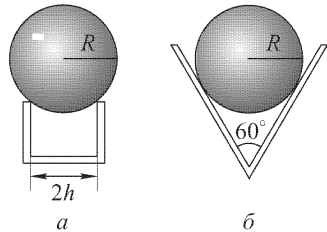


Рис. 102

По поверхности цилиндра бежит собака таким образом, что она все время занимает наивысшее положение на поверхности цилиндра. Определить, с каким ускорением a скатывается цилиндр, если масса собаки m_1 .

385. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массы m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии от этой точки (рис. 105). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M , а угол AOB равен α . Определить: 1) ускорение оси цилиндра a ; 2) силу трения между цилиндром и плоскостью во время качения $F_{\text{тр}}$; 3) время t , в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A , если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна $P_{\text{макс}}$. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость $v_{\text{макс}}$ поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.)

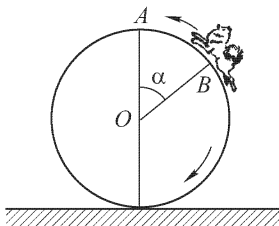


Рис. 105

386. Определить ускорение a , с которым цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом (рис. 106). Трение между жидкостью и стенками бочки считать пренебрежимо малым.

387. Полый цилиндр массы M скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. В цилиндре находится гладкий шарик, который может скользить по внутренней поверхности цилиндра без трения. Существует ли такое положение шарика, при котором он будет двигаться параллельно наклонной плоскости, т.е. с тем же ускорением a , с каким движется ось цилиндра? Найти это положение, если оно существует. Что будет в предельном случае: $m \ll M$ и $\alpha \ll 1$ (угол α мал).

388. Известно, что для того чтобы отличить сырое яйцо от сваренного вкрутую, достаточно попытаться закрутить его на столе. Вареное яйцо крутится долго. Сырое же раскрутить не удастся. Объяснить, на чем основан этот способ.

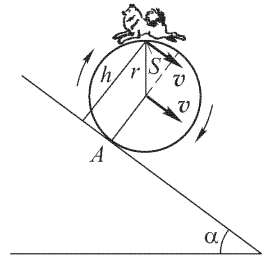


Рис. 104

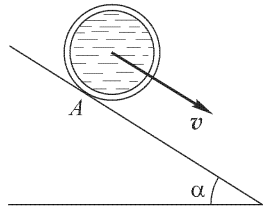


Рис. 106

389. Величина трения между осью и смазанным подшипником в основном определяется движением и внутренним трением жидкости в смазывающем слое.

В гидродинамической теории смазки Н. П. Петрова дается следующее выражение для момента сил трения, действующего на единицу длины вращающейся оси:

$$M = \frac{2\pi\mu a^2\omega}{\delta},$$

где μ — вязкость смазывающей жидкости, a — радиус оси, ω — ее угловая скорость и δ — толщина слоя. Пользуясь этим выражением, найти закон вращения ротора, ось которого укреплена в подшипниках; другие внешние моменты сил на ротор не действуют.

390. Сплошному цилиндру радиуса $R = 10$ см и веса P сообщено вращение вокруг его оси с угловой скоростью $\omega = 10$ об/с. Вращающийся цилиндр кладут на горизонтальную плоскость и предоставляют самому себе. Он начинает двигаться по плоскости, причем коэффициент трения скольжения между цилиндром и плоскостью равен 0,1. Определить, через какое время T движение цилиндра перейдет в чистое качение без скольжения. Сила трения скольжения предполагается не зависящей от скорости, а трение качения отсутствует. Какое ускорение будет иметь цилиндр при $t > T$?

391. Сплошной цилиндр, ось которого горизонтальна, движется без вращения по гладкой горизонтальной плоскости в направлении, перпендикулярном к его оси. В некоторый момент цилиндр достигает границы, где поверхность становится шероховатой и возникает постоянная (не зависящая от скорости) сила трения скольжения, а трение качения отсутствует. Каково будет движение цилиндра после перехода границы? Как распределится кинетическая энергия поступательного движения цилиндра?

392. Сплошному однородному шару радиуса r , лежащему на горизонтальной плоскости, сообщается в начальный момент времени поступательная скорость v_0 без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

393. Сплошной однородный шар радиуса r , вращающийся вокруг горизонтального диаметра с угловой скоростью ω_0 , ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти линейную скорость v центра шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

394. На внутренней стороне тонкого обруча массы M и радиуса $R = 0,5$ м прикреплено тело массы $m = \frac{1}{10}M$, размеры которого значительно меньше R . Обруч катится без скольжения по горизонталь-

ной плоскости. Какой должна быть скорость центра обруча v_0 , когда тело находится в нижнем положении, чтобы обруч «подпрыгнул»?

395. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем линия центров параллельна скорости движения. Определить скорости обоих шаров после того, как их движения перейдут в чистые качения. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

396. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно, б) замедленно, в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

397. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим (неподвижным) шаром 1) оба шара стали двигаться вперед (удар с накатом), 2) первый шар остановился, а второй двигался вперед, 3) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (удар с оттяжкой)? Относительно направления и плоскости удара ввести те же предположения, что и в предыдущей задаче.

398. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр радиуса r ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

399. Считая в предыдущей задаче коэффициент трения скольжения k цилиндра о наклонную плоскость заданным и постоянным, определить: 1) ускорение цилиндра a_1 , когда качение происходит со скольжением; 2) время t_1 , по истечении которого наступает чистое качение; 3) высоту H_1 , которой достигает цилиндр, прежде чем начинается чистое качение; 4) ускорение a_2 при чистом качении; 5) дополнительную высоту H_2 , на которую поднимается цилиндр при чистом качении; 6) полную высоту поднятия H ; 7) время обратного скатывания цилиндра вниз \bar{t} . Предполагается, что $k > \operatorname{tg} \alpha$.

400. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр массы m_1 ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массы m_2 , лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успевает установиться до того, как цилиндр скатится с доски.

401. Большой однородный свинцовый шар массы M лежит на плоской горизонтальной поверхности. Небольшая пуля массы m выпущена из ружья горизонтально со скоростью V в направлении к центру шара. После выстрела пуля застревает внутри шара. Определить линейную скорость шара v после того, как его движение перейдет в чистое качение. При рассмотрении движения шара после удара считать его однородным, пренебрегая массой застрявшей пули. Трением качения пренебречь.

402. Шар массы $M = 1000$ г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 500$ м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью $v = 3$ м/с. Определить скорость пули V после вылета ее из шара, если масса пули $m = 10$ г. Трением качения пренебречь.

403. На гладком горизонтальном столе лежит однородный стержень длины l , который может двигаться по столу без трения (рис. 107). В начальный момент, когда скорость стержня равна нулю, в него ударяется шарик, движущийся по столу перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от центра стержня C ударился шарик, если непосредственно после удара концы стержня A и B начали двигаться со скоростями v_A и v_B соответственно? (Скорости v_A и v_B считаются положительными, когда они направлены в ту же сторону, что и скорость шарика до удара, и отрицательными в противоположном случае.)

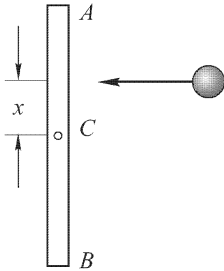


Рис. 107

404. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M , который может скользить по этой поверхности без трения (см. рис. 107). В одну из точек стержня ударяет шарик массы m , движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар,

чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

405. В конец стержня массы M , лежащего на гладком горизонтальном столе, попадает шарик, летевший перпендикулярно к стержню и параллельно плоскости стола со скоростью v_0 . Считая массу шарика от пренебрежимо малой по сравнению с массой стержня, определить кинетическую энергию K стержня после удара, если удар был абсолютно упругим.

406. В доску массы M , лежащую на горизонтальном столе, попадает пуля массы m , летевшая перпендикулярно к доске и параллельно плоскости стола со скоростью v_0 . Определить кинетическую энергию K , перешедшую во внутреннюю энергию (тепло) системы, если точка

попадания пули находится от конца доски на расстоянии $1/4$ ее длины. Массу пули по сравнению с массой доски считать пренебрежимо малой, шириной доски пренебречь.

407. На гладком горизонтальном столе лежит однородный упругий стержень массы M . В конец стержня ударяет упругий шарик массы m , движущийся со скоростью v перпендикулярно к стержню. Найти значение энергии деформации системы в момент, когда она максимальна. Трением между стержнем и столом пренебречь.

408. На гладком горизонтальном столе лежит однородный твердый стержень длины l и массы M , в край которого ударяет твердый шарик массы m , движущийся со скоростью v_0 , перпендикулярно к стержню. Считая удар идеально упругим и предполагая, что силы трения между поверхностью стола и лежащими на ней телами пренебрежимо малы, вычислить угловую скорость вращения стержня после удара.

409. По гладкой горизонтальной поверхности стола поступательно движется твердый стержень длины l и массы M со скоростью V_0 , перпендикулярной к его продольной оси. Навстречу стержню перпендикулярно к той же оси движется твердый шарик массы m . Шарик ударяется в конец стержня, а затем отскакивает от него. Считая удар абсолютно упругим и предполагая, что трение между поверхностью стола и движущимися по ней телами пренебрежимо мало, определить, с какой скоростью v_0 должен двигаться шарик, чтобы после удара центр масс стержня остановился. Найти также угловую скорость вращения стержня вокруг центра масс после удара.

410. Легкая штанга длины l может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси O , проходящей через один из ее концов (рис. 108). На втором конце штанги укреплена другая ось A , на которую насажен однородный диск радиуса r . Закрепив диск на оси A , штангу поднимают до горизонтального положения, а затем отпускают. Когда штанга проходит через положение равновесия, диск мгновенно освобождают, так что он в дальнейшем может свободно вращаться вокруг оси A . Определить высоту подъема диска x при последующем движении системы.

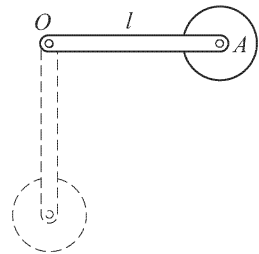


Рис. 108

411. Гладкий твердый стержень длины l_0 и массы M равномерно вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг неподвижной оси, проходящей через один из концов стержня перпендикулярно к его продольной оси. На стержень надет шарик массы m . Вначале шарик находится на свободном конце стержня и вращается вместе с ним (упор, имеющийся на конце стержня, не позволяет шару соскользнуть со стержня). В некоторый момент шару сообщается скорость v , направленная вдоль стержня к оси вращения. Определить наименьшее расстояние l , до которого приблизится шарик к оси вращения, и угловую скорость

системы ω в этом положении. В какую сторону будет изогнут стержень, когда шарик движется по направлению к оси вращения? Как изменится изгиб стержня, когда шарик, достигнув наименьшего удаления до оси, начнет двигаться в обратном направлении?

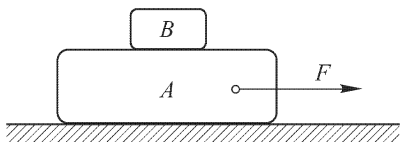


Рис. 109

412. На тело A , находящееся на горизонтальной поверхности стола, положено сверху тело B (рис. 109). Какую нужно приложить горизонтальную силу F к телу A , чтобы тело B соскользнуло с поверхности тела A . Коэффициент трения между столом и телом A равен k_1 , между телами A и B равен k_2 . Массы тел m_A и m_B .

413. Определить горизонтальную составляющую ускорения тела a_2 и ускорение клина a_1 (задача 132, рис. 33) при следующих условиях: 1) если между телом и клином имеется трение (коэффициент трения k), а между клином и плоскостью трения нет; 2) если между телом и клином трения нет, а между плоскостью и клином есть трение с коэффициентом k ; 3) указать максимальные значения коэффициентов трения, при которых движения клина и тела будут иметь место.

414. Прямоугольная призма стоит на шероховатой доске, лежащей на горизонтальном столе (рис. 110). С каким минимальным ускорением $a_{\text{мин}}$ надо начать двигать доску по столу, чтобы призма опрокинулась назад (по отношению к направлению движения доски) через свое нижнее заднее ребро? Найти силу нормального давления N и координату x ее точки приложения, с которой доска действует на призму при движении доски с ускорением a .

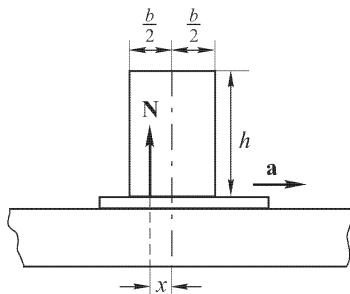


Рис. 110

Провести решения задачи в системах отсчета, связанных с доской и со столом.

415. Автомобиль с шириной колеи $2b$ и высотой h центра масс над землей проходит горизонтальное закругление дороги радиуса R . 1) Показать, что при скорости автомобиля $v > \sqrt{bRg/h}$ он опрокинется, если не возникнет скольжения колес в направлении, перпендикулярном к движению автомобиля. 2) Предполагая, что скорость автомобиля достаточна для того, чтобы он мог опрокинуться, найти, при каком минимальном значении коэффициента трения k между колесами автомобиля и покрытием дороги это может произойти?

416. На горизонтальном вращающемся диске стоит цилиндр. При какой угловой скорости ω цилиндр свалится с диска, если расстояние

между осями диска и цилиндра R , а коэффициент трения $k > D/h$, где D — диаметр цилиндра, а h — его высота (рис. 111).

417. Физический маятник, состоящий из шарика, насаженного на конец тонкого жесткого стержня, может свободно колебаться вокруг горизонтальной оси A , проходящей через верхний конец стержня. Ось A неподвижно закреплена на геометрической оси горизонтального диска, равномерно вращающегося вокруг этой (вертикальной) геометрической

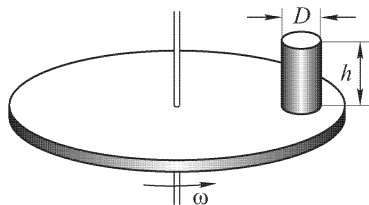


Рис. 111

оси с угловой скоростью ω . Таким образом, плоскость колебаний маятника вращается вместе с диском с той же угловой скоростью ω . Найти период малых колебаний маятника, если масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика. При каком условии нижнее вертикальное положение стержня станет неустойчивым положением равновесия?

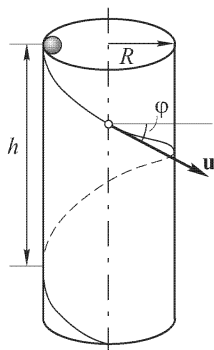


Рис. 112

418. Легкий желоб свернут в виде вертикальной цилиндрической спирали радиуса R , которая может свободно вращаться около вертикальной оси симметрии (рис. 112). Витки спирали наклонены к горизонту под углом $\varphi = \pi/4$. По желобу скользит без трения тело массы m . Какую скорость приобретет тело в конце спирального спуска, опустившись с высоты h , если скольжение началось без начальной скорости. Считать массу желоба равной массе тела. Какова будет угловая скорость вращения желоба?

419. A просит B разъяснить следующее недоразумение.

A . — Как сообщается ускорение велосипеду, я понимаю, а как оно сообщается паровозу, — не понимаю. Возникновение силы, действующей на раму велосипеда, мне представляется так: действие ведущей цепи на заднее колесо можно изобразить силой, направленной вперед и приложенной к колесу в некоторой точке над осью (рис. 113). Эта сила вращает колесо вокруг мгновенной оси, проходящей через точку C , т.е. точку соприкосновения шины с дорогой, так что колесо толкает ось вперед и сообщает движение всей машине. Ведь это правильно?

B . — Верно. Но вы не все учли.

A . — Так же можно рассматривать паровоз, но у паровоза нет ведущей цепи, а есть водило, и это радикально меняет дело. Дей-

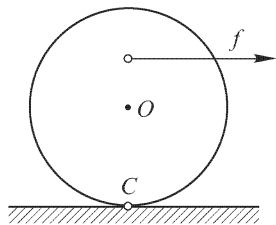


Рис. 113

ствительно, когда точка приложения силы со стороны водила к колесу находится над осью, сила поршня тянет колесо вперед, и здесь, так же как и у велосипеда, колесо толкает паровоз вперед. Но ведь через пол-оборота точка приложения силы к колесу будет под осью и сила будет направлена назад. Рассуждая так же, как и раньше, приходим к выводу: колесо толкает паровоз назад. Почему же паровоз идет вперед?

В. — Все наши рассуждения о силах, действующих на колесо, правильны, но ...

Выясните вопрос.

420. Определить силу f , действующую со стороны рельса на колесо (см. ответ задачи 419), в те моменты, когда место соединения его с водилом (шип) находится над (или под) осью колеса. Известны: сила давления на поршень Q , радиус колеса R и расстояние от оси колеса до оси шипа r .

421. Тонкий стержень длиной $a + b$ шарнирно закреплен в точке, отстоящей на расстояние b от одного из его концов, и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, описывая круговой конус (рис. 114). Определить угол отклонения стержня от вертикали.

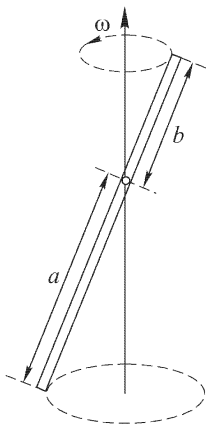


Рис. 114

422. Найти угловую скорость прецессии наклоненного волчка, прецессирующего под действием силы тяжести. Волчок имеет момент инерции I , угловую скорость вращения ω , расстояние от точки опоры до центра массы волчка равно l . В каком направлении будет прецессировать волчок?

423. Подсчитайте момент M гироскопических сил, действующих на вал со стороны пропеллера, если самолет при скорости $u = 300$ км/ч делает поворот радиуса $R = 100$ м. Пропеллер с моментом инерции $I = 7$ кг · м² делает $N = 1000$ об/мин.

424. Оценить, с какой минимальной скоростью v надо выпустить на полюсе Земли снаряд массы $m = 1000$ т, чтобы повернуть земную ось относительно системы «неподвижных звезд» на угол $\alpha = 1^\circ$. Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{21}$ т. Длина градуса земного меридиана $l = 111$ км. Землю считать однородным шаром.

425. Симметричный волчок, ось фигуры которого наклонена под углом α к вертикали (рис. 115), совершает регулярную прецессию под действием силы тяжести. Точка опоры волчка O неподвижна. Определить, под каким углом β к вертикали направлена сила, с которой волчок действует на плоскость опоры.

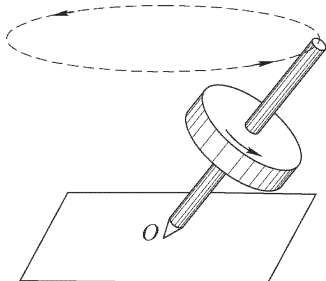


Рис. 115

426. Гироскопический маятник, используемый в качестве авиагоризонта, характеризуется следующими параметрами: масса маховичка гироскопа $m = 5 \cdot 10^3$ г, момент инерции маховичка относительно оси фигуры $I_{\parallel} = 8 \cdot 10^4$ г·см², расстояние между точкой подвеса и центром массы маховичка $a = 0,25$ см. Гироскоп делает 20 000 об/мин. Когда самолет, на котором был установлен прибор, двигался равномерно, ось фигуры маятника была вертикальна. Затем в течение времени $\tau = 10$ с самолет двигался с горизонтальным ускорением $v_0 = 1$ м/с². Определить угол α , на который отклонится от вертикали ось фигуры гироскопического маятника за время ускорения.

427. Однородный гладкий сплошной шар, находящийся на горизонтальном столе, быстро вращается вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью ω_0 (рис. 116). В него ударяет второй, в точности такой же шар. Происходит абсолютно упругий удар без передачи вращения. Ударяемый шар начинает двигаться по столу со скольжением. Коэффициент трения скольжения k считается не зависящим от скорости. Найти угол α между мгновенной осью вращения ударяемого шара и вертикальной линией для любого момента времени t , когда еще не прекратилось скольжение. Найти также значение этого угла в момент, когда движение переходит в чистое качение. Трением вращения и трением качения пренебречь. Рассмотреть частный случай, когда величины v_0 и ω_0 связаны соотношением $v_0 = \omega_0 r$.

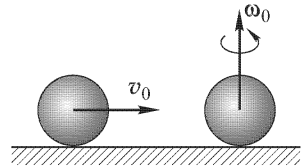


Рис. 116

428. Гироскопические эффекты используются в дисковых мельницах. Массивный цилиндрический каток (бегун), могущий вращаться вокруг своей геометрической оси, приводится во вращение вокруг вертикальной оси (с угловой скоростью Ω) и катится по горизонтальной опорной плите (рис. 117). Такое вращение можно рассматривать как вынужденную прецессию гироскопа, каковым является бегун. При вынужденной прецессии возрастает сила давления бегуна на горизонтальную плиту, по которой он катится. Эта сила растирает и измельчает материал, подсыпaeмый под каток на плиту. Вычислить полную силу давления катка на опорную плиту, если радиус бегуна $r = 50$ см, а рабочая скорость 1 об/с.

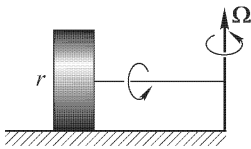


Рис. 117

429. Диск радиуса r , вращающийся вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , катится без скольжения в наклонном положении по горизонтальной плоскости, описывая окружность за время T . Определить T и радиус окружности R , если $R \gg r$, а угол между горизонтальной плоскостью и плоскостью диска равен α .

430. Условие, при котором симметричный гироскоп может совершать регулярную прецессию, можно получить, применяя теорему Кориолиса. Рассмотреть тонкое кольцо, равномерно вращающееся в своей плоскости с угловой скоростью ω и прецессирующее вокруг одного из диаметров с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 118). Какие

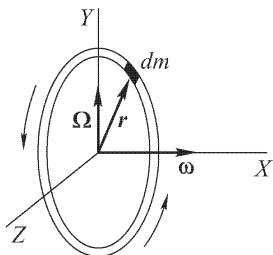


Рис. 118

силы надо приложить к кольцу для поддержания такой регулярной прецессии?

431. Планета движется вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Доказать, что момент количества движения планеты относительно Солнца есть величина постоянная.

432. Доказать, что момент количества движения планеты относительно Солнца может быть представлен в виде

$$\mathbf{L} = |\mathbf{r} m \mathbf{v}| = 2m\sigma = \text{const},$$

где m — масса, а σ — секториальная скорость планеты. (Секториальной скоростью планеты называется площадь, описываемая радиусом-вектором планеты за единицу времени.)

433. Найти производную по времени момента импульса системы материальных точек \mathbf{L} относительно начала координат O , движущегося с произвольной скоростью \mathbf{v}_0 . Все скорости материальных точек относить к «неподвижной» (инерциальной) системе отсчета. В каких случаях результат переходит в обычное соотношение $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$?

434. Найти параметры эллипсоида инерции для точки A , лежащей в вершине однородного куба массы M с длиной ребра l (рис. 119).

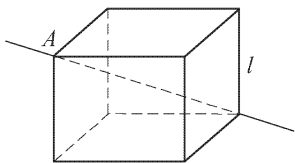


Рис. 119

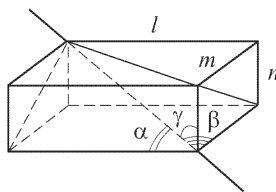


Рис. 120

435. Для прямоугольного однородного параллелепипеда массы M и длиной ребер l , m , n (рис. 120) определить момент инерции относительно его диагонали.

§ 8. Тяготение

436. Определить ускорение свободного падения g на поверхности Земли по следующим данным: средний радиус Земли $R \approx 6400$ км;

средняя плотность Земли $d = 5,4 \text{ г/см}^3$, гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-8} \text{ дин} \cdot \text{см}^2/\text{г}^2$.

437. Определить ускорение свободного падения g на высоте 20 км над Землей, принимая ускорение свободного падения на поверхности Земли $g_0 = 981 \text{ см/с}^2$, а радиус Земли $R \approx 6400 \text{ км}$.

438. Найти ускорение свободного падения g_L на Луне, если ее радиус равен 1738 км, а средняя плотность составляет 0,6 плотности Земли.

439. Подсчитать ускорение свободного падения a на поверхности Солнца, если известны $R \approx 150 \cdot 10^6 \text{ км}$ — радиус земной орбиты, $r \approx 7 \cdot 10^5 \text{ км}$ — радиус Солнца и T — время обращения Земли вокруг Солнца.

440. Какое ускорение a сообщает Солнце телам, находящимся на Земле?

441. Тело на экваторе взвешивается на пружинных весах в полдень, когда гравитационные силы Земли и Солнца тянут его в противоположные стороны. Одновременно такое же тело взвешивается в полночь в диаметрально противоположной точке земного шара, когда обе эти силы направлены в одну сторону. Вес какого тела будет больше? Неоднородностью гравитационного поля Солнца в окрестности Земли пренебречь.

442. Решить предыдущую задачу с учетом неоднородности гравитационного поля Солнца, считая, что, кроме Земли и Солнца, никаких других небесных тел нет.

443. Найти разность между весами одинаковых тел в диаметрально противоположных точках земного шара, обусловленную неоднородностью гравитационного поля Луны. Считать, что центры Луны, Земли и обе рассматриваемые точки 1 и 2 лежат на одной прямой (см. задачу 441). От гравитационного поля Солнца и прочих астрономических тел отвлекаться.

444. Маятник, который делает в Ленинграде 3601,4 колебаний за час, за это же время и при той же температуре делает в Москве 3600,0 колебаний. Каково отношение ускорений свободного падения для этих двух городов?

445. Как изменился бы ход маятниковых часов на Луне по сравнению с их ходом на Земле?

446. Время обращения Юпитера вокруг Солнца в 12 раз больше времени обращения Земли. Сколько километров от Юпитера до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно $150 \cdot 10^6 \text{ км}$. Считать орбиты планет круговыми.

447. Определить отношение массы Солнца M к массе Земли m , если среднее расстояние R от Земли до Солнца в 390 раз больше среднего расстояния r от Земли до Луны, а время обращения T Земли вокруг Солнца больше времени обращения t Луны вокруг Земли в 13,4 раза.

448. Найти ускорение свободного падения g_s на поверхности Солнца, если известны: продолжительность земного года T , расстояние от Земли до Солнца R ($\approx 8,3$ световых минуты) и угол α , под которым виден диаметр Солнца ($\approx 32'$).

449. Найти расстояние d планеты от Солнца, если даны: масса Солнца M , период обращения планеты вокруг Солнца T и гравитационная постоянная G .

450. Луна делает полный оборот вокруг Земли за время $T = 27$ сут 7 ч. Радиус ее орбиты равен 60 радиусам Земли. Найти ускорение свободного падения g на Земле. Радиус Земли $R \approx 6400$ км.

451. Силы приливного трения, вызываемые лунными приливами, замедляют вращение Земли вокруг своей оси. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси не станет равной угловой скорости орбитального движения Луны вокруг Земли. Определить общую угловую скорость вращения Земли и орбитального вращения Луны ω , продолжительность земных суток T и радиус лунной орбиты a , после того как это произойдет. Использовать следующие данные: в настоящее время угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси ω_3 равна $7,29 \cdot 10^{-5}$ рад/с, момент количества движения Земли относительно своей оси $L_3 = 5,91 \cdot 10^{40}$ г \cdot см²/с, радиус лунной орбиты $a_0 = 3,84 \cdot 10^{10}$ см, время обращения Луны вокруг Земли (относительно звезд) $T_{\text{л}} = 27,3$ сут, масса Луны $m = 7,35 \cdot 10^{25}$ г, момент инерции Земли относительно оси вращения $I_3 = 8,11 \cdot 10^{44}$ г \cdot см². Для простоты считать, что земная ось перпендикулярна к плоскости лунной орбиты.

452. Найти потенциальную энергию тела (точки) массы m на различных расстояниях R от центра Земли. Величину потенциальной энергии на бесконечно большом расстоянии считать равной нулю.

453. Согласно третьему закону Кеплера отношение куба большой полуоси эллиптической орбиты a к квадрату периода обращения планеты T есть величина, одинаковая для всех планет Солнечной системы. Она называется постоянной Кеплера и обозначается буквой K . Третий закон Кеплера строго справедлив, когда масса планеты пренебрежимо мала по сравнению с массой Солнца. Найти выражение для постоянной Кеплера.

454. Как изменится третий закон Кеплера, если не пренебрегать массой планеты m по сравнению с массой Солнца M ?

455. Найти расстояние R между компонентами двойной звезды, если их общая масса $M_1 + M_2$ равна удвоенной массе Солнца M_0 и звезды обращаются по круговым орбитам вокруг их центра масс с периодом $T = 2T_0$, где T_0 — продолжительность земного года. Расстояние от Земли до Солнца $R_0 = 1,5 \cdot 10^8$ км.

456. Минимальное расстояние между компонентами двойной звезды, обращающимися один относительно другого, равно r_1 . Относительная скорость их в этом положении равна v_1 . Сумма масс обоих компонентов равна M . Найти расстояние между компонентами r_2 и их

относительную скорость v_2 при максимальном удалении относительно друг друга. При каком минимальном значении относительной скорости v_1 двойная звезда распадается?

457. Показать, что если высота над земной поверхностью мала по сравнению с радиусом Земли R , то зависимость ускорения свободного падения от высоты определяется приближенной формулой

$$G \approx g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R} \right) \approx g_0 (1 - 0,00314h),$$

где g_0 — значение g на земной поверхности. Предполагается, что высота h измеряется в километрах.

458. Для вычисления средней плотности Земли ρ Эйри предложил и осуществил следующий метод. Измеряются ускорения свободного падения g_0 на поверхности Земли и g в шахте глубины h . Принимается, что плотность Земли в поверхностном слое толщины h однородна и равна $\rho_0 = 2,5 \text{ г/см}^3$. (Это предположение плохо соответствует действительности.) В опытах Эйри было $g - g_0 = 0,000052 g_0$, $R/h = 16\,000$ (R — радиус Земли). Пользуясь этими данными, вычислить среднюю плотность Земли. (Обратите внимание, что g вблизи поверхности Земли возрастает с глубиной! Чем это объяснить?)

459. При каких условиях движение планеты вокруг Солнца будет финитным и при каких — инфинитным? (Финитным называется движение, при котором планета остается в ограниченной области пространства и не может уходить в бесконечность. Если же область, в которой может двигаться планета, неограничена, т.е. планета может уходить в бесконечность, то движение называется инфинитным.)

460. Как показывает интегрирование уравнений движения, планета вокруг Солнца движется по коническим сечениям. Когда траектория планеты будет эллиптической, гиперболической и параболической?

461. Допустим, что в результате взрыва астероид, двигавшийся по круговой орбите вокруг Солнца, распался на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой — продолжал движение. По какой траектории будет двигаться второй осколок: эллиптической, гиперболической или параболической?

462. В условиях предыдущей задачи оба осколка разлетаются в перпендикулярных направлениях с одинаковыми скоростями. По каким орбитам они будут двигаться?

463. Снаряду с массой покоя $m_0 = 1000 \text{ т}$ сообщена скорость V в направлении касательной к земной орбите. Какова должна быть разность между скоростью света c и скоростью снаряда V , чтобы Земля стала двигаться относительно Солнца по параболической траектории? Масса Земли $M = 6 \cdot 10^{21} \text{ т}$, скорость ее орбитального движения $v = 29,8 \text{ км/с}$. Сравнить кинетическую энергию снаряда с кинетической энергией орбитального движения Земли.

464. Планета движется вокруг Солнца по эллипсу. Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения энергии

и момента импульса, найти выражение для длины большой оси $2a$ этого эллипса.

465. Комета движется вокруг Солнца по ветви гиперболы. Не интегрируя уравнений движения, а пользуясь только законами сохранения энергии и момента импульса, найти расстояние $2a$ между вершинами рассматриваемой и сопряженной с ней ветвей гиперболы.

466. Какую скорость на поверхности Земли надо сообщить искусственному спутнику, чтобы вывести его на эллиптическую орбиту с расстояниями от центра Земли: в перигее $r_1 = {}^{31}/_{30}R$, в апогее $r_2 = {}^{33}/_{30}R$ (R — радиус Земли)?

467. Искусственный спутник Земли был выведен на орбиту с максимальным удалением от поверхности Земли $h_{\text{макс}} = 1300$ км и минимальным $h_{\text{мин}} = 292$ км. Через некоторое время период обращения спутника уменьшился на $\Delta T = 3$ мин. Какая часть начальной полной энергии спутника была израсходована к этому моменту на работу против сил трения? Радиус Земли $R = 6370$ км.

468. Показать, что если планета движется по эллипсу, то средние по времени значения ее полной и кинетической энергий связаны соотношением

$$\overline{K} = -\overline{E}.$$

469. Показать, что если планета движется по кругу, то ее полная и кинетическая энергии связаны соотношением

$$K = -E.$$

470. Пусть от поверхности Земли до ее центра прорыта узкая шахта и некоторое тело падает из бесконечности в эту шахту, достигая центра Земли. Какую скорость будет иметь тело в этот момент, если Землю считать однородным шаром?

471. Найти скорость v движения искусственного спутника Земли по круговой орбите радиуса R . Выразить значение v через R , радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения g на поверхности Земли.

472. Найти радиус R орбиты «стационарного» спутника Земли. (Стационарным называют спутник, движущийся по круговой орбите вокруг Земли так, что время его оборота равно 24 часам.) Стационарный спутник, движущийся в плоскости экватора в сторону вращения Земли, будет оставаться неподвижным относительно нее. Выразить R через радиус Земли R_0 , угловую скорость ω вращения Земли и ускорение свободного падения g на ее поверхности.

473. С воображаемой возвышенности, расположенной на полюсе Земли, посылаются с одинаковой скоростью v_0 два снаряда. Начальная скорость первого снаряда направлена так, что он движется по направлению радиуса Земли; начальная скорость второго перпендикулярна к радиусу Земли, и он движется по эллиптической траектории. 1) Какой снаряд достигнет максимального удаления от Земли? 2) Найти отношение R_1/R_2 максимальных возможных расстояний от центра Земли

соответственно первого и второго снарядов. Скорость $v_0 > \sqrt{gR_0} = v_{кр}$, где $v_{кр}$ есть скорость движения спутника Земли по круговой орбите (теоретической) с радиусом Земли R_0 . Соппротивление воздуха движению снарядов не учитывать и полагать, что на снаряд действует только поле тяготения Земли.

474. С некоторой площадки на экваторе посылаются два спутника по эллиптическим орбитам: первый в направлении вращения Земли, второй против. Каково будет наибольшее удаление R_1 и R_2 каждого из спутников от центра Земли, если известно, что начальные горизонтальные скорости их относительно Земли одинаковы по величине и равны $v_0 = 10 \text{ км/с}$? Расстояния выразить через радиус Земли R_0 .

475. Показать, что период спутника, обращающегося вокруг планеты (или любого другого тела со сферически симметричным распределением масс) в непосредственной близости от ее поверхности зависит только от средней плотности планеты ρ . Вычислить период такого спутника для нейтронной звезды, считая, что плотность вещества нейтронной звезды такая же, что и плотность вещества внутри атомных ядер ($\rho \approx 10^{14} \text{ г/см}^3$).

476. Как связаны между собой период T_1 спутника, обращающегося вокруг планеты в непосредственной близости от ее поверхности, и период колебаний тела T_2 внутри прямолинейного канала, проходящего от одного полюса планеты к другому, если плотность вещества планеты ρ постоянна? Качественно описать, как изменится соотношение между периодами, если плотность планеты при сохранении ее массы будет возрастать к центру.

477. Вычислить массу Земли, используя параметры орбиты советского искусственного спутника «Космос-380». Период обращения спутника (относительно звезд) $T = 102,2 \text{ мин}$, расстояние до поверхности Земли в перигее 210 км , в апогее 1548 км . Землю считать шаром с радиусом 6371 км .

478. Среднее время обращения советского корабля-спутника «Восток», на котором Ю. А. Гагарин 12 апреля 1961 г. впервые облетел вокруг земного шара, $T_1 = 89,2 \text{ мин}$ при средней высоте полета над земной поверхностью $h = 254 \text{ км}$. Ближайший спутник Марса — Фобос — обращается вокруг планеты за время $T_2 = 7 \text{ ч } 39 \text{ мин}$, находясь от центра Марса в среднем на расстоянии $R_2 = 9350 \text{ км}$. Определить отношение массы Марса M_2 к массе Земли M_1 , если средний радиус земного шара $R = 6371 \text{ км}$.

479. Искусственный спутник, имеющий форму шара радиуса $r = 0,5 \text{ м}$, обращается вокруг Земли по круговой орбите на такой высоте ($\approx 200 \text{ км}$), где плотность атмосферы $\rho = 10^{-13} \text{ г/см}^3$. Оценить, на сколько будет снижаться спутник за один оборот вокруг планеты. Плотность вещества спутника, усредненная по его объему, $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$.

480. Спутник поднят ракетой-носителем вертикально до максимальной высоты, равной $R = 1,25R_3$ (R_3 — радиус Земли), отсчитыва-

емой от центра Земли. В верхней точке подъема ракетное устройство сообщило спутнику азимутальную (горизонтальную) скорость, равную по величине первой космической скорости: $v_0 = v_1$, и вывело его на эллиптическую орбиту (рис. 121). Каково максимальное и минимальное удаление спутника от центра Земли?

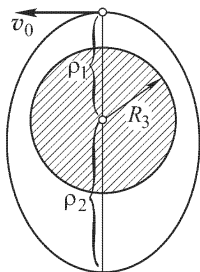


Рис. 121

481. Легкий спутник Земли вращается по круговой орбите с линейной скоростью v_0 . Ракетное устройство увеличивает абсолютную величину этой скорости в $\sqrt{1,5}$ раза, и спутник переходит на эллиптическую орбиту (рис. 122). С какой скоростью спутник пройдет наиболее удаленную от центра Земли точку A (апогей) своей орбиты? Сопротивление атмосферы не учитывать.

482. Спутник Земли, вращаясь по круговой орбите радиуса $R \approx R_3$ (низкий спутник), перешел на эллиптическую орбиту с большой осью $2a = 4R_3$ (R_3 — радиус Земли). Определить, во сколько раз увеличится время обращения спутника? Сопротивление атмосферы не учитывать.

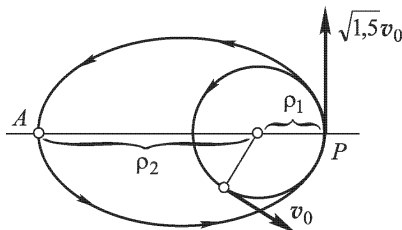


Рис. 122

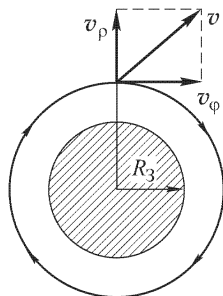


Рис. 123

483. Спутник, вращаясь по круговой орбите радиуса $R = \frac{3}{2}R_3$ (R_3 — радиус Земли), получает радиальный импульс, который сообщает ему дополнительную скорость v_p , направленную от центра Земли по радиусу (рис. 123). Каково должно быть минимальное значение дополнительной скорости, чтобы спутник мог покинуть область земного притяжения?

484. Спутник, вращаясь по круговой траектории радиуса $R = 2R_3$ (R_3 — радиус Земли), получает радиальный импульс, сообщающий ему дополнительную скорость v_p в направлении центра Земли, равную по величине скорости v_φ движения по круговой орбите (рис. 124). На какое минимальное расстояние ρ_{\min} приблизится спутник к центру Земли и какова будет его скорость в этой точке? Сопротивление атмосферы не учитывать.

485. Спутник запускается на круговую орбиту в два этапа: сначала на поверхности Земли ему сообщают горизонтальную скорость и вы-

водят на эллиптическую орбиту, перигей которой совпадает с точкой запуска (рис. 125), а апогей — с точкой на круговой орбите. В апогее ракетное устройство увеличивает величину скорости спутника и выводит его на круговую орбиту. Каковы должны быть начальная скорость запуска v_1 и увеличение скорости в апогее Δv , чтобы вывести спутник на круговую орбиту радиуса $R = 2R_3$ (R_3 — радиус Земли)? Сопротивление атмосферы не учитывать.

486. Легкий спутник, вращаясь по круговой орбите радиуса $R = 2R_3$ (R_3 — радиус Земли), переходит на эллиптическую орбиту приземления, которая касается земной поверхности в точке, диаметрально

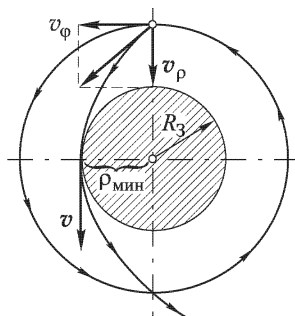


Рис. 124

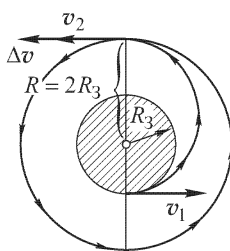


Рис. 125

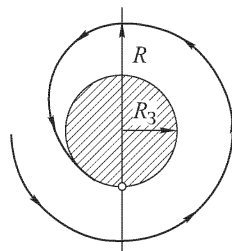


Рис. 126

противоположной точке начала спуска (рис. 126). Сколько времени продлится спуск по эллиптической орбите? Сопротивление атмосферы не учитывать.

487. Спутник, круговая орбита которого расположена в экваториальной плоскости, «висит» неподвижно над некоторой точкой земной поверхности. Спутник получает возмущающий импульс, сообщаящий ему малую вертикальную скорость v_0 (рис. 127). Какова возмущенная траектория спутника по отношению к земному наблюдателю?

488. Определить вторую космическую скорость, или скорость, которую нужно сообщить телу для того, чтобы оно удалилось на бесконечно большое расстояние от Земли. Каково должно быть направление этой скорости относительно вертикали?

489. Вычислить приблизительно третью космическую скорость, предполагая, что ракета выходит из зоны действия земного тяготения под углом θ к направлению орбитального движения Земли вокруг Солнца. Считать, что, кроме Земли и Солнца, на ракету никакие другие тела не действуют.

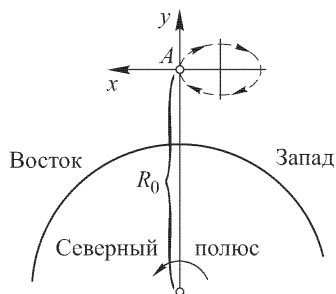


Рис. 127

(Третьей космической скоростью называется минимальная скорость, которую надо сообщить ракете относительно Земли, чтобы ракета навсегда покинула пределы Солнечной системы (ушла в бесконечность).)

490. Вычислить приближенно четвертую космическую скорость, т. е. минимальную скорость, которую надо сообщить ракете на поверхности Земли, чтобы ракета могла упасть в заданную точку Солнца. Средний угловой радиус Солнца $\alpha = 4,65 \cdot 10^{-3}$ рад. Предполагается, что Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите со скоростью $V_k = 29,8$ км/с. Вычислить, в частности, значение четвертой космической скорости при дополнительном условии, чтобы ракета падала на Солнце радиально (т. е. чтобы продолжение ее прямолинейной траектории проходило через центр Солнца).

491. Искусственный спутник Земли вращается по круговой орбите радиуса R с периодом T_1 . В некоторый момент на очень короткое время был включен реактивный двигатель, увеличивший скорость спутника в α раз, и спутник стал вращаться по эллиптической орбите. Двигатель сообщал ускорение спутнику все время в направлении движения. Определить максимальное расстояние спутника от центра Земли, которого он достигнет после выключения двигателя. Найти также период T_2 обращения спутника по новой (эллиптической) орбите.

492. Космический корабль вращается вокруг Луны по эллиптической орбите с максимальным удалением от поверхности Луны (в апоселении) 312 км и минимальным удалением (в периселении) 112 км. На сколько надо изменить скорость корабля, чтобы перевести его на круговую орбиту с высотой полета над поверхностью Луны 112 км, если двигатель включается на короткое время, когда корабль находится в периселении? (Средний радиус Луны $R = 1378$ км, ускорение свободного падения на ее поверхности $g = 162$ см/с².)

493. Космический корабль подходит к Луне по параболической траектории, почти касающейся поверхности Луны. Чтобы перейти на стелющуюся круговую орбиту, в момент наибольшего сближения включают тормозной двигатель, выбрасывающий газы со скоростью $u = 4$ км/с относительно корабля в направлении его движения. Какую часть общей массы системы будет составлять горючее, использованное для торможения корабля? (Данные, относящиеся к Луне, см. в предыдущей задаче.)

494. Вычислить вторую космическую скорость при старте ракеты с поверхности Юпитера, используя следующие данные. Третий спутник Юпитера — Ганимед — вращается вокруг планеты практически по круговой орбите радиуса $R = 1,07 \cdot 10^6$ км с периодом обращения $T = 7,15$ сут. Радиус планеты $r = 7 \cdot 10^4$ км.

495. Искусственный спутник запущен вокруг Земли по круговой орбите. Из-за наличия разреженной атмосферы траектория спутника переходит в медленно свертывающуюся спираль. Как влияет сила сопротивления среды на величину скорости спутника и момент количества движения его относительно центра Земли? Спутник с массой $m =$

= 1 т снижается за сутки на 100 м. Найти тангенциальную составляющую ускорения спутника и силу сопротивления среды, которую он испытывает.

496. Космический корабль без начальной скорости свободно падает на Землю из удаленной точки. В каком месте следует повернуть направление движения корабля на 90° (без изменения величины его скорости), чтобы он стал двигаться вокруг Земли по круговой траектории?

497. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В какой точке орбиты и на какой угол следует изменить направление скорости корабля (без изменения ее величины), чтобы корабль стал двигаться по круговой орбите?

498. Космический корабль движется вокруг Земли по эллиптической орбите. В точке пересечения эллипса с его малой осью включается двигатель. Как надо изменить скорость корабля в этой точке, чтобы он перешел на параболическую орбиту?

499. Наибольшее расстояние кометы Галлея от Солнца $h = 35,4$, наименьшее $l = 0,59$ (за единицу принято расстояние Земли от Солнца). Линейная скорость движения кометы $v_1 = 0,91$ км/с в точке наибольшего удаления ее от Солнца в афелии. Как велика линейная скорость v_2 кометы, когда она ближе всего подходит к Солнцу в перигелии?

500. Определить начальную скорость метеоритов v_∞ , если максимальное прицельное расстояние, при котором они еще падают на Землю, равно l ($l > R$, R — радиус земного шара). Получить числовой ответ при $l = 2R$. (Прицельным расстоянием называется длина перпендикуляра, опущенного из центра Земли на исходное направление касательной к траектории метеорита, когда он находился в бесконечности.)

501. Найти отношение силы гравитационного притяжения между двумя электронами (и двумя протонами) к силе их электростатического отталкивания.

502. Найти потенциальную энергию и силу гравитационного притяжения между однородной полый сферой массы M и материальной точкой массы m .

503. Доказать, что две однородные полые сферы притягиваются друг к другу так, как если бы их массы были сосредоточены в их центрах.

504. Доказать, что два однородных шара притягиваются друг к другу так, как если бы масса каждого шара была сосредоточена в его центре. Доказать также, что если внутри однородного шара имеется сферическая полость, центр которой совпадает с центром шара, то гравитационное поле внутри такой сферы равно нулю. Показать, что эти результаты справедливы и для шаров с концентрически слоистым распределением масс, т. е. таким, когда плотность вещества ρ в каждом шаре зависит только от расстояния до его центра.

505. Рассчитать напряженность гравитационного поля, т.е. силу, действующую на единицу массы, внутри и вне шара радиуса R , заполненного веществом с постоянной объемной плотностью ρ .

506. Подсчитать гравитационную энергию U шара радиуса R , равномерно заполненного веществом с объемной плотностью ρ .

507. В прошлом столетии Г. Гельмгольц и В. Томсон выдвинули гипотезу, согласно которой излучение Солнца поддерживается за счет гравитационной энергии, освобождающейся при его сжатии. Оценить возраст Солнца t по такой гипотезе, предполагая, что в начальном состоянии вещество Солнца было равномерно распределено по всему бесконечному пространству, а в конечном состоянии плотность солнечного вещества одинакова по всему объему Солнца. Масса Солнца $M = 2 \cdot 10^{33}$ г, радиус $R = 7 \cdot 10^{10}$ см. Считать, что мощность излучения Солнца за все время его образования оставалась постоянной и равнялась современному значению $P = 3,86 \cdot 10^{33}$ эрг/с. Обсудить правдоподобность гипотезы Гельмгольца–Томсона, приняв во внимание, что по геологическим данным возраст Земли составляет $4\text{--}4,5 \cdot 10^9$ лет.

508. В сплошном однородном шаре с плотностью вещества ρ сделана сферическая полость, центр которой O_1 смещен относительно центра шара O (рис. 128). Найти гравитационное поле в такой полости.

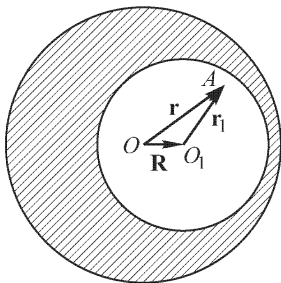


Рис. 128

509. Определить величину потенциальной энергии тела (материальной точки), находящегося в воображаемой вертикальной шахте, проходящей через центр Земли. Массу Земли считать равномерно распределенной по всему объему земного шара.

510. Тело падает с уровня поверхности Земли в воображаемую вертикальную шахту, проходящую через центр Земли. Определить скорость тела, когда оно будет пролетать вблизи центра Земли. Трение о стенки шахты и сопротивление воздуха движению тела не учитывать.

511. Представьте себе снаряд такого размера, что в нем могут находиться люди вместе с приборами. Пусть этот снаряд летит в межпланетном пространстве с некоторым ускорением, обусловленным существующим в этой области пространства полем тяготения. Что будут показывать нагруженные еще на Земле пружинные весы в снаряде? Каким способом можно измерять массу тел в снаряде во время полета?

512. Что будут показывать пружинные весы предыдущей задачи при взвешивании тела массы m , если снаряд попадает в атмосферу планеты и получает, кроме ускорения в поле тяжести, ускорение a вследствие сопротивления атмосферы движению снаряда?

513. В одной книге описывается, что в некоторый момент времени обитатели снаряда, пущенного на Луну, перестали ощущать наличие силы тяжести. Когда это может произойти?

514. Простой анализ механических движений позволяет выяснить, являются ли кольца планеты Сатурн сплошным образованием или скоплением мелких спутников. Для этого нужно лишь знать, какой край кольца, внутренний или внешний, движется быстрее. Какие закономерности можно положить в основу такого анализа?

515. Четыре тела A , B , C и D (рис. 129), которые можно считать материальными точками, вращаясь вокруг некоторого центра, остаются все время на одной прямой и сохраняют неизменным расстояние друг от друга. Между всеми телами действуют силы притяжения по закону всемирного тяготения Ньютона. Массы C и D равны и ничтожно малы по сравнению с массами A и B , а расстояние r очень мало по сравнению с R . Какие еще силы должны действовать со стороны тела B на C и D , чтобы расстояния между всеми телами оставались неизменными?

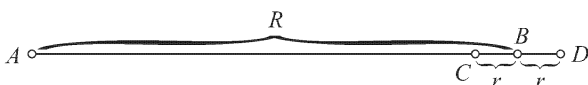


Рис. 129

516. Солнце притягивает тела, находящиеся на Земле, с некоторой силой, которая ночью направлена в ту же сторону, что и силы притяжения этих тел Землей, а днем направлена в обратную сторону. Вызывает ли это изменение направления силы притяжения Солнца изменение веса тел в течение суток? (См. задачи 441–443).

517. Анализируя результат предыдущих задач, объясните происхождение приливов, вызываемых притяжением Луны. Вычислите приливообразующую силу, или уменьшение силы веса тела, когда оно находится вблизи линии, соединяющей центры Земли и Луны.

518. Найти ту точку на прямой линии, соединяющей Землю и Луну, в которой напряженность g результирующего поля тяготения Земли и Луны равна нулю. Масса Земли приблизительно в 81 раз больше массы Луны, среднее расстояние между этими планетами 384 000 км.

519. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, найти минимальную работу, которую надо затратить, чтобы доставить массу в 1 кг с поверхности Земли на поверхность Луны. Радиус Земли 6400 км, радиус Луны 1740 км; ускорение свободного падения на Луне, вызванное ее собственным притяжением, составляет $g_l = 0,16g_z$, где $g_z = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли. Влияние Солнца и других планет не учитывать.

§ 9. Упругие деформации

520. Коэффициент линейного теплового расширения стали равен $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$. Какое давление p

необходимо приложить к торцам стального цилиндра, чтобы длина его оставалась неизменной при повышении температуры на 100°C ?

521. Можно ли использовать кабель из тонкой медной проволоки в свинцовой броне для телефонной связи с привязным аэростатом, находящимся на высоте 300 м ? Предел прочности свинца 2 кгс/мм^2 . Плотность свинца $11,4\text{ г/см}^3$.

522. При укладке рельсов трамвая их сваривают между собой в стыках. Как велики напряжения p , появляющиеся в них при колебаниях температуры от $t_2 = -25^\circ\text{C}$ зимой до $t_2 = 30^\circ\text{C}$ летом, если укладка произведена при $t_1 = 15^\circ\text{C}$? Для железа модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^6\text{ кгс/см}^2$, а линейный коэффициент теплового расширения $\alpha = 1,25 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

523. Стальной канат, могущий выдержать вес неподвижной кабины лифта, имеет диаметр 9 мм . Какой диаметр должен иметь канат, если кабина лифта может иметь ускорение до $8g$?

524. Насколько изменится объем упругого однородного стержня длины l под влиянием силы P , сжимающей или растягивающей стержень по его длине?

525. Какую равномерно распределенную нагрузку Q может выдержать гранитная плита, представляющая собой правильный шестиугольник со стороной $a = 10\text{ см}$, если допустимое напряжение на сжатие гранита равно $p = 45\text{ кгс/см}^2$?

526. Насколько вытягивается стержень из железа, подвешенный за один конец, под влиянием собственного веса? Насколько при этом меняется его объем?

527. Стержень поперечного сечения S растягивается силой F , параллельной его оси. Под каким углом α к оси наклонено сечение, в котором тангенциальное напряжение τ максимально? Найти это напряжение.

528. Резиновый цилиндр с высотой h , весом P и площадью основания S поставлен на горизонтальную плоскость. Найти энергию упругой деформации цилиндра, возникающей под действием его собственного веса. Во сколько раз изменится энергия упругой деформации рассматриваемого цилиндра, если на верхнее основание его поставить второй такой же цилиндр?

529. Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиуса $R = 5\text{ см}$, в который накачан воздух до давления 11 атм (наружное давление 1 атм). Толщина сферической оболочки $d = 1\text{ мм}$. Модуль Юнга латуни $E = 10^{12}\text{ дин/см}^2$, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

530. Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси X , так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не могут (рис. 130). В направлении оси Z пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению P . Определить давление P_x , которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти

выражение для плотности упругой энергии u , а также относительное сжатие пластинки в направлении оси Z и относительное расширение в направлении оси Y .

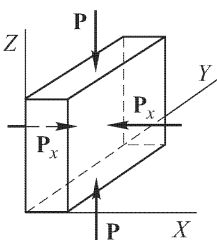


Рис. 130

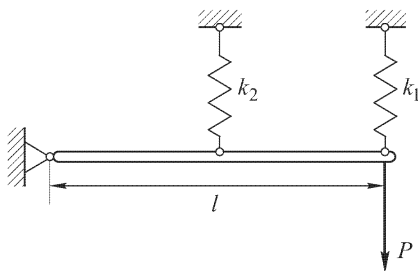


Рис. 131

531. Стержень длины l шарнирно закреплен на одном конце и подвешен на двух пружинах (рис. 131); коэффициент жесткости пружины, прикрепленной к концу, равен k_1 , а прикрепленной к середине — k_2 . Определить удлинение пружин и силы натяжения их под действием нагрузки P , приложенной к концу стержня. Стержень считать абсолютно жестким и невесомым, а пружины нерастянутыми в отсутствие внешней нагрузки.

532. Груз подвешен на трех тросах, как указано на рис. 132. Тросы сделаны из одного материала, причем два крайних троса одинаковой длины. Найти соотношение между напряжениями в материале тросов, если деформации при нагрузке очень малы.

533. Груз весом P подвешен на трех тросах, как сказано в условии предыдущей задачи (см. рис. 132). Найти усилия в тросах, если все они имеют одинаковые сечения и сделаны из одного материала.

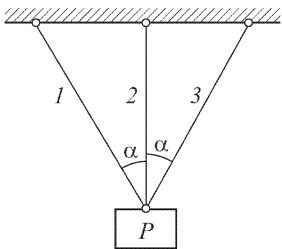


Рис. 132

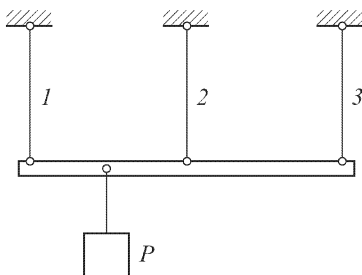


Рис. 133

534. На трех тягах одинаковой длины подвешена абсолютно жесткая балка, к которой привязан груз P (рис. 133). Тяги сделаны из одного материала и имеют сечения S_1 , S_2 и S_3 . Определить усилия в тягах P_1 , P_2 , P_3 , если они расположены на одинаковых расстояниях, а груз подвешен посередине между двумя тягами. Определить условие,

при котором все три тяги будут растянуты. Весом балки можно пренебречь.

535. Стальной стержень с прямоугольным сечением (рис. 134) заделан одним концом в стену. Отношение высоты стержня к его ширине равно $3 : 1$. Для стержня выбран пятикратный запас прочности. 1) Какая нагрузка P допустима на конце стержня, если длина его 15 см, а ширина 5 мм? Разрушающее напряжение в материале равно 100 кгс/мм². 2) Рассчитать стрелу прогиба λ стержня при допустимой нагрузке. Модуль Юнга равен $E = 20\,000$ кгс/мм².

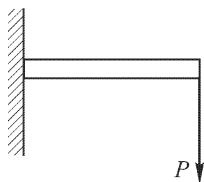


Рис. 134

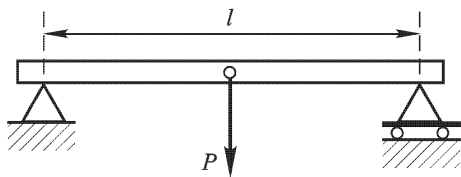


Рис. 135

536. Балка закреплена концами на шарнирах (рис. 135), причем один из шарниров подвижен. Определить стрелу прогиба λ балки под действием силы P , приложенной к середине балки. Известны длина балки l , модуль Юнга материала E и момент инерции поперечного сечения I . Балку считать невесомой и прогибы очень малыми.

537. Решить задачу 531, считая стержень упругим (см. рис. 131). Модуль Юнга материала стержня равен E и момент инерции поперечного сечения равен I .

538. Коромысло весов имеет прямоугольное сечение со сторонами $a = 8$ мм (горизонтальная) и $b = 10$ мм (вертикальная). Длина коромысла $l = 250$ мм. Какова наибольшая стрела прогиба коромысла λ , если весы рассчитаны на максимальную нагрузку $P = 500$ гс, а модуль Юнга материала коромысла равен $15\,000$ кгс/мм²?

539. Деревянная балка длины $l = 4$ м и квадратного сечения со стороной $a = 40$ см покоится своими концами на двух опорах и несет посередине груз $P = 2$ тс. Как велика стрела прогиба λ , если модуль Юнга данного сорта дерева равен 1000 кгс/мм²?

540. Медная трубка, внешний и внутренний диаметры которой $D = 20$ мм и $d = 10$ мм, концами опирается на подставки, расстояние между которыми $l = 400$ мм. Посередине трубка несет груз $P = 90$ кгс. Модуль Юнга для меди $E = 10^4$ кгс/мм². Определить стрелу прогиба λ трубки посередине между опорами.

541. Круглый металлический стержень радиуса $R = 10$ мм закреплен одним концом в горизонтальном положении, а на другом его конце висит груз $P = 1$ кгс. Длина стержня $l = 1$ м. Стержень под влиянием груза прогибается, стрела прогиба $\lambda = 4$ мм. Чему равен модуль Юнга E материала стержня?

542. Как изменилось бы выражение для расчета модуля Юнга E в предыдущей задаче, если бы стержень был укреплен обоими концами, а груз помещен посередине?

543. Стержень круглого сечения расположен вертикально и закреплен верхним концом. К нижнему концу прикреплен горизонтально блок радиуса $R = 50$ мм. Ось стержня проходит через центр блока. От концов диаметра блока идут по касательной две нити, на которые действуют равные силы $P = 5$ кгс, закручивающие блок в одном направлении. На какой угол φ закрутится стержень? Модуль сдвига материала стержня $N = 8000$ кгс/мм², радиус стержня $r = 5$ мм, длина его $l = 1$ м.

544. На тонкий вертикальный вал насажен эксцентрично диск массы m ; расстояние между центром диска и осью вала равно d . Известно, что горизонтальная сила, приложенная к валу в месте закрепления диска, вызывает смещение, пропорциональное силе. Коэффициент пропорциональности k . Найти прогиб вала ξ при угловой частоте вращения вала ω . Массой вала по сравнению с массой диска можно пренебречь.

545. Как показывает опыт, скорость v распространения импульса поперечных деформаций вдоль натянутой однородной струны зависит от силы ее натяжения F и от массы ρ , приходящейся на единицу длины струны. Пользуясь методом размерностей, найти выражения зависимости скорости v от указанных параметров струны.

546. Рамку чувствительного гальванометра, вращающуюся между полюсами магнита, подвешивают на тонкой платиновой нити. Найти максимально допустимый вес рамки гальванометра, если предел прочности платины ≈ 30 кгс/мм², а для подвеса использована нить диаметром в 4 мкм.

547. Как показывает опыт, скорость v распространения продольных деформаций в сплошной среде зависит от модуля упругости среды E и от ее плотности ρ . Пользуясь методом размерностей, найти выражения для зависимости v от указанных параметров среды.

548. В упругом стержне создана такая начальная деформация сжатия, что скорости всех частиц в деформированной области направлены в одну сторону (например, вправо), причем в каждой точке плотность потенциальной энергии в α раз превосходит плотность кинетической энергии. Определить, какая доля первоначальной энергии будет унесена возмущением, распространяющимся вправо, а какая доля — возмущением, распространяющимся влево.

Указание. В бегущем возмущении плотность потенциальной энергии равна плотности кинетической.

549. Проволоку натягивают между двумя зажимами A и B , находящимися на расстоянии l (рис. 136). На середине проволоки подвешивают груз весом P , вследствие чего возникает прогиб λ . Определить зависимость прогиба λ от P , если известны модуль Юнга E , диаметр проволоки d и выполнено условие $\lambda/l \ll 1$.

550. Какую максимальную скорость может приобрести стрела массы m при стрельбе из лука? Считать, что концы лука при выстреле

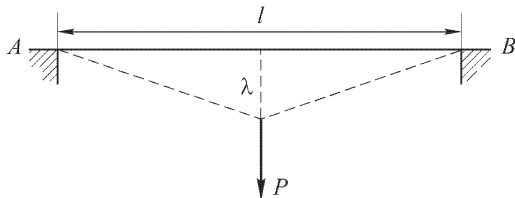


Рис. 136

движутся по прямой, а натяжение тетивы линейно зависит от смещения ее центра: $T = T_0 + \kappa x$, где T_0 — предварительное натяжение тетивы, а κ — постоянный коэффициент (рис. 137).

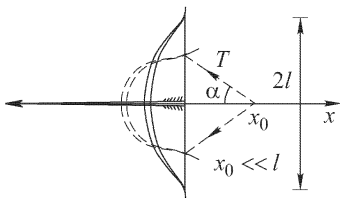


Рис. 137

551. Стальная проволока диаметром $d = 1$ мм огибает барабан диаметром $D = 2$ м. Определить дополнительные напряжения, возникающие в материале проволоки, если модуль Юнга стали $E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см².

552. На гладкую горизонтальную плоскость положен брусок AB из однородного материала массы m , сечения S и длины L , упирающийся одним концом в выступ (рис. 138). На другой конец бруска действует постоянная сила F , равномерно распределенная по всему сечению бруска. Как известно, длина бруска при этом уменьшится на величину $\Delta L = \Delta L = \frac{1}{E} \frac{L}{S} F$, где E — модуль Юнга. Спрашивается, насколько сожмется брусок и как в нем будет распределено сжатие, если он не будет упираться в выступ, а все прочие условия останутся неизменными?



Рис. 138

553. Упругий стержень массы m , длины l и площади поперечного сечения S движется в продольном направлении с ускорением a (одинаковым для всех точек стержня). Найти упругую энергию деформации, возникающую вследствие ускоренного движения.

554. Из задачи 552 вытекает, что в ускоренно движущемся бруске существует напряжение. Будет ли существовать напряжение в свободно падающем бруске?

555. Однородный диск массы M и радиуса R вращается вокруг своей оси с угловым ускорением β (рис. 139). Силы, ускоряющие диск, равномерно, распределены по ободу диска. Найдите касательную силу F , действующую на единицу длины окружности, ограничивающей мысленно выделенную часть диска радиуса r (заштрихованную на рисунке).

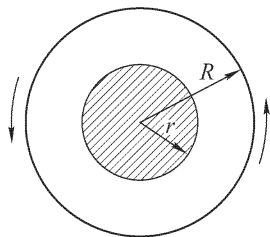


Рис. 139

556. Тонкий однородный упругий стержень, длина которого L , масса M и модуль Юнга E , равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Найти распределение усилий T в стержне и полное его удлинение ΔL . При подсчете линейной деформации и усилий считать поперечное сечение неизменным и удлинение малым.

§ 10. Колебания

557. Построить графики зависимости от времени смещения, скорости и ускорения при простом гармоническом колебании. Построить графики зависимости скорости и ускорения от смещения. Найти соотношения между амплитудами смещения, скорости и ускорения.

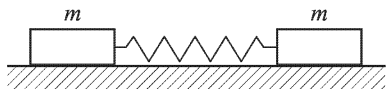


Рис. 140

558. Найти выражения для потенциальной, кинетической и полной энергии материальной точки массы m , совершающей гармоническое колебание по закону $A \cos \omega t$.

559. Два одинаковых груза массы m связаны пружиной (рис. 140). Как изменится частота собственных колебаний системы, если один из грузов закрепить?

560. Ареометр с цилиндрической трубкой диаметра D (рис. 141), плавающий в жидкости плотности ρ , получает небольшой вертикальный толчок. Найти период колебаний T ареометра, если масса его m известна. Движение жидкости и ее сопротивление движению ареометра не учитывать.

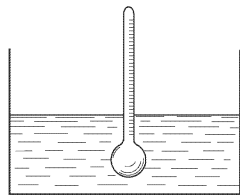


Рис. 141

561. На ракете, взлетающей вертикально вверх с ускорением a , установлены маятниковые часы. Какой промежуток времени T_1 измерят часы с момента старта ракеты до падения ее на Землю, если двигатель работал время T во время подъема ракеты, измеренное по часам на Земле?

562. Жидкость налита в изогнутую трубку (рис. 142), колена которой составляют с горизонтом углы α и β , длина столба жидкости l .

Если жидкость выведена из положения равновесия, то начинаются колебания уровня в трубках. Найти период колебаний. Капиллярными силами и вязкостью жидкости пренебречь.

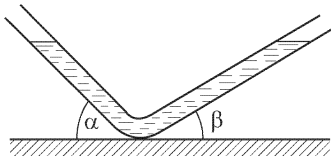


Рис. 142

563. Вертикальный цилиндр, имеющий поперечное сечение $S = 80 \text{ см}^2$, закрывается поршнем массы $m = 1 \text{ кг}$. Объем цилиндра под поршнем $v_0 = 5 \text{ л}$. В начальный момент давление p_0 воздуха в цилиндре равнялось атмосферному. Каково будет движение поршня, если

его сразу отпустить? Трение между поршнем и цилиндром отсутствует. Считать процесс сжатия и расширения воздуха адиабатным ($\gamma = c_p/c_v = 1,4$).

564. Что изменится в предыдущей задаче, если вместо воздуха в цилиндре будет: 1) водород; 2) гелий? Остальные условия те же.

565. Представьте себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. Найти закон движения тела, упавшего в эту шахту, учитывая изменения значения ускорения свободного падения внутри Земли. Трение о стенки шахты и сопротивление воздуха не учитывать.

566. Как изменится период малых колебаний маятника, подвешенного вблизи поверхности Земли, если под маятником в Земле сделана сферическая полость радиуса $r = 8 \text{ м}$, а расстояние между центром полости и точкой подвеса маятника $h = 20 \text{ м}$? Длина маятника пренебрежимо мала по сравнению с h . Средняя плотность Земли $\rho_0 = 5,5 \text{ г/см}^3$, плотность грунта у поверхности Земли в окрестности полости $\rho = 2,75 \text{ г/см}^3$. Радиус Земли $R = 6400 \text{ км}$.

567. Рассмотреть движение поезда под действием силы тяжести в отсутствие трения и сопротивления воздуха в гипотетическом туннеле длиной $l = 6400 \text{ км}$, прорытом вдоль одной из хорд земного шара. Влияние осевого вращения Земли не учитывать. Как будет направлена линия отвеса в движущемся поезде? Какое время будут показывать маятниковые часы, установленные на поезде, когда он достигнет противоположного конца хорды, если на поверхности Земли они шли точно? Землю считать однородным шаром радиуса $R = 6400 \text{ км}$.

568. Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет указывать нить отвеса, подвешенного в салоне самолета? Найти период малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна l , корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом α .

569. Самолет летает на постоянной высоте по окружности радиуса $R = 25 \text{ км}$ с постоянной скоростью $v = 250 \text{ м/с}$. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета t' покажут маятниковые часы, если это время, измеренное пружинными

часами, равно $t = 1$ ч? Часы считать идеальными. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

570. На тележке укреплен горизонтальный стержень, по которому может скользить без трения муфта массы $m = 1$ кг (рис. 143). К муфте прикреплены две пружины, общий коэффициент жесткости которых $k = 0,1$ кгс/см. Как будет двигаться груз относительно системы отсчета, связанной с тележкой? Рассмотреть два случая: 1) тележка получает ускорение, очень медленно нарастающее от нуля до $a = 0,98$ м/с²; 2) тележка в момент $t = 0$ внезапно получает ускорение a , остающееся затем неизменным. Трение считать очень малым.

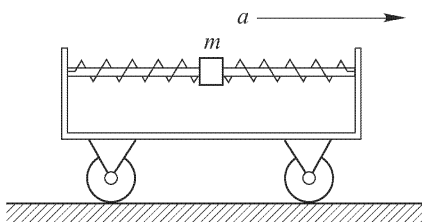


Рис. 143

571. В состоянии равновесия центры масс муфты и тележки, описанные в условии предыдущей задачи, находились на одной вертикали (см. рис. 143). Какое возникает движение, если муфту сместить от положения равновесия на величину $l = 6$ см и прикрепить нить к тележке, а затем нить пережечь? Масса тележки без муфты равна $M = 5$ кг, массой пружины можно пренебречь. Силу трения не учитывать.

572. Найти период свободных малых колебаний грузика массы m , укрепленного на середине тонкой струны длины L (рис. 144). Массой струны можно пренебречь; натяжение струны постоянно и равно P .

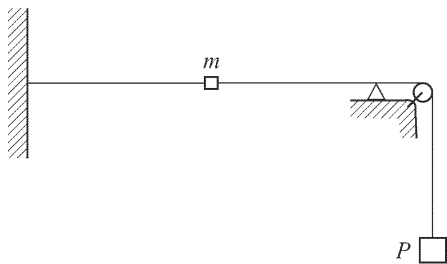


Рис. 144

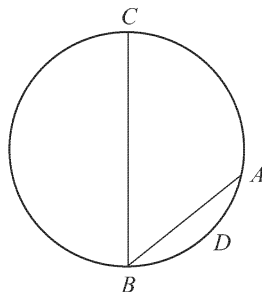


Рис. 145

573. Материальная точка в поле тяжести скользит по хорде круга AB без начальной скорости (рис. 145). Показать, что время ее движения из точки A в точку B не зависит от положения точки A на окружности. (Этот факт был использован Галилеем для установления законов малых колебаний математического маятника. Для нахождения периода колебаний маятника Галилей заменил малую дугу окружности ADB , по которой движется материальная точка, хордой AB .) Вычислить

период колебаний маятника в этом приближении и убедиться, что оно приводит к правильной зависимости периода колебаний от длины маятника l и ускорения свободного падения g . Сравнить результат с правильной формулой.

574. Через неподвижный блок с моментом инерции I (рис. 146) и радиусом r перекинута нить, к одному концу которой подвешен груз массы m . Другой конец нити привязан к пружине с закрепленным нижним концом. Вычислить период колебаний груза, если коэффициент упругости пружины равен k , а нить не может скользить по поверхности блока.

575. К пружине, один конец которой закреплен, подвешен груз веса P , лежащий на подставке так, что пружина не растянута (рис. 147). Без толчка подставка убирается. Найти движение груза и максимальное натяжение пружины. Коэффициент жесткости и пружины известен.

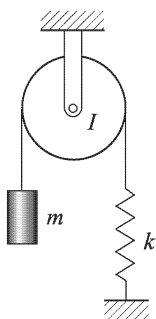


Рис. 146

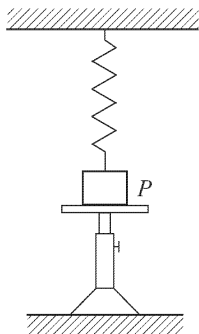


Рис. 147

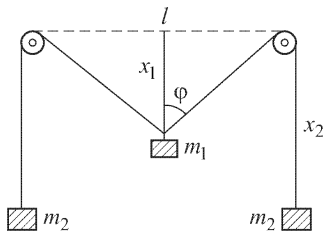


Рис. 148

576. Найти частоту малых собственных колебаний около положения устойчивого равновесия для системы, показанной на рис. 148. Нить невесома и нерастяжима, блоки невесома и не имеют трения в осях.

577. На доске лежит груз весом $P = 1$ кгс. Доска совершает гармоническое колебание в вертикальном направлении с периодом $T = 1/2$ с и амплитудой $a = 2$ см. Определить величину силы давления F груза на доску.

578. С какой амплитудой A должна колебаться доска с грузом в предыдущей задаче, чтобы груз начал отскакивать от доски?

579. На массивной чашке пружинных весов лежит маленький грузик (рис. 149). Масса чашки равна m , масса грузика пренебрежимо мала. Ко дну чашки подвешен груз массы M . Вся система находится в равновесии. При каком соотношении между массами M и m грузик на чашке начнет подскакивать, если быстро снять груз M ?

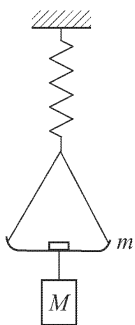


Рис. 149

580. Горизонтальная мембрана совершает синусоидальные колебания с круговой частотой ω и амплитудой A . На мембране лежит маленький грузик. При каком условии грузик будет колебаться вместе с мембраной и при каком он начнет подсакивать?

581. Доска совершает гармоническое колебание в горизонтальном направлении с периодом $T = 5$ с. Лежащее на ней тело начинает скользить, когда амплитуда колебания достигает величины $A = 0,6$ м. Каков коэффициент трения покоя k между грузом и доской?

582. На чашку весов, подвешенную на пружине, падает с высоты h груз массы m и остается на чашке (рис. 150), не подпрыгивая относительно нее. Чашка начинает колебаться. Коэффициент жесткости пружины k . Определить амплитуду A колебаний (массой чашки и пружины по сравнению с массой груза можно пренебречь).

583. К пружине прикреплена нить, на которой висит груз массы $m = 1$ кг (рис. 151). Оттягивая груз вниз и отпуская, приводят его в колебания. На какое расстояние x можно оттянуть вниз груз, чтобы при колебаниях нить все время была натянута? Коэффициент жесткости пружины $k = 0,05$ кгс/см.

584. Материальная точка (например, шарик на пружине) под действием квазиупругой силы $F = -kx$ совершает колебания вдоль оси X вокруг положения равновесия. Показать, что средние по времени значения кинетической и потенциальной энергий при таких колебаниях одинаковы.

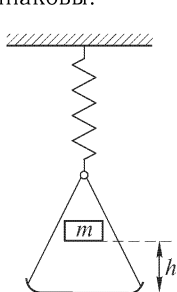


Рис. 150

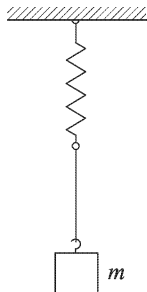


Рис. 151

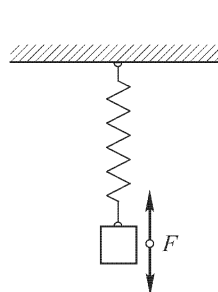


Рис. 152

585. Тело подвешено на пружине и имеет собственный период колебаний $1/2$ с (рис. 152). На тело действует направленная вертикально синусоидальная сила с амплитудой $F = 100$ дин и некоторая сила трения. Определить амплитуду $F_{\text{тр}}$ силы трения и коэффициент трения (сила трения пропорциональна скорости движения), если амплитуда колебаний при резонансе A_p составляет 5 см.

586. Система совершает вынужденные колебания под действием внешней силы, изменяющейся по гармоническому закону. Показать, что при резонансе при прочих равных условиях работа внешней силы за период будет максимальной.

587. Однородная палочка подвешена за оба конца на двух одинаковых нитях длины L . В состоянии равновесия обе нити параллельны. Найти период T малых колебаний, возникающих после некоторого поворота палочки вокруг вертикальной оси, проходящей через середину палочки.

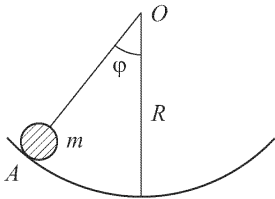


Рис. 153

588. Тело вращения радиуса a с моментом инерции I (относительно геометрической оси) и массой m катается без скольжения по внутренней поверхности цилиндра радиуса R , совершая малые колебания около положения равновесия (рис. 153). Найти период этих колебаний.

589. Решить предыдущую задачу в предположении, что тело катается по внутренней поверхности эллиптического цилиндра. Одна из главных осей соответствующего эллипса $2A$ расположена горизонтально, а другая $2B$ (ось симметрии) — вертикально (рис. 154).

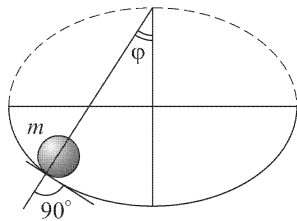


Рис. 154

590. Достаточно тонкая пластинка из однородного материала имеет форму равностороннего треугольника высоты h (рис. 155). Она может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с одной из сторон пластинки. Найти период малых колебаний T этого физического маятника.

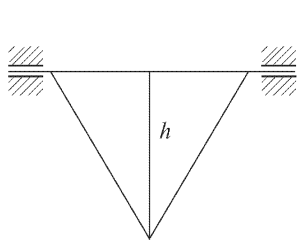


Рис. 155

591. Кольцо из тонкой проволоки совершает малые колебания, как маятник около горизонтальной оси (рис. 156). В одном случае ось лежит в плоскости кольца (рис. 156 а), в другом перпендикулярна к ней (рис. 156 б). Определить отношение периодов малых колебаний T_1 и T_2 при этих двух видах колебаний кольца.

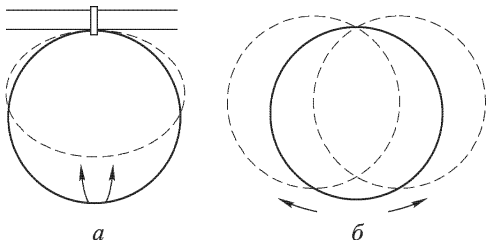


Рис. 156

592. Сплошной однородный диск с радиусом $r = 10$ см колеблется около оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через край диска. Какой длины l должен быть математический маятник, имеющий тот же период колебаний, что и диск?

593. Диск состоит из двух половин одинаковой толщины: одна половина алюминиевая (плотность $2,5 \text{ г/см}^3$), вторая — свинцовая (плотность 10 г/см^3). Каково будет отношение периодов колебаний этого диска вокруг осей, перпендикулярных к плоскости диска? В одном случае ось проходит через точку A , в другом — через точку B (рис. 157).

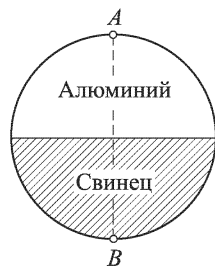


Рис. 157

594. Физический маятник состоит из стержня квадратного сечения, подвешенного за конец, и груза, прикрепленного на другом конце (рис. 158). Груз имеет форму куба с ребром $a = 40 \text{ мм}$, а стержень длину $l = 400 \text{ мм}$ и сторону сечения $b = 4 \text{ мм}$; груз и стержень сделаны из одного материала. Найти приближенное значение периода колебаний T такого маятника (при расчете можно полагать стержень достаточно тонким).

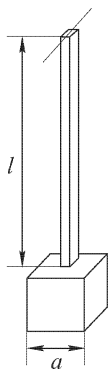


Рис. 158

595. При колебаниях маятника, описанного в предыдущей задаче, с амплитудой $\alpha_0 = 10^\circ$, груз отрывается от стержня в тот момент, когда маятник проходит положение равновесия. Каковы будут амплитуда α'_0 и период колебаний T стержня после отрыва груза?

596. Ответить на вопросы, поставленные в предыдущей задаче, если груз отрывается при наибольшем отклонении маятника от положения равновесия.

597. Тонкий однородный стержень длины l качается около оси, проходящей через конец стержня перпендикулярно к нему. Есть ли такое место на стержне, прикрепив к которому небольшое по размерам тело значительной массы, мы не изменим периода колебаний стержня?

598. Маятник метронома представляет собой груз M , качающийся около оси O , с прикрепленной к нему спицей, по которой может перемещаться малый груз m (рис. 159). Как зависит период колебаний маятника от координаты x грузика? Массу m считать точечной.

599. В какой точке следует подвесить однородный стержень длины l (рис. 160), чтобы частота его колебаний, как физического маятника, была максимальна? Чему равна эта частота?

600. На тонкий стержень длины l надето с трением небольшое кольцо массы m . Какая сила действует со стороны стержня на кольцо, когда стержень, подвешенный за конец, колеблется, как маятник с малой угловой амплитудой α_0 ? Расстояние кольца

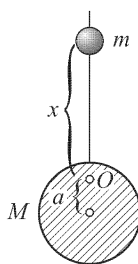


Рис. 159

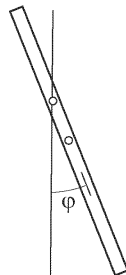


Рис. 160

от оси маятника равно d . Массой кольца при вычислении периода колебаний можно пренебречь.

601. Однородная пластинка, имеющая форму равностороннего треугольника, подвешена за вершины тремя нитями, имеющими одинаковую длину L . В состоянии равновесия пластинка горизонтальна и нити вертикальны. Найти период крутильных колебаний пластинки вокруг

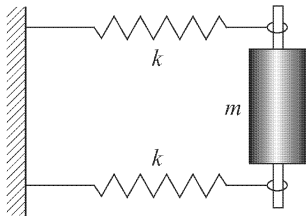


Рис. 161

вертикальной оси (считать, что каждая нить отклоняется на малый угол от вертикали).

602. На горизонтальной плоскости находится цилиндр с моментом инерции I (относительно продольной геометрической оси), массой m и радиусом r . К оси цилиндра прикреплены две одинаковые горизонтально расположенные спиральные пружины, другие концы которых закреплены в стене (рис. 161, вид сверху). Коэффициент жесткости каждой пружины равен k ; пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие. Найти период малых колебаний цилиндра, которые возникнут, если вывести его из положения равновесия и дать возможность кататься без скольжения по горизонтальной плоскости.

603. Однородная квадратная плита подвешена за свои углы к потолку зала на четырех параллельных веревках, длина каждой из которых равна l . Определить период малых крутильных колебаний плиты, которые возникнут, если повернуть ее на малый угол вокруг вертикальной оси.

604. Три однородных стержня длины l каждый соединены короткими нитями, образуя фигуру в виде перевернутой буквы П. Горизонтальный стержень этой системы поворачивают на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через центр системы, и отпускают. Найти период возникших при этом малых колебаний, если массы стержней одинаковы.

605. Шарик массы m подвешен на двух последовательно соединенных пружинках с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 (рис. 162). Определить период его вертикальных колебаний.

606. Найти период крутильных колебаний диска, плотно насаженного на составной стержень, состоящий из двух различных последовательно соединенных стержней (рис. 163). Верхний конец A стержня неподвижно закреплен. Если бы диск был насажен только на первый стержень, то

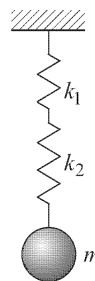


Рис. 162

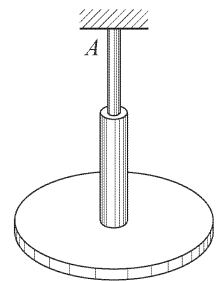


Рис. 163

период колебаний был бы равен T_1 . Если бы он был насажен только на второй стержень, то период колебаний оказался бы равным T_2 .

607. Найти период малых колебаний физического маятника массы m , к центру масс C которого прикреплена горизонтальная спиральная пружина с коэффициентом жесткости k . Другой конец пружины закреплен в неподвижной стенке (рис. 164). Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен I , расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника равно a . В положении равновесия пружина не деформирована.

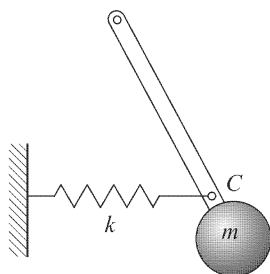


Рис. 164

608. Колебательная система состоит из однородного стержня длины l и массы m , который может вращаться вокруг горизонтальной оси O , проходящей через его конец и перпендикулярной к продольной оси стержня (рис. 165). Другой конец стержня подвешен на

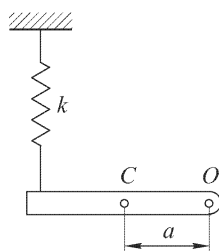


Рис. 165

пружине с коэффициентом жесткости k . Расстояние между серединой стержня и осью вращения $CO = a$. Момент инерции стержня относительно оси O равен I . Найти удлинение пружины x_0 (по сравнению с ее длиной в недеформированном состоянии) в положении равновесия, если в этом положении стержень горизонтален. Определить также период малых колебаний стержня около положения равновесия.

609. К концу однородного стержня длины l и массы m прикреплена короткая упругая пластинка. Пластинку зажимают в тисках один раз так, что стержень оказывается внизу, а другой раз — вверху (рис. 166). Определить отношение периодов малых колебаний стержня в этих случаях. Момент упругих сил пластинки пропорционален углу отклонения стержня от положения равновесия, причем коэффициент пропорциональности равен k .

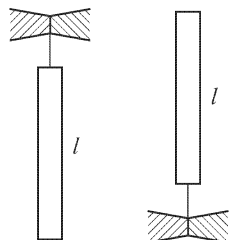


Рис. 166

610. Два незакрепленных шарика с массами m_1 и m_2 соединены друг с другом спиральной пружинкой с коэффициентом жесткости k . Определить период колебаний шариков относительно центра масс системы, которые возникнут при растяжении пружинки.

611. Два диска с моментами инерции I_1 и I_2 насажены на общую ось, проходящую через их центры. Осью является стержень с модулем кручения f . Определить период крутильных колебаний одного диска относительно другого в предположении, что система свободна. Массой стержня пренебречь.

612. Как изменится ход карманных часов, если их положить на горизонтальный абсолютно гладкий стол? Считать, что ось крутильного маятника часов проходит через их центр, а момент инерции часов I_0 в 500 раз больше момента инерции маятника I .

613. Два сплошных однородных цилиндра одинакового радиуса R с массами m_1 и m_2 лежат на горизонтальном столе и соединены

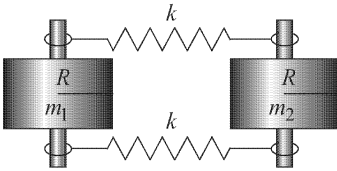


Рис. 167

между собой двумя одинаковыми пружинами с коэффициентом жесткости k каждая, как показано на рис. 167 (вид сверху). Определить период малых колебаний, которые возникнут, если растянуть пружины и предоставить системе самой себе, не сообщая ей дополнительной скорости. Цилиндры катаются по столу без проскальзывания около

неподвижного центра масс системы. Пружины могут работать как на растяжение, так и на сжатие.

614. На тележке, стоящей на горизонтальных рельсах, подвешен маятник длины l , масса которого M сравнима с массой тележки m . Тележка может кататься по рельсам практически без трения. Найти период малых колебаний маятника. Массой колес пренебречь.

615. На конце тонкого однородного стержня длины l проделано малое отверстие, через которое продета горизонтально натянутая непрогибаемая проволока. Найти периоды малых колебаний такого физического маятника в двух случаях: 1) когда маятник колеблется в вертикальной плоскости, перпендикулярной проволоке; 2) когда колебания происходят в вертикальной плоскости, параллельной проволоке. Во втором случае точка подвеса маятника может скользить по проволоке без трения. Найти также отношение этих периодов.

616. В сплошном однородном цилиндре радиуса R сделана цилиндрическая полость радиуса $R/2$ с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра (см. рис. 247). Определить период малых колебаний T , которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость и дать ему возможность кататься по ней без скольжения.

617. Физический маятник состоит из двух одинаковых массивных шаров радиуса $r = 5$ см на невесомом стержне (рис. 168). Ось маятника расположена на расстоянии $b = 10$ см ниже центра верхнего шара. При каком расстоянии x между центрами шаров период маятника T будет наименьшим? Найти этот период, приведенную длину маятника l и расстояние a между осью и центром масс маятника C .

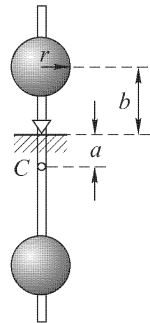


Рис. 168

618. По штанге, вращающейся в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω , может скользить без трения груз массы m ,

удерживаемый на некотором расстоянии от оси вращения пружины с коэффициентом жесткости k и начальной длиной r_0 . Найти движение груза, которое возникнет, если штангу мгновенно остановить.

619. На горизонтальной пружине укреплено тело массы $M = 10$ кг, лежащее на гладком столе, по которому оно может скользить без трения (рис. 169). В это тело попадает и застревает в нем пуля массы $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Тело вместе с застрявшей в нем пулей отклоняется от положения равновесия и начинает колебаться относительно него с амплитудой $a = 10$ см. Найти период колебаний тела.

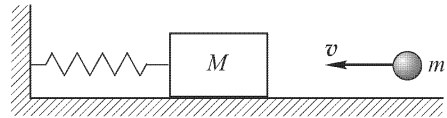


Рис. 169

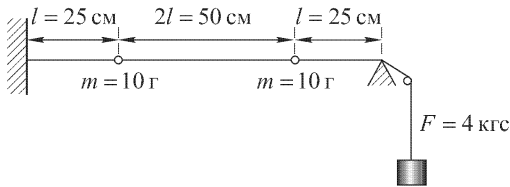


Рис. 170

620. На струне с постоянным натяжением в 4 кгс укреплены две массы по 10 г, как показано на рис. 170. Какие следует задать начальные условия грузикам, чтобы они совершали гармоническое колебательное движение с одинаковым периодом? Вычислить частоту этих колебаний (их называют нормальными). Отклонения при колебаниях считать очень малыми по сравнению с l .

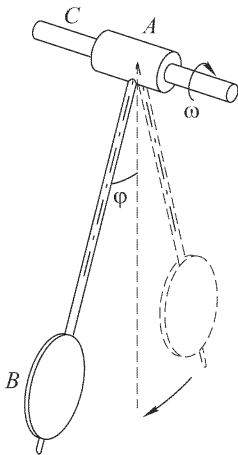


Рис. 171

621. Н.Е. Жуковским было предложено устройство совершенного (без потерь) подвеса маятника, схематически показанное на рис. 171. Муфта A , насаженная на вал C , составляет одно целое с маятником B . Вал расположен горизонтально и равномерно вращается с угловой скоростью ω , маятник совершает колебания в плоскости, перпендикулярной к валу.

Показать, что если угловая скорость вала достаточно велика и сила трения муфты о вал не зависит от скорости скольжения, то потери энергии колебаний в подвесе не будет. Как велика должна быть угловая скорость вращения вала?

622. Каким образом изменится характер колебаний маятника, если сила трения муфты о вал (см. рис. 171) будет зависеть от скорости скольжения муфты по валу, при сохранении остальных условий предыдущей задачи? Рассмотреть два случая: 1) сила трения возрастает с увеличением скорости скольжения; 2) сила трения уменьшается с увеличением скорости скольжения.

623. Определить положение равновесия, около которого совершает колебания маятник, описанный в предыдущей задаче. Известно, что сила трения вала о муфту равна μP , где μ — постоянная величина, P — величина давления муфты на вал; расстояние от оси вращения до центра массы маятника равно a и радиус вала R .

§ 11. Гидростатика и аэростатика

624. Два сплошных тела из одного и того же вещества подвешены к концам неравноплечего рычага и уравновешивают друг друга в воздухе. 1) Сохранится ли равновесие, если погрузить эти тела в сосуд с водой? 2) Изменится ли равновесие, если вещество тел различно?

625. Из какого материала надо сделать гири, чтобы при точном взвешивании можно было не вводить поправки на потерю веса в воздухе?

626. Полый металлический шар, внешний и внутренний диаметры которого d_1 и d_2 , плавает на поверхности жидкости. Плотность металла ρ_1 , плотность жидкости ρ_2 . Какой груз p нужно добавить внутрь шара, чтобы он плавал внутри жидкости? Сжимаемостью шара можно пренебречь.

627. Найти условие устойчивости однородного прямоугольного параллелепипеда, плавающего на поверхности жидкости в положении, когда одно из оснований его горизонтально. Длины сторон горизонтального основания A и B , высота C ($A > B$). Плотность материала тела относительно жидкости $\rho < 1$.

628. Та же задача для однородного цилиндра радиуса r и высоты l , плавающего в вертикальном положении.

629. Та же задача для однородного цилиндра радиуса r и длины l , плавающего в горизонтальном положении.

630. Какова подъемная сила F 1 м^3 гелия, идущего на наполнение дирижаблей, если плотность гелия относительно воздуха равна 0,137 и 1 м^3 воздуха весит 1,3 кгс?

631. Баллон сферического аэростата имеет объем 700 м^3 . Баллон заполнен водородом, 1 м^3 которого при давлении в 1 атм весит 90 гс. Вес корзины, оболочки, всех принадлежностей и двух пассажиров 447 кгс. 1) Сколько надо добавить балласта $\Delta_1 Q$, чтобы аэростат уравновешивался вблизи поверхности Земли при нормальном давлении? 2) Сколько надо затем сбросить балласта $\Delta_2 Q$, чтобы подняться на высоту 2 км, если на этой высоте 1 м^3 воздуха весит 1 кгс? У поверхности Земли 1 м^3 воздуха весит 1,3 кгс.

632. На дне сосуда с жидкостью (или газом) лежит тело, плотность которого немного больше плотности жидкости (или газа). Можно ли, повышая давление на жидкость (или газ), заставить тело подняться вверх.

633. Каково давление P воздуха в кессоне, опущенном в воду и предназначенном для подводных работ на дне реки на глубине h [м], если атмосферное давление равно H [мм рт. ст.]? Плотность ртути ρ .

634. Тонкая палочка одним концом прикреплена к стенке сосуда, а другим погружена в воду (рис. 172). Палочка может свободно вращаться относительно горизонтальной оси шарнира A , находящегося над уровнем жидкости. Найти плотность ρ материала палочки, если при равновесии в воду не погружена $1/n$ часть палочки. Капиллярные силы не учитывать.

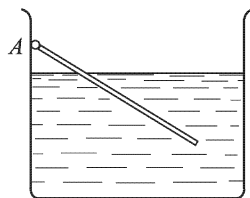


Рис. 172

635. Найти силу давления F воды на квадратную стенку аквариума (сторона равна a). На какой высоте h от дна находится точка приложения равнодействующей сил давления на стенку?

636. Желоб имеет сечение, указанное на рис. 173. Желоб наполнен до краев водой. Определить силу давления на 1 м длины боковой стенки и момент этой силы M относительно ребра A дна.

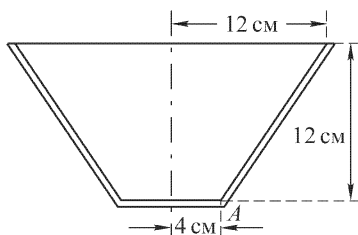


Рис. 173

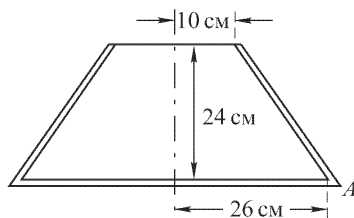


Рис. 174

637. Сечение желоба дано на рис. 174. Желоб наполнен водой. Ответить на вопросы, поставленные в предыдущей задаче.

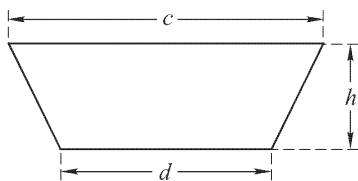


Рис. 175

638. Найти результирующую силу давления P воды на речную плотину, имеющую форму трапеции (рис. 175), если $h = 5$ м, $d = 10$ м, $c = 15$ м.

639. Специальным щитом закрывают воду в канале, подающем воду на мельничное колесо. Определить момент сил, действующих на щит относительно горизонтальной оси, лежа-

шей в плоскости щита на высоте 0,25 м над уровнем воды, если ширина канала 1 м и высота уровня запертой в канале воды 0,75 м.

640. Подсчитать усилие, разрывающее вертикальный шов на высоте $H = 1$ м в цилиндрическом сосуде, наполненном водой до краев (рис. 176).

641. Баллоны из ткани, которая выдерживает на разрыв 850 кгс на погонный метр, наполнены газом ¹⁾. Баллоны с газом представляют собой шары радиуса 10 м. Какое превышение давления Δp над атмосферным допустимо в баллонах?

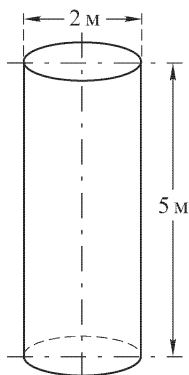


Рис. 176

642. На какой высоте h плотность воздуха в земной атмосфере уменьшается вдвое (предполагается, что температура атмосферы неизменна по всей ее высоте)? У поверхности Земли считать давление $p_0 = 10\,330$ кгс/м² и плотность воздуха $\rho_0 = 1,293$ кг/м³.

643. Найти распределение давления внутри земного шара, считая его состоящим из однородной несжимаемой жидкости и пренебрегая осевым вращением Земли. Вычислить в том же приближении давление в центре Земли $P_{ц}$ (см. задачу 505).

644. На тележке стоит сосуд с водой. Тележка движется в горизонтальном направлении с ускорением $0,29g$. Какой угол α с горизонтом составляет поверхность воды?

645. Цилиндрический замкнутый сосуд, наполненный водой, закрыт сверху пробкой (рис. 177). Какое ускорение a в горизонтальном направлении вдоль оси сосуда нужно сообщить сосуду для того, чтобы пробка вылетела, если она может выдержать давление 0,05 атм, а расстояния отверстия от одного днища сосуда 1 м и от другого 0,1 м?

646. Как изменился бы ответ к предыдущей задаче, если бы сосуд был не цилиндрическим, а имел вид усеченного конуса, но расстояния отверстия до днищ оставались бы теми же самыми?

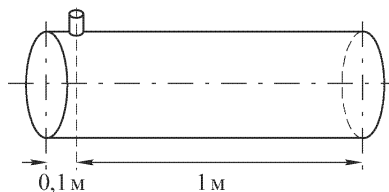


Рис. 177

647. Поезд, в составе которого имеется закрытая цистерна с нефтью, двигался со скоростью v_0 , а затем в результате торможения начал двигаться равномерно замедленно и, пройдя отрезок пути s ,

¹⁾ Упругие напряжения, действующие во всякого рода оболочках, пленках и т.п., удобно характеризовать силой, отнесенной к единице длины поперечного сечения оболочки. Приведенная в условиях задачи прочность ткани на разрыв означает, что полоса этой ткани шириной в 1 м может, не разрываясь, выдержать равномерно распределенную по ширине полосы силу в 850 кгс.

остановился. Найти силы давления нефти на заднюю и переднюю стенки цистерны во время торможения поезда. Цистерну считать прямоугольным параллелепипедом с длиной l , шириной a и высотой h ; плотность нефти равна ρ .

648. Оценить сплюснутость Земли, обусловленную ее осевым вращением, считая Землю однородным несжимаемым жидким шаром.

§ 12. Гидродинамика и аэродинамика

649. Какова скорость v истечения жидкости из отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием 4,9 м? Вязкость жидкости не учитывать.

650. Цистерна наполнена водой и нефтью (плотность $0,9 \text{ г/см}^3$). Какова будет вначале скорость v истечения воды из отверстия в дне, если высота слоя воды $h_1 = 1 \text{ м}$, а слоя нефти $h_2 = 4 \text{ м}$? Вязкостью пренебречь.

651. Подсчитать максимальное давление ветра, имеющего скорость 20 м/с, на горизонтальную стену, если ветер дует перпендикулярно к стене. Величину давления выразить в сантиметрах водяного столба. Плотность воздуха считать равной $\frac{1}{8} \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$.

652. В цилиндрическом сосуде, стоящем на подставке, расположены два отверстия на расстоянии 25 см одно над другим. Струи, вытекающие из отверстий, пересекаются. Найти точку пересечения струй, если известно, что уровень воды выше верхнего отверстия на 25 см.

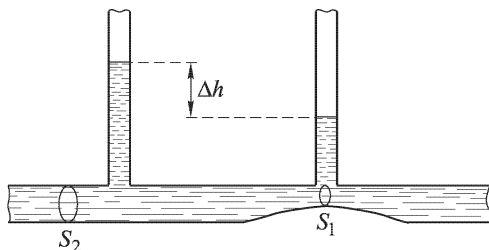


Рис. 178

653. На рис. 178 представлена схема водомера: по горизонтальной трубе переменного сечения протекает вода. Определить расход воды Q по разности уровней воды Δh в двух манометрических трубках, если сечения трубы у оснований трубок известны.

654. Схема устройства, позволяющего паровозу на ходу пополнять запас воды, изображена на рис. 179. Вдоль рельсов устроен канал, наполненный водой. К паровозу приделана изогнутая труба, опускающаяся в канал так, что ее отверстие направлено вперед. Подсчитайте, на какую высоту h поднимется вода, если скорость v поезда равна 36 км/ч. Вязкостью воды пренебречь.

655. Когда один моряк пытался в трюме судна закрыть доской небольшое отверстие, через которое врывалась струя воды, то это ему не удалось, струя отбрасывала доску. Когда же с помощью товарища ему удалось прижать доску плотно к отверстию, то он мог затем держать ее один. Объяснить, почему давление на доску в обоих случаях разное?

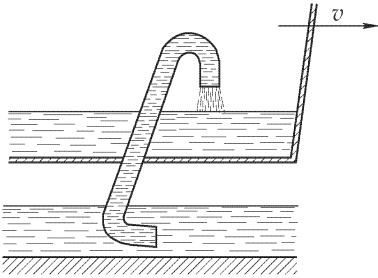


Рис. 179

656. В аэродинамических трубах с помощью вентилятора создается поток воздуха. Контур закрытой аэродинамической трубы круглого сечения имеет форму, показанную на рис. 180. В начале трубы

находится раструб, через который засасывается воздух из окружающей среды, затем идет цилиндрическая часть, в которую помещают модель. Далее — расширяющаяся труба и за ней опять цилиндрическая, в которой и располагается вентилятор.

1) Рассчитать давление Δp снаружи на стенку средней цилиндрической части трубы при скорости потока $v = 100$ м/с. 2) Как изменится результат, если учесть вязкость воздуха?

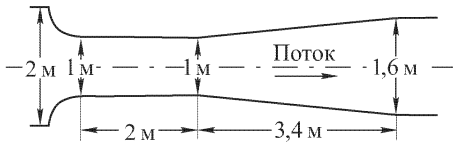


Рис. 180

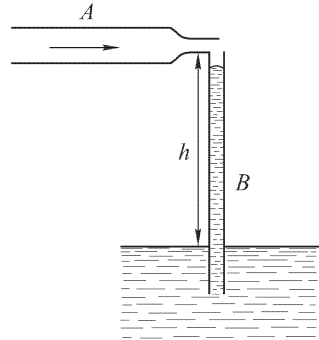


Рис. 181

657. Схема устройства пульверизатора изображена на рис. 181. Определить максимальную высоту h , на которую он может засасывать жидкость из резервуара, если давление перед входом в трубку A , где скорость очень мала, равно p_0 . Вязкостью пренебречь.

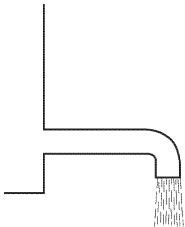


Рис. 182

658. Подсчитайте, какая сила F вырывает из бака сливную трубку, если поперечное сечение струи $S = 4$ см², а расход воды $Q = 24$ л/мин? Трубка имеет форму, показанную на рис. 182.

659. Найти зависимость от времени силы F , действующей на дно цилиндрического стакана площади S , в который наливают воду из чайника

(рис. 183). Известно, что за секунду в стакан наливают постоянное количество Q [см³] воды.

660. В вертикально стоящий цилиндрический сосуд налита идеальная жидкость до уровня H (относительно дна сосуда). Площадь дна сосуда равна S . Определить время t , за которое уровень жидкости в сосуде опустится до высоты h (относительно дна сосуда), если в дне сосуда сделано малое отверстие площади σ . Определить также время T , за которое из сосуда выльется вся жидкость.

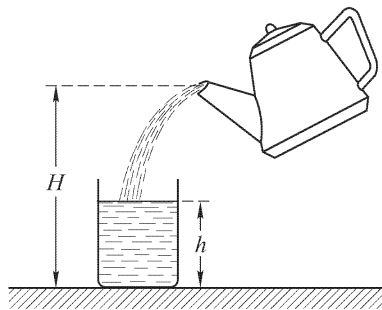


Рис. 183

661. Прямоугольная коробка плавает на поверхности воды, погружаясь под действием собственного веса на глубину h . Площадь дна коробки равна S , высота H . Через какое время коробка утонет, если

в центре дна ее проделать малое отверстие площади σ и с помощью боковых направляющих сохранять неизменной ориентацию коробки?

662. Через какое время наполнится водой шаровая колба радиуса R , если в центре ее нижнего основания сделано малое отверстие площади σ ? Колба погружена в воду до нижнего основания ее горлышка.

663. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, в который налита вода до уровня H (относительно поверхности стола). На какой высоте h (относительно поверхности стола) надо сделать малое отверстие в боковой стенке сосуда, чтобы струя воды встречала поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Вычислить это расстояние.

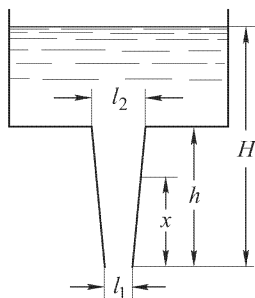


Рис. 184

664. Определить форму сосуда, чтобы уровень жидкости в нем опускался с постоянной скоростью, если в центральной точке дна проделать малое отверстие.

665. В широкий сосуд с плоским дном налита идеальная жидкость. В дне сосуда сделана длинная и узкая щель, в которую вставлена насадка, образованная двумя плоскостями, наклоненными друг к другу под малым углом (рис. 184). Расстояние между ними в нижней части насадки равно l_1 , а в верхней — l_2 . Опре-

делить распределение давления жидкости в насадке, если атмосферное давление равно P_0 . Длина насадки равна h , расстояние между нижним концом насадки и уровнем жидкости в сосуде равно H .

666. Вода вытекает из широкого резервуара через вертикальную коническую трубу, вставленную в его дно. Длина трубы равна l , диаметр верхнего основания d_1 , нижнего основания d_2 ($d_1 > d_2$). При каком уровне H воды в резервуаре давление в верхнем сечении трубы будет равно P , если атмосферное давление равно P_0 ?

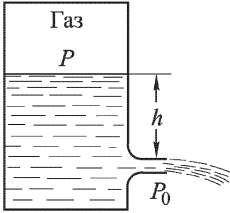


Рис. 185

667. Определить скорость v стационарного истечения через малое отверстие струи идеальной несжимаемой жидкости, находящейся под давлением P в закрытом сосуде (рис. 185).

668. Для того чтобы струя жидкости вытекала из сосуда с постоянной скоростью, применяют устройство, изображенное на рис. 186. Определить скорость истечения струи v в этом случае.

669. Определить скорость стационарного течения вдоль оси и расход несжимаемой жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами с внутренним радиусом R_1 , внешним R_2 и длиной l . (Расходом жидкости называется масса ее, ежесекундно протекающая через поперечное сечение трубы.)

670. Показать, что при ламинарном стационарном течении несжимаемой жидкости вдоль прямолинейной трубы произвольного поперечного сечения S и длины l скорость жидкости v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{P_1 - P_2}{l\eta} = 0. \quad (670.1)$$

(Координатная плоскость YZ перпендикулярна к оси трубы, оси Y и Z взаимно перпендикулярны и ориентированы произвольно.)

671. Определить скорость течения и расход жидкости в трубе эллиптического сечения.

672. Пользуясь соображениями размерности, найти вид формулы, определяющей расход несжимаемой жидкости при стационарном ламинарном течении вдоль прямолинейной трубы произвольного поперечного сечения.

673. На тележке стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой. Высота воды в сосуде 1 м. В сосуде с противоположных сторон по ходу тележки сделано два крана с отверстиями площадью 10 см^2 каждое, одно на высоте $h_1 = 25 \text{ см}$ над дном сосуда, а другое на высоте $h_2 = 50 \text{ см}$. Какую горизонтальную силу F нужно приложить к тележке, чтобы она осталась в покое при открытых кранах?

674. На весах для демонстрации давления жидкости на дно сосуда (рис. 187) установлен прямой цилиндр с водой. Высота столба воды в нем $h = 25 \text{ см}$. Как изменится нагрузка, уравновешивающая давление

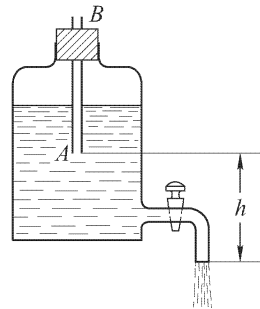


Рис. 186

на дно, если через отверстие в дне цилиндра вытекает струя воды с сечением $S = 1/4 \text{ см}^2$? Понижение уровня воды в цилиндре можно не учитывать.

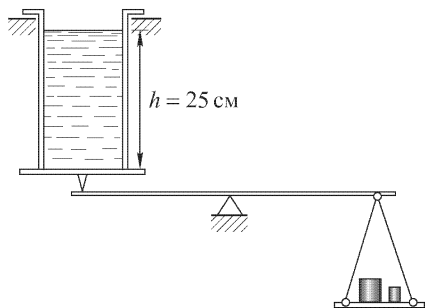


Рис. 187

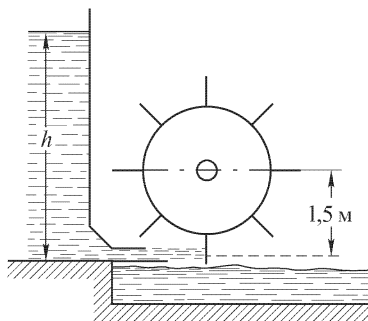


Рис. 188

675. Как изменится сила давления воды на щит (см. задачу 639), если поднять его над дном канала так, что из-под щита будет вытекать струя воды высотой 5 см, а уровень воды перед щитом останется прежним? Скорость по высоте струи считать одинаковой.

676. Дать приближенный расчет максимальной мощности и определить наиболее выгодную скорость вращения нижнебойного колеса (рис. 188), если известны: высота напора воды $h = 5 \text{ м}$, поперечное сечение струи $S = 0,06 \text{ м}^2$, радиус колеса $R = 1,5 \text{ м}$. Вода струи непрерывно бьет в лопасти и после удара падает вниз.

677. Вода, вытекающая из насадки пожарного насоса, имеет скорость, достаточную для того, чтобы струя достигала высоты 20 м. Насколько поднимется температура воды, если направить эту струю в закрытый неподвижный бак? Считать, что выделяющееся тепло пойдет только на нагревание воды. Трением воздуха пренебречь.

678. При обсуждении проекта гидрореза — машины для резания льда струей воды, выбрасываемой под давлением около 60 атм, высказывалось предположение, что резание льда происходит за счет того, что при ударе о лед вода нагревается и лед под ней тает. Обсудите справедливость такого предположения.

679. Определить форму свободной поверхности жидкости, равномерно вращающейся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси Z в цилиндрическом сосуде.

680. 1) Найти распределение давления p на дне сосуда вдоль радиуса в условиях предыдущей задачи. 2) Определить величину давления у стенок сосуда вблизи его дна, если сосуд вращается со скоростью 4 об/с. Высота столба воды на оси цилиндра равна 10 см. Радиус цилиндра равен также 10 см.

681. Цилиндр, наполненный водой, закрыт со всех сторон; в нем находятся: пробка, кусочек свинца и некоторое тело A , плотность

которого равна плотности воды. Цилиндр приводят в быстрое вращение вокруг его оси. Как будут расположены тела в цилиндре, если ось вращения вертикальна?

682. Цилиндр, наполненный водой, равномерно вращается со скоростью 1 об/с вокруг вертикальной оси, увлекая за собой и воду. К гладкому горизонтальному стержню, расположенному по диаметру цилиндра и погруженному в воду, прикреплен кубик с ребром в 2 см , сделанный из материала с плотностью $\rho = 2 \text{ г/см}^3$. Кубик прикреплен так, что может скользить по стержню и удерживаться пружинкой на расстоянии 50 см от оси цилиндра. Найти натяжение пружинки T .

683. Во вращающемся сосуде давление на дно у стенки сосуда (см. задачу 680) больше, чем в центре. Почему же при вращении сосуда вода не течет от стенки к его центру?

684. Можно ли измерить распределение давления жидкости во вращающемся сосуде следующими способами.

1) Манометрическая трубочка B вращается вместе с сосудом и заполняется той же жидкостью, что и сосуд, как указано на рис. 189. Капиллярные давления в трубочках можно не учитывать.

2) Манометрическая трубочка состоит из двух частей, соединенных через муфту C , как показано на рис. 190. Часть трубочки AC закреплена неподвижно относительно сосуда, вторая часть CD неподвижна относительно земли. Муфта C обеспечивает герметичное соединение этих частей и находится на оси цилиндра.

3) Манометрическая трубочка имеет такой же вид, как показано на рис. 190, но обе части трубочки у муфты C скреплены друг с другом. Следовательно, и часть AC неподвижна относительно земли. Трубочка AC , находящаяся в сосуде, достаточно тонка и не влияет на движение жидкости. Край отверстия A расположен горизонтально.

685. В сосуде, изображенном на рис. 189, над водой находится масло, так что высота слоя масла в центре равна 2 см . Какую форму принимает теперь поверхность воды при вращении сосуда около вертикальной оси и как изменится высота уровня в трубочке, если плотность масла $0,8 \text{ г/см}^3$?

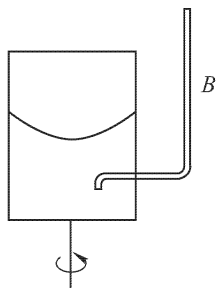


Рис. 189

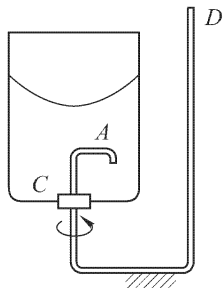


Рис. 190

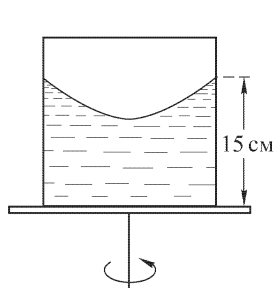


Рис. 191

686. Вращающаяся в сосуде вода приняла форму, изображенную на рис. 191. Высота воды у стенки сосуда $h = 15$ см. Найти силу F , действующую на вертикальную полоску стенки сосуда шириной в 1 см.

687. Цилиндрический сосуд радиуса R с налитой в него идеальной несжимаемой жидкостью вращается вокруг своей геометрической оси, направленной вертикально, с угловой скоростью ω . Определить скорость истечения струи жидкости через малое отверстие в боковой стенке сосуда при установившемся движении жидкости (относительно сосуда).

688. Некто предложил следующий проект вечного двигателя. Сосуд A (рис. 192) плотно окружен кольцевым желобом C с трубкой B ; стенки сосуда имеют отверстия E , через которые жидкость из сосуда проходит в желоб C и трубку B . Сосуд A может вращаться, а желоб C остается при этом в покое. Легко видеть, что при вращении возникает движение жидкости по трубке B , если она предварительно вся была заполнена жидкостью. При равномерном вращении сосуда A жидкость будет переливаться через трубку B , и струю жидкости можно использовать для приведения во вращение водяного колеса D . Автор проекта предлагал часть работы водяного колеса, через специальную передачу (на рисунке не показана), использовать на преодоление трения при равномерном вращении сосуда. Почему не будет работать такой двигатель?

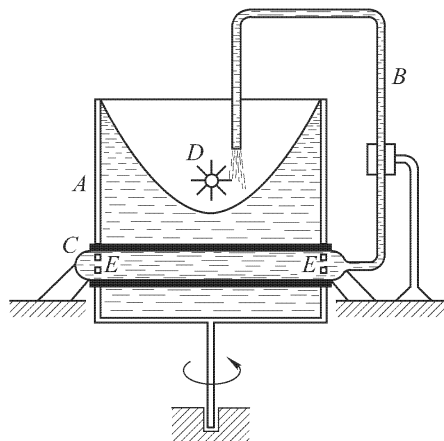


Рис. 192

689. В боковой стенке сосуда имеется отверстие, нижний край которого находится на высоте h (рис. 193). При каком горизонтальном ускорении a сосуда налитая в него жидкость не будет выливаться из отверстия, если в покое сосуда (при закрытом отверстии) жидкость была налита до высоты H ?

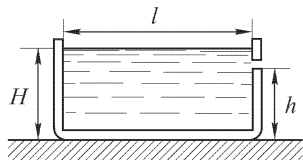


Рис. 193

690. Сосуд прямоугольной формы, наполненный водой, может без трения перемещаться вдоль горизонтальных рельсов (рис. 194). В боковой стенке сосуда вблизи его дна сделано малое отверстие, закрытое пробкой. Если вынуть пробку, то под действием силы реакции вытекающей струи сосуд придет в движение. Определить скорость этого движения, когда вся

жидкость вытечет из сосуда. Массу сосуда в течение всего времени движения считать пренебрежимо малой по сравнению с массой воды. (В конце движения это условие перестанет выполняться. Обсудить, как это обстоятельство повлияет на точность окончательного результата.) Негоризонтальностью поверхности жидкости во время движения пренебречь.

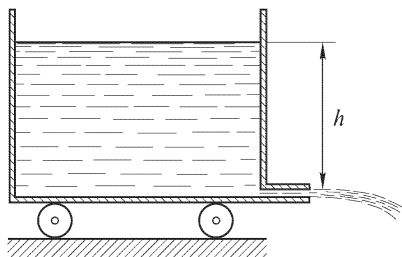


Рис. 194

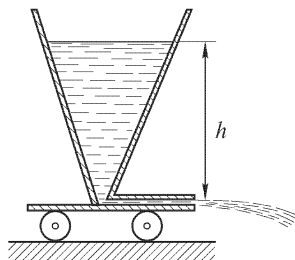


Рис. 195

691. Решить предыдущую задачу в предположении, что сосуд имеет коническую форму (рис. 195).

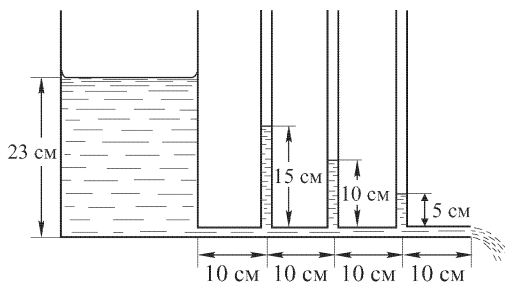


Рис. 196

692. На рис. 196 изображен известный опыт с течением вязкой жидкости по трубе, показывающий падение давления вдоль трубы. Как на основании данных, указанных на рисунке, определить скорость вытекающей жидкости, если плотность ее равна 1 г/см^3 ?

693. Для определения подъемной силы крыла важно знать, что при плоском безотрывном обтекании ¹⁾ тела идеальной жидкостью сила, действующая вверх со стороны потока на любой мысленно вырезанный

¹⁾ При плоском течении каждая трубка тока лежит в плоскости, параллельной некоторой заданной плоскости. Безотрывное течение — такое, при котором жидкость плавно обтекает тело без образования завихрений за телом.

вертикальный цилиндр сечения dS , выражается так:

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) dS,$$

где v_1 — скорость у верхней поверхности цилиндрика, v_2 — у нижней, ρ — плотность жидкости. Вывести приведенную формулу.

694. Модель корабля длиной $l_1 = 5$ м приводится в движение мотором с мощностью $P_1 = 5$ л.с. со скоростью $v_1 = 15$ км/ч. Какой мощности P требуется мотор для приведения в движение корабля длиной $l = 80$ м, геометрически подобной модели, если его движение гидродинамически подобно движению модели? Определить скорость корабля v при таких условиях.

695. Во сколько раз следует изменить угловую скорость вращения вертикального винта вертолета и мощность его двигателя, чтобы подъемная сила осталась неизменной при замене винта и самого корпуса вертолета геометрически подобными им, но с линейными размерами, увеличенными в α раз?

§ 13. Акустика

696. Пуля пролетела со скоростью 660 м/с на расстоянии 5 м от человека. На каком расстоянии от человека была пуля, когда он услышал ее свист?

697. Эхолот измеряет глубину моря по отражению звука от морского дна. Какова должна быть минимальная точность в определении времени отправления и возврата сигнала, если прибор рассчитывается на измерение глубин более 30 м с точностью до 5%? Скорость звука в воде 1500 м/с.

698. Паровоз подходит к наблюдателю со скоростью 20 м/с. Какую частоту основного тона гудка он услышит, если машинист слышит тон в 300 Гц? Насколько изменится частота гармоник гудка?

699. Два камертона дают 20 биений за 10 с. Частота колебаний одного камертона 256. Чему равна частота колебаний другого?

700. Камертон, излучающий звук частоты ν_0 , приближается к удаленной стене со скоростью u по нормали к ней. Неподвижный приемник звука помещается на линии движения камертона. Пусть: 1) камертон находится между стеной и приемником; 2) приемник находится между камертоном и стеной. Будет ли приемник звука регистрировать акустические биения, если скорость u много меньше скорости звука c ? Какова будет частота этих биений?

701. При измерении скорости звука методом пыльных фигур Кундта (рис. 197) длина полуволны звука в воздухе оказалась равной 6 см. Чему равна скорость v звука в стержне, если длина стержня равна 60 см и закреплен он в середине?

702. Длина закрытой с концов трубы равна 1,7 м. Подсчитать собственные частоты N_k этой трубы.

703. Найти частоты N_k , на которые будет резонировать труба длиной 1,7 м, закрытая с одного конца.

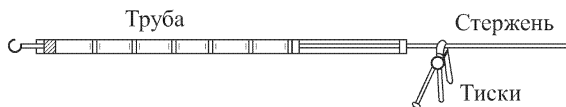


Рис. 197

704. В цилиндрической, открытой с концов трубе возбуждаются колебания, соответствующие второй гармонике. Изобразить графически распределение амплитуды смещения частиц вдоль трубы, распределение амплитуд скорости и амплитуд давления. Указать места, в которых потенциальная и кинетическая энергия имеют наибольшее значение.

705. Какова длина L струны, если при укорочении ее на 10 см частота колебаний повышается в полтора раза? Натяжение струны остается неизменным.

706. Две синусоидальные волны излучаются двумя источниками. Как найти движение частицы, находящейся на расстояниях d_1 и d_2 от этих источников, если распространение волн подчиняется принципу суперпозиции, источники колеблются в одинаковой фазе и с одинаковой частотой и если направления колебаний в рассматриваемой точке совпадают?

707. Определить адиабатическую сжимаемость воды, если скорость звука в воде примерно равна 1500 м/с. (Коэффициент сжимаемости вещества равен относительному уменьшению его объема при увеличении давления на 1 атм.)

708. В жидком гелии, обладающем при $T = 4,2$ К плотностью $0,15$ г/см³, скорость звука равна 220 м/с. Найти адиабатическую сжимаемость β жидкого гелия.

709. Стержень с закрепленными концами имеет длину $l = 1$ м. При трении стержень издает звук, основная частота которого $\nu_0 = 700$ Гц. Какова скорость звука c в стержне? Какие обертоны может иметь звук, издаваемый стержнем?

710. Две струны имеют одинаковую длину и натяжение. Как относятся периоды их собственных колебаний, если диаметр одной струны в два раза больше диаметра другой? Струны сделаны из одного материала.

711. Как следует изменить натяжение струны, чтобы она давала тон в три раза более низкий?

712. Почему скорость звука в идеальном газе не зависит от давления, а зависит только от температуры?

713. Подсчитать максимальное ускорение и максимальную скорость частицы воздуха в ультразвуковой волне с частотой 50 000 Гц и амплитудой смещения частицы 0,1 мкм. (Законы распространения ультразву-

ковых волн в воздухе впервые были исследованы Н. П. Неклепаевым в лаборатории П. Н. Лебедева.)

714. Струна звучит с частотой 400 Гц. В каком месте и как следует задержать движение струны, чтобы она звучала с частотой: 1) 800 Гц; 2) 1200 Гц? Можно ли, зажимая струну, понизить частоту ее звучания?

715. Показать, что для любой бегущей акустической волны относительное изменение давления dp/p в данной точке равно отношению скорости частицы к скорости звука, умноженному на $\gamma = c_p/c_v$, где c_p и c_v — теплоемкости вещества среды соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме.

716. Плоская бегущая акустическая волна может быть представлена на следующим уравнением:

$$y = 0,05 \sin(1980t - 6x),$$

где y — смещение частицы в направлении распространения волны в сантиметрах, t — время в секундах, x — расстояние в метрах по оси, вдоль которой распространяется волна. Найти: 1) частоту колебаний ν в секунду; 2) скорость c распространения волны; 3) длину волны λ ; 4) амплитуду колебаний скорости u каждой частицы и 5) амплитуду колебаний давления Δp , если давление p и объем v связаны законом адиабаты $pv^{1.4} = \text{const}$.

717. По одному направлению бегут две синусоидальные плоские волны со скоростями распространения v_1 и v_2 и длинами волн λ_1 и λ_2 соответственно. Найти скорость и перемещения в пространстве тех точек, где колебания, соответствующие каждой волне, имеют одинаковую фазу. Найти расстояние Λ между двумя подобными точками.

718. Понятие групповой скорости можно весьма наглядно иллюстрировать, разобрав следующий пример. Пусть идут рядом две команды спортсменов: мужская и женская. В каждой команде спортсмены идут цепочкой, один за другим, с интервалами в женской команде d_1 , в мужской d_2 . Женская команда движется со скоростью v_1 , мужская со скоростью v_2 . Через определенные промежутки времени мимо неподвижного наблюдателя проходит пара идущих рядом спортсменов. Если наблюдатель сам начнет двигаться, то он может эти промежутки времени уменьшить. С какой скоростью u должен двигаться наблюдатель, чтобы мимо него спортсмены проходили только парами?

719. Амплитуда колебаний давления звуковой волны $\Delta p = 100$ дин/см² (громкий звук). Найти поток энергии J , попадающей за 1 с в ухо человека. Считать площадь S уха равной 4 см² и ухо перпендикулярным к направлению распространения волны. Плотность воздуха $\rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$ г/см³, скорость звука 334 м/с.

720. Человек с хорошим слухом может еще слышать звук с колебанием давления до 0,001 дин/см² при частоте 2000 Гц. Подсчитать амплитуду A смещения частиц воздуха в такой волне.

721. Акустический резонатор представляет собой обычно шарообразную полость с нешироким горлом и отростком с очень малым от-

верстием на противоположной стороне (рис. 198). Акустическая волна приводит в колебание воздух в горле резонатора. Масса этого воздуха колеблется вдоль горла примерно как твердое тело, а воздух в полости по отношению к этой массе играет роль пружины, так как скорость частиц воздуха при колебаниях в горле велика по сравнению с их скоростью в шарообразной полости.

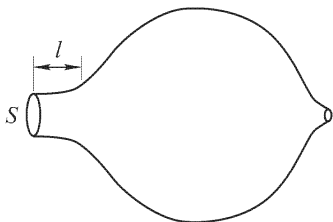


Рис. 198

Найти период собственных колебаний воздуха в резонаторе, считая известными площадь сечения горла S , его длину l , объем шаровой полости V и скорость звука в воздухе c . Воспользоваться аналогией с задачей 563 о колебаниях поршня, закрывающего цилиндр с газом.

722. Как изменится частота, на которую будет резонировать акустический резонатор, если его наполнить водородом вместо воздуха? (Плотность водорода относительно воздуха 0,069.)

§ 14. Специальная теория относительности ¹⁾

723. Вдоль оси X инерциальной системы отсчета K движется ракета со скоростью $V = 0,9c$ (c — скорость света), проходящая начало координат O в момент времени $t = 0$. В момент $t_1 = 9c$ вслед за ракетой посылается световой сигнал из точки O , а с ракеты — световой сигнал в точку O . Предполагая, что ракета движется в вакууме, найти: 1) момент времени t_2 , когда световой сигнал, посланный из точки O , достигнет ракеты; 2) момент времени t_3 , когда сигнал, посланный с ракеты, придет в точку O ; 3) на каком расстоянии x_2 от точки O будет ракета, когда к ней придет сигнал из точки O ; 4) когда вернется в точку O посланный из нее сигнал, если он отражается от зеркала, установленного на ракете (момент времени t_4)?

724. Найти связь между промежутком собственного времени между двумя событиями (т. е. в инерциальной системе отсчета, в которой рассматриваемые события наступают в одной точке) и промежутком времени между этими же двумя событиями в другой инерциальной системе отсчета, в которой эти два события наступают уже в разных точках (и где отсчитывается уже координатное время), с помощью следующего мысленного эксперимента.

¹⁾ Поскольку разделу «Специальная теория относительности» лишь в последнее время стали уделять заметное внимание в курсе общей физики, а в этот задачник впервые вводятся задачи, связанные с СТО, было сочтено целесообразным привести в виде Приложения основные предположения и определения, принятые в СТО (см. стр. 236). Как в условиях, так и в решениях задач данного параграфа приводятся ссылки на формулы этого Приложения.

В системе K' на оси z' на расстоянии z'_0 от начала отсчета O' закреплено зеркало (рис. 199). Из источника, находящегося в O' , вдоль z' направляют световой сигнал, посылка и обратный приход которого фиксируются по часам, покоящимся в O' . Эти часы отсчитывают промежуток собственного времени $\Delta\tau_0$. Эти же два события (посылку и прием сигнала) рассмотрите в системе K (рис. 200) и найдите промежуток времени между двумя этими событиями в этой системе. Считая, что в момент посылки сигнала начала отсчета O и O' совпадают, а часы в этот момент в обеих системах в точке, где совпадают начала O и O' , отсчитывают моменты времени $t = 0$ и $t' = 0$, найти показания часов из систем K и K' для события «возвращение сигнала». Расстояния по направлениям, перпендикулярным скорости относительного движения, определенные во всех системах, одинаковы.

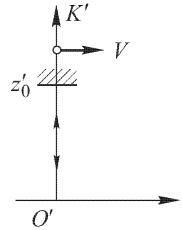


Рис. 199

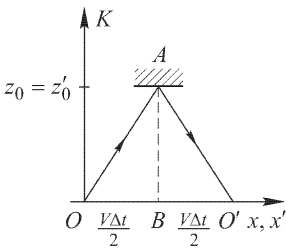


Рис. 200

725. Космический корабль с постоянной скоростью $V = (24/25)c$ движется по направлению к центру Земли. Какое расстояние в системе отсчета, связанной с Землей, пройдет корабль за промежуток времени $\Delta t' = 7$ с, отсчитанный по корабельным часам? Вращение Земли и ее орбитальное движение не учитывать.

726. Найти связь между собственной длиной стержня l_0 и его длиной, измеренной в системе отсчета K , относительно которой он движется со скоростью V , на

основе следующего мысленного эксперимента. В системе K' покоящийся стержень расположен на оси x' , так что один его конец находится в O' ($x'_1 = 0$), а другой в точке $x'_2 = l_0$ (рис. 201).

Из O' вдоль стержня посылается световой сигнал, который, отражаясь от зеркала, установленного в точке x'_2 , возвращается обратно. В O' есть часы, отмечающие моменты посылки и возвращения сигнала; разность показаний этих часов определяет интервал собственного времени $\Delta\tau_0$. Длина стержня l_0 равна $c\Delta\tau_0/2$. Рассмотрите эти же два события (посылку и приход светового сигнала) в системе K и, пользуясь постулатом об инвариантности скорости света в вакууме во всех системах отсчета, найдите длину стержня l в системе K (рис. 202) и связь между l и l_0 .

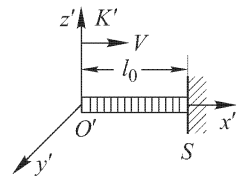


Рис. 201

727. Космонавт находится в неосвещенном космическом корабле, движущемся относительно Земли со скоростью, очень близкой к скорости света c . На небольшом расстоянии от космонавта расположено

зеркало так, что линия, соединяющая космонавта и зеркало, параллельна скорости корабля. Увидит ли космонавт свое изображение в зеркале после включения источника света, расположенного рядом с космонавтом? (Загадка Эйнштейна.)

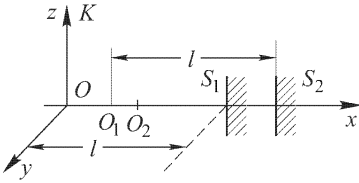


Рис. 202

728. 1) Фронт плоской световой волны, идущей в вакууме, падает под углом α на плоскую поверхность AB фотолюминесцирующего вещества. Найти скорость v перемещения границы свечения Φ вдоль прямой AB . Можно ли считать эту скорость v скоростью распространения некоторого сигнала вдоль прямой AB (рис. 203)?

2) Световой «зайчик» от пульсара NP-0532 в Крабовидной туманности перемещается по поверхности Земли со скоростью $v \sim 10^{24}$ см/с (угловая скорость вращения пульсара ~ 200 с $^{-1}$, а расстояние до пульсара порядка 10^{21} см). Можно ли скорость v перемещения «зайчика» пульсара рассматривать как скорость распространения светового сигнала?

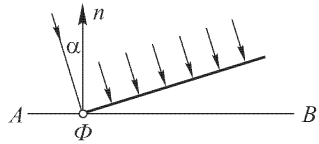


Рис. 203

729. Из начала отсчета системы K вдоль оси x через интервал времени T (по часам K) посылаются кратковременные световые импульсы. Найти интервал времени, через который эти импульсы будут приходить к наблюдателю в системе K' , учитывая также относительность промежутков времени между событиями (см. задачу 724). Рассмотреть случаи удаления и сближения наблюдателя и источника. Переходя от периодов к частотам, получить релятивистские формулы для продольного эффекта Доплера.

730. Используя преобразования Лоренца, показать, что: 1) два события, одновременно наступившие в одной системе отсчета K , во всех других системах отсчета наступают в разные моменты времени (если только они не наступили в одной и той же точке системы K); 2) два события, наступившие в одной и той же точке системы K , во всех других системах отсчета наступают в точках, имеющих различные координаты (если только в системе K они не были одновременны).

731. Неподвижный в системе K наблюдатель может измерить длину движущегося стержня следующим образом. Пусть стержень ориентирован вдоль общей оси x, x' и покоится в K' . Наблюдателю из K известна (он может ее измерить) скорость системы K' (и стержня) V . В руках наблюдателя часы, по которым он отмечает моменты прохождения мимо него начала и конца стержня t_1 и t_2 ; пусть $\Delta t = t_2 - t_1$. Тогда он считает длиной стержня величину $V(t_2 - t_1)$. Показать, что и при таком определении длины справедлива формула $l = l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$, где l_0 — собственная длина стержня.

732. Получить формулу, связывающую промежуток собственного времени между двумя событиями $\Delta\tau_0$ с промежутком времени между теми же двумя событиями $\Delta t'$, отсчитанными в любой другой системе отсчета (K'):

$$\Delta\tau_0 = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\Delta t'}.$$

Если два события происходят в системе K в одной и той же точке, но в разные моменты времени t_1 и t_2 , то $\Delta\tau_0 = t_2 - t_1$. Наблюдатель любой другой системы, определив координаты этих же событий, установит расстояние между точками, в которых они наступили, и, разделив его на известную ему относительную скорость систем отсчета, получит величину $\Delta t'$.

733. Стержень, собственная длина которого равна l_0 , покоится в системе отсчета K' ; он расположен так, что составляет с осью x' угол φ' . Какой угол составляет этот стержень с осью x другой системы отсчета K ? Чему равна длина этого стержня в системе K ?

734. Пользуясь формулами преобразования Лоренца, показать, что в момент $t = 0$ (в системе K) все часы системы K' , находящиеся на положительной оси x , отстают от часов системы K , а все часы из K' на отрицательной оси x опережают часы системы K . Разница показаний часов возрастает по мере удаления от начала координат O по закону

$$t' = -\Gamma \frac{V}{c^2} x.$$

Аналогично в момент $t' = 0$ (в системе K') все часы системы K , находящиеся в точках $x' > 0$ оси x' , опережают часы из системы K' , а находящиеся в точках $x' < 0$ — отстают. Разница показаний часов возрастает по мере удаления от начала координат O' по закону

$$t = \Gamma \frac{V}{c^2} x'.$$

В чем причина различия в знаках в полученных формулах? Не нарушается ли этим равноправие систем K и K' ? Что нужно сделать, чтобы добиться симметрии в формулах?

735. Стержень, собственная длина которого равна l_0 , расположен параллельно оси x и движется в положительном направлении оси y . Скорость его в системе K равна w . В системе K' этот же стержень оказывается несколько наклоненным относительно положительного направления оси x' . Объясните этот результат, не пользуясь преобразованиями Лоренца. Пусть центр стержня проходит через точку $x = 0$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$ в момент времени $t = t' = 0$. Вычислите угол φ' , образованный стержнем и осью x' в системе K' .

736. Метровый стержень, расположенный параллельно оси x системы K , движется вдоль оси x со скоростью V . Тонкая пластинка, параллельная плоскости xz системы K , движется вверх вдоль оси y со скоростью w . В пластинке проделано круглое отверстие диаметром

в 1 м, центр которого лежит на оси y . Середина метрового стержня оказывается в начале координат системы K в тот самый момент, когда движущаяся вверх пластинка достигает плоскости $y = 0$. Но метровый стержень относительно K испытывает лоренцево сокращение и, следовательно, свободно проходит через отверстие. Соударения между стержнем и пластинкой по этим соображениям не произойдет.

Однако рассмотрим это «столкновение» с точки зрения системы K' , связанной со стержнем. В системе K' стержень не подвержен сокращению, поскольку он покоится, зато лоренцево сокращение испытывает отверстие в пластине. Следовательно, по этим соображениям соударение между метровым стержнем и отверстием будто бы неизбежно.

Произойдет ли соударение стержня с пластинкой в действительности? (Парадокс метрового стержня.)

737. Имеются три инерциальные системы отсчета K , K' , K'' , все оси координат которых параллельны друг другу. Система K' движется равномерно и прямолинейно со скоростью V_1 относительно системы K , причем вектор ее скорости параллелен осям x . Система K'' движется с постоянной скоростью V_2 , параллельной V_1 , относительно системы K' . В начальный момент времени начала координат всех трех систем совпадают между собой.

Показать, что результат последовательно выполненных преобразований Лоренца для координат и времени при переходе от системы K к системе K' и затем от системы K' к системе K'' эквивалентен преобразованию Лоренца, осуществляемому непосредственно при переходе от системы K к системе K'' , с соответствующим значением их относительной скорости.

Показать, что результат двойного преобразования Лоренца в этом случае коммутативен относительно скоростей V_1 и V_2 систем координат K' и K'' .

738. Пусть система K' движется относительно системы K так, как описано в условии предыдущей задачи, но система K'' движется равномерно относительно системы K' со скоростью V_2 , параллельно осям y . Выразить координаты x'' , y'' , z'' и время t'' , измеряемые в системе K'' , через x , y , z и t в системе K . Заметьте, что в этом случае окончательный результат преобразования времени $t'' \rightarrow t$ и координат x'' , y'' , $z'' \rightarrow x$, y , z не коммутативен относительно скоростей V_1 и V_2 (ср. предыдущую задачу).

739. Пусть в системе K движение частицы задано выражениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Определяя скорость обычными формулами, например, $v_x = dx/dt$ и т.д., и применяя преобразования Лоренца, найти формулы преобразования компонент скоростей при переходе от системы отсчета K к системе K' , где соответственно $v'_x = dx'/dt'$ и т.д.

740. 1) Используя формулы преобразования компонент скорости, полученные в предыдущей задаче, рассмотреть случай, когда в системе K частица движется вдоль оси x , так что $v_x = v$. Найти формулу преобразования величины скорости для этого случая.

2) Для случая движения частицы вдоль оси x , рассмотренного в п. 1, доказать следующую теорему. Если скорость движения частицы v в системе K меньше c , то в любой другой системе отсчета ее скорость также меньше c . При этом предполагается, что относительная скорость систем отсчета также всегда меньше c .

741. С помощью формулы преобразования скоростей (см. задачу 740) получить результат опыта Физо. В этом опыте в лабораторной системе отсчета определялась скорость света в воде, текущей со скоростью V . В результате опыта Физо получил для скорости света значение $v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, где n — показатель преломления воды. Какого порядка члены относительно V/c отброшены при выводе теоретической формулы?

742. Пусть в системе K две частицы движутся вдоль оси x навстречу друг другу со скоростями $v_1 = \alpha_1 c$ и $v_2 = \alpha_2 c$, где α_1 и α_2 больше $1/2$, но меньше 1. Найти скорость сближения этих частиц в системе K . Эта скорость превосходит c , что, однако, не противоречит основам теории относительности. Почему? Найти относительную скорость частиц согласно формуле преобразования скоростей и убедиться, что эта скорость всегда меньше c .

743. 1) В системе K' частица движется в плоскости $x'y'$ со скоростью v' под углом θ' к оси x' . Найти абсолютную величину скорости v в системе K и угол θ , который составляет скорость частицы с осью x .

2) Пусть в системе K' луч света распространяется в вакууме вдоль оси y' . Найти угол, который образует этот луч света с осью y системы K (угол аберрации), применяя формулы, полученные в предыдущей задаче. Оси y и y' направить вниз. Найти выражение для угла аберрации классической теории, т. е. применяя преобразования Галилея и классическую формулу «сложения» скоростей. На какой порядок относительно величины V/c отличаются классическая и релятивистская формулы?

744. Проверить, что преобразования Лоренца оставляют инвариантным интервал между событиями.

745. Имея в виду, что положение частицы в данный момент времени является событием, записать интервал между двумя такими событиями в системе K , относительно которой она движется, и в системе K' , относительно которой она покоится. В силу инвариантности интервала еще раз получить связь между промежутком собственного времени между двумя событиями и промежутком координатного (лабораторного) времени между теми же событиями.

746. Найти условие того, что можно подобрать такую систему K' , в которой два события, происходящие в системе отсчета K в разных точках пространства и в разные моменты времени, происходили бы: 1) в одной точке системы K' ; 2) одновременно в системе K' ; 3) наступали бы в системе K' в одной точке и в один и тот же момент времени.

747. Исходя из классического и релятивистского уравнений движения, вывести выражения для энергии частицы.

748. Найти зависимость координаты и скорости частицы от времени, если движение одномерное, сила постоянна, а уравнение движения — релятивистское. Сравнить полученное решение с решением для того же случая, но для классического уравнения. Убедиться, что при решении релятивистского уравнения — в соответствии с основными принципами теории относительности — скорость частицы в любой момент времени остается меньше c .

749. Сравнить величину релятивистского и классического импульсов электрона при скорости $v = (24/25)c = 0,96c$.

750. Найти выражение для трехмерного ускорения частицы из релятивистского уравнения движения (9).

751. Рассмотреть движение электрона в плоском конденсаторе (напряженность электрического поля \mathbf{E}) на основе классического и релятивистского уравнений динамики. Начальные условия: в момент $t = 0$ электрон влетает в конденсатор со скоростью v_0 , параллельной пластинам. Найти скорость и координаты электрона как функцию времени и траекторию электрона. Сравнить классический и релятивистский случаи и убедиться, что при условии $(v/c) \ll 1$ релятивистские результаты переходят в классические. Почему проекция скорости электрона на направление, параллельное пластинам конденсатора, остается постоянной в классическом случае и убывает в релятивистском?

752. Найти скорость частицы (заряд e , масса m), прошедшей разность потенциалов V без начальной скорости. Найти предельные выражения для скорости: 1) для классического случая ($v \ll c$) и 2) для ультрарелятивистского ($v \approx c$).

753. Две одинаковые частицы движутся в лабораторной системе отсчета K навстречу друг другу с одинаковыми релятивистскими скоростями. Система K является для них системой центра масс и их энергия в этой системе равна $2\mathcal{E}$ (\mathcal{E} — энергия каждой частицы). Найти суммарную энергию частиц в системе отсчета, где одна из частиц покоится. Найти выигрыш в энергии столкновения, если две частицы, каждая с энергией \mathcal{E} , идут навстречу друг другу, по сравнению с тем случаем, когда одна частица с энергией \mathcal{E} падает на неподвижную.

754. Показать, что релятивистское уравнение движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле совпадает с классическим уравнением движения при тех же условиях, но с некоторым другим значением массы.

755. Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e и массой m при начальной полной энергии \mathcal{E}_0 в тормозящем однородном электрическом поле, параллельном начальной скорости частицы.

756. Какую часть энергии покоя частицы должна составлять релятивистская кинетическая энергия, чтобы относительная ошибка, полученная при использовании нерелятивистского выражения для кинети-

ческой энергии, составляла бы 1%? Найти соответствующую энергию для протона и электрона.

757. Выразить в мегаэлектронвольтах энергию покоя электрона и протона.

758. На 1 м^2 поверхности, перпендикулярной направлению солнечных лучей, около Земли вне ее атмосферы приходит примерно 1,4 кВт световой энергии от Солнца. (Значение $1,4 \text{ кВт/м}^2$ называется солнечной постоянной.)

Какое количество массы теряет Солнце в секунду за счет излучения света? На какое время хватит 0,1 массы Солнца, чтобы поддерживать его излучение? Расстояние от Солнца до Земли составляет около $150 \times 10^6 \text{ км}$. Масса Солнца $2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$.

759. Доказать с помощью преобразований (17) справедливость соотношения (18), т. е. инвариантность модуля 4-вектора.

760. Показать, что из формул преобразования компонент 4-скорости получаются формулы преобразования 3-скорости, выведенные из преобразований Лоренца в задаче 739.

761. Найти компоненты 4-вектора ускорения $\mathbf{W} = d\mathbf{V}/d\tau$. Найти формулы преобразования 3-ускорения при переходе от системы K' к системе K двумя способами: 1) способом, использованным в задаче 739, т. е. составив выражения dv_x и т. д. из (5) и деля их на dt из (3); 2) преобразуя компоненты 4-ускорения согласно (17). Объяснить, почему равноускоренное движение в одной системе отсчета — уже не равноускоренное во всех остальных.

762. Найти преобразование компонент 4-импульса частицы при переходе от собственной системы K^0 к любой другой системе отсчета. (Собственной системой отсчета частицы называется система, где частица покоится.)

763. Доказать, что квадрат модуля 4-вектора энергии-импульса \mathbf{P} — определяет массу покоя частицы. Найти формулу, связывающую релятивистские энергию и импульс частицы с ее массой; найти выражение энергии релятивистской частицы через ее импульс.

764. В собственной системе отсчета K^0 на частицу действует трехмерная сила \mathbf{F} . Преобразуя компоненты 4-силы, найти компоненты 3-силы в произвольной системе отсчета K' .

765. Записать формулы преобразований Лоренца, 3-скоростей и 3-ускорений для случая произвольного направления относительной скорости систем отсчета K и K' .

766. Выразить релятивистский импульс частицы, масса которой равна m , через ее релятивистскую кинетическую энергию.

767. Найти выражение 3-скорости частицы через ее релятивистский импульс.

768. По заданной релятивистской энергии \mathcal{E} и массе частицы m найти 3-скорость частицы. Рассмотреть отдельно нерелятивистский ($v \ll c$) и ультрарелятивистский ($v \approx c$) пределы.

769. На покоящуюся частицу массы m_1 налетает частица массы m_2 , кинетическая энергия которой равна T_2 . После столкновения частицы слипаются и движутся как целое. Найти массу образовавшейся частицы. При каких условиях эта масса приблизительно равна сумме масс исходных частиц? Найти скорость образовавшейся частицы.

770. При распаде некоторой частицы появляются две частицы с массами m_1 и m_2 . Из опыта известны абсолютные величины импульсов p_1 и p_2 этих частиц и угол θ между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы.

771. Покоящееся тело массы M распадается на две части с массами m_1 и m_2 . Вычислить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов распада.

772. Частица массы m испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Найти кинетическую энергию T_1 рассеянной частицы по кинетической энергии T_0 налетающей частицы и углу рассеяния θ_1 .

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1. Кинематика

1. $|v| = \sqrt{5}$ м/с; вектор скорости составляет с берегом реки, от которого удаляется лодка, угол $\alpha = 63^\circ 30'$.

2. Курс лодки должен составлять угол в 39° с прямой, соединяющей пристани; $v = 0,62$ м/с.

3. Труба должна быть наклонена от вертикали вперед, по ходу тележки, на угол $\alpha = \text{arctg}(v_7/v_k)$.

4. $v = 9,3$ м/с; угол 165° относительно курса корабля.

5. Расстояние между самолетами возрастает каждый час на величину 500 км; $S = 1500$ км.

6. $\varphi_{\text{опт}} = 105^\circ$ (φ — угол между прямыми AB и BC).

7. Под углом $\varphi = \arccos[(v_1 + v_2)/v_0]$.

8. $v_1 = \frac{L}{2} \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} = 7,5$ км/ч, $v_2 = \frac{L}{2} \frac{t_2 + t_1}{t_1 t_2} = 17,5$ км/ч.

9. $v = 5$ км/ч.

10. 1) $\varphi_1 = \text{arctg}(v_0/v_1)$, 2) $\varphi = \text{arctg}[v_0/(v_1 + v_2)]$, 3) $v' = \sqrt{v_1^2 + v_0^2}$, $v'' = \sqrt{(v_1 + v_2)^2 + v_0^2}$.

11. 14,1 см/с.

12. $t_{\text{макс}} = ld/(fv \sin^2 \alpha)$.

Указание. Поезд находится от фотографа на расстоянии $l/\sin \alpha$. Составляющая скорости поезда в направлении, перпендикулярном к лучу зрения (только она вызывает размытие изображения), есть $v \sin \alpha$. Скорость движения изображения поезда на фотопластинке $v_{\text{из}} = (vf \sin^2 \alpha)/l$, $t_{\text{макс}} = d/v_{\text{из}}$.

13. $S_1 = v_0 t_1 + at_1^2/2$, $S_2 = (v_0 + at_1)t_2 + at_2^2/2$. Так как $S_1 = S_2 = S$, то

$$a = \frac{2S(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} \approx -3 \text{ м/с}^2, \quad v_0 = \frac{S_1}{t_1} - \frac{at_1}{2} \approx 11,5 \text{ м/с}.$$

14. См. рис. 204.

К рис. 204 а. Зависимость скорости от времени описывается соотношением $v = at$.

К рис. 204 б. График составлен из чередующихся отрезков горизонтальных ($v = \text{const}$ при $a = 0$) и наклонных ($v = at$ при $a = \text{const} \neq 0$) прямых.

К рис. 204 в. График составлен из отрезков горизонтальных прямых и отрезков парабол, описываемых уравнением вида $v = kt^2/2$ (при $a = kt$), если при построении этих парабол принимать за начало координат точки 1, 3, 5.

К рис. 204 г. График составлен из отрезков парабол. От точек 0, 2, 4, 6 построены параболы, удовлетворяющие уравнению вида $v = kt^2/2$. В пределах

участков оси времени 1–2, 3–4, 5–6 расположены отрезки парабол, удовлетворяющие уравнению $v = v_{\max} - kt^2/2$ ¹⁾.

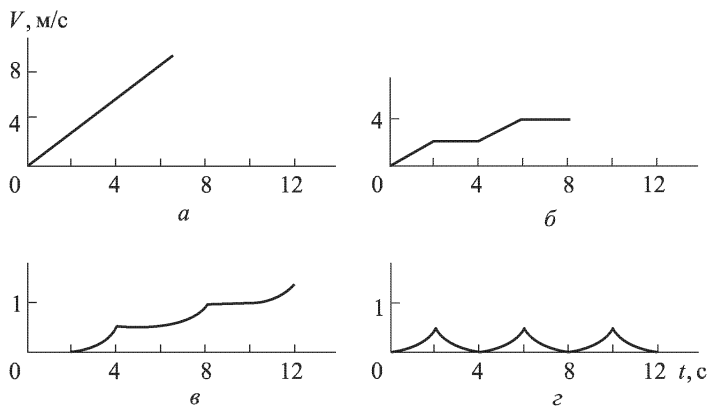


Рис. 204

15. См. рис. 205 и 206.

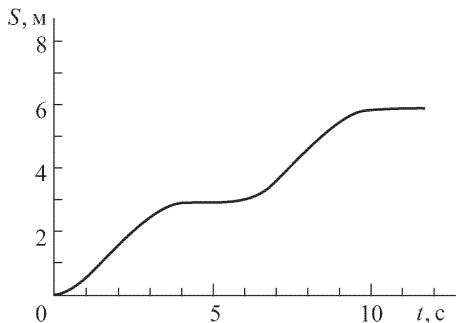


Рис. 205

К рис. 205. На участке 0–1 зависимость S от t описывается уравнением $S = at^2/2$, на участках 1–3, 3–4, 4–6 — уравнениями

$$S = v_{\max} \cdot t, \quad S = v_{\max} \cdot t - at^2/2, \\ S = \text{const} \quad \text{и т. д.}$$

К рис. 206. На участке 0–1 $dv/dt = a = \text{const} > 0$. На участках 1–3 и 3–4 — соответственно $a = 0$ и $a = \text{const} < 0$ (см. примечание к ответу задачи 14).

¹⁾ Функциональные зависимости кинематических величин от времени, приводимые здесь и в решении задачи 15, отыскиваются путем графического или аналитического дифференцирования и интегрирования.

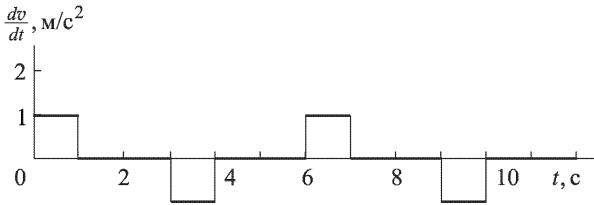


Рис. 206

16. $v = \sqrt{2gh} \approx 6,2 \text{ м/с}$.

17. $S = 2v_0t$.

18. $v_0 = 82 \text{ м/с}$.

19. В наивысшей точке траектории нормальное ускорение будет максимальным и равным ускорению g свободного падения; во всех остальных точках траектории оно равно проекции g на нормаль к траектории в этой точке.

20. $x = v\sqrt{2h/g} (1 + \alpha)/(1 - \alpha)$.

21. 1) $v_x = v_0 \cos \varphi$, $v_y = v_0 \sin \varphi - gt$, $v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 \sin \varphi \cdot gt}$; 2) $T = \frac{2v_0 \sin \varphi}{g}$;

3) $\text{tg } \alpha = \text{tg } \varphi - \frac{gt}{v_0 \cos \varphi}$; 4) $x = v_0 t \cos \varphi$, $y = v_0 t \sin \varphi - \frac{gt^2}{2}$; 5) $y = x \text{tg } \varphi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \varphi}$;

6) $h_{\text{макс}} = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g}$; 7) $l = (v_0^2 \sin 2\varphi)/g$, $\varphi^* = 45^\circ$.

22. См. рис. 207.

23. $h_1 : h_2 : h_3 = 3 : 2 : 1$; $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$.

24. $l \approx 40 \text{ м}$, $\varphi \approx 38^\circ 40'$.

25. $|v|^2 = v_1^2 + v_0^2 - 2gtv_0 + g^2t^2$, $\text{tg } \alpha = (v_0 - gt)/v_1$, где α — угол вектора \mathbf{v} с горизонтом; уравнение траектории снаряда будет

$$y = \frac{v_0}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2,$$

если совместить начало координат с той точкой пространства, в которой был выпущен снаряд.

26. $y = (b/c)x$, $v = 2t\sqrt{c^2 + b^2}$, $a = 2\sqrt{x^2 + b^2}$.

27. Точка движется по эллипсу $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ с ускорением $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор движущейся точки, направленный от центра эллипса.

Решение. В точках пересечения большой оси с эллипсом скорость $v = |\dot{y}| = |\omega B \cos \omega t| = \omega B$, ускорение нормальное и равно $a = |\ddot{x}| = \omega^2 A$. То же ускорение можно выразить через радиус кривизны эллипса: $a = v^2/R = \omega^2 B^2/R$. Сравнивая результаты, получим $R = B^2/A$. В точках пересечения эллипса с малой осью $R = A^2/B$.

28. По гиперболе $(x^2/A^2) - (y^2/B^2) = 1$ с ускорением $\mathbf{a} = k^2 \mathbf{r}$.

29. Эллипс $(x^2/A^2) + (y^2/B^2) = 1$.

30. $\text{tg } \alpha = v\sqrt{2/hg}$, $l = v\sqrt{2h/g}$.

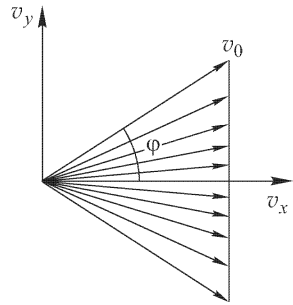


Рис. 207

31. $v = l\sqrt{g/(2\Delta h)}$, где g — ускорение свободного падения.

32. $v_0 = \sqrt{\frac{lg \cos \alpha}{2 \cos \beta \sin(\beta - \alpha)}}$.

33. Грузы, двигаясь по желобам с ускорением $g \sin \alpha$, должны пройти до встречи с окружностью пути $l = 2R \sin \alpha$, где α — угол желоба с горизонтом, а R — радиус окружности. Поэтому они достигают окружности через промежуток времени $\tau = \sqrt{4R/g}$, не зависящий от угла наклона желоба.

36. $v = \sqrt{la}$.

37. Если $v = v_0 t_0 / t$, то $a = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_0 t_0}{t} \right) = -\frac{v_0 t_0}{t^2} = -\frac{v^2}{v_0 t_0}$ для $t > t_0$.

38. 1) $S = v_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0}$ для $t > t_0$; 2) $v = v_0 \exp\left(-\frac{S}{v_0 t_0}\right)$ для $S > 0$.

Решение. $v = dS/dt = v_0 t_0 / t$, следовательно,

$$\int_0^S dS = v_0 t_0 \int_{t_0}^t \frac{dt}{t}, \quad \text{или} \quad S = v_0 t_0 \ln \frac{t}{t_0} = v_0 t_0 \ln \frac{v_0}{v},$$

откуда можно получить и ответ на второй вопрос.

39. 1) $y = \frac{g}{2(v_{\text{сам}} + v_{\text{снар}})^2} x^2$, начало системы координат в точке выстрела;

2) $y = gx^2/2v_{\text{снар}}^2$, начало системы координат на самолете; 3) $y = -gx^2/2v_{\text{снар}}^2$, начало системы координат на снаряде. Ось X всюду направлена горизонтально по курсу самолета, ось Y направлена вертикально вниз.

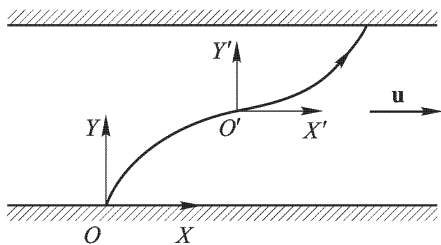


Рис. 208

40. Траектория состоит из ветвей двух парабол (рис. 208): $y = \sqrt{\frac{v dx}{u}}$ и $y = d - \sqrt{\frac{d^2 - v dx}{u}}$; $x_0 = \frac{ud}{2v}$.

Решение. Написанные уравнения находим для первой параболы из условий:

$$\text{при } t = 0 \quad x = 0 \quad \text{и} \quad y = 0, \quad (40.1)$$

и уравнений

$$v_y = v = \text{const} \quad \text{или} \quad y = vt, \quad (40.2)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ky = \frac{2u}{d} y. \quad (40.3)$$

Интегрирование уравнения (40.3) при учете (40.1) и (40.2) дает $x = \frac{uv}{d} t^2$. Исключая время t , находим уравнение ветви первой параболы. Подставляя в него $y = d/2$, находим снос лодки на первой половине ее пути. Уравнение ветви второй параболы легко получить следующим образом. Выберем новое начало координат $X'O'Y'$ в той точке O' на середине реки, которой достигнет лодка, пройдя первую половину пути. Теперь начальные условия движения запишутся так: при $t = 0$ $x' = 0$ и $y' = 0$. Далее, $y' = vt$, но $v_x = u - \frac{2u}{d} y'$.

Решая эти уравнения, как и в первом случае, находим $y' = \frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{vx'd}{u}}$. Возвращаясь к прежним координатам, при помощи соотношений $y = y' + \frac{d}{2}$ и $x = x' + \frac{ud}{4v}$, находим уравнение ветви второй параболы в прежних координатах. Очевидно, что эта ветвь второй параболы будет перевернутым повторением ветви первой параболы.

41. Первая половина траектории лодки будет описываться уравнением $y = \sqrt{3vx/k}$, вторая половина траектории будет, как и в предыдущем случае, обращенным повторением первой ветви. Величина сноса лодки $x_0 = kd^3/12v$.

42. Там, где кривизна траектории наибольшая, т. е. около точки A .

43. $v = 2\pi R/T = 3650 \text{ км/ч}$; $a = 4\pi^2 R/T^2 = 35 \text{ км/ч}^2$.

44. Прямые, параллельные оси времени.

45. $\omega = 0,00093 \text{ с}^{-1} \approx 0,001 \text{ с}^{-1}$.

46. $v \approx 7,2 \text{ км/с}$.

47. $a_N \approx 0,7g$.

48. $v = 1670 \cos \varphi \text{ км/ч}$.

49. $v \approx 30 \text{ км/с}$.

50. $a_N = 0,03 \cos \varphi \text{ м/с}^2$ и $a_R = 0,03 \cos^2 \varphi \text{ м/с}^2$, где φ — географическая широта точки; соответственно для Москвы имеем $a_N = 0,017 \text{ м/с}^2$ и $a_R \approx 0,01 \text{ м/с}^2$.

51. $T = T_1 T_2 / (T_1 + T_2) = 116$ земных суток.

52. Тень движется с запада на восток со скоростью

$$v = 2\pi(R_L/T_{\text{мес}} - R_3/T_{\text{сут}}) \approx 0,5 \text{ км/с},$$

где $T_{\text{сут}}$ — продолжительность суток, $T_{\text{мес}}$ — продолжительность месяца.

53. Тень будет двигаться вверх с постоянным ускорением

$$a = 4\pi^2 R/T_{\text{сут}}^2 = 3,4 \text{ см/с}^2, t = \sqrt{2h/a} = 4 \text{ мин.}$$

54. $\alpha = \pi N^2/n$.

55. $n \approx 9$ об/с.

56. $a_N \approx 950 \text{ м/с}^2 \approx 95g$.

57. $\alpha = 4 \text{ рад/с}^2$, $\varphi = 2t^2$ рад.

58. $a_N = 0,6 \text{ м/с}^2$, $a_{\text{полн}} = 0,67 \text{ м/с}^2$. Угол между $\mathbf{a}_{\text{полн}}$ и \mathbf{R} составляет 153° .

59. $v_x = v_0(1 + \cos \varphi) = 2v_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$, $v_y = -v_0 \sin \varphi$, $v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2}$, $\alpha = -\arctg\left(\tg \frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\varphi}{2}$.

60. Решение. Ускорение движущейся точки направлено к центру катящегося круга и равно v^2/R . В вершине циклоиды скорость точки равна $2v$, ускорение нормальное и может быть представлено в виде $(2v)^2/\rho$. Отсюда $\rho = 4R$.

61. Для обеих точек колеса $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}|\sqrt{2}$, где \mathbf{v} — скорость качения колеса; вектор скорости передней точки будет наклонен вперед и вниз под углом 45° к горизонтальному диаметру. Для задней точки — соответственно вверх и вперед под тем же углом. Вектор ускорения передней точки будет горизонтален и направлен против хода движения колеса. Вектор ускорения задней точки — горизонтален и направлен по ходу движения колеса.

62. $x = R(\varphi - \sin \varphi) = R(\omega t - \sin \omega t)$, $y = R(1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos \omega t)$, где $\varphi = \omega t$ и $\omega = v/R$ есть угловая скорость вращения колеса. Траекторией

точек, находящихся на ободе движущегося колеса, будет простая циклоида, уравнения которой в параметрической форме и получены (рис. 209).

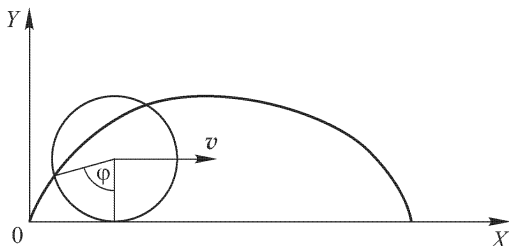


Рис. 209

63. $S = 8R$.

Решение.

$$v_{\text{полн}} = 2v_0 \cos \frac{\varphi}{2} = 2\omega R \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \frac{d\varphi}{dt} R \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$dS = v_{\text{полн}} dt = 2 \frac{d\varphi}{dt} R \cos \frac{\varphi}{2} dt = 2R \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Таким образом, для подсчета пройденного точкой пути интегрирование по времени можно свести к интегрированию по углу поворота φ колеса. Очевидно, что угол поворота колеса φ между двумя последовательными касаниями дороги одной и той же точкой на ободе колеса изменяется в пределах от 0 до $+2\pi$. Таким образом, находим

$$S = 2 \cdot 2R \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8R.$$

64.

$$h_{\text{макс}} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}, \quad (64.1)$$

$$[\cos \varphi]_{h_{\text{макс}}} = -Rg/v^2, \quad (64.2)$$

где φ — угловая координата искомой точки на ободе колеса (см. рис. 8 к задаче 62).

Решение. Координата y произвольной точки на ободе колеса может быть записана выражением

$$y = R \left(1 - \cos \frac{v}{R} t \right), \quad (64.3)$$

откуда

$$\dot{y} = v \sin \frac{v}{R} t. \quad (64.4)$$

Величины y , \dot{y} и h связаны соотношением

$$h = y + \frac{\dot{y}^2}{2g}. \quad (64.5)$$

Подставляя выражения (64.3) и (64.4) в (64.5), находим (64.2) из условия $dh/d\varphi = 0$. После этого из (64.5) при учете (64.2), (64.3) и (64.4) получаем (64.1).

65. $a_{\text{гориз}} = \frac{v^2}{R} \sin \varphi$, $a_{\text{верт}} = \frac{v^2}{R} \cos \varphi$. При равномерном вращении полное ускорение всегда направлено к центру колеса.

$$66. |\mathbf{a}_N| = \frac{a_t^2 t^2}{R} = 2\alpha R\varphi, |\mathbf{a}_{\text{полн}}| = \frac{a_t}{R} \sqrt{R^2 + a_t^2 t^4} = \alpha R \sqrt{1 + 4\varphi^2}, \operatorname{tg} \beta = -\frac{R}{a_t t^2} = -\frac{1}{2\varphi}.$$

67. Искомая ось вращения должна была бы составить с вертикалью угол $\varphi = \operatorname{arctg} 0,2$. Угловая скорость вращения вокруг этой оси должна быть $\omega_1 \sqrt{1,04}$.

68. Косинусы углов между новой осью вращения и тремя прежними осями определяются выражениями

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Угловая скорость вращения вокруг новой оси будет $\omega_1 \sqrt{14}$.

69. Искомая мгновенная ось вращения будет описывать окружность с радиусом $r = \omega_2 R / (\omega_1 + \omega_2)$ вокруг оси первого диска. Угловая скорость вращения вокруг этой мгновенной оси будет $\omega = \omega_1 + \omega_2$.

70. При повороте автомобиля его внешние и внутренние (по отношению к центру закругления дороги) колеса описывают разные окружности, т. е. проходят разные пути, и угловая скорость вращения колес, если они не скользят по дороге, должна быть различной. Это условие для задних ведущих колес обеспечивает дифференциал в заднем мосте автомобиля. Колеса, не имеющие привода от мотора, могут вращаться независимо друг от друга с различной угловой скоростью, так как они установлены на подшипниках.

71. $v_i = 9,88$ м/с, $v_a = 10,12$ м/с.

72. Если x есть смещение в горизонтальном направлении тени палочки на экране, то $x = R \cos(\omega t \pm \varphi)$. Здесь φ — угол между плоскостью экрана и вертикальной плоскостью, проведенной через палочку и центр диска в момент времени $t = 0$. Величина x измеряется от той точки экрана, в которую падает световой луч, прошедший через центр диска. Очевидно, что колебания тени палочки будут симметричны относительно этой точки экрана. Зависимости от времени величин скорости v тени палочки и ее ускорения a запишутся соотношениями

$$v = \frac{dx}{dt} = -R\omega \sin(\omega t \pm \varphi) = R\omega \cos\left(\omega t \pm \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \cos(\omega t \pm \varphi) = R\omega^2 \cos(\omega t \pm \varphi + \pi).$$

Графически зависимости величин x , v и a от времени представляются синусоидами, смещенными относительно друг друга по фазе.

§ 2. Динамика прямолинейного движения материальной точки и простейших систем

73. 1) $T = 0,5$ кгс; 2) $T = 1,5$ кгс; 3) $T = 0,9$ кгс.

У к а з а н и е. Показания весов можно найти из уравнения движения тела, подвешенного на весах, $ma = mg - T$, где m — масса тела, g — ускорение свободного падения, T — сила натяжения пружины (ею определяются показания весов), a — ускорение тела массы m .

74. $f = 1/6$ кгс, $f_1 = 1/3$ кгс.

75. $F_1 = -4/3 F$.

$$76. a = \frac{m}{m+M}g, T = \frac{Mm}{M+m}g.$$

Решение. Так как длина нити не меняется во время движения грузов, то оба тела движутся с одинаковым по величине ускорением a . На тело M действует по направлению движения только сила натяжения нити T , откуда

$$T = Ma. \quad (76.1)$$

На тело массы m вдоль направления движения (по вертикали) действуют две силы: сила притяжения Земли mg и сила натяжения нити T . Следовательно, $mg - T = ma$; принимая во внимание уравнение (1), находим искомые величины.

77. 1) Верхняя половина тела действует на нижнюю с силой, вертикальная составляющая которой равна $Mg/2$, а горизонтальная — $Ma/2$. 2) левая половина действует на правую с направленной горизонтальной силой $-Ma/2$, где a — ускорение, с которым движется тело.

$$78. a = \frac{M}{M+m_1+m_2+m_3}g, T_1 = (m_1+m_2+m_3)a, T_2 = (m_2+m_3)a, T_3 = m_3a.$$

$$79. a = g(\sin \alpha - k \cos \alpha).$$

$$80. F \geq 4 \text{ кгс.}$$

81. Сила натяжения нити, связывающей два тела, определяется только величиной приложенной к ним силы F и не зависит от коэффициента трения между телами и столом, если он одинаков для обоих тел.

$$82. F > (m_1+m_2)g.$$

Указание. Для того чтобы нижняя масса m_2 приподнялась над столом, верхняя m_1 должна подпрыгнуть настолько, чтобы пружина растянулась на величину $x > m_2g/k$ относительно своего недеформированного положения, где k — коэффициент жесткости пружины. Подпрыгнет же масса m_1 на такое же

расстояние вверх от деформированного ее весом положения пружины, на какое она опустилась вниз от этого положения под действием внешней силы F .

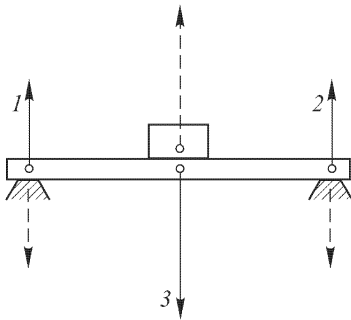


Рис. 210

83. См. рис. 210. 1, 2 и 3 — силы, приложенные к доске. Силы 1 и 2 действуют со стороны опоры, «противодействующая» каждой из них приложена к опоре и направлена вниз. Сила 3 действует со стороны тела на доску, «противодействующая» ей сила приложена к телу. («Противодействующие» силы обозначены пунктирными стрелками.)

84. Прогиб доски уменьшится при приседании, увеличится при выпрямлении человека.

85. Пусть A, B, C схематически изображают лошадь, сани и землю соответственно (рис. 211). Тогда силы \mathbf{F}_2 и \mathbf{f} приложены к лошади со стороны саней и земли, силы \mathbf{F}_1 и \mathbf{f}' — к саням, \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}'_1 — к земле. На основании третьего закона Ньютона

$$|\mathbf{F}_2| = |\mathbf{F}_1|, \quad |\mathbf{f}| = |\mathbf{f}_1|, \quad |\mathbf{f}'| = |\mathbf{f}'_1|.$$

Так как движение равномерное, то на основании второго закона Ньютона

$$|\mathbf{f}| = |\mathbf{F}_2|, \quad |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{f}'|, \quad |\mathbf{f}_1| = |\mathbf{f}'_1|.$$

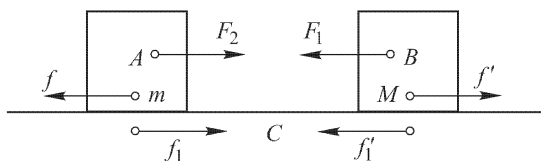


Рис. 211

86. При тех же обозначениях, что и в предыдущей задаче, получим следующие новые соотношения:

$$\mathbf{f} - \mathbf{F}_2 = m\mathbf{a}, \quad \mathbf{F}_1 - \mathbf{f}' = M\mathbf{a}, \quad \mathbf{f}' = 0, 2M\mathbf{g};$$

учитывая, что по-прежнему $|\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$, имеем $f = M(0, 2g + a) + ma \approx \approx 117$ кгс.

87. 1) Если все колеса ведущие, то $k \geq a/g \approx 0, 02$. В этом случае необходимый минимальный коэффициент трения от веса автомобиля не зависит, так как сила трения пропорциональна давлению колес.

2) Если только задние колеса ведущие, то $k \geq a/(ng)$, где n — доля общего веса, приходящаяся на задние колеса автомобиля; в рассматриваемом случае $n = 5/6$ и $k \geq 0, 2(5/6g) \approx 0, 024$.

88. Ускорение доски должно быть больше, чем $0, 98$ м/с².

89. Больше $2, 25$ кгс.

Решение. Уравнение движения доски $F - 0, 5(m + M)g - f = Ma$ и, соответственно, уравнение для груза $f = ma$, где f — сила трения между грузом и доской, a — ускорение. Максимальное значение $f = 0, 25mg$; следовательно, максимальное ускорение груза $0, 25g$, и максимальная сила F , при которой еще будет происходить движение груза и доски как целого, должна сообщать доске и грузу ускорение $0, 25g$. А для этого должно быть

$$F = 0, 25(M + m)g + 0, 5(M + m)g = 2, 25 \text{ кгс.}$$

90. $\Delta M = 2(M - P/g)$.

Указание. Для опускающегося шара $Mg - P - R = 0$, для поднимающегося шара $(M - \Delta M)g - P + R = 0$, где R — сила сопротивления воздуха.

91. 1) $\alpha = 0, T = mg$;

2) $\alpha = \arctg \frac{a}{g}, T = m\sqrt{a^2 + g^2}$;

3) $\alpha = -\varphi$, т. е. нить нормальна к наклонной плоскости; $T = mg \cos \varphi$;

4) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{(b/g) \cos \varphi}{1 + (b/g) \sin \varphi}, T = m\sqrt{g^2 + b^2 + 2bg \sin \varphi}$;

5) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-(b/g) \cos \varphi}{1 - (b/g) \sin \varphi}, T = m\sqrt{g^2 + b^2 - 2bg \sin \varphi}$.

Здесь α — угол между нитью маятника и вертикалью; этот угол считается положительным при отклонении нити маятника от вертикали в направлении хода часовой стрелки; положительное направление вертикали совпадает с направлением ускорения свободного падения.

92. 1) Ускорение всюду одинаково и равно g . 2) Ускорение камня максимально в начале движения в нижней точке его траектории.

93. В отсутствие сопротивления воздуха ускорение направлено вертикально вниз. При наличии сопротивления ускорение отклонено от вертикали в направлении, противоположном движению снаряда.

94. В результате выстрела возникнут колебания грузика A ; когда они затухнут, результирующая сила со стороны пружинок будет равна нулю, если сопротивление воздуха отсутствует. Если на снаряд действует сила сопротивления воздуха, то результирующая сила пружинок равна $m(a - g)$, причем как ускорение снаряда a , так и натяжение пружинок считается положительным, когда они направлены вниз. При подъеме эта сила направлена вниз, при спуске — вверх, т. е. навстречу движению.

$$\mathbf{95.} \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad f = 2T = 4 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

$$\mathbf{96.} \quad a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g, \quad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \alpha) g.$$

$$\mathbf{97.} \quad a = \frac{M(m_1 + m_2) - 4m_1 m_2 \sin \alpha}{M(m_1 + m_2) + 4m_1 m_2} g.$$

$$\mathbf{98.} \quad a_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 g - m_2 g - m_3 g), \quad a_3 = 0.$$

Решение. Натяжение пружины T в начальный момент будет $T = m_3 g$, поэтому $a_3 = 0$, $a_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 g - m_2 g - m_3 g)$.

99. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n+1}{n-1}$. Этот результат легко получить из ответа задачи 95, положив $a = g/n$.

$$\mathbf{100.} \quad t \approx 4,5 \text{ с}; \quad v \approx 44 \text{ см/с}.$$

$$\mathbf{101.} \quad p = \frac{2\Delta mg}{2 + \Delta m/m} = 4,95 \text{ гс}.$$

102. 1) Весы наклонятся вправо, так как при движущихся массах m_1 и m_2 сила давления на ось блока будет равна удвоенной силе натяжения нити $2T' = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g < (m_1 + m_2)g$ (см. ответ к задаче 95).

2) Для сохранения равновесия весов в этом случае надо снять с правой чашки груз $(m_1 + m_2)g - 2T' = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$.

$$\mathbf{103.} \quad a_1 = \frac{2M_1 - M_2}{2M_1 + M_2/2} g, \quad a_2 = -\frac{a_1}{2}, \quad T = \frac{3M_1 M_2}{4M_1 + M_2} g.$$

Указание. Условие, связывающее ускорения a_1 и a_2 , можно получить, обозначив через x_1 и x_2 расстояния масс M_1 и M_2 от горизонтальной плоскости; тогда $x_1 + 2x_2$ есть величина постоянная. Дифференцируя это равенство два раза, получаем искомое условие $a_1 = -2a_2$.

$$\mathbf{104.} \quad a_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3}{m_1(m_2 + m_3) + 4m_2 m_3} g, \quad T_1 = \frac{8m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}, \quad T_2 = \frac{4m_1 m_2 m_3 g}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}.$$

Указание. Обозначив через x_1, x_2, x_3 расстояния масс m_1, m_2, m_3 от плоскости, к которой прикреплен блок, можно написать следующее равенство: $x_2 + x_3 + 2x_1 = l_2 + 2l_1 + \text{const}$, где l_1 и l_2 — длины нитей. Дифференцируя его два раза, получаем необходимое для решения задачи соотношение между ускорениями всех трех масс: $a_2 + a_3 + 2a_1 = 0$.

105. В обоих случаях необходимо добавить на чашку одинаковый груз $\Delta p = \frac{1}{2 + \Delta m/m} \Delta mg \approx 12$ гс.

106. 1) Добавить на чашку весов груз $\Delta p = \frac{\Delta mg}{2 + \Delta m/m} \approx 22,7$ гс.

2) Снять с чашки весов груз $\Delta p = \frac{1 + \Delta m/m}{2 + \Delta m/m} \Delta mg = 27,3$ гс.

107. Обе обезьяны достигнут блока одновременно через промежуток времени $\tau = l/3v$. Действительно, натяжение веревки по обе стороны от блока одинаково. Значит, одинаковы ускорения и скорости обезьян относительно блока. Так как они приближаются друг к другу со скоростью $3v$, то весь путь l они пройдут за время $l/3v$.

108. Блока достигнет раньше более легкая обезьяна, потому что ее ускорение относительно блока будет направлено вверх, а ускорение тяжелой обезьяны — вниз.

109. Груз будет двигаться вверх со скоростью $v/4$, независимо от того, постоянна она или нет.

110. Скорость большего шарика будет в $\sqrt{2}$ раз больше скорости меньшего.

111. $v = \frac{2}{9} \frac{d_2 - d_1}{\eta} g r^2 = 0,25$ см/с.

112. $v = \frac{mg}{r} \left[\left(v_0 \frac{r}{mg} + 1 \right) e^{-\frac{r}{m} t} - 1 \right]$, где m — масса тела, r — коэффициент сопротивления воздуха.

Решение. Уравнение движения имеет вид $m dv/dt = -mg - rv$. Полученный выше результат найден интегрированием этого уравнения с начальным условием $v = v_0$ при $t = 0$.

113. $t_1 = t_0 \frac{v_*}{v_0} \ln \left(1 + \frac{v_0}{v_*} \right) \approx \frac{t_0}{1,73}$, где $v_0 = 1,73v_*$ (v_* — скорость установившегося движения тела в вязкой среде), $t_0 = v_0/g$.

114. 1) $\Delta S = g\tau \left(t + \frac{\tau}{2} \right)$; 2) $\Delta S = v_0 \left[\tau + \frac{m}{r} e^{-\frac{r}{m} t} \left(1 - e^{-\frac{r}{m} \tau} \right) \right]$, где v_0 — скорость установившегося движения капель в воздухе. Время t отсчитывается от начала падения первой капли.

115. 1) Изменение скорости лодки v со временем будет происходить по закону $v = \frac{mv_0}{m + rv_0 t}$, где m — масса лодки, r — коэффициент сопротивления воды. При сделанном предположении о зависимости силы сопротивления от скорости лодка должна двигаться бесконечно долго, и пройденный ею путь также будет стремиться к бесконечности: $S = \frac{m}{r} \ln \left(1 + \frac{rv_0}{m} t \right)$. Но это предположение о силе сопротивления перестает быть справедливым при малых скоростях движения лодки, когда сила сопротивления становится пропорциональной первой степени скорости (см. следующую задачу).

116. $v = v_0 e^{-\frac{r}{m} t}$ и очевидно, что при сделанном предположении движение лодки будет продолжаться неограниченно долго. Однако для пути S , пройденного лодкой после спуска паруса, будет иметь место условие $\lim_{t \rightarrow \infty} S = v_0 m/r$ (ср. с результатом предыдущей задачи).

117. $v = v_0 - \frac{r}{m} S$, где обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

$$118. T_{\max} = mg \frac{v_{\text{пад}}^2}{v_{\text{приземл}}^2} = 18000 \text{ кгс.}$$

Примечание. Такого натяжения не выдержали бы ни стропы парашюта, ни парашютист, на которого стропы действовали бы с такой силой. В действительности парашют раскрывается не мгновенно, и натяжение строп оказывается гораздо меньше.

$$119. v' = \sqrt{\frac{T}{mg}} v_{\text{приземл}} = 12 \text{ м/с, } \tau = \frac{m(v_{\text{пад}} - v')}{T - mg} = 0,61 \text{ с.}$$

$$120. m_{\min} = M \frac{\text{tg } \alpha - k}{k}.$$

Решение. Уравнение движения доски при условии, что тело скользит по ней без трения, имеет вид

$$Ma = Mg \sin \alpha - (M + m)kg \cos \alpha.$$

Полагая $a = 0$, находим $m_{\min} = M \frac{\text{tg } \alpha - k}{k}$. При $m > m_{\min}$ доска остановится.

$$121. a_1 = \frac{m_1 g - m_2(g - a_2)}{m_1 + m_2}, R = \frac{m_1 m_2(2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

122. Обе обезьяны достигнут блока одновременно через промежуток времени $\tau = \sqrt{2l/3a}$. В самом деле, сила натяжения веревки вдоль всей ее длины одинакова, значит, и ускорения обезьян относительно Земли одинаковы. Движение они начинают одновременно, приближаясь друг к другу с ускорением $3a$; чтобы достичь блока, они обе вместе должны пройти путь l .

123. 1) Маятник будет падать вместе со щитком, сохраняя на нем неизменное положение.

2) С момента начала падения щитка скорость маятника относительно щитка перестанет изменяться, и с этой скоростью он начнет вращаться вокруг точки подвеса.

$$124. T = 2\pi \sqrt{l/g'}, \text{ где } g' = \sqrt{g^2 + a^2}.$$

125. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g-a}}$. При $a = g$ период становится бесконечным, т. е. маятник качаться не будет. При $a > g$ маятник перевернется и будет колебаться около своего наивысшего положения с периодом $T = 2\pi \sqrt{l/(a-g)}$.

$$126. T = 2\pi \sqrt{l/(g \cos \alpha)}.$$

127. Тело будет совершать колебания на пружине. Амплитуда колебаний будет равна той длине, на которую груз растягивал пружину в неподвижной кабине.

128. Ускорение тележки $\frac{dv}{dt} = \frac{f}{M - \Delta mt}$. Интегрируя это уравнение и учитывая, что $v = 0$ при $t = 0$, получаем $v = \frac{f}{\Delta m} \ln \frac{M}{M - \Delta mt}$.

129. Силы становятся равными, когда длина свешивающейся части нити принимает значение $x_1 = \frac{3}{5}l$, $N = \frac{2}{5}mg$, $\ddot{x}_1 = \frac{3}{5}g$.

Решение. Уравнения динамики для нити и масс m_1 и m_2 запишутся: $\rho \ddot{x}_1 = \rho x_1 g + N_1 - N_2$, $m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - N_1$, $m_2 \ddot{x}_1 = N_2$, где x_1 — длина свешивающейся части нити, $\rho = m_n/l$ — масса нити на единицу длины. Определяя отсюда \ddot{x}_1 , N_1 , N_2 и приравнявая значения N_1 и N_2 , получаем приведенные ответы.

$$130. v = \sqrt{\frac{g}{l} (l^2 - l_0^2)}, x = l_0 \text{ ch} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

У к а з а н и е. Решение получается интегрированием уравнения $m\ddot{x} = \frac{m}{l} gx$, где m — масса всей веревки, а x — длина ее части, свешивающейся в данный момент времени со стола. Начальные условия: $v = 0$ при $l = l_0$.

131. Для того чтобы расстояние между шариками было одинаковым, пружины в нерастянутом состоянии должны иметь несколько различную длину (или иметь различную жесткость), так как на пружину I действует вес двух шариков, а на пружину II — вес одного шарика. Поэтому:

1) при свободном падении всей системы шариков центр шарика 2 уже не является центром масс системы, а ускорение массы шарика 2 не является ускорением центра масс системы, так как при движении расстояние между шариками меняется под действием пружин. Центр масс системы имеет постоянное ускорение g ;

$$2) a_1 = 3g, a_2 = a_3 = 0;$$

$$3) a_1 = 0, a_2 = -g, a_3 = g.$$

Р е ш е н и е. Исходные условия равновесия рассматриваемой системы шариков будут иметь вид

$$mg - T_n + T_1 = 0, \quad mg - T_1 + T_2 = 0, \quad mg - T_2 = 0,$$

где T_1 , T_2 и T_n — натяжения соответственно пружин I и II и нити. Из этих уравнений могут быть найдены значения T_1 , T_2 и T_n . При мгновенном перерезывании нити или пружины обращаются в нуль силы T_n или T_2 . В этот момент времени уравнения второго закона динамики для шариков в первом случае примут вид

$$mg + T_1 = ma_1, \quad mg - T_1 + T_2 = ma_2, \quad mg - T_2 = ma_3,$$

а во втором

$$mg - T_n + T_1 = ma_1, \quad mg - T_1 + T_2 = ma_2, \quad mg = ma_3.$$

Решая для каждого случая соответствующую ему систему уравнений, находим искомые значения ускорений шариков в начальный момент времени.

132. Ускорения клина и тела, соответственно равны

$$a_1 = \frac{mg \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)}, \quad a_2 = \frac{Mg \sin 2\alpha}{2(M + m \sin^2 \alpha)};$$

сила давления тела на клин N и сила давления клина на горизонтальную плоскость R определяются выражениями

$$N = \frac{Mm \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} g, \quad R = \frac{M(m + M)g}{M + m \sin^2 \alpha}.$$

Р е ш е н и е. Начертим силы, действующие на каждое тело (рис. 212). Только сила N может сообщить клину ускорение в направлении оси X (горизонтальной оси). Обозначим ускорение клина M через a_1 , горизонтальную составляющую ускорения тела m через a_2 и вертикальную через a_3 . Тогда уравнения динамики дают:

$$N \sin \alpha = Ma_1, \quad mg - N' \cos \alpha = ma_3, \quad N' \sin \alpha = ma_2, \quad |N| = |N'|.$$

Между ускорениями a_1 , a_2 , a_3 существует еще кинематическая связь, выражающая условие скольжения тела m по грани клина. Эту связь можно получить так: обозначим координаты какой-либо точки тела m на поверхности, соприкасающейся с клином M , через x и y ; эта точка лежит на линии $y =$

$= \operatorname{tg} \alpha(x - b)$. Принимая во внимание, что при движении x и b изменяются, а α остается постоянным, продифференцируем это равенство два раза: $\ddot{y} = \operatorname{tg} \alpha(\ddot{x} - \ddot{b})$; легко видеть, что $\ddot{y} = -a_3$, $\ddot{x} = -a_2$ и $\ddot{b} = a_1$; тогда равенство

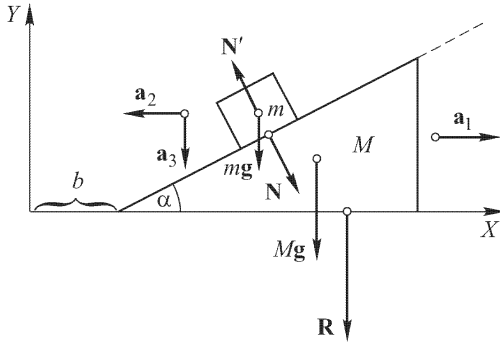


Рис. 212

$a_3 = \operatorname{tg} \alpha(a_2 + a_1)$ и есть искомое соотношение. Совместное решение уравнений динамики при использовании найденного соотношения между ускорениями даст приведенные выше ответы на поставленные вопросы.

133. $v_\infty = 1/2 v_0(1 - \sin \varphi_0)$.

Решение. Составляя уравнения динамики для движущегося тела в проекции на ось Y и в проекции на касательную, находим: $\ddot{y} = dv/dt$. Отсюда $\dot{y} = v + c$, где v — абсолютная величина скорости тела. При $t = 0$

$$\dot{y}(0) = v_0 \sin \varphi_0, \quad v(0) = v_0, \quad c = -v_0(1 - \sin \varphi_0).$$

Полагая при $t \rightarrow \infty$ $y(t) \rightarrow -v_\infty t$ и $v(t) \rightarrow v_\infty$, получаем ответ.

§ 3. Статика

134. $F = P - Q$ (Q должно быть $\leq P$).

135. $H = h + \frac{(l/2)p}{\sqrt{4(mg)^2 - p^2}} \approx 5,5$ м.

136. Если бы канат был нерастяжимым и опоры абсолютно жесткими, то тогда, действительно, канат можно было бы разорвать сколь угодно малой силой; однако наличие даже небольших растяжений каната и деформаций опоры существенно ограничивает величину вызываемых малой силой натяжений каната.

137. На брусок AB действует сила сжатия 5 кгс; на проволоку CB — сила растяжения $\approx 7,1$ кгс.

138. $m = 4\sqrt{5}$ кг, $F = 4(\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{5}})$ кгс и наклонена к вертикали под углом $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ в сторону крючка A .

139. $k \geq \operatorname{tg} 15^\circ = 0,176$.

140. $f = 22,5$ кгс; $F = 37,5$ кгс; $(m_2)_{\max} = 180$ кг.

Указание. Обозначим через f_a натяжение участка a веревки, через f_b — натяжение участка b и т.д. Тогда $f_a = f_b = f$ и $f_c = f_d = 2f$. Условия равновесия: $m_1 g + m_2 g = f_a + f_b + f_d = 4f$.

141. $F = 200$ кгс, $T = 1000$ кгс.

142. $T = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)}$. Равновесие возможно, если $\alpha > \beta$, т. е. когда точка C лежит ниже центра масс палочки. В противном случае равновесие невозможно.

143. $d = \frac{m_{kl}}{mk} \sqrt{D^2 - k^2} \approx 0,05$ см.

144. $k_{\min} = 1/2$, $F > mg/2$, где m — масса куба.

145. $F = \frac{kMg}{\cos \varphi + k \sin \varphi}$, $\text{tg } \varphi_{\text{опт}} = k$. При $k = 0$ $\varphi_{\text{опт}} = 0$; при $k = 1$ $\varphi_{\text{опт}} = 45^\circ$.

146. $d = \frac{2}{\pi} R$.

147. $d = \frac{4}{3} R/\pi$.

148. $x_c = \frac{3\pi + 16}{3\pi + 12} R$.

149. $x_c = \frac{2}{3} \frac{R \sin^3 \alpha}{\alpha - \cos \alpha \sin \alpha}$, где x_c — расстояние от центра круга.

150. $d = \frac{8}{3} R/\pi$.

151. $R = 21P$, $x = 8a/7$, $y = \sqrt{3a}/7$.

152. $T = 3mg/32$.

Указание. Можно считать, что на каждое из полушарий действуют две силы, по величине равные T и приложенные в точках, где нить переходит с одного полушария на другое; так как расстояние центра масс полушария от центра шара равно $\frac{3}{8}R$, то уравнение моментов дает $\frac{mg}{2} \frac{3}{8} R = 2TR$.

153. 1) $T_{AB} = \frac{F}{2} \left(\frac{\cos \alpha \text{tg } \beta}{\cos \gamma} + \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)$, $T_{AC} = \frac{F}{2} \left(\frac{\cos \alpha \text{tg } \beta}{\cos \gamma} - \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \right)$, $T_{AD} = \frac{F \cos \alpha}{\cos \beta}$.

2) $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \text{tg } \gamma$, при этом сила F лежит в плоскости, образованной стержнями AB и AD .

154. Нет, так как нет силы, которая уравновесила бы момент силы тяжести относительно ребра B .

155. $F = \sqrt{10}/4$ тс, причем слагающая, направленная вниз, равна $\frac{3}{4}$ тс, а направленная к стене — $\frac{1}{4}$ тс.

156. $T = F = \frac{l}{2h} (Mg + mg) = 900$ кгс.

Указание. Так как трения в опорах нет, то $F = T$; эти силы образуют пару, момент которой $T \cdot h$ и уравновешивает моменты сил тяжести относительно опоры.

157. $f = 1$ кгс в обоих случаях.

158. Решение. Рассмотрим бесконечно малый участок веревки AB (рис. 213). Сила нормального давления его на поверхность столба будет $T d\alpha$. Разность натяжений на концах веревки $dT =$

$\frac{dT}{d\alpha} d\alpha$ должна быть уравновешена силой трения $kT d\alpha$. Это приводит к уравнению $dT/d\alpha = kT$, интегрирование которого дает $T_2 = T_1 e^{-2\pi kn}$ (формула Эйлера).

159. Решение. Пусть A, B, C, D — центры шаров (рис. 214). По условию они должны находиться в вершинах правильного тетраэдра. Возьмем

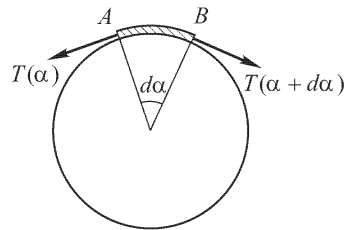


Рис. 213

единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, исходящие из вершины D вдоль ребер тетраэдра. Силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$, с которыми шары A, B, C давят на шар D , можно представить в виде

$$\mathbf{F}_1 = -\alpha \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{F}_2 = -\alpha \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{F}_3 = -\alpha \mathbf{e}_3,$$

где α — положительный числовой коэффициент.

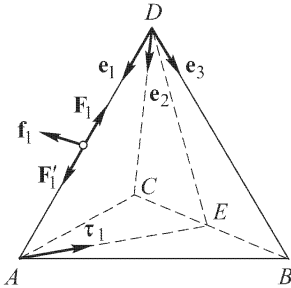


Рис. 214

Сила трения \mathbf{f}_1 , с которой шар A действует на шар D , лежит в плоскости ADE , где E — середина ребра CB . Вдоль прямой DE направлен вектор $(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Таким образом, векторы \mathbf{e}_1 и $(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ лежат также в плоскости ADE , а потому по ним можно разложить силу \mathbf{f}_1 , т. е. $\mathbf{f}_1 = \beta(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \gamma \mathbf{e}_1$. Так как сила \mathbf{f}_1 перпендикулярна к \mathbf{e}_1 , то скалярным умножением на \mathbf{e}_1 отсюда получаем $\beta + \gamma = 0$. (Мы воспользовались соотношениями $\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = \cos 60^\circ = 1/2$). Следовательно, $\mathbf{f}_1 = \beta(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1)$. Коэффициент β отрицателен, так как сила \mathbf{f}_1 должна быть направлена наружу тетраэдра. Возведением в квадрат и последующим извлечением квадратного корня из последнего равенства находим $f_1 = -\beta\sqrt{2}$. С другой стороны, величина силы трения \mathbf{f}_1 может быть представлена в виде $f_1 = kF_1 = k\alpha$. Это дает $\beta = -k\alpha/\sqrt{2}$. Аналогичные рассуждения применимы и к силам трения \mathbf{f}_2 и \mathbf{f}_3 , с которыми на шар D действуют шары B и C . В результате получается

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= -\frac{k\alpha}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1), \\ \mathbf{f}_2 &= -\frac{k\alpha}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{f}_3 &= -\frac{k\alpha}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Результирующая сил давления и трения, действующих на шар D , будет $-\alpha(1 + k/\sqrt{2})(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$. Она должна быть уравновешена весом шара mg . Это дает

$$\alpha^2(1 + k/\sqrt{2})^2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)^2 \equiv 6\alpha^2(1 + k/\sqrt{2})^2 = m^2g^2.$$

Отсюда $\alpha = \frac{mg}{\sqrt{6}(1 + k/\sqrt{2})}$.

Найдем, наконец, силы трения τ_1, τ_2, τ_3 , действующие на шары A, B, C со стороны горизонтальной плоскости, на которой они лежат. (Чтобы не усложнять рисунок, мы приложили эти силы к центрам шаров, хотя на самом деле они приложены в точках касания шаров с упомянутой плоскостью.) Для наших целей достаточно найти одну из этих сил, например τ_1 . Эта сила направлена вдоль биссектрисы AE угла BAC . Туда же направлен вектор $(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)/2 - \mathbf{e}_1$. Поэтому можно положить $\tau_1 = \varepsilon(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1)$, где ε — числовой коэффициент. Возведя в квадрат, а затем извлекая квадратный корень, получим $\tau_1 = \varepsilon\sqrt{3}$. С другой стороны, давление на плоскость всех четырех шаров равно $4mg$, а давление в точке касания шара $A = \frac{4}{3}mg$. Поэтому $\tau_1 = \frac{4}{3}km g$, а следовательно,

$$\varepsilon = \frac{4}{3\sqrt{3}} km g \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{4}{3\sqrt{3}} km g (\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1).$$

Остается только написать условие равновесия шара A . (Условия равновесия шаров B и C не дают ничего нового.) Оно имеет вид $\mathbf{F}'_1 + \mathbf{f}'_1 + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{N} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{F}'_1 = -\mathbf{F}_1$, $\mathbf{f}'_1 = -\mathbf{f}_1$ — силы давления и трения, действующие на шар A со стороны шара D , а через \mathbf{N} обозначена сила, нормальная к плоскости опоры. Для исключения \mathbf{N} умножаем написанное условие скалярно на вектор $(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1)$, нормальный к \mathbf{N} . После простых преобразований приходим к квадратному уравнению $4k^2 + 3\sqrt{2}k - 1 = 0$, из которого находим

$$k = (\sqrt{34} - 3\sqrt{2})/8 = 0,198.$$

Это и есть минимальное значение коэффициента трения, при котором равновесие возможно.

§ 4. Работа, мощность, энергия

160. Работа $A = 200$ кгс · м. Потенциальная энергия $U = 100$ кгс · м. Половина работы идет на увеличение кинетической энергии поднимаемого тела.

161. 0,06 кгс · м; 0,038 кгс · м.

162. 4,25 м; $\approx 8,16$ м/с.

163. $A = mg(H + kL)$.

164. $A = mg(H - kL)$. Необходимо, чтобы в любом положении тела соблюдалось условие $h - kx > 0$, где h — высота, с которой спустилось тело к рассматриваемому моменту, а x — пройденный им путь в горизонтальном направлении к тому же моменту. В противном случае тело скатиться с горки не сможет.

$$\mathbf{165.} \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = m \cdot \frac{dv}{dt} \frac{dt}{ds} = m \frac{dv}{dt} = F.$$

166. $A \approx 4,3 \cdot 10^5$ кгс · м.

167. $U = 0,6$ кгс · м.

168. 1 кгс · м.

169. $W = \frac{1000}{75} Svh$ [л. с].

170. $W = \frac{mv_0^3}{4l}$.

171. 1) $U = mgl(1 - \cos \alpha)$. 2) $A = \int_0^\alpha mal \cos \alpha d\alpha = mal \sin \alpha$.

3) Приравняв работу силы инерции потенциальной энергии отвеса, отклоненного на угол α , находим $g(1 - \cos \alpha_{\max}) = a \sin \alpha_{\max}$, откуда легко получаем $\operatorname{tg} \frac{\alpha_{\max}}{2} = \frac{a}{g}$ или $\alpha_{\max} = 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$.

4) Сравнив найденный результат с результатами задачи 91, получаем, что, действительно, $\alpha_{\max} = 2\alpha_0$, так как $\alpha_0 = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$.

5) После освобождения отвеса он сначала отклонится на угол α_{\max} , а затем начнет колебаться от направления, определяемого этим углом, до вертикали, т. е. около направления, определяемого значением угла α_0 . Постепенно колебания затухнут и отвес остановится в положении, задаваемом этим углом. В этом положении сумма действующих на отвес сил будет равна ma , и отвес будет двигаться вместе с вагоном.

172. 330 м.

Решение. При торможении с ускорением a возникнут колебания (см. решение предыдущей задачи), и отвес отклонится на наибольший угол $2a/g = = 3\pi/180 = 0,052$, следовательно, $2a = 0,51$ м/с и $S = v^2/2a$.

173. $v = \sqrt{2gR} = 11,2$ км/с, где R — радиус земного шара.

174. Ввиду того, что поле тяготения является потенциальным полем и все механические процессы в нем обратимы, очевидно, что ракета, начальная скорость которой превышает значение, найденное в предыдущей задаче, преодолеет силу земного тяготения и уйдет в межпланетное пространство.

175. $T \approx \frac{mgR}{1 + h/R} \approx 6,2 \cdot 10^9$ кгс · м, R — радиус Земли и g — ускорение свободного падения у поверхности Земли.

176. $W = mgv(k \cos \alpha + \sin \alpha)$.

177. Решение. Уравнение движения лодки будет иметь вид $m dv/dt = -rv^2$. Умножая обе части уравнения на элемент пути dS , получаем справа элементарную работу dA силы сопротивления на отрезке пути dS :

$$m \frac{dv}{dt} dS = -rv^2 dS = -r \frac{v_0^2 m^2 dS}{(m + rv_0 t)^2} = dA,$$

или

$$mv dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -r \frac{v_0^2 m^2 v dt}{(m + rv_0 t)^2} = -r \frac{v_0^3 m^3 dt}{(m + rv_0 t)^3}.$$

Интегрируя последнее уравнение при условиях, что $v = v_0$ при $t = 0$ и $v = 0$ при $t \rightarrow \infty$, находим, что правая часть равенства также равна $mv_0^2/2$, что и требуется доказать.

178. $U = \beta x^4/4$, где x — деформация пружины.

179. 1) $U_1/U_2 = k_2/k_1$; 2) $U_1/U_2 = k_1/k_2$. Когда одна из пружин — очень жесткая по сравнению с другой, практически вся потенциальная энергия будет запасена в случае а) в более мягкой, а в случае б) — в более жесткой пружине.

180. $Q = 1/4 k(l - l_0)^2$.

181. $T = 2250W/(\pi Rn)$ [кгс].

182. $W = \pi n R m g / 3000$ [кгс · м].

183. По часовой стрелке, так как при этом работающий участок ремня будет меньше провисать и охватывать большую часть окружности шкивов, чем при вращении против часовой стрелки, и сцепление ремня со шкивом будет больше.

184. $W = \frac{(mg)^2}{M} t$, $t = \frac{M}{(mg)^2} W_{\max}$.

185. $r = e^2/2E$, где e — заряд протона. Для вычислений формулу целесообразно преобразовать, положив $E = eV$. Тогда $r = e/2V = 1,4 \cdot 10^{-13}$ см ($2V = 10^6$ В). Опыты по рассеянию ядерных частиц показали, что радиус действия ядерных сил по порядку величины равен 10^{-13} см. Поэтому при расчете столкновения протонов, энергии которых превосходят примерно 0,5 МэВ, помимо электростатических сил, надо учитывать также ядерные силы.

186. Поместив начало координат в одной из точек пола и направив ось X вертикально вверх, получаем

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\dot{x}^2 - mgx = 2K - U,$$

где K — кинетическая, а $U = mgx$ — потенциальная энергии шарика. Проинтегрируем это соотношение от $t = 0$ до $t = T$, а затем устремим T к бесконечности. В результате найдем $2\bar{K} = \bar{U}$.

§ 5. Законы сохранения количества движения и энергии

187. $v = 10 \text{ см/с.}$

188. $F = \frac{m^2 v^2}{2SM} = 17 \text{ кгс,}$ где M и m — массы винтовки и пули.

189. $v = \frac{M}{m} \frac{\sqrt{2gl \sin \alpha}}{\cos \alpha}.$

Указание. Приведенное выражение для v легко получить, применив закон сохранения количества движения к слагающим импульса пушки и снаряда, направленным вдоль наклонной плоскости, непосредственно до и после момента выстрела. Импульс силы тяжести (действующей на оба тела) за короткий промежуток времени Δt выстрела пренебрежимо мал.

190. $S_2 = 5000 \text{ м.}$

Решение. Падение одной половины снаряда под местом разрыва показывает, что все количество движения, которое имел снаряд в верхней точке, передано второй половине снаряда. Падение за 1 с с высоты в 19,6 м говорит за то, что падающая часть получила при разрыве начальную скорость v_0 вниз, следовательно, и вторая половина получила такое же количество движения вверх. Поэтому вторая часть снаряда после разрыва имеет начальную скорость $2v_{\text{гор}}$ в горизонтальном направлении (где $v_{\text{гор}}$ есть горизонтальная составляющая скорости снаряда при выстреле), а в вертикальном направлении v_0 . Скорость v_0 определится из равенства $h = v_0 \tau + \frac{g\tau^2}{2}$, где τ — время падения первого осколка. Горизонтальная составляющая скорости $v_{\text{гор}}$ определится из равенства $S_1 = v_{\text{гор}} t$ и $h = gt^2/2$:

$$v_{\text{гор}} = \sqrt{g/2h} S_1.$$

Расстояние места падения второго осколка от места разрыва по горизонтальному направлению можно определить по формулам, описывающим полет снаряда в безвоздушном пространстве:

$$S_2 - S_1 = 2v_{\text{гор}} \left[\frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left(\frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right].$$

Заменяя $v_{\text{гор}}$ на $\sqrt{g/2h} S_1$, получаем ответ:

$$S_2 = S_1 \left\{ \sqrt{\frac{2g}{h}} \left[\frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} + \sqrt{\frac{2h}{g} + \left(\frac{h}{g\tau} - \frac{\tau}{2} \right)^2} \right] + 1 \right\}.$$

191. $v_1 = \frac{m_1(v+u) + mv}{m+m_1}, v_2 = v, v_3 = \frac{m_1(v-u) + mv}{m+m_1}.$

192. $x_\infty = l/2.$

Решение. В рассматриваемом случае центр масс системы будет смещаться за счет действия внешней силы (сил трения). Обозначим силу натяжения веревки между лодками T . Тогда:

$$m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 = T, \quad m_2 \ddot{x}_2 + h \dot{x}_2 = -T, \quad m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + h(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0.$$

Последнее равенство справедливо и после того момента, когда лодки столкнутся и будут двигаться совместно до остановки. Проинтегрируем его по времени

от 0 до ∞ :

$$m_1 \dot{x}_1 \Big|_0^\infty + m_2 \dot{x}_2 \Big|_0^\infty + h(x_1 + x_2) \Big|_0^\infty = 0;$$

так как $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_1(\infty) = \dot{x}_2(\infty) = 0$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = l$, $x_1(\infty) = x_2(\infty) = x_\infty$, получим: $2x_\infty - l = 0$, $x_\infty = l/2$.

193. 9 м/с и 1 м/с.

194. $v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$, $K = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.

195. $U = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2$.

196. После соударения второй шар отскочит назад. $A = \frac{2m_2 v}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{m_1}{k}}$.

197. 1) $K = \frac{(mv)^2}{2(M+m)}$, 2) $F_{\text{вн}} = \frac{Mmv^2}{2(M+m)}$, 3) $A = v \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}$.

198. При условии, что $m_1/m_2 > 20$, где m_1 — масса шара, имевшего меньшую энергию. Ответ легко найти из следующих соотношений:

$$20m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2, \quad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} > 0,$$

где v — скорость шаров после удара, v_1 и v_2 — их скорости до удара.

199. $v = 1000$ м/с (из равенства $mv = Mv_1$).

200. $F = 2Mv/\tau$.

201. $F = \Delta m_1 v / \Delta t \approx 2500$ кгс, где Δm_1 — масса угля и Δt — время, за которое эта масса погружена на платформу.

202. Работа $F \Delta S' = \frac{\Delta m}{\Delta t} v \Delta S' = \Delta m \cdot v^2$, кинетическая же энергия угля равна $\Delta m \cdot v^2/2$, т.е. вдвое меньше. При соприкосновении с платформой куски угля сначала скользят по полу платформы (в сторону, противоположную движению платформы), и работа паровоза идет также на преодоление возникающих при этом сил трения. Эта работа (превращающаяся в тепло) равна $\Delta m \cdot v^2/2$.

203. Дополнительное давление на стол (сверх веса части каната, уже лежащей на столе) вызвано потерей импульса падающими элементами канаты при их ударе о стол. Пусть за элемент времени dt на стол падает элемент каната с массой $dm = \mu dx$, где μ — масса, приходящаяся на единицу длины каната, а dx — элемент длины каната. Сила, действующая со стороны этого элемента на стол, будет

$$\Delta F = dm \cdot \frac{v}{dt} = \mu dx \cdot \frac{v}{dt} = \mu v^2,$$

где v — скорость, с которой элемент dm достигает стола. Но, как нетрудно заметить, $v^2 = 2gx$, где x — длина части каната, лежащей на столе. Отсюда $\Delta F = 2\mu gx$. Таким образом, полная сила, действующая на стол, будет равна $3\mu gx$.

204. Шарик отразится от клина в горизонтальном направлении и полетит дальше по параболе (рис. 215).

205. $p = 2mv \cos \alpha$.

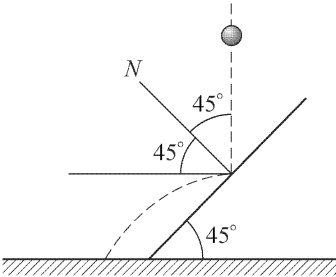


Рис. 215

206. Решение. Пусть \mathbf{v} — скорость первой частицы до столкновения, \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — скорости частиц после столкновения. Законы сохранения импульса и энергии дают

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad v^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Возводя первое соотношение в квадрат и вычитая из него второе, получим $(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2) = 0$. Если оба вектора \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 не равны нулю, что будет при нелобовом ударе, то угол между ними будет равен 90° . При лобовом столкновении $\mathbf{v}_1 = 0$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, т.е. частицы просто обмениваются скоростями.

207. $\Delta K = 2m(v - u)u$; $\Delta p = -2m(v - u)$; тело после удара остановится, если $u = v/2$.

Указание. Законы упругого удара о движущуюся стенку легко получить, если в формулах для скоростей, имеющих место после удара двух упругих тел, перейти к пределу, полагая массу одного тела (стенки) бесконечно большой.

208. α -частица уносит 3,5 МэВ, нейтрон — 14,1 МэВ.

209. Ядро трития уносит энергию 1 МэВ; общий энергетический выход реакции 4 МэВ.

210. Нейтрон уносит энергию 2,44 МэВ, ядро He^3 — 0,81 МэВ.

211. Ядро He^4 уносит энергию 3,7 МэВ; общий энергетический выход реакции 18,3 МэВ.

212. $\frac{1}{4}$ МэВ и $\frac{3}{4}$ МэВ.

213. $\frac{\Delta E}{E} = 4 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$. Потеря энергии максимальна при $m_1 = m_2$.

214. $\alpha = 4A/(1 + A)^2$, где A — атомная масса частицы, с которой сталкивается протон.

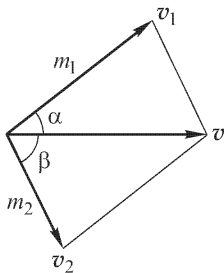


Рис. 216

A	1	2	4	12
α	1	0,89	0,64	0,284

215. Решение. Пусть m_1 — масса рассеиваемой частицы (α -частицы или дейтрона), v — ее скорость до рассеяния; m_2 — масса рассеивающей частицы (атома водорода); v_1 и v_2 — скорости частиц после рассеяния (рис. 216). Законы сохранения импульса и энергии дают

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos \alpha + m_2 v_2 \cos \beta,$$

$$m_1 v_1 \sin \alpha = m_2 v_2 \sin \beta,$$

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2.$$

Исключив отсюда угол β и скорость v_2 , получим для v_1 квадратное уравнение

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1 v v_1 \cos \alpha + (m_1 - m_2)v^2 = 0.$$

Условие вещественности корней его, как легко видеть, имеет вид $\sin \alpha \leq m_2/m_1$. Максимальный угол α , удовлетворяющий этому условию, и будет равен углу θ . Таким образом, $\sin \theta = m_2/m_1$. Отсюда находим для α -частицы $\theta = 14^\circ 30'$, для дейтрона $\theta = 30^\circ$.

216. Масса α -частицы должна быть меньше массы ядра: $m < M$;

$$v = v_0 \sqrt{\frac{M - m}{M + m}}, \quad V = \frac{m v_0}{M} \sqrt{\frac{2M}{M + m}}, \quad \text{tg } \theta = \sqrt{\frac{M - m}{M + m}}.$$

217. $v = \frac{3}{2} \frac{mV}{M}$, $E = \frac{3mV^2}{8} \left(1 - \frac{3m}{M}\right)$, где m — масса протона. Процесс невозможен, если $M < 3m$.

218. Решение. Пусть \mathbf{p} — импульс падающей частицы, \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 — импульсы образовавшихся частиц. Если все импульсы коллинеарны, то

$$p = p_1 + p_2, \quad \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q.$$

Исключив p_2 , получим квадратное уравнение для p_1 . Потребовав, чтобы его корни были вещественными, найдем искомое условие:

$$Q \leq E \left(1 - \frac{m}{m_1 + m_2}\right).$$

В случае равенства оба корня квадратного уравнения совпадают, в случае неравенства они различны.

219. Решение. Импульс α -частицы до столкновения: $p_0 = m_{\text{He}}v_0$. После столкновения импульс сохраняется. С ним связана кинетическая энергия движения центра масс:

$$K_{\text{ц.м.}} = \frac{p_0^2}{2(m_{\text{He}} + m_{\text{N}})} = \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

которая не затрачивается на ядерные превращения. Искомая энергия E_0 найдется из условия

$$E_0 = E + K_{\text{ц.м.}} = E + \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}} E_0,$$

откуда

$$E_0 = \frac{m_{\text{He}} + m_{\text{N}}}{m_{\text{N}}} E = 1,45 \text{ МэВ.}$$

220. Решение. Минимальное значение искомой энергии протона E_p соответствует лобовому столкновению, когда все частицы до и после столкновения движутся вдоль одной и той же прямой. Поэтому можно ограничиться только такими столкновениями.

Допустим сначала, что энергия бомбардирующего протона равна пороговой $E_{\text{пор}}$. Тогда получающиеся в результате реакции ядро Ве и нейтрон должны двигаться вперед с одинаковыми скоростями и уносить кинетическую энергию $E_0 = P_{\text{пор}}^2/[2(m_{\text{Ве}} + m_{\text{п}})]$, где $P_{\text{пор}}$ — импульс протона, соответствующий пороговой энергии $E_{\text{пор}} = P_{\text{пор}}^2/(2m_{\text{п}})$. Разность этих двух энергий

$$E_{\text{пор}} - E_0 = \frac{m_{\text{Ве}} + m_{\text{n}} - m_{\text{п}}}{m_{\text{Ве}} + m_{\text{n}}} E_{\text{пор}} \quad (220.1)$$

затрачивается на ядерную реакцию.

Найдем теперь энергию бомбардирующего протона E_p , при которой получают нейтроны в состоянии покоя, а ядра бериллия летят вперед. Если P_p — импульс протона до реакции, то $E_p = P_p^2/(2m_p)$, а кинетическая энергия образовавшегося ядра бериллия $E_{\text{Ве}} = P_p^2/(2m_{\text{Ве}})$. Разность этих энергий

$$E_p - E_{\text{Ве}} = \frac{1}{2} P_p^2 \left(\frac{1}{m_p} - \frac{1}{m_{\text{Ве}}} \right) = \frac{m_{\text{Ве}} - m_p}{m_{\text{Ве}}} E_p \quad (220.2)$$

идет на ядерную реакцию, а потому равна величине (220.1). Приравнявая выражения (220.1) и (220.2), находим

$$E_p = \frac{m_{\text{Be}}(m_{\text{Be}} + m_n - m_p)}{m_{\text{Be}}^2 - m_p^2} E_{\text{пор}},$$

или, пренебрегая различием масс протона и нейтрона,

$$E_p = \frac{m_{\text{Be}}^2}{m_{\text{Be}}^2 - m_p^2} E_{\text{пор}} = \frac{49}{48} E_{\text{пор}} = 192 \text{ МэВ}.$$

При больших энергиях появляются нейтроны, летящие назад.

221. Решение. Условие, при котором рассматриваемая реакция происходит с минимальной затратой энергии, легко найти, рассмотрев процесс в системе центра масс. Затраченная энергия будет минимальна, если в этой системе все четыре образовавшихся частицы покоятся. В лабораторной системе они будут двигаться с одинаковыми скоростями, как если бы образовалась одна частица с массой покоя $M = 4m_p$ или энергией покоя $4m_p c^2$. Эту энергию удобно обозначить как $2E$. Таким образом, $2E = 4m_p c^2 = 4E_0$, где E_0 — энергия покоя протона. Полная энергия движущегося протона (с импульсом p) до реакции будет $\sqrt{E_0^2 + (pc)^2}$. Поскольку при столкновении импульс сохраняется, полная энергия образовавшихся частиц представится выражением $\sqrt{(2E)^2 + (pc)^2}$. Закон сохранения энергии дает

$$\sqrt{E_0^2 + (pc)^2} + E_0 = \sqrt{(2E)^2 + (pc)^2};$$

отсюда

$$(pc)^2 = \frac{4(E^4 - E^2 E_0^2)}{E_0^2}.$$

Чтобы найти исходную кинетическую энергию протона, надо из полной энергии его вычесть энергию покоя. Это дает

$$K = \sqrt{E_0^2 + (pc)^2} - E_0 = 2\left(\frac{E^2}{E_0} - E_0\right).$$

В рассматриваемом случае $E = 2E_0$, так что $K = 6E_0 = 5,62 \text{ ГэВ}$.

222. 7,08 ГэВ.

223. $q = m_2/(m_1 + m_2)$.

224. В момент остановки барабана, как и при движении лифта, сила натяжения будет равна весу лифта, а дальше трос будет растягиваться и сила натяжения будет постепенно возрастать, пока кабина не остановится. В момент остановки кабины сила натяжения будет наибольшая — больше веса кабины. (Отсюда видно, что в таком положении лифт не может оставаться неподвижным; он начнет подниматься вверх — возникнут колебания кабины.) Быстрота нарастания натяжения во времени и его величина зависят от упругих свойств троса и массы кабины.

225. Удлинение $\approx 55 \text{ см}$, $T \approx 55 \text{ тс}$.

226. $h = 0,005 \frac{M}{m} l$.

227. 1) $v = 2 \frac{M+m}{m} \sqrt{lg} \sin \frac{\alpha}{2}$; 2) $v = \frac{2M\sqrt{lg} \sin(\alpha/2) - mv'}{m}$; 3) $v = \frac{2M\sqrt{lg} \sin(\alpha/2)}{m}$.

Решение задачи о соударении баллистического маятника и пули проведено путем применения закона сохранения количества движения к системе маятник–пуля. Этот способ решения, очевидно, справедлив только в том случае, если удар пули не передается оси вращения маятника. Дело обстоит именно так в том случае, когда пуля ударяется в так называемый центр качания маятника, находящийся на расстоянии приведенной длины физического маятника от его оси вращения, и скорость пули перпендикулярна к прямой, соединяющей точку подвеса маятника с его центром качания. При ударе же пули в произвольную точку маятника для решения задачи необходимо воспользоваться законом сохранения момента количества движения в системе маятник–пуля. В первом же случае применение закона сохранения момента количества движения будет эквивалентно применению закона сохранения количества движения. Аналогичных вопросов об ударе в твердое тело, закрепленное на оси, касаются задачи 359–361.

$$228. \dot{x}_1 = v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{gl}, \quad x_{1 \text{ макс}} = l\sqrt{2}.$$

Решение. Отсчитывая координаты грузов от уровня осей блоков, запишем для положения равновесия:

$$\cos \varphi_0 = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_1^0 = \frac{l}{2}.$$

Из условия нерастяжимости нити следует кинематическая связь:

$$x_2 + \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = L, \quad \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \cos \varphi = 0,$$

где L — полудлина нити.

Записывая полную энергию $E = K + U$ для трех положений системы $x_1 = 0$, $x_1 = x_1^0 = l/2$, $x_1 = x_{1 \text{ макс}}$:

$$\begin{aligned} E &= -2m_2g\left(L - \frac{l}{2}\right) = \\ &= \frac{m_1}{2}(1 + \cos^2 \varphi_0)v_0^2 - m_1gx_1^0 + 2m_2g\sqrt{(x_1^0)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} - 2m_2gL = \\ &= -m_1gx_{1 \text{ макс}} + 2m_2g\sqrt{x_{1 \text{ макс}}^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

получим два уравнения, из которых следуют значения, приведенные в ответе.

$$229. \alpha_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \alpha, \quad \alpha_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \alpha \sqrt{l_1/l_2}.$$

230. 1) Опишет над плоскостью параболу, вершина которой будет на высоте $h/2$; 2) будет равномерно скользить по плоскости со скоростью \sqrt{gh} .

231. Ящик не будет двигаться, потому что сообщаемые ему нормальная p_N и тангенциальная p_t (по отношению к наклонной плоскости) слагающие импульса \mathbf{p} вертикально падающего тела будут удовлетворять соотношению $p_N/p_t = \operatorname{tg} \alpha$, которому удовлетворяют слагающие веса ящика $mg_N/mg_t = \operatorname{tg} \alpha = k$, а в результате действия последних ящик не приходит в движение. После полной остановки падающего тела в ящике увеличение веса ящика по той же причине не приведет его в движение.

232. На расстоянии $\frac{M}{M-m}l$, где M — масса поезда до момента отрыва вагона, а m — масса вагона.

$$233. \mathbf{w} = \frac{M\mathbf{u}}{M+m}, \mathbf{v} = -\frac{m\mathbf{u}}{M+m}.$$

$$234. \mathbf{S}_1 = \frac{-m\mathbf{l}}{M+m}, \mathbf{S}_2 = \frac{M\mathbf{l}}{M+m}.$$

$$235. \mathbf{a}_1 = \frac{M\mathbf{a}}{M+m}, \mathbf{a}_2 = \frac{-m\mathbf{a}}{M+m}, \mathbf{F} = -\frac{mM\mathbf{a}}{M+m}.$$

$$236. \mathbf{v} = \frac{-\Delta m\mathbf{u}}{M+m}, \mathbf{S}_1 = \frac{-\Delta m\mathbf{l}}{M+2m+\Delta m}, \mathbf{S}_2 = \frac{(M+2m)\mathbf{l}}{M+2m+\Delta m}.$$

$$237. v = \frac{l}{(1+m/M)\sqrt{2h/g}}.$$

Решение. Из закона сохранения количества движения имеем $Mu = -mv$, где u — скорость лодки с человеком после броска, v — скорость ядра. Скорость ядра $v_{\text{отн}}$ относительно лодки $v_{\text{отн}} = u + v = v(1 + m/M)$. Для того чтобы ядро попало в корму лодки, необходимо, чтобы смещение ядра по горизонтали относительно лодки за время его падения ($t = \sqrt{2h/g}$) было равно длине лодки: $v_{\text{отн}}t = l$.

$$238. t = \sqrt{l/g}.$$

$$239. x = \frac{m}{M+m}(a-b).$$

$$240. M dv/dt = -\mu u.$$

Решение. Уравнение движения легко получить из условия сохранения количества движения в системе ракета–газ. Приравнявая количество движения системы в момент времени t количеству движения системы в момент времени $t + dt$, получаем

$$M\mathbf{v} = (M - dM)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dM(\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

Отбрасывая члены второго порядка малости и учитывая, что $dM = \mu dt$, получаем искомое уравнение.

241. Решение. $dv = \frac{-\mu u dt}{M} = \frac{-dM}{dt} \frac{u dt}{M} = -u \frac{dM}{M}$. Интегрируя это уравнение при условии $v = 0$ при $M = M_0$, находим: $v = u \ln(M_0/M)$ или

$$e^{v/u} = M_0/M. \quad (241.1)$$

Полученное соотношение называется формулой К. Э. Циолковского.

$$242. v = -u(1 - e^{-\frac{\mu}{M}t}), \eta = 2\left(1 - \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}\right) \frac{|\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|}; \eta_{\text{max}} = 1/2 \text{ при } v = u/2.$$

Решение. Приравнявая количества движения системы в момент времени t и $t + dt$, получаем уравнение

$$Mv = M(v + dv) - (u - v)\mu dt. \quad (242.1)$$

Интегрируя его, находим зависимость модуля скорости корабля от времени. Для получения КПД системы надо составить отношение величины полезной работы (в данном случае это будет приращение кинетической энергии корабля $d(Mv^2/2) = Mv dv$) к величине работы насоса ($\mu dt \cdot u^2/2$) за одинаковые промежутки времени: $\eta = 2Mv dv/\mu u^2 dt$; пользуясь уравнением (242.1), можно написать:

$$\eta = 2(u - v)v/u^2.$$

Отыскивая максимум этого выражения как функцию v/u , находим $\eta_{\text{max}} = 1/2$ при $v = u/2$.

243. Решение. Рассмотрим сначала движение частицы в системе центра масс. В этой системе протоны движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. Обозначим через E полную энергию каждого из них в этой системе. Поскольку суммарный импульс протонов равен нулю, они вместе могут рассматриваться как одна частица (как до, так и после столкновения) с массой покоя M , определяемой соотношением $2E = Mc^2$.

Перейдем теперь в лабораторную систему отсчета, в которой один из протонов (мишень) покоится, а другой движется. Такой переход, очевидно, никак не скажется на внутренних превращениях, которые могут претерпеть частицы. Обозначим через E' полную энергию движущегося протона, а через P — его импульс в лабораторной системе отсчета. Задача состоит в том, чтобы найти связь между энергиями E и E' . Суммарный импульс обоих протонов в той же системе отсчета будет, очевидно, P , а энергия $E' + E_0$. В релятивистской механике энергия связана с импульсом соотношением

$$E' + E_0 = \sqrt{(Mc^2)^2 + (Pc)^2} = \sqrt{(2E)^2 + (Pc)^2},$$

откуда

$$(Pc)^2 = (E' + E_0)^2 - (2E)^2.$$

С другой стороны, если написать соотношение между энергией и импульсом только для движущегося протона, то получится

$$E' = \sqrt{E_0^2 + (Pc)^2}, \quad \text{откуда} \quad (Pc)^2 = E'^2 - E_0^2.$$

Сравнивая оба выражения для $(Pc)^2$, получим

$$E' = 2 \frac{E^2}{E_0} - E_0.$$

Чтобы получить кинетическую энергию протона K' в лабораторной системе, надо вычесть отсюда энергию покоя E_0 . Это дает

$$K' = 2 \left(\frac{E^2}{E_0} - E_0 \right).$$

Если, как в разбираемом случае, $E_0 \ll E$, то

$$K' \approx 2 \frac{E^2}{E_0} = 2 \frac{(K + K_0)^2}{E_0}.$$

Для протона $E_0 = 0,937$ ГэВ, а потому $K' \approx 250$ ГэВ.

244. Решение. Пусть v_1, v_2, \dots — скорости ракеты после 1-го, 2-го, ... выбрасываний. По закону сохранения импульса: $(m_0 - \Delta m)v_1 + \Delta m \cdot w = 0$, где w — скорость выброшенной массы Δm после первого выбрасывания. Очевидно $u = v_1 - w$. Исключая w , получим

$$v_1 = \frac{\Delta m}{m_0} u. \quad (244.1)$$

Найдем теперь v_2 . В системе отсчета, движущейся со скоростью v_2 , ракета перед вторым выбрасыванием неподвижна, а после второго выбрасывания приобретает скорость $v_2 - v_1$. Поэтому можно воспользоваться формулой (244.1), сделав в ней замену $m_0 \rightarrow m_0 - \Delta m$, $v_1 \rightarrow v_2 - v_1$. Это дает

$$v_2 - v_1 = \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} u.$$

Комбинируя это соотношение с (244.1), находим v_2 . Продолжая этот процесс дальше, нетрудно получить

$$v_N = \left[\frac{\Delta m}{m_0} + \frac{\Delta m}{m_0 - \Delta m} + \dots + \frac{\Delta m}{m_0 - (N-1)\Delta m} \right] u.$$

В пределе, когда $\Delta m \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, $m_0 - (N-1)\Delta m \rightarrow m$, сумма, стоящая в квадратных скобках, переходит в интеграл, и мы получаем

$$v = u \int_m^{m_0} \frac{dm'}{m'},$$

где m — конечная масса ракеты. После взятия интеграла получается формула Циолковского.

$$245. \mu = -\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} e^{-gt/u}.$$

Решение. Уравнение движения ракеты

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - mg$$

перепишем в форме

$$m \frac{d}{dt} (v + gt) = -u \frac{dm}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d(v + gt)}{dm} = -\frac{u}{m}.$$

Это дает

$$\frac{m_0}{m} = e^{(v+gt)/u}, \quad v = u \ln \frac{m_0}{m} - gt.$$

Величина μ , очевидно, равна $-dm/dt$ и находится из условия, что для неподвижной ракеты $dv/dt = 0$.

$$246. \alpha = \frac{u}{v} \ln \frac{m_0}{m}.$$

Решение. Ускорение корабля по абсолютной величине равно $\omega^2 r = \omega v$, причем $v = \text{const}$. Поэтому уравнение движения $m dv/dt = u dm/dt$ переходит в уравнение $mv \omega dt = -u dm$. Замечая, что $d\alpha = \omega dt$ есть угол поворота за время dt , и интегрируя, получим ответ.

247. Первый способ требует меньшей затраты топлива.

$$248. \frac{K}{Q} = \frac{v^2}{2g(e^{v/u} - 1)} \approx 13\%.$$

249. Решение. Приращение скорости ракеты v связано с изменением ее массы m соотношением $m dv = -u dm$, причем $dm_{\text{газ}} = -dm$, где $dm_{\text{газ}}$ — масса выброшенных газов. Приращение кинетической энергии газов равно

$$dK_{\text{газ}} = \frac{1}{2} dm_{\text{газ}} v_{\text{газ}}^2 = \frac{m v_{\text{газ}}^2}{2u} dv.$$

Подставив сюда $v_{\text{газ}} = v - u$ и воспользовавшись формулой Циолковского $m = m_0 e^{-v/u}$, получим

$$dK_{\text{газ}} = -\frac{m_0}{2u} (u - v)^2 e^{-v/u} dv,$$

или после интегрирования

$$K_{\text{газ}} = \frac{m_0 u^2}{2} (1 - e^{-x} - x^2 e^{-x}),$$

где для краткости введено обозначение $x = v_{\text{кон}}/u$. Кинетическая энергия ракеты:

$$K_{\text{рак}} = \frac{1}{2} m v_{\text{кон}}^2 = \frac{1}{2} m_0 u^2 x^2 e^{-x}.$$

В результате находим

$$\eta = \frac{K_{\text{рак}}}{K_{\text{газ}}} = \frac{x^2}{e^x - (1 + x^2)}.$$

При $x = 4$ $\eta = 45\%$.

250. Решение. Если бы не было притяжения Луны, то задача свелась бы к нахождению наимыгоднейшего отношения m_2/m_1 для достижения заданной скорости ракеты. Поэтому от действия силы тяжести можно отвлечься и считать, что ракета движется в пространстве, свободном от тяготения. Примем за единицу массы полную массу ракеты в момент старта. Тогда

$$m_1 + m_2 + m = 1. \quad (250.1)$$

После выгорания топлива в первой ступени масса системы уменьшится на $\alpha_1 m_1$. Если при этом будет достигнута скорость v_1 , то по соотношению Циолковского

$$e^{v_1/u} = \frac{1}{(1 - \alpha_1)m_1 + m_2 + m}.$$

Масса $(1 - \alpha_1)m_1$ отделяется, и включается двигатель второй ступени. После выгорания топлива во второй ступени скорость ракеты возрастает еще на величину v_2 , причем

$$e^{v_2/u} = \frac{m_2 + m}{(1 - \alpha_2)m_2 + m}.$$

В этом можно убедиться, если перейти в систему отсчета, в которой ракета в момент отделения первой ступени покоится. Полная достигнутая скорость найдется перемножением двух предыдущих соотношений и последующим логарифмированием. Исключая еще при этом массу m_2 с помощью соотношения (250.1), получим

$$\frac{v}{u} = \ln(1 - m_1) - \ln(1 - \alpha_1 m_1) - \ln[(1 - \alpha_2)(1 - m_1) + \alpha_2 m].$$

Здесь m и u играют роль постоянных параметров, а m_1 — аргумента, от которого зависит скорость v . Дифференцируя по m_1 и приравнявая производную нулю, получим условие максимума

$$\frac{1}{m_1 - 1} + \frac{1}{\beta - m_1} + \frac{1}{\gamma - m_1} = 0, \quad (250.2)$$

где введены обозначения

$$\beta = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \gamma = 1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_2} m.$$

Условие (250.2) приводит к квадратному уравнению относительно m_1 , решая которое, найдем

$$m_1 = 1 - \sqrt{1 + (\beta\gamma - \beta - \gamma)}.$$

Перед корнем взят минус, так как по смыслу задачи $0 < m_1 < 1$. С помощью (250.1) находим массу m_2 , а затем искомое отношение m_2/m_1 . Возвращаясь при этом к прежним параметрам α_1 и α_2 , получим

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}} - \sqrt{m}}{1 - \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2}}} \sqrt{m}. \quad (250.3)$$

Решение имеет смысл при выполнении условия

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha_1}{1 - \alpha_2} m < 1.$$

В реальных условиях, когда $m \ll 1$, а параметры α_1 и α_2 отличаются не очень сильно, это условие соблюдается. При $\alpha_1 = \alpha_2$ получается простая формула

$$m_2/m_1 = \sqrt{m}. \quad (250.4)$$

251. Пусть m и v — масса покоя и скорость ракеты в произвольный момент времени t , а $m_{\text{газ}}$ и $v_{\text{газ}}$ — те же величины для газов, образовавшихся из топлива ракеты к этому моменту времени. Так как газы, уже покинувшие ракету, не оказывают влияния на ее движение, то можно принять $m_{\text{газ}} = 0$. Однако газы непрерывно образуются, так что $dm_{\text{газ}} \neq 0$. На основании закона сохранения импульса и энергии (релятивистской массы)

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}v_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}, \quad (251.1)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m_{\text{газ}}}{\sqrt{1 - v_{\text{газ}}^2/c^2}} = \text{const}. \quad (251.2)$$

Дифференцируя уравнение (251.1) с учетом (251.2) и полагая в окончательном результате $m_{\text{газ}} = 0$, получим

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dv + (v - v_{\text{газ}}) d \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 0.$$

По релятивистскому закону сложения скоростей

$$v_{\text{газ}} = \frac{v - u}{1 - vu/c^2}, \quad (251.3)$$

где u — скорость газовой струи относительно ракеты. Исключая $v_{\text{газ}}$, после несложных преобразований находим

$$\frac{dv}{v^2 - c^2} = \frac{u}{c^2} \frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость u постоянной и интегрируя, получим

$$\frac{m_0}{m} = \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)^{c/2u}. \quad (251.4)$$

253. По формуле (251.4) $m_0/m = 5 \cdot 10^{3327}$. Для ориентировки заметим, что масса Галактики $\sim 3 \cdot 10^{44}$ г, Метагалактики $\sim 10^{56}$ г. Таким образом, даже масса Метагалактики невообразимо мала по сравнению с массой космического корабля. Было бы неосторожно применять к столь гигантским «кораблям» обычные законы физики и, в частности, формулу (251.4). Наш пример показы-

вает лишь абсолютную непригодность ракет на химическом топливе в качестве звездолетов.

254. Решение. Если v — скорость ракеты, то $mv = P = E/c$, где P — полный импульс, а E — энергия излученного света. Дифференцируя по времени и пренебрегая изменением массы ракеты, находим искомую мощность $\frac{dE}{dt} = mcg = 3 \cdot 10^{12}$ Вт = $3 \cdot 10^9$ кВт, что превосходит мощность крупной электростанции примерно в 1000 раз.

255. $t = \frac{u}{g} \ln \left(1 + \frac{m_0}{m_1 + m_2} \right) = 22$ с. Приблизительно ввиду малости величины $\frac{m_0}{m_1 + m_2}$

$$t \approx \frac{m_0}{m_1 + m_2} \frac{u}{g} = 25 \text{ с}, \quad l = vt = 220 \text{ м.}$$

256. Решение. Уравнение движения капли

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{m} \frac{dm}{dt} = g.$$

Так как $m \sim r^3$ и, по предположению, $dm/dt \sim r^2$, то $dr/dt = C = \text{const}$. Отсюда с учетом начальных условий получаем $r = Ct$. Уравнение движения приводится к виду

$$\frac{dv}{dt} + 3\frac{v}{t} = g.$$

Решая его и учитывая, что при $t = 0$ $v = 0$, получаем $v = \frac{1}{4}gt$. Падение капли будет равноускоренным с ускорением $a = g/4$.

§ 6. Динамика движения материальной точки по окружности. Движение относительно вращающихся систем отсчета

257. 1) $F = mg$, 2) $F = mg - \frac{mv^2}{R}$, 3) $F = mg + \frac{mv^2}{R}$, где R — радиус кривизны моста.

258. $v_{\text{мин}} = \sqrt{Rg}$.

Решение. Радиус кривизны траектории, нормальное ускорение тела и его скорость связаны соотношением $\rho = v^2/a_n$. Для начала закругления нормальное ускорение максимально и равно $a_n = g$, следовательно, $\rho_{\text{мин}} = v_0^2/g$. Условие $\rho \geq R$ дает для скорости $v_0^2 \geq Rg$, откуда и следует приведенный ответ.

259. $F = (1 + 4kh)mg$, $a = 4kgh$.

Решение. В нижней точке траектории шарик будет иметь ускорение a_N , направленное вверх. Поэтому давление шарика на дно чаши можно записать так: $F = m(g + a_N)$. Ускорение a_N можно найти следующим образом. Дифференцируя уравнение параболоида два раза по времени, имеем: $\dot{z} = 2k(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2k(x\ddot{x} + y\ddot{y})$. Поэтому искомое ускорение шарика a в нижней точке траектории, где $x = y = 0$, будет иметь значение

$$a = \ddot{z}_0 = a_N = 2k(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) = 2kv_0^2, \quad \text{где} \quad v_0^2 = 2gh. \quad (259.1)$$

Следовательно, $\ddot{z}_0 = a_N = 4kgh$. Заметим, что в изложенном приеме решений обойдено вычисление радиуса кривизны параболы в ее нижней точке, который

обычно бывает необходимо знать для вычисления нормального ускорения

$$a_N = \frac{v^2}{\rho}, \tag{259.2}$$

где ρ — радиус кривизны траектории. Зная уравнение параболы, можно было бы методами дифференциальной геометрии найти значение

$$\rho = \frac{1}{2k}. \tag{259.3}$$

Тогда, используя выражения (259.1)–(259.3), можно найти значение a_N иначе, чем это было сделано выше.

260. $v_0 = \sqrt{gR} \approx 8$ км/с; ускорение снаряда равно g и нормально к траектории; v_0 принято называть первой космической скоростью.

261. Траекторией снаряда будет дуга эллипса. Эта кривая изображена на рис. 217 сплошной линией. Остальная часть эллипса изображена пунктиром. Один из фокусов этого эллипса будет совпадать с центром Земли. Ускорение a снаряда будет направлено всегда к этому фокусу эллипса, причем $a = GM/R^2$, где G — постоянная тяготения, M — масса Земли и R — расстояние до центра Земли.

262. 1) $h = 5R/2$. 2) На тележку действуют сила притяжения Земли mg и сила давления рельсов $mv^2/R - mg$, где v — скорость тележки в этой точке. 3) Не доходя до верхней точки, тележка отделится от рельсов и будет двигаться по параболе до встречи с рельсами в нижней части петли.

263. $k = v^2/(Rg) \approx 0,4$.

$$\mathbf{264.} \quad \omega^2 = \frac{g(\cos \alpha - k \sin \alpha)}{h \operatorname{tg} \alpha (\sin \alpha + k \cos \alpha)}.$$

Решение. Так как в рассматриваемом случае сила трения имеет максимальное значение kN (N — сила нормального давления тела на стенку воронки) и направлена вдоль образующей конуса вверх, то уравнение вращательного движения тела (массы m) вокруг вертикальной оси и условие отсутствия ускорения тела по вертикали можно записать в виде

$$\begin{aligned} m\omega^2 h \operatorname{tg} \alpha &= N \cos \alpha - kN \sin \alpha, \\ mg &= N \sin \alpha + kN \cos \alpha, \end{aligned}$$

откуда и следует искомый результат.

$$\mathbf{265.} \quad v = \sqrt{Rg \operatorname{ctg} \alpha}.$$

266. 1) $\sin \alpha = \omega^2 r_0 / (g - \omega^2 l)$. 2) Тригонометрическое уравнение $\omega^2 l \sin \alpha + \omega^2 r_0 = g \operatorname{tg} \alpha$ решаем, пользуясь рис. 218. 3) На нити будет излом в месте прикрепления к ней дополнительной массы, так

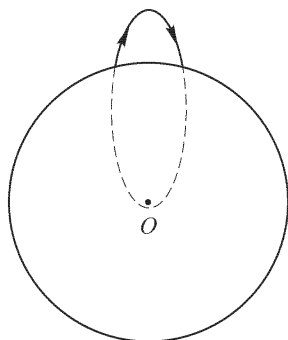


Рис. 217

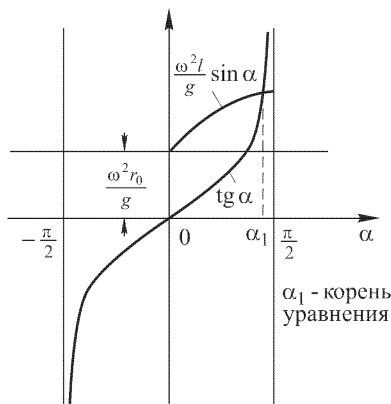


Рис. 218

как направление нити, определяемое углом α , зависит от величины l , вдвое большей для одного из грузов.

$$267. \omega^2 = \frac{g}{\sqrt{(R+l)^2 - (R+r)^2}}.$$

$$268. R = \frac{10v^2}{g\sqrt{n(2+0,01n)}}.$$

269. Затормозить.

270. При движении по синусоиде нормальное ускорение максимально в ее вершинах, где кривизна кривой максимальна. Если $y = y(x)$ — уравнение синусоиды, то в вершинах $y' = 0$, и радиус кривизны в этих точках можно вычислить по формуле $1/R = |y''|$. Записав уравнение синусоиды в виде $y = A \sin 2\pi \cdot x/l$ (амплитуда A и пространственный период l постоянны), нетрудно получить условие, при котором заноса не будет: $v < \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{A}}$, где μ — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения.

271. $a_{\max} = Av^2/B^2$, $a_{\min} = Bv^2/A^2$. Заноса не будет при условии $v < B\sqrt{\mu g/A}$.

272. Самолет во время совершения петли будет иметь ускорение $a = v^2/R = 9 \text{ м/с}^2$, направленное к центру петли. В нижней точке петли на крылья будет действовать давление воздуха

$$m(a + g) = mg \left(1 + \frac{a}{g}\right) \approx 1,92mg \approx 1,4 \text{ тс},$$

т.е. нагрузка на крылья будет почти вдвое больше, чем при горизонтальном полете. Отсюда видна необходимость запаса прочности в конструкции самолета для выполнения им фигур высшего пилотажа.

273. В нижней точке петли летчика будет прижимать к сиденью с силой $\frac{80}{9,8} (60,5 + 9,8) \text{ кгс} \approx 563 \text{ кгс}$, соответственно в верхней точке — с силой $\approx 403 \text{ кгс}$.

274. При $v^2/R > g$ в точке A «отвес» будет направлен вверх, при $v^2/R < g$ — вниз (рис. 219). На этом же рисунке указано расположение отвеса в других точках при $v^2/R < g$.

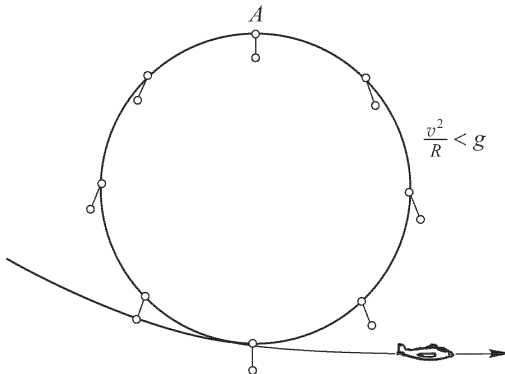


Рис. 219

275. $r = v^2 / (g \operatorname{tg} \alpha)$.

Указание. Когда самолет летел прямолинейно, плоскость крыла была горизонтальна. Подъемная сила в этом случае направлена вертикально вверх, т. е. перпендикулярна к плоскости крыла. При повороте корпуса самолета вокруг продольной оси подъемная сила поворачивается на тот же угол, т. е. продолжает оставаться перпендикулярной к плоскости крыла, так как силы взаимодействия самолета с окружающей средой зависят лишь от относительного движения самолета и среды.

276. Груз массы M займет либо ближайшее возможное положение к оси, либо наиболее удаленное. Положение на расстоянии $R = mg / (M\omega^2)$ от оси соответствует равновесию, но оно неустойчиво, так как даже при небольшом увеличении радиуса R веса mg будет недостаточно, чтобы удерживать массу M на окружности, и она уйдет в наиболее удаленное положение от оси. Наоборот, при небольшом уменьшении радиуса R вес mg будет больше силы, необходимой для того, чтобы удерживать массу на расстоянии R , и она будет приближаться к оси.

277. То же, что и в задаче 276.

278. Решение. Груз массы M будет совершать движение по кругу радиуса $R_0 = mg / (M\omega^2)$. Так как момент количества движения массы M должен оставаться постоянным, то $M\omega R^2 = L = \text{const}$. Отсюда следует, что центробежная сила может быть представлена в виде

$$f = M\omega^2 R = \frac{L^2}{MR^3}.$$



Рис. 220

График зависимости центробежной силы от R изображен на рис. 220. Постоянная сила натяжения нити $F = mg$, действующая на массу M в противоположную сторону, изобразится на этом же рисунке в виде прямой, параллельной оси абсцисс. Устойчивому положению массы M на вращающемся стержне соответствует точка пересечения этой прямой с кривой центробежной силы. Отклонение груза массы M от положения R_0 , независимо от направления этого отклонения, вызывает силу, возвращающую массу M в положение R_0 . Это и означает, что положение массы M на расстоянии R_0 от оси вращения будет устойчивым. Различие в полученных результатах по сравнению с результатами предыдущей задачи объясняется постоянством момента количества движения

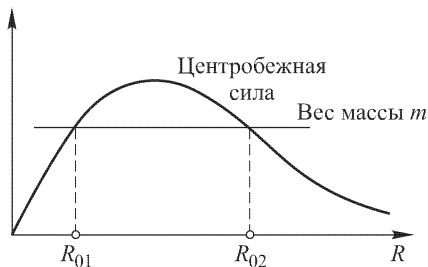


Рис. 221

системы, заданным в условиях задачи. Все это рассмотрение имеет смысл, если выбраны условия, при которых R_0 не мало. Иначе нельзя было бы пренебречь моментом инерции прибора по сравнению с моментом инерции массы M .

279. Возможны (при не слишком большой массе m) два положения равновесия: устойчивое R_{02} и неустойчивое R_{01} , если не считать устойчивого положения равновесия $R = 0$ (рис. 221). Так как в этом случае постоянный момент

количества движения есть $(MR^2 + I_0)\omega = a$, то центробежная сила равна $Ma^2R/(I_0 + MR^2)^2$. Пользуясь графиком сил так же, как и в ответе предыдущей задачи, можно решить вопрос об устойчивости равновесия.

Наличие двух положений равновесия тела на стержне в этом случае непосредственно вытекает из того, что величина центробежной силы должна обращаться в нуль не только при $R \rightarrow \infty$, как в условии предыдущей задачи, но также и при $R \rightarrow 0$. Действительно, существование у системы момента инерции I_0 приводит к тому, что при приближении массы M к оси вращения угловая скорость вращения остается конечной величиной и выражение $M\omega^2R$ при $R \rightarrow 0$ обращается в нуль. Между двумя равными нулю значениями непрерывной функции должен иметь место максимум этой функции и, следовательно, кривая функции должна дважды пересечь всякую прямую, параллельную оси абсцисс и проходящую ниже максимальной ординаты функции. В данном случае график дважды пересечет прямую, соответствующую значению силы mg . Знаки производной функции в местах ее пересечения с прямой $f = mg$ и определяют устойчивость и неустойчивость положений равновесия массы M .

280. Нить, привязанная к оси, натянута силой $\omega^2[m_1R + m_2(R + l)]$; нить, связывающая массы, натянута силой $\omega^2m_2(R + l)$.

281. Сила натяжения пружины должна быть пропорциональна ее удлинению. Коэффициент упругости пружины должен быть равен $M\omega^2$.

282. $k \approx 48$ гс/см.

283. $\alpha = 0$, если $\omega^2 < \frac{kg}{ml_0(g/l_0 + k/m)}$, иначе $\cos \alpha = g \frac{k - m\omega^2}{\omega^2kl_0}$ ($\omega < \sqrt{k/m}$).

Решение. Пусть T — натяжение пружины. Тогда

$$T = k(l - l_0), \quad l = l_0 + \frac{T}{k},$$

$$T \cos \alpha = mg, \quad T = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad T \sin \alpha = m\omega^2r,$$

где $r = l \sin \alpha$. Если $\alpha \neq 0$, то имеем

$$mg \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) = m\omega^2l_0 \cos \alpha, \quad \cos \alpha = \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_2^2}\right),$$

где $\Omega_1^2 = \frac{g}{l_0}$, $\Omega_2^2 = \frac{k}{m}$. Это справедливо, если $\frac{\Omega_1\Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}} < \omega < \Omega_2$. Если $\omega < \frac{\Omega_1\Omega_2}{\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}}$, то $\alpha = 0$; при $\omega \rightarrow \Omega_2$ $l \rightarrow \infty$, т. е. пружина обрывается.

284. В зависимости от значения ω либо вниз, либо вверх, так как положение равновесия, соответствующее расстоянию от оси $R = gCE/(\omega^2ED)$, неустойчиво. См. ответ к задаче 276.

285. $x = (g/\omega^2) \operatorname{tg} \alpha$.

286. $\rho l^2 \omega^2 < 8T$.

287. $\omega^2 = \frac{g}{l} \sqrt{2}$. Равновесие устойчиво, если $kl > mg \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} mg$.

Решение. Запишем уравнение динамики для системы координат, вращающейся вместе с треугольником:

$$m\mathbf{a}_{0m} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{упр}} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_{\text{цб}}.$$

Здесь \mathbf{N} — сила нормальной реакции, \mathbf{F}_K — сила Кориолиса, $\mathbf{F}_{цб}$ — центробежная сила инерции. В проекции на гипотенузу AC получим

$$m\ddot{R} = -mg \cos \alpha - k(R - l) + m\omega^2 R \sin^2 \alpha,$$

или

$$\ddot{R} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \left[R - \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \right],$$

где R — расстояние груза (коррдината) от точки A на гипотенузе. Полагая $\dot{R} = 0$, определяем положение равновесия муфты:

$$R^* = \frac{kl - mg \cos \alpha}{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha} \quad (k - m\omega^2 \sin^2 \alpha \neq 0);$$

Приравнивая $R^* = l$, находим угловую скорость:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{g}{l} \sqrt{2}.$$

Если ввести смещение из положения равновесия $\xi = R - R^*$, то получим

$$\ddot{\xi} = -\frac{k - m\omega^2 \sin^2 \alpha}{m} \xi,$$

что для $k > m\omega^2 \sin^2 \alpha$ соответствует гармоническим колебаниям муфты около положения равновесия с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha}$$

и означает устойчивость положения равновесия.

288. $T \approx 1,6P$.

289. Наклон делается для того, чтобы давление поезда на полотно железной дороги было нормально к плоскости полотна и чтобы реборды колес не срывали рельсы со шпал в сторону;

$$\operatorname{tg} \alpha = v^2 / (Rg),$$

где α — угол наклона полотна к горизонту, v — скорость поезда и R — радиус закругления.

290. Пол комнаты представляет собой параболоид вращения $z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$; ось Z направлена по оси вращения, начало координат находится в нижней точке, а оси X и Y лежат в горизонтальной плоскости.

291. 1) Сила натяжения нити обратится в нуль, когда она займет положение, определенное углом α (см. рис. 68), для которого $\cos \alpha = 2/3$.

2) В этой точке траектории шарика $v = \sqrt{gL/3}$.

3) Дальнейшее движение шарика будет происходить по параболе до тех пор, пока нить не будет вновь натянута в результате перемещения шарика.

292. Решение. Пуля вылетает из ружья, имея скорость, направленную на юг. Следовательно, на нее будет действовать направленное на запад кориолисово ускорение

$$d^2x/dt^2 = 2v\omega \sin \varphi,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли и φ — географическая широта местности, в которой произведен выстрел. Считая в первом приближении вектор скорости пули постоянным, получаем (путем двукратного интегрирова-

ния по времени выражения для кориолисова ускорения) величину западного отклонения пули от первоначального направления выстрела $x = vt^2\omega \sin \varphi = 5,8$ см.

293. К югу, $y = \frac{4\omega v_0^3 \sin \varphi \cos \alpha \sin^2 \alpha}{g^2} \approx 71$ м.

294. Паровоз действует на правый (по ходу поезда) рельс железнодорожного пути с силой (ход решения задачи ясен из рис. 222)

$$F = 2mv\omega \sin \varphi = 25 \text{ кгс,}$$

где ω — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

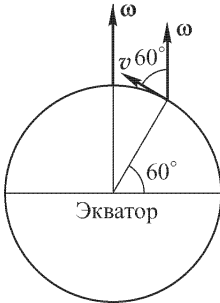


Рис. 222

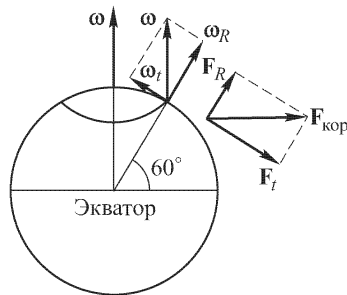


Рис. 223

295. Расположение нужных для решения векторов угловых скоростей и сил показано на рис. 223. Вектор скорости поезда перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен за чертеж. Направленная вертикально компонента кориолисовой силы $F_R = 2mv\omega \cos \varphi = 14,9$ кгс. Направленная на юг горизонтальная компонента кориолисовой силы $F_t = 2mv\omega \sin \varphi = 25,3$ кгс, где φ — географическая широта места.

296. $P = P_0 \left[1 - \frac{2\omega v \cos \varphi + v^2/R}{g} \right] \approx P_0 \left(1 - 2 \frac{\omega v}{g} \cos \varphi \right) \approx P_0 (1 - 7,5 \cdot 10^{-5})$ (R — радиус Земли).

297. $v_0 = 2m\omega_0/(M + m)$. Скорость пушки направлена на запад.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, уравнение движения пушки со снарядом во время движения снаряда внутри ее ствола можно записать в виде

$$(M + m) \frac{dv}{dt} = 2m\omega_0 v = 2m\omega_0 a t,$$

где v — мгновенное значение скорости снаряда, ω_0 — угловая скорость вращения Земли вокруг ее оси. Следовательно,

$$\int_0^{v_0} dv = \int_0^{t_0} \frac{2m\omega_0 a}{M + m} t dt, \quad \text{где } t_0 = \sqrt{2l/k}.$$

298. $\Delta v \approx 2\omega_0 v_0^2/g$, где ω_0 — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Решение (в системе координат, связанной с Землей). С учетом действия центробежной силы инерции и кориолисовой силы условия отрыва самолета от Земли можно записать в виде:

1) при разбеге с запада на восток

$$mg - 2m\omega_0 v_1 - m\omega_0^2 R = kv_1^2;$$

2) при разбеге с востока на запад

$$mg + 2m\omega_0 v_2 - m\omega_0^2 R = kv_2^2;$$

3) при разбеге вдоль меридиана

$$mg - m\omega_0^2 R = kv_0^2,$$

где v_1 и v_2 — окончательные скорости разбега, R — радиус Земли.

Решение этой системы дает

$$v_2 - v_1 = \frac{2\omega_0 v_0^2}{g - \omega_0^2 R}.$$

Учитывая, что $g \gg \omega_0^2 R$, находим Δv .

299. Р е ш е н и е. Уравнение движения:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}].$$

Отбрасывая малый член $2[\mathbf{v}\boldsymbol{\omega}]$, находим ускорение и скорость в нулевом приближении: $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t$. Подставляя полученное значение \mathbf{v} в правую часть уравнения движения, находим ускорение, а его интегрированием — скорость в первом приближении:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}], \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2t[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}].$$

Аналогично находятся второе и высшие приближения. Во втором приближении

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + 2t[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + 4t[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}],$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t + 2t[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + t^2[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + 2t^2[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}],$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + t^2[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\mathbf{v}_0\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}].$$

В частности, если тело падает без начальной скорости, то для его смещения из начального положения $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ получим

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \frac{t^3}{3}[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\mathbf{g}\boldsymbol{\omega}]\boldsymbol{\omega}].$$

300. К востоку:

$$s_{\text{вост}} = \frac{1}{3}\omega t^3 g \cos \varphi = \frac{2}{3} \omega h t \cos \varphi,$$

к экватору:

$$s_{\text{экв}} = \frac{1}{12}\omega^2 t^4 g \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\omega t \sin \varphi \cdot s_{\text{вост}},$$

где φ — географическая широта рассматриваемого места, t — время, h — высота падения.

301.

h , м	100	500	1000	2000
$s_{\text{вост}}$, см	1,2	13,8	38,7	110
$s_{\text{экв}}$, см	$5,3 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$

302. 1) В неподвижной системе отсчета отклонение падающего тела к востоку (от вертикали, проведенной через точку первоначального положения тела) объясняется различием в тангенциальных скоростях точек земной поверхности и тела, находившегося над Землей на высоте h . Вызванная суточным вращением Земли линейная скорость точки C (рис. 224 а) $v_c = R\omega$, где R —

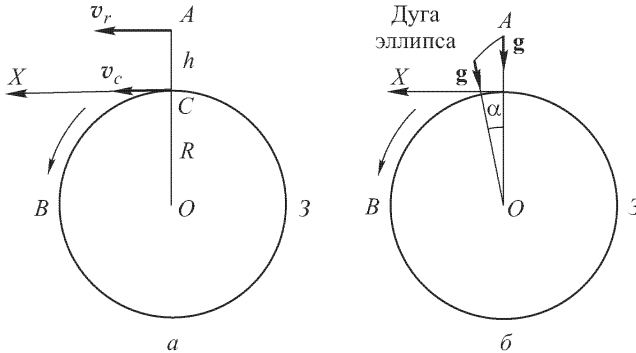


Рис. 224

радиус Земли и ω — угловая скорость ее вращения. Соответственно для тела, находящегося на высоте h в точке A , $v_t = (R + h)\omega$. Следовательно,

$$v_t - v_c = h\omega. \quad (302.1)$$

Согласно закону инерции падающее тело должно сохранять свою тангенциальную скорость неизменной. Поэтому в процессе падения тело сместится на восток дальше, чем точка C . Это обстоятельство было впервые указано Ньютоном в 1679 г. При $h \ll R$ различие в скоростях точек A и C (302.1) в течение времени падения тела $t = \sqrt{2h/g}$ должно привести к смещению тела на восток от точки C на расстояние $x = h\omega\sqrt{2h/g}$.

Однако приведенный расчет является лишь приближенным. Мы предполагали, что в тангенциальном по отношению к Земле направлении падающее тело движется по инерции равномерно. Между тем, сила тяжести будет нормальна к первоначальной скорости тела только в точке A . В последующих точках эллиптической траектории падающего тела (см. задачу 261) сила тяжести, направленная всегда к центру Земли, уже не будет перпендикулярна к скорости падающего тела и будет изменять не только ее направление, но и абсолютную величину. Произведем расчет, учитывая это обстоятельство. На рис. 224 б легко видеть, что ускорение падающего тела вдоль направления X будет

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha \approx -g \frac{x}{R} \approx -g \frac{(R+h)\omega t}{R} \approx -g\omega t.$$

После интегрирования этого уравнения при начальных условиях

$$(dx/dt)_0 = v_0 = (R+h)\omega$$

при $t = 0$ получим для $v_{\text{тела}}$ следующее уточненное выражение:

$$v_{\text{тела}} = dx/dt = -1/2 g\omega t^2 + (R+h)\omega.$$

Следующее интегрирование (выполненное при начальных условиях $x = 0$ при $t = 0$) даст уточненное значение: $x_{\text{тела}} = -\frac{1}{6} g \omega t^3 + (R + h) \omega t$. За время падения тела точка C на поверхности Земли сместится на отрезок $x_C = R \omega t$ (при $h \ll R$). В результате смещение упавшего тела на восток относительно точки C окажется равным

$$x_{\text{тела}} - x_C = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{h^{3/2} \omega}{\sqrt{g}}.$$

Разумеется, полученное выражение совпадает с результатом решения задачи 300, выполненным во вращающейся системе отсчета, связанной с Землей.

2) Применение к падающему телу закона сохранения момента количества движения основано на следующих соображениях. На падающее тело действует центральная сила притяжения Земли. Поэтому момент количества движения тела относительно земной оси должен оставаться неизменным. Следовательно (рассматривается падение тела на экваторе)

$$m(R + h)^2 \omega = m(R + y)^2 \left(\omega + \frac{v}{R + y} \right), \quad (302.2)$$

где M — масса тела, R — радиус Земли, h — первоначальная высота тела над Землей, y — расстояние тела до поверхности Земли, ω — угловая скорость вращения Земли, v — тангенциальная скорость тела относительно Земли. Полагая h и $y \ll R$, находим из (302.2) $v = 2\omega(h - y)$. С другой стороны, $h - y = gt^2/2$. Поэтому $v = \omega gt^2$. Смещение x упавшего тела от основания перпендикуляра, проведенного с поверхности Земли в точку первоначального положения тела, будет

$$x = \int_0^t v dt = \omega g \int_0^{\sqrt{2h/g}} t^2 dt = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\omega h^{3/2}}{\sqrt{g}}.$$

Последнее изящное решение задачи принадлежит К. А. Туманову. Если опыт производится на географической широте φ , то в выражение для x войдет множитель $\cos \varphi$.

303. Пуля отклонится к западу на расстояние

$$x_{\text{зап}} = \frac{4}{3} \frac{v_0^3 \omega}{g^2} \cos \varphi \approx 51 \text{ см.}$$

Результат может показаться неожиданным. При движении вверх кориолисова сила направлена на запад, а при движении вниз на восток. На первый взгляд кажется, что отклонение к западу должно компенсироваться последующим отклонением к востоку. На самом деле это не так. Когда тело движется вверх, его боковая начальная скорость равна нулю. В наивысшую точку тело приходит, однако, с западной составляющей скорости, которую оно приобретает под действием кориолисовой силы. Поэтому обратное падение тела начинается с начальной скоростью, направленной на запад. Следовательно, скорость все время направлена на запад и перед ударом о землю обращается в нуль.

304. Ствол ружья надо наклонить к востоку под углом

$$\alpha = \frac{2}{3} \frac{v_0 \omega}{g} \cos \varphi \approx 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 0,85' \approx 51''.$$

305. Поверхность воды образует с горизонтом угол α , определяемый формулой $\text{tg } \alpha = (2v\omega/g) \sin \varphi$, где v — скорость течения реки, ω — угловая

скорость вращения Земли, g — ускорение свободного падения. Результат находится из условия, что поверхность жидкости должна быть нормальна к равнодействующей приложенных к ней сил, т. е. силы тяжести и кориолисовой силы.

306. Решение е. Не учтено кориолисово ускорение. Введем систему отсчета S , равномерно вращающуюся вокруг точки A с угловой скоростью $+\omega$. Пусть точка B вращается относительно этой системы с угловой скоростью $-\omega$. Обозначая вектор \overline{AB} через \mathbf{r} , имеем для скорости и ускорений точки B :

$$\mathbf{v}_{\text{отн}} = -[\omega \mathbf{r}], \quad \mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\omega \mathbf{v}_{\text{отн}}] = 2\omega^2 \mathbf{r}.$$

Следовательно, $\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}} = 0$.

307. $\alpha = 4\pi R/(vT) = 0,0209$ рад = $1,2^\circ$.

308. Решение е. В системе отсчета, связанной с вращающейся каруселью, боковое ускорение пули $\mathbf{a}_{\text{бок}} = 2[\mathbf{v}_{\text{отн}}\omega] + [\mathbf{r}\dot{\omega}]$, или в скалярной форме $a_{\text{бок}} = -2v_0\omega + r\dot{\omega}$. Отклонения вправо считаются положительными, влево — отрицательными (рис. 225). Радиус r считается положительным выше центра O и отрицательным — ниже. Учитывая начальные условия $r = -D/2$, $\omega = \omega_0$ при $t = 0$, получим

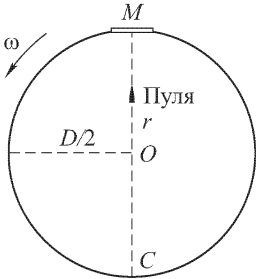


Рис. 225

$$r = v_0 t - D/2, \quad \omega = \omega_0 + \dot{\omega} t,$$

$$a_{\text{бок}} = -2v_0\omega_0 - 3\dot{\omega}v_0 t - \frac{1}{2} D\dot{\omega}.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим боковое отклонение. При $t = D/v_0$ оно должно обращаться в нуль. Это дает $\dot{\omega} = 4v_0\omega_0/D = 2/3$ рад/с². Линейное ускорение на периферии карусели будет $6,67$ м/с².

309. $F = \frac{4\pi}{T} \sqrt{\frac{R}{g}} P \approx 0,12P$, где P — вес тела на поверхности Земли, T — продолжительность звездных суток, R — радиус Земли.

310. $v_0 \geq \omega R$.

311. Решение е. Задача решается проще, если движение рассматривать в неподвижной системе отсчета (точнее, в системе отсчета, вращающейся относительно Земли вокруг вертикали рассматриваемого места с угловой скоростью $-\omega_{\text{в}}$, где $\omega_{\text{в}}$ — вертикальная составляющая угловой скорости осевого вращения Земли). В этой системе уравнение малых колебаний математического маятника имеет вид: $\ddot{\mathbf{r}} + \Omega^2 \mathbf{r} = 0$, где $\Omega^2 = g/l$, а \mathbf{r} — смещение маятника из положения равновесия. В начальный момент маятник, вращаясь вместе с Землей, имеет боковую скорость $\omega_{\text{в}}x_0$. Поместим начало координат O в положение равновесия маятника. Ось X направим из точки O к точке $(x = x_0, y = 0)$, в которой маятник находился в начальный момент. Для движения вдоль оси Y имеем: $\ddot{y} + \Omega^2 y = 0$. Решая это уравнение при начальных условиях $y_{t=0} = 0$, $\dot{y}_{t=0} = \omega_{\text{в}}x_0$, получим

$$y = \frac{\omega_{\text{в}}x_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

В среднем положении $\Omega t = \pi/2$, и для бокового отклонения в этом положении наша формула дает

$$y = \frac{\omega_{\text{в}}x_0}{\Omega} = \frac{\omega x_0}{\Omega} \sin \varphi \approx 1 \text{ мм}.$$

312. Решение. Если корабль движется по круговой орбите с постоянной скоростью v , то на тело массы μ в корабле действует центробежная сила инерции $\mu v^2/R$, направленная от Земли. «Вес» тела на корабле получится вычитанием из нее силы гравитационного притяжения μg : $\mu(v^2/R - g)$. По условию эта величина должна равняться μg . Отсюда находим $v = \sqrt{2gR}$, т. е. корабль должен двигаться по круговой орбите с параболической (второй космической) скоростью $v_{\text{п}} = \sqrt{2gR} = 11,2$ км/с. Если M_0 — стартовая масса корабля, а m_0 — масса, с которой он выводится на круговую орбиту, то

$$\frac{M_0}{m_0} = \exp \frac{v_{\text{п}}}{u}. \quad (312.1)$$

Найдем теперь расход массы при облете корабля вокруг земного шара. Уравнение движения имеет вид

$$ma_{\text{абс}} = -u \frac{dm}{dt} + mg,$$

где скорость газовой струи u направлена радиально от центра Земли. Так как при обращении корабля $a_{\text{абс}} \equiv a_{\text{норм}} = \frac{v_{\text{п}}^2}{R} = 2g$, то $mg = -u dm/dt$, или в скалярной форме $dm/m = -g dt/u$. Отсюда

$$m = m_0 \exp \left(-\frac{gt}{u} \right).$$

Если t — период обращения, то $gt = 2\pi Rg/v_{\text{п}} = \pi v_{\text{п}}$. Следовательно, для конечной массы $m_{\text{кон}}$ получаем

$$\frac{m_0}{m_{\text{кон}}} = \exp \frac{\pi v_{\text{п}}}{u},$$

или на основании (312.1)

$$\frac{M_0}{m_{\text{кон}}} = \exp \frac{(\pi + 1)v_{\text{п}}}{u} = e^{14,8} = 2,6 \cdot 10^6.$$

§ 7. Динамика твердого тела. Динамика системы

313. $a_2 = -a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + I/r^2} g$. Натяжение нитей:

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2 g + m_1 g I/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2}, \quad T_2 = \frac{2m_1 m_2 g + m_2 g I/r^2}{m_1 + m_2 + I/r^2};$$

усилие

$$T_3 = T_1 + T_2 + Mg.$$

Решение. Натяжение нити будет различным для правого (T_2) и левого (T_1) отрезков нити. Уравнения поступательного движения подвешенных грузов:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2, \quad (313.1)$$

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_1. \quad (313.2)$$

Уравнение вращения блока вокруг его геометрической оси

$$(T_2 - T_1)r = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (313.3)$$

где $d\omega/dt$ — угловое ускорение блока. Учитывая отсутствие скольжения нити по блоку и нерастяжимость нити, получаем уравнения

$$a_2 = -a_1 = r \frac{d\omega}{dt}. \quad (313.4)$$

Решение пяти уравнений (313.1)–(313.4), содержащих пять неизвестных a_1 , a_2 , ω , T_1 и T_2 , дает ответ на задачу.

$$314. \varphi = \frac{gt^2}{2R(1 + Mg/2P)}.$$

$$315. T = \frac{Mg}{4(1 + Mg/2P)}.$$

$$316. \frac{d\omega}{dt} = \frac{m_2 R - m_1 r}{m_2 R^2 + m_1 r^2 + I} g, \quad T_1 = m_1 \left(g + r \frac{d\omega}{dt} \right), \quad T_2 = m_2 \left(g - R \frac{d\omega}{dt} \right).$$

$$317. \text{С чашки весов надо снять груз } \frac{mg}{1 + I/mr^2}.$$

318. Если с чашки весов снят тот же груз, что и в предыдущей задаче, потому что при подъеме и при спуске грузика ускорение его одно и то же как по величине, так и по направлению.

$$319. a = \frac{2(M + m)r^2}{mr^2 + MR^2 + 2(M + m)r^2} g.$$

320. $a = \frac{M + m}{M + m + I/r^2} g \approx 196 \text{ см/с}^2$, где I — момент инерции диска и валика, а M — их масса.

$$321. a_2 = \frac{2ma}{M + 4m}.$$

Решение. Уравнения движения обеих обезьян по вертикали относительно неподвижной системы координат, уравнение вращательного движения блока и уравнение кинематической связи можно записать в виде

$$\begin{aligned} ma_1 &= T_1 - mg, & ma_2 &= T_2 - mg, \\ \frac{1}{2} MR^2 \beta &= (T_1 - T_2)R, & a_1 &= a - a_2, \end{aligned}$$

где a_1 и a_2 — ускорения первой и второй обезьян, β — угловое ускорение блока, равное $\beta = a_2/R$, T_1 и T_2 — соответствующие натяжения веревки, R — радиус блока. Отсюда и получаем a_2 .

$$322. T = \sqrt{\frac{I}{2mad}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin \alpha}} = 1,855 \sqrt{\frac{I}{mad}},$$

где I — момент инерции дверки, m — ее масса. Интегрирование выполнено численно.

323. Решение. Пусть $T_1/2$ и $T_2/2$ — натяжение верхней и нижней нитей. Тогда ускорение центра масс катушки $a = (Mg + T_2 - T_1)/M$; угловое ускорение катушки $d\omega/dt = (T_2 + T_1)r/I$; ускорение груза $a_1 = (mg - T_2)/m$. Из кинематических условий следует: $a = r d\omega/dt = a_1/2$. Отсюда:

$$a = \frac{M + 2m}{4m + M + I/r^2} g, \quad T_1 = (2m + I/r^2)a - mg, \quad T_2 = m(g - 2a).$$

324. Ускорения центра нижнего и верхнего дисков

$$a_1 = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1 + 3I/mr^2}{I/mr^2 + (1 + 3I/mr^2)^2} g, \quad a_2 = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1 + 2I/mr^2}{I/mr^2 + (1 + I/mr^2)^2} g.$$

Решение. Обозначив через y координату центра нижнего диска, через x — координату центра верхнего диска, через ω_1 и ω_2 — угловые скорости нижнего и верхнего дисков, через T_1 натяжение нижней пары нитей и через T_2 — натяжение верхней пары нитей, можно написать следующие уравнения движения и кинематические соотношения (кинематические соотношения вытекают из условия нерастяжимости нитей):

$$mg + T_1 - T_2 = ma_2, \quad a_2 = \dot{\omega}_2 r, \quad mg - T_1 = ma_1, \\ a_1 - a_2 = \dot{\omega}_1 r, \quad T_2 r = I \dot{\omega}_2, \quad T_1 r = I \dot{\omega}_1.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем значения ускорений.

325. $a = \frac{2}{3} g \sin \alpha$ (рис. 226).

Решение. Уравнение движения центра массы диска параллельно наклонной плоскости

$$mg \sin \alpha - f_{\text{тр}} = ma. \quad (325.1)$$

Уравнение вращательного движения диска вокруг геометрической оси диска

$$I \frac{d\omega}{dt} = f_{\text{тр}} R, \quad (325.2)$$

где $d\omega/dt$ — угловое ускорение диска, I — момент инерции и R — радиус диска. Вследствие отсутствия скольжения

$$a = R \frac{d\omega}{dt}. \quad (325.3)$$

Из уравнений (325.1)–(325.3) находим a , $d\omega/dt$ и $f_{\text{тр}}$. Так как диск сплошной и однородный, то $I = mR^2/2$. Подставляя значение I в выражение для a , получаем результат, приведенный в ответе.

326. $a = \frac{5}{7} g \sin \alpha$. Сила трения равна $\frac{2}{7} mg \sin \alpha$, где m — масса шара.

327. $K = Mv^2$, где v — скорость движения центра обруча.

328. $f = \frac{1}{3} mg \sin \alpha = 50$ гс.

329. $k \geq \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha$.

330. 1) Шар. 2) В $\sqrt{15/14}$ раз в данном месте. 3) В $15/14$ раз.

331. Выгоднее ось, сточенная на конце. Сила трения остается неизменной, но момент силы трения относительно оси пропорционален радиусу поверхности опоры. Если kN — сила трения, N — сила давления на опору, то при равномерном распределении силы трения по поверхности опоры на единицу площади ее момент будет равен $\frac{2}{3} kNR$, где R — радиус круга опоры.

332. $a = \frac{m_3 g}{m_1 + 6m_2 + m_3} = 115 \text{ см/с}^2$.

333. $a = \frac{F(R \cos \alpha - r)R}{I + mR^2}$, где I и m — момент инерции и масса катушки соответственно; $a > 0$, если $\cos \alpha > r/R$; сила трения $f = F \cos \alpha - ma$.

334. $v = 2\sqrt{la_0/3}$.

Решение. В системе координат, связанной с доской, уравнения поступательного и вращательного движения цилиндра имеют вид

$$ma = ma_0 - F_{\text{тр}}, \quad Ia/r = F_{\text{тр}} r,$$

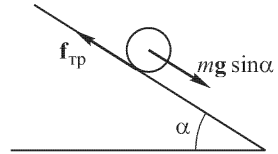


Рис. 226

где ma_0 — сила инерции, $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующая на цилиндр со стороны доски, I — момент инерции цилиндра и r — его радиус. Решение этой системы уравнений дает $a = \frac{2}{3}a_0$. Учитывая, что $v = \sqrt{2la}$, находим окончательный результат.

335. Обозначим натяжение нити через T и силу взаимодействия между рамой и катком через T' . Если каток идет сзади, то можно написать уравнения движения так:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}M_1a &= M_1g \sin \alpha + T' && \text{для катка,} \\ M_2a &= M_2g \sin \alpha - T' + T && \text{для рамы,} \\ M_3a &= M_3g(\sin \alpha - k \cos \alpha) - T && \text{для тела массы } M_3. \end{aligned}$$

Из этих уравнений получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{(M_1 + M_2 + M_3) \sin \alpha - kM_3 \cos \alpha}{\frac{3}{2}M_1 + M_2 + M_3} g, \\ T &= M_3g \frac{\frac{1}{2}M_1 \sin \alpha - k(\frac{3}{2}M_1 + M_2) \cos \alpha}{\frac{3}{2}M_1 + M_2 + M_3}. \end{aligned}$$

Если $\operatorname{tg} \alpha > k(3 + 2M_2/M_1)$, то $T > 0$. Чтобы нить была натянута в этом случае, каток следует пускать сзади. Если $\operatorname{tg} \alpha < k(3 + 2M_2/M_1)$, то каток следует пускать впереди.

$$\mathbf{336.} \quad a \leq \frac{kg}{2(1 - kh/l)} \quad \text{и} \quad a \leq kg.$$

Решение. Условия равновесия сил и моментов (в неинерциальной системе отсчета):

$$ma = T, \quad mah + mg \frac{l}{2} = P_2l, \quad P_2 = \frac{mg}{2} + \frac{mah}{l};$$

для критического случая $T = kP_2$

$$ma = k \left(\frac{mg}{2} + \frac{mah}{l} \right), \quad ma \left(1 - \frac{kh}{l} \right) = k \frac{mg}{2}, \quad a \leq \frac{kg}{2(1 - kh/l)}.$$

Это справедливо, если $kh/l \leq 1/2$. В противном случае ($P_1 < 0$) автомобиль опрокидывается; поэтому всегда $a \leq kg$.

$$\mathbf{337.} \quad \omega = \sqrt{3g/l}.$$

Указание. По закону сохранения энергии

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{l}{3} m \omega^2 = \frac{mgl}{2}.$$

$$\mathbf{338.} \quad L = \frac{2}{5} m R^2 \omega \approx 52 \cdot 10^{40} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{с}.$$

339. $1,67 \cdot 10^{11}$ тс · км. Величину момента количества движения см. в ответе предыдущей задачи.

340. Скорость вращения возрастет в $(1 + mR^2/I)$ раз. Кинетическая энергия вращения возрастет во столько же раз. Увеличение энергии произойдет за счет работы, произведенной человеком при перемещении его по диску.

$$\mathbf{341.} \quad \omega = \frac{mrv}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}.$$

$$\mathbf{342.} \quad 1) \Delta E_{\text{к}} = 2I_1^2 \omega_1^2 / I_2; \quad 2) \Delta E_{\text{к}} = I_1^2 \omega_1^2 / 2I_2.$$

$$\mathbf{343.} \quad t = \frac{mr^2}{2M_0} \omega; \quad N = \frac{M_0}{2I} t^2, \quad \text{где } I = I_0 + m \left(d^2 + \frac{r^2}{2} \right).$$

$$\mathbf{344.} \quad N = 3\pi r n^2 / (4kg).$$

345. Кинетическая энергия вращения уменьшится на

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} (\omega_1 - \omega_2)^2.$$

346. Решение. Благодаря трению скольжения натяжения ремня сверху T_1 и снизу T_2 будут разными. Записывая для маховиков уравнения движения, получим

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} = (T_1 - T_2)R_1; \quad I_2 \frac{d\omega_2}{dt} = (T_2 - T_1)R_2.$$

Поделим эти уравнения соответственно на R_1 и R_2 , сложим и проинтегрируем. Тогда получим

$$\frac{I_1 \omega_1}{R_1} + \frac{I_2 \omega_2}{R_2} = \text{const.}$$

Входящая сюда постоянная равна $I_1 \omega_0 / R_1$, так как в начальный момент $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = 0$. Когда скольжение прекратится, то $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$. Решая полученную систему уравнений, найдем угловые скорости ω_1 и ω_2 после прекращения скольжения:

$$\omega_1 = \frac{I_1 R_2^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \omega_0.$$

Потеря кинетической энергии на трение равна

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2 R_1^2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} \omega_0^2.$$

$$\mathbf{348.} \quad \omega_1 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \omega_0, \quad \omega_2 = \frac{M_1 r_1^2}{M_1 r_1^2 + M_2 a^2} \frac{a}{r_2} \omega_0 = \frac{a}{r_2} \omega_1.$$

Потеря энергии

$$\Delta K = \frac{M_1 M_2 r_1^2 a^2}{4(M_1 r_1^2 + M_2 a^2)} \omega_0^2.$$

349. Максимальное изменение продолжительности суток ΔT , вызванное ударом метеорита, определяется формулой

$$\frac{\Delta T}{T} = \pm \frac{mvR \cos \varphi}{2\pi I} T,$$

где $T = 86\,164$ с — продолжительность суток, $R = 6400$ км — радиус, $M = 6 \cdot 10^{21}$ т — масса Земли, I — ее момент инерции. Если считать Землю однородным шаром, то $I = \frac{2}{5} M R^2$ (на самом деле из-за возрастания плотности к центру Земли момент инерции ее несколько меньше и составляет приблизительно $I = \frac{1}{3} M R^2$). В результате получится $\Delta T/T \sim 2 \cdot 10^{-15}$, $\Delta T \sim 2 \cdot 10^{-10}$ с.

350. Наиболее выгодным является выстрел в горизонтальном направлении в плоскости экватора. В этом случае

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{5}{18} \frac{m^2 c^2 T^2}{\pi^2 I M (\Delta T)^2} \approx \frac{25}{36} \frac{m^2 c^2 T^4}{\pi^2 M^2 R^2 (\Delta T)^2} \approx 2 \cdot 10^{-22},$$

где c — скорость света в вакууме. Остальные обозначения такие же, как в предыдущей задаче.

$$\mathbf{351.} \quad T \approx T_0 (\rho_0 / \rho)^{2/3} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$\mathbf{352.} \quad \frac{d\omega}{dt} = - \frac{k\alpha}{\frac{1}{3} m l^2 + 2M[\frac{2}{3} R^2 + (l+R)^2]}.$$

$$\mathbf{353.} \quad l = L/\sqrt{3}.$$

354. Решение. Скорость шарика в нижнем положении до удара $v_0 = \sqrt{2gH}$. Так как удар неупругий, то непосредственно после удара шарик и нижний конец стержня в нижнем положении будут иметь одну и ту же скорость v . Она найдется из закона сохранения момента импульса относительно оси A :

$$mlv_0 = mlv + I\omega,$$

где $I = \frac{1}{3}Ml^2$ — момент инерции стержня относительно той же оси. Так как $v = l\omega$, то написанное уравнение дает

$$v = \frac{ml^2}{I + ml^2} v_0 = \frac{3m}{M + 3m} v_0.$$

Теперь надо решить, будут ли шарик и стержень после столкновения двигаться вместе или при дальнейшем движении они разойдутся. С этой целью вычислим скорость шарика v_1 и нижнего конца стержня v_2 при поднятии на какую-то одну и ту же высоту h_1 , если при этом они двигались бы независимо друг от друга. Эти скорости найдутся из уравнений сохранения энергии

$$v^2 - v_1^2 = 2gh_1, \quad \frac{1}{2} \frac{I}{l^2} (v^2 - v_2^2) = Mg \frac{h_1}{2}.$$

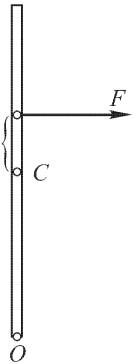
Преобразовав второе уравнение к виду

$$v^2 - v_2^2 = 3gh_1,$$

видим, что $v_1 > v_2$. Поэтому в любом положении шарик будет стремиться обогнать стержень. А так как шарик движется позади стержня, то он все время будет прижиматься к стержню. Отсюда следует, что после удара шарик и стержень будут подниматься как единое тело. Высоту поднятия h легко определить из закона сохранения энергии. Она равна

$$h = \frac{I + ml^2}{(M + 2m)gl^2} v^2 = \frac{6m^2}{(M + 2m)(M + 3m)} H.$$

355. После удара шарик поднимается на высоту $h_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2 H$, нижний конец стержня — на высоту $h_2 = \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2 H = \frac{2}{3} h_1$.



356. $U = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{I + ml^2} Mgl = \frac{3}{2} \frac{Mm}{M + 3m} gl$, где I — момент инерции стержня.

357. $V = V_0 - \frac{M}{m} \sqrt{\frac{2}{3}} gL \sin \frac{\alpha}{2} = 444 \text{ м/с}$.

358. $ML^2 = ml^2$. Так как $L \geq l$, то для возможности процесса необходимо $M \leq m$. При $M > m$ процесс невозможен.

359. Лозу следует рубить участком сабли, отстоящим на $\frac{2}{3}$ длины от ручки сабли.

Решение. Пусть удар с силой F пришелся на расстоянии r от середины сабли, которую будем считать однородной пластинкой (рис. 227). Под действием этой силы пластинка начнет двигаться поступательно и вращаться; если при этом точка O останется в покое, то рука не будет чувствовать удара. Напишем уравнение движения центра тяжести C пластинки:

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

Рис. 227

где dv/dt — ускорение центра тяжести. Для вращения пластинки относительно оси, проходящей через центр тяжести C , имеем

$$\frac{ml^2}{12} \frac{d\omega}{dt} = Fr,$$

где $d\omega/dt$ — угловое ускорение пластинки, m — масса пластинки, $ml^2/12$ — момент инерции пластинки относительно центра тяжести C . Точка O будет в покое, если скорость поступательного движения v и линейная скорость точки O , обусловленная вращением пластинки вокруг точки C с угловой скоростью ω , будут равны по величине и противоположны по направлению, или если $\frac{dv}{dt} = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt}$. Подставляя это условие в уравнения движения, получаем $r = 1/6l$, откуда уже легко найти ответ.

Искомая точка на пластинке (сабле) есть так называемый центр удара, совпадающий с центром качаний физического маятника той же пластинки, подвешенной в точке O . Разгрузка оси вращения от действия удара особенно необходима в случае баллистического маятника (см. также задачу 227).

360. Пластинка будет вращаться с угловой скоростью $\omega = \frac{12m}{4m + 3m_0} \frac{v}{a}$, а шар полетит назад со скоростью $v_1 = \frac{3m_0 - 4m}{4m + 3m_0} v$.

$$\mathbf{361.} \quad v = \frac{Ml}{m(l-a)} \sqrt{\frac{2lg}{3}} \sin \frac{\varphi}{2} \approx 6 \text{ м/с.}$$

$$\mathbf{362.} \quad v = \frac{2M\sqrt{3gl}}{M + 3m}.$$

Решение. Применяя закон сохранения энергии к стержню до удара и законы сохранения момента количества движения и энергии к системе стержень–тело во время удара, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Mgl &= \frac{1}{6}Ml^2\omega^2, & \frac{1}{3}Ml^2\omega &= \frac{1}{3}Ml^2\omega' + mv, \\ \frac{1}{6}Ml^2\omega^2 &= \frac{1}{6}Ml^2\omega'^2 + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned}$$

где ω и ω' — угловые скорости вращения стержня при его вертикальном положении до и после удара соответственно, v — скорость тела после удара. Из решения этой системы уравнений получаем значение v .

$$\mathbf{363.} \quad S = 1/6 M^2 l / (m^2 k).$$

Решение. Применяя закон сохранения энергии к стержню до удара и закон сохранения момента количества движения к системе стержень–тело во время удара, получим

$$\frac{1}{2}Mgl = \frac{1}{3} \frac{ml^2\omega^2}{2}, \quad \frac{1}{3}Ml^2\omega = mv,$$

где ω — угловая скорость вращения стержня в момент удара, v — скорость тела m сразу после удара. Перемещение S тела можно найти из условия $mv^2/2 = kmgS$. Из написанных уравнений следует ответ.

364. Движение муфты вдоль стержня будет происходить по закону

$$\begin{aligned} x &= a_0 \operatorname{ch} \omega t = 2 \operatorname{ch}(40\pi t) \text{ см,} \\ M &= 2x \frac{mg}{g} \omega v \approx 64 \cdot 10^5 \operatorname{sh}(80\pi t) \text{ дин} \cdot \text{см.} \end{aligned}$$

Решение. Движение муфты удобно рассматривать во вращающейся системе координат. Тогда уравнение движения вдоль стержня под действием центробежной силы будет иметь вид: $m d^2x/dt^2 = m\omega^2x$. Общее решение этого уравнения: $x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$. Подставляя $x(0) = a_0$, $\dot{x}(0) = 0$, получаем решение. Момент количества движения муфты относительно оси вращения стержня равен $L = m\omega x^2$; он растет со временем. Для его увеличения необходимо приложить внешний момент сил $\dot{M} = dL/dt = 2m\omega x\dot{x}$.

365. $\omega = 3m\omega_0/M = 2,2 \cdot 10^{-6}$ рад/с, где $\omega_0 = 7,3 \cdot 10^{-5}$ рад/с — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Решение. В системе координат, связанной с Землей, на движущийся внутри ствола снаряд (а, следовательно, и на систему пушка–снаряд) будет действовать сила Кориолиса, направленная на запад и равная $F = 2m\omega v$, где v — мгновенное значение скорости снаряда и ω_0 — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси.

Уравнение движения пушки со снарядом имеет вид

$$I \frac{d\omega}{dt} = 2m\omega_0 v r,$$

где I — момент инерции пушки (моментом инерции снаряда можно пренебречь ввиду условия $M \gg m$), r — расстояние снаряда от оси вращения в данный момент времени, ω — мгновенное значение угловой скорости вращения ствола пушки. Полагая $v = at$, получим

$$\frac{1}{3} M l^2 \int_0^{\omega} d\omega = m\omega_0 a^2 \int_0^{t_0} t^3 dt,$$

где $t_0 = \sqrt{2l/a}$ — время движения снаряда внутри ствола. Интегрируя это уравнение, находим ω .

366. $v = \sqrt{3gl}$. Искомая точка находится на расстоянии $x = \frac{2}{3}l$ от основания столба.

367. Решение. Кинетическая энергия стержня в горизонтальном положении $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mgl$. Центробежное ускорение центра масс стержня в том же положении $\omega^2 l/2$. Отсюда по теореме о движении центра масс

$$F_{\text{гор}} = \frac{1}{2}m\omega^2 l = \frac{m l^2}{2I} mg = \frac{3}{2} mg.$$

Применив к вращению стержня в положении 2 уравнение $I d\omega/dt = M$, получим $I d\omega/dt = mgl/2$. Отсюда находим вертикальную составляющую ускорения центра масс в том же положении:

$$a = \frac{l}{2} \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgl^2}{4I} = \frac{3}{4} g.$$

Далее, $ma = mg - F_{\text{верт}}$. В результате получится

$$F_{\text{верт}} = m(g - a) = \frac{1}{4}mg.$$

368. $F = \frac{P}{1 + 3(l/L)^2}$. При $l = L$ $F = P/4$.

369. $F = (1 + 4a^2 m/I)mg$, где m — масса, I — момент инерции человека относительно перекладины, a — расстояние между осью вращения и центром масс человека. Если при оценке момента инерции моделировать человека од-

нородным стержнем, вращающимся вокруг одного из его концов, то получится $F = 4mg$.

370. Решение. На основании закона сохранения энергии

$$v^2 + 2gh = \text{const.} \quad (370.1)$$

Момент силы тяжести относительно точки подвеса не имеет вертикальной составляющей. Момент силы натяжения веревки равен нулю. Поэтому при движении человека вертикальная составляющая его момента количества движения остается неизменной. В положениях, где высота h максимальна или минимальна, скорость человека v горизонтальна, а момент количества движения равен mvr , где r — расстояние до вертикальной оси, вокруг которой вращается человек. Значит, в этих положениях величина vr одна и та же. В момент, когда высота h максимальна или минимальна, опишем в вертикальной плоскости окружность с центром в точке подвеса O , проходящую через точку нахождения человека M (рис. 228). По известной геометрической теореме $r^2 = AB \cdot BC$, или $r^2 = (2l - h)h$. Поэтому в положениях, где h максимальна и минимальна,

$$(2l - h)hv^2 = \text{const.} \quad (370.2)$$

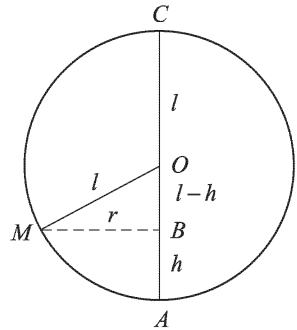


Рис. 228

Запишем соотношения (370.1) и (370.2) для этих положений, имея в виду, что максимуму h соответствует минимум v , и наоборот. Получим

$$\begin{aligned} v_{\text{макс}}^2 + 2gh_{\text{мин}} &= v_{\text{мин}}^2 + 2gh_{\text{макс}}, \\ (2l - h_{\text{мин}})h_{\text{мин}}v_{\text{макс}}^2 &= (2l - h_{\text{макс}})h_{\text{макс}}v_{\text{мин}}^2. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения, получим

$$v_{\text{макс}}^2 = \frac{2gh_{\text{макс}}(2l - h_{\text{макс}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}, \quad (370.3)$$

$$v_{\text{мин}}^2 = \frac{2gh_{\text{мин}}(2l - h_{\text{мин}})}{2l - (h_{\text{макс}} + h_{\text{мин}})}. \quad (370.4)$$

При этом учтено, что в реальных условиях $h < l$, так что величина (370.3) действительно максимальна, а (370.4) — действительно минимальна. Если $h_{\text{макс}}$ и $h_{\text{мин}}$ пренебрежимо малы по сравнению с l , то $v_{\text{макс}}^2 = 2gh_{\text{макс}}$, $v_{\text{мин}}^2 = 2gh_{\text{мин}}$.

371. $v_0^2 = 2gh^2/(h + h_0)$, $v^2 = 2gh_0^2/(h + h_0)$.

372. $\omega^2 = \frac{\rho g}{I + L\rho r^2} [L^2 + 4r^2 - l^2 - (L - l - \pi r)^2]$.

Указание. Воспользоваться законом сохранения энергии.

373. Решение. Уравнение моментов вращения цилиндра около оси, лежащей на плоскости качения, будет

$$mR^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{d\omega}{dt} = FR,$$

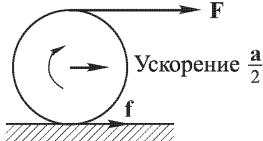
где R — радиус цилиндра. При качении без скольжения центр масс цилиндра получает горизонтальное ускорение $dv/dt = R d\omega/dt$, которое сообщает сила

трения; следовательно,

$$k\left(g + \frac{F}{m}\right) \geq R \frac{d\omega}{dt} = \frac{F}{m(1 + 1/2)},$$

где k — искомый коэффициент трения. По условию задачи $F/m = g/2$. Таким образом, $dv/dt = g/3$ и $k \geq 2/9$.

374. Решение. Качение без скольжения. Силы, действующие на цилиндр, показаны на рис. 229. Сила натяжения веревки F , сила трения f , ускорение груза a . Уравнения поступательного движения: цилиндра $F + f = 1/2ma$, груза $Mg - F = Ma$ и уравнение вращения цилиндра $(F - f)R = 1/2mR^2a/2R$. Отсюда получаем



$$f = 1/8ma, \quad F = 3/8ma, \\ a = (1 + 3/8m/M)^{-1}g.$$

Рис. 229

Скольжения не будет, если $|f| \leq kmg$ или $k \geq (8 + 3m/M)^{-1}$, где k — коэффициент трения.

Качение со скольжением. Угловое ускорение цилиндра β , ускорение оси цилиндра b . Теперь уравнения движения будут

$$F + f = mb, \quad (F - f)R = 1/2mR^2\beta, \quad Mg - F = Ma.$$

Ускорения связаны условием $a = b + \beta R$ и сила трения $f = kmg$. Отсюда получаем $a = (1 - 1/3km/M)(1 + 1/3m/M)^{-1}g$, при условии $k < (8 + 3m/M)^{-1}$.

З а м е ч а н и е. Полезно рассмотреть движение при $f = 0$ в отсутствие сил трения.

375. Скольжение начнется в точке с угловой координатой $\varphi_* = \arccos 0,8$ или на высоте $0,8R$ от горизонтального диаметра цилиндрической поверхности.

Решение. Записываем уравнения динамики для скатывающегося обруча:

$$ma_n = mg \cos \varphi - N, \quad ma_\tau = mg \sin \varphi - F_\tau, \\ I_0 \dot{\omega} = rF_\tau, \quad a_\tau = \dot{\omega}r,$$

где $a_n = v^2/(R + r)$, $a_\tau = dv/dt$, F_τ — сила сухого трения, N — сила нормального давления, I_0 — момент инерции обруча. Отсюда определяем

силу трения $F_\tau = \frac{mg}{2} \sin \varphi$ и силу нормального давления обруча на цилиндр $N = mg \cos \varphi - m \frac{v^2}{R + r}$. Закон сохранения энергии дает $\frac{v^2}{R + r} = g(1 - \cos \varphi)$, следовательно,

$$N = mg(2 \cos \varphi - 1).$$

Условие начала скольжения

$$F_\tau = F_{\tau \text{ макс}} = kN.$$

Приравнявая соответствующие величины при $k = 0,5$, получаем: $\cos \varphi = 0,8$; или высота от горизонта, на которой начинается скольжение, $h = R \cos \varphi = 0,8R$.

376. Обозначив силу, действующую на катки со стороны штанги, через f , можно записать уравнения движения катков (линейные и угловые ускорения обоих катков одинаковы): для первого

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha + f - F_1, \quad I_1 \frac{d\omega}{dt} = F_1 R;$$

для второго

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - f - F_2, \quad I_2 \frac{d\omega}{dt} = F_2 R,$$

где F_1 и F_2 — силы трения, возникающие между катками и плоскостью. Кроме того, так как скольжение отсутствует, то $dv/dt = R d\omega/dt$. Отсюда

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2Rg \sin \alpha}{(I_1 + I_2)/m + 2R^2} \approx 66 \text{ с}^{-2}, \quad f = \frac{I_1 - I_2}{2R} \frac{d\omega}{dt} \approx 0,27 \text{ кгс.}$$

Положительное значение f при выбранных нами знаках в уравнениях движения соответствует тому, что штанга сжата и толкает катки. Следовательно, если каток с большим моментом инерции внизу, штанга сжимается, если он вверху, штанга растягивается.

377. Решение. Обозначим ускорение груза m_2 через a , ускорение подставки b , угловое ускорение цилиндра β , натяжение нити T , коэффициент трения k .

1) Уравнения движения:

$$F - T = m_2 a, \quad T = (m_1 + m_3) b, \quad TR = \frac{1}{2} m_3 R^2 \beta.$$

Условие, связывающее ускорения, $a = b + \beta R$. Отсюда определяем $a = (\mu + m_2)^{-1} F$, где

$$\mu = (m_1 + m_3) \left(3 + 2 \frac{m_1}{m_3}\right)^{-1}, \quad b = \left(3 + 2 \frac{m_1}{m_3}\right)^{-1} a, \quad \beta = 2 \left(1 + \frac{m_1}{m_3}\right) \frac{b}{R}.$$

2) Первые два уравнения движения:

$$F - T - k m_2 g = m_2 a, \quad T - (m_1 + m_3) k g = (m_1 + m_3) b,$$

третье такое же, как и в случае 1, и такая же связь между ускорениями. Отсюда получаем

$$a = (m_2 + \mu)^{-1} F - k g, \quad b = \left(3 + 2 \frac{m_1}{m_3}\right)^{-1} a - 2 k g \frac{\mu}{m_3}, \quad \beta = \frac{a - b}{R}.$$

3) $a = (m_1 + m_3)^{-1} F$ — в отсутствие трения; $a = (m_1 + m_3)^{-1} F - k g$ — при наличии трения, $\beta = 2F/(m_3 R)$.

378. Пока движение совершается без рывка, диск опускается и поднимается с одним и тем же ускорением, направленным вниз:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2} g.$$

Натяжение нити при опускании и поднятии диска также одно и то же и равно

$$T_0 = \frac{Mg}{2} \left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4,83 \text{ Н.}$$

Для оценки среднего натяжения нити во время рывка $T_{\text{рыв}}$ обозначим через v максимальную скорость диска в нижнем положении. За время полоборота диска $\Delta t = \pi r/v$ количество движения диска изменяется на $2Mv$. Это изменение равно импульсу силы, действующей на диск, за то же время, т.е. $(2T_{\text{рыв}} - Mg)\Delta t$. Вычисления дают

$$T_{\text{рыв}} = \frac{Mg}{2} \left(1 + \frac{4al}{\pi r g}\right).$$

Во время рывка нить испытывает дополнительное натяжение

$$\Delta T \approx \frac{l}{\pi r} \frac{2a}{g} Mg \approx 3,14 \text{ Н.}$$

Полное натяжение нити во время рывка $T = T_0 + \Delta T \approx 8,0 \text{ Н.}$

379. $T = \frac{Mg}{1 + Mr^2/I} = \frac{Mg}{1 + Mr^2/(4mR^2)} = 0,99T_0$, $T_{\text{рыв}} = Mg + \frac{Mhr}{\pi mR^2} T \approx 1,42T_0$, где I — момент инерции системы, T_0 — натяжение нити при неподвижном грузе.

380. а) $a = \frac{R^2 - h^2}{\rho^2 + (R^2 - h^2)} g \sin \alpha$, где ρ — радиус инерции шарика, $2h$ — ширина желоба; б) $a = \frac{R^2}{4\rho^2 + R^2} g \sin \alpha$.

381. $H = \frac{5r^2 + \rho^2}{2r^2} R$. Для сплошного шара $H = 27/10R$, для полого $H = 17/6R$.

382. $\text{tg } \alpha > \frac{r^2 + \rho^2}{\rho^2} k$, где ρ — радиус инерции катящегося тела. Для сплошного шара $\text{tg } \alpha > 7/2k$, для полого $\text{tg } \alpha > 5/2k$. Для сплошного цилиндра $\text{tg } \alpha > 3k$, для полого $\text{tg } \alpha > 2k$.

383. Положение точки B , в которой шарик отрывается от сферы и начинает свободно двигаться под действием силы тяжести, определяется углом α , косинус которого равен

$$\cos \alpha = \frac{2r^2}{3r^2 + \rho^2},$$

где ρ — радиус инерции шарика. Результат не зависит от радиуса сферы. Для сплошного шарика $\cos \alpha = 10/17$, для полого $\cos \alpha = 6/11$.

384. Будем рассматривать все движения в системе отсчета, в которой наклонная плоскость неподвижна. Так как центр масс системы и мгновенная ось вращения A (см. рис. 104) движутся параллельно, то уравнение моментов относительно этой движущейся оси имеет вид $I d\omega/dt = M$ (см. задачу 433). Момент количества движения системы L складывается из момента количества движения цилиндра $I\omega$ и момента количества движения собаки $m_1 v h$, где $h = r(1 + \cos \alpha)$ — длина перпендикуляра, опущенного на наклонную плоскость из точки S . Итак,

$$L = I\omega + m_1 r v (1 + \cos \alpha),$$

причем под I следует понимать момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси, т. е. величину $2mr^2$. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega r$, а потому

$$L = [2m + m_1(1 + \cos \alpha)]rv.$$

Так как центр масс системы и мгновенная ось A движутся параллельно, то производная L по времени должна равняться моменту внешних сил относительно мгновенной оси A , т. е. $(m + m_1)gr \sin \alpha$. Приравнявая оба выражения, получим

$$a = \frac{m + m_1}{2m + m_1(1 + \cos \alpha)} g \sin \alpha.$$

385. $a = \frac{mg \sin \alpha}{2M + m(1 + \cos \alpha)}$, $F_{\text{тр}} = (M + m)a$, $t = \frac{P_{\text{max}}}{2M + m} \frac{1}{a^2}$, $v_{\text{макс}} = \frac{P_{\text{макс}}}{(2M + m)a}$.

386. Решение. При отсутствии трения между жидкостью и стенками бочки вращение бочки не передается жидкости. Жидкость движется поступательно как целое со скоростью v , равной скорости движения центра масс. Момент количества движения системы относительно мгновенной оси A равен $L = I_A \omega + mRv$, где R — внешний радиус бочки, I_A — момент инерции ее относительно мгновенной оси A , m — масса жидкости. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega R$, так что

$$L = \left(\frac{I_A}{R} + mR \right) v.$$

Центр масс бочки движется параллельно мгновенной оси, а потому

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{I_A}{R} + mR \right) \frac{dv}{dt} = (M + m)Rg \sin \alpha,$$

где M — масса бочки (см. решение задачи 433). Отсюда

$$a = \frac{(M + m)R^2}{I_A + mR^2} g \sin \alpha.$$

При этом мы не учитывали моменты инерции днищ бочки, считая их пренебрежимо малыми. Можно решить ту же задачу с помощью уравнения моментов относительно центра масс, а также с помощью уравнения сохранения энергии.

387. Решение. Допустим, что требуемое положение шарика существует. На основании теоремы о движении центра масс:

$$(M + m)a = (M + m)g \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, с которой наклонная плоскость действует на цилиндр (рис. 230). Уравнение вращения цилиндра (без шарика) будет

$$I \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} r,$$

где $I = Mr^2$ — момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси. Сила давления шарика на цилиндр в это уравнение не входит, так как она нормальна к поверхности цилиндра и не дает момента относительно его оси. Ввиду отсутствия скольжения $a = r d\omega/dt$. Из написанных уравнений находим

$$a = \frac{M + m}{2M + m} g \sin \alpha.$$

Найдем теперь то же ускорение из уравнения движения шарика

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{дав}} \sin \varphi, \quad F_{\text{дав}} \cos \varphi = mg \cos \alpha,$$

где $F_{\text{дав}}$ — сила, действующая со стороны цилиндра на шарик. Отсюда $a = g(\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi)$. Путем сравнения с ранее найденным выражением получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M}{2M + m} \operatorname{tg} \alpha.$$

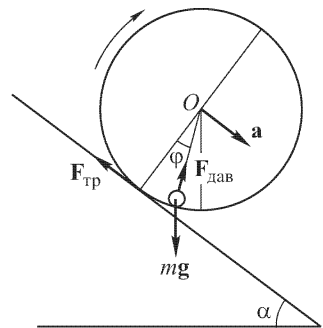


Рис. 230

Из полученного результата следует, что требуемое положение шарика существует, причем $\varphi < \alpha$. Если $m \ll M$, то $\operatorname{tg} \varphi \approx \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Если сверх того $\alpha \ll 1$, то $\varphi \approx \frac{1}{2} \alpha$.

388. Яйцо, сваренное вкрутую, вращается как твердое тело, сырое — как сосуд, наполненный жидкостью; сообщая скорлупе вращение, мы еще не сообщаем вращения всем частицам жидкости.

389. $I d\omega/dt = -2\pi\mu a^3 l\omega/\delta$, где I — момент инерции ротора и l — длина подшипников. Отсюда $\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{2\pi\mu a^3 l t}{\delta I}\right)$, где ω_0 — начальная скорость.

390. Решение. На цилиндр, имеющий вначале момент количества движения $I\omega_0$, действует сила $F = 0, 1P$. Эта сила сообщает цилиндру угловое и линейное ускорения:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{FR}{I} = -0, 2\frac{g}{R} \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = g\frac{F}{P} = 0, 1g;$$

таким образом, $\omega = \omega_0 - 0, 2\frac{g}{R}t$ и $v = 0, 1gt$. Время T определится из условия $v = \omega R$ или $\omega_0 R - 0, 2gT = 0, 1gT$. Отсюда $T \approx 2, 14$ с. При $t > T$ ускорение равно нулю.

391. Движение после перехода границы будет сначала равнозамедленное, а затем с постоянной скоростью; $1/3$ энергии превратится в тепло, $2/9$ — во вращательную энергию и $4/9$ останется в виде энергии поступательного движения.

Решение. Пусть масса цилиндра m , момент инерции I , сила трения f и начальная скорость v_0 . Тогда

$$m\frac{dv}{dt} = -f, \quad fr = I\frac{d\omega}{dt},$$

откуда

$$v = v_0 - \frac{f}{m}t, \quad \omega = \frac{frt}{I}.$$

После перехода границы шероховатости скорость скольжения будет $v_{\text{ск}} = v - \omega r = v_0 - \alpha ft$, где $\alpha = \frac{1}{m} + \frac{r^2}{I} = \frac{3}{m}$ (так как $I = mr^2/2$). Через время $T = v_0/\alpha f$ скорость скольжения обратится в нуль, дальше начнется чистое качение без скольжения. Скорость поступательного движения при чистом качении будет

$$v_{\text{к}} = v_0 - \frac{fv_0}{m\alpha f} = v_0\left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right) = \frac{2v_0}{3}.$$

Угловая скорость качения $\omega_{\text{к}} = \frac{frv_0}{I\alpha f} = v_0\frac{r}{I\alpha}$. Следовательно,

$$Q_{\text{пост}} = \frac{mv_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{m\alpha}\right)^2, \quad Q_{\text{вращ}} = \frac{mv_0^2}{2}\frac{r^2}{m\alpha^2 I};$$

в тепло превращается энергия

$$Q_{\text{тепл}} = \frac{mv_0^2}{2} - Q_{\text{пост}} - Q_{\text{вращ}} = \frac{mv_0^2}{2}\frac{1}{m\alpha}.$$

Можно также независимо подсчитать работу сил трения и доказать, что она равна $\frac{mv_0^2}{2}\frac{1}{m\alpha}$.

392. Решение. Напишем уравнение движения центра масс и уравнение моментов (относительно центра шара):

$$m \frac{dv}{dt} = -F, \quad I \frac{d\omega}{dt} = rF,$$

где F — сила трения, действующая в точке касания шара с плоскостью. Исключая почленным делением силу F , находим $dv/d\omega = -I/(mr)$. Интегрирование этого уравнения дает $v = -I\omega/mr + C$. Постоянная интегрирования C найдется из условия, что при $v = v_0$ шар не вращается ($\omega = 0$). Это приводит к соотношению

$$v_0 - v = \frac{I}{mr} \omega.$$

Когда наступит чистое качение, должно выполняться второе соотношение $v = \omega r$. Из этих двух соотношений находим

$$\omega = \frac{mr}{I + mr^2} v_0 = \frac{5}{7} \frac{v_0}{r}.$$

Вычислив кинетические энергии в начале и в конце, найдем потерю кинетической энергии на трение:

$$\Delta K = \frac{1}{2} \frac{I}{I + mr^2} mv_0^2 = \frac{mv_0^2}{7}.$$

393. $v = \frac{Ir}{I + mr^2} \omega_0 = \frac{2}{7} r\omega_0, \Delta K = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{I + mr^2} \cdot I\omega_0^2 = \frac{1}{7} mr^2 \omega_0^2.$

394. $v_0 > \sqrt{(M/m + 4m/M + 3)gR} = 8, 1 \text{ м/с}.$

395. Скорость первого шара $v_1 = \frac{2}{7}v$, второго $v_2 = \frac{5}{7}v$. Потеря кинетической энергии на трение составляет $\frac{20}{49}$ начального значения кинетической энергии.

396. Шар будет двигаться равномерно, если точка удара лежит выше его центра на расстоянии $2/5$ радиуса. Такие удары называются нормальными. Если она лежит еще выше, то движение шара будет ускоренным. Если же точка удара лежит ниже, то шар будет двигаться замедленно. Соответствующие удары называют высокими и низкими. Решение получено в предположении, что сила трения шара о плоскость стола пренебрежимо мала по сравнению с силой, с которой на шар действует кий во время удара.

397. Случай 1 реализуется при высоких ударах, случай 2 — при нормальных, случай 3 — при низких.

398. Решение. Пусть \mathbf{F} — сила трения, действующая на цилиндр, в месте соприкосновения его с наклонной плоскостью (рис. 231). Она заставляет цилиндр подниматься по наклонной плоскости. Сначала, пока не установилось чистое качение, \mathbf{F} является силой трения скольжения. После перехода движения в чистое качение \mathbf{F} становится силой трения покоя (сцепления). Однако, независимо от характера движения, оно всегда подчиняется уравнению движения центра масс $m \frac{dv}{dt} = F - mg \sin \alpha$ и уравнению моментов (относительно геометрически оси цилиндра) $I \frac{d\omega}{dt} = -Fr$. Исключая F , получим

$$mr \frac{dv}{dt} = -I \frac{d\omega}{dt} - mgr \sin \alpha.$$

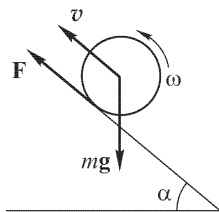


Рис. 231

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ($\omega = \omega_0$ при $t = 0$) дает

$$mrv = I(\omega_0 - \omega) - mgrt \sin \alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит ли оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть $v = 0$. Отсюда следует, что в той же точке $\omega = 0$. В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться, и рассматриваемая точка не была бы наивысшей. Поэтому время подъема t найдется, если в предыдущем уравнении положить $v = \omega = 0$. Это дает

$$t = \frac{I\omega_0}{mgr \sin \alpha} = \frac{r\omega_0}{2g \sin \alpha}.$$

Любопытно, что время поднятия t не зависит от коэффициента трения между цилиндром и наклонной плоскостью. Результат не изменился бы даже тогда, когда коэффициент трения стал переменным. Решение предполагает, однако, что трение достаточно велико, чтобы цилиндр мог вкатываться на наклонную плоскость. При недостаточном трении будет происходить лишь замедление скорости вращения цилиндра. Нетрудно подсчитать, что время замедления определяется прежней формулой.

Напротив, время обратного скатывания цилиндра вниз, а также наибольшая высота поднятия его зависят от коэффициента трения. Такое различие объясняется тем, что скатывание цилиндра все время является чистым качением. Поднятие же его вверх сначала происходит со скольжением, а затем переходит в чистое качение.

399. $a_1 = g(k \cos \alpha - \sin \alpha)$, направлено вверх;

$$t_1 = \frac{I\omega_0 r}{(I + mr^2)a_1 + mr^2 g \sin \alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k \cos \alpha - \sin \alpha)g}, \quad H_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \sin \alpha,$$

$$a_2 = \frac{mr^2}{I + mr^2} g \sin \alpha = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad H_2 = \frac{a_1}{a_2} H_1;$$

$$H = H_1 + H_2 = \frac{k \cos \alpha - \sin \alpha}{4g(3k \cos \alpha - \sin \alpha)} \omega_0^2 r^2,$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2 \sin \alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g \sin \alpha} \sqrt{\frac{3(k \cos \alpha - \sin \alpha)}{3k \cos \alpha - \sin \alpha}}.$$

400. $\omega = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2} \omega_0.$

401. $v = \frac{5}{7} \frac{m}{M} V.$

402. $V = V_0 - \frac{7}{5} \frac{M}{m} v = 80 \text{ м/с}.$

403. $x = \frac{l}{6} \frac{v_A - v_B}{v_A + v_B}.$ Результат не зависит от характера удара.

404. $x = \frac{l}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{M}{m}} - 1.$ Для возможности описанного процесса необходимо $M \geq m$. Условие $x \leq l/2$ дает еще $M \leq 4m$.

405. $K = 16 \frac{m}{M} \frac{mv_0^2}{2}.$

406. $K = \frac{4M - 7m}{4M} \frac{mv_0^2}{2}.$

407. $U = \frac{M}{M+4m} \frac{mv^2}{2}$. В предельных случаях 1) $M = 0$ и 2) $M = \infty$ получаем 1) $U = 0$ и 2) $U = \frac{1}{2}mv^2$.

408. Решение. Если F — сила, действующая на шарик во время удара, то уравнение движения шарика будет $m dv/dt = -F$. Уравнение движения центра масс стержня: $M dV/dt = F$. Уравнение моментов для стержня относительно центра масс: $I d\omega/dt = Fl/2$. Почленным делением исключаем F и получаем

$$\frac{m}{I} \frac{dv}{d\omega} = -\frac{2}{l}, \quad \frac{M}{I} \frac{dV}{d\omega} = \frac{2}{l}.$$

Интегрируя в пределах от начального значения угловой скорости $\omega = 0$ до конечного, найдем

$$v - v_0 = -\frac{2}{l} \frac{I}{m} \omega, \quad V = \frac{2}{l} \frac{I}{M} \omega,$$

причем в этих уравнениях v , V и ω означают величины соответствующих скоростей после удара. Угловая скорость ω найдется из уравнения сохранения энергии. Если в него подставить значения v и V , то для ω получится квадратное уравнение

$$\left[1 + \frac{4I}{l^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\right] \omega^2 - 4\frac{v_0}{l} \omega = 0.$$

Один из корней этого уравнения ($\omega = 0$) дает угловую скорость стержня до удара, второй — после удара. По условию задачи надо взять второй корень.

С учетом соотношения $I = \frac{1}{12} Ml^2$ для него получаем $\omega = \frac{12mv_0}{(4m+M)l}$.

$$\mathbf{409.} \quad \omega = \frac{Ml}{2I} V_0, \quad v_0 = \frac{M+2m}{2m} V_0.$$

$$\mathbf{410.} \quad x = \frac{l^2}{l^2 + \frac{1}{2}r^2}.$$

411. $\omega = \omega_0 + \frac{mv^2}{(\frac{1}{3}M+m)l_0^2\omega_0}$, $l = l_0\sqrt{\frac{\omega_0}{\omega}}$. При приближении шарика к оси вращения стержень будет изгибаться в сторону, противоположную вращению. При удалении шарика изгиб стержня изменится в обратную сторону.

$$\mathbf{412.} \quad F > F_0, \text{ где } F_0 = (k_1 + k_2)(m_A + m_B)g.$$

Решение. Максимальное горизонтальное ускорение, которое может иметь тело B , равно $a = k_2g$. Сила F_0 , сообщающая ускорение a , определится из условия

$$F_0 - k_1(m_A + m_B)g = (m_A + m_B)a;$$

подставляя сюда значение a , находим ответ.

$$\mathbf{413.} \quad 1) \text{ Ускорение тела } a_2 = \frac{M(\sin \alpha - k \cos \alpha) \cos \alpha}{M + m(\sin \alpha - k \cos \alpha) \sin \alpha} g, \text{ клина } a_1 = (m/M)a_2.$$

$$2) \text{ Ускорение тела } a_2 = \frac{M \sin \alpha (\cos \alpha + k \sin \alpha)}{M + m \sin \alpha (\sin \alpha - k \cos \alpha)} g, \text{ клина } a_1 = \frac{m \sin \alpha \cos \alpha - k(M + m \cos^2 \alpha)}{M + m \sin \alpha (\sin \alpha - k \cos \alpha)} g.$$

3) В первом случае $k < \tan \alpha$, во втором — условие движения клина $k < \frac{m \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$.

$$\mathbf{414.} \quad a_{\min} = gb/h, \text{ где } g \text{ — ускорение свободного падения; } N = mg; x = ah/2g.$$

415. $k_{\min} > b/h$; если $k < k_{\min}$, то автомобиль при $v = \sqrt{bgR/h}$ соскользнет с дороги на ее закруглении.

416. Цилиндр опрокинется и свалится с диска при угловой скорости вращения диска

$$\omega = \sqrt{Dg/(Rh)}.$$

417. $T = 2\pi\sqrt{l/(g - l\omega^2)}$, если $l\omega^2 < g$. При $l\omega^2 > g$ положение равновесия неустойчиво.

$$\mathbf{418.} \quad v = \sqrt{\frac{5}{3}gh}, \quad \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{gh}{3}}.$$

Решение. Закон сохранения момента количества движения для системы желоб-тело

$$I_0\omega + m(u \cos \varphi + R\omega)R = 0,$$

где u — скорость тела относительно желоба, ω — угловая скорость вращения желоба, I_0 — момент инерции желоба. Закон сохранения энергии для этой системы дает $I\omega^2 + m[(u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi] = 2mgh$. Отсюда:

$$\omega = -\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{u}{R}, \quad u^2 = \frac{8}{3}gh,$$

$$v^2 = (u \cos \varphi + R\omega)^2 + u^2 \sin^2 \varphi = \frac{5}{3}gh \approx 1,67gh.$$

419. Нельзя ограничиться анализом сил, действующих только на колеса, нужно учитывать и силы, действующие на остальные части паровоза.

Рассмотрим силы, действующие на колесо и паровоз, в отдельности (рис. 232 а). Для простоты считаем у паровоза одно ведущее колесо. При

положении водила выше оси колеса к паровозу приложены силы Q' со стороны водила и F' со стороны колеса. К колесу приложены силы f со стороны рельсов, F со стороны паровоза и Q со стороны водила. Для простоты рассуждений предположим равномерное движение паровоза. По второму закону динамики $F = f + Q$, по третьему $Q = Q'$ и $F = F'$. К паровозу приложена сила $f = F' - Q'$, направленная вперед. Для положения водила ниже оси (рис. 232 б) распределение сил следующее: силы, приложенные к колесу, — f , Q и F , $f + F = Q$ (по второму закону динамики), а силы, приложенные к паровозу, — F' и Q' ($F' = F$ и $Q' = Q$ (по третьему закону)), и потому к паровозу приложена равнодействующая $Q' - F' = f$, т. е. сила, направленная вперед.

Итак, во втором случае ось колеса толкает паровоз назад (сила F'), но, кроме того, большая сила (сила Q') толкает его вперед.

420. $f = (r/R)Q$.

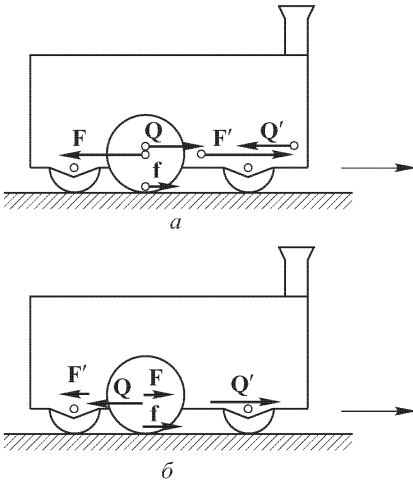


Рис. 232

$$421. \cos \alpha = \frac{3(a^2 - b^2)g}{2\omega^2(a^3 + b^3)}.$$

Решение. В системе координат, вращающейся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω , условие равновесия стержня можно записать в виде $M_{цс} = M_{с\tau}$, где $M_{цс}$ — момент центробежной силы и $M_{с\tau}$ — момент силы тяжести относительно точки закрепления стержня.

Центробежная сила инерции, действующая на элемент стержня длиной dx , находящийся на расстоянии x от точки закрепления, будет равна

$$dF_{цс} = \frac{m dx}{a+b} \omega^2 x \sin \alpha.$$

Соответствующий момент силы можно записать в виде

$$dM_{цс} = dF_{цс} \cdot x \cos \alpha.$$

Отсюда для полного момента центробежной силы инерции имеем

$$M_{цс} = \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} \int_{-b}^a x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{m\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha}{a+b} (a^3 + b^3).$$

Приравнявая эту величину моменту силы тяжести $M_{с\tau} = mg \frac{a-b}{2} \sin \alpha$, получим ответ.

422. Угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{mgl \sin \alpha}{I\omega \sin \alpha} = \frac{mgl}{I\omega},$$

где α — угол, образованный осью волчка с вертикалью. Направление прецессии совпадает с направлением вращения волчка.

$$423. M = \frac{2\pi I N u}{R} = 612 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

424. Решение. Максимальный поворот получится, когда скорость снаряда \mathbf{v} перпендикулярна к земной оси. Снаряд уносит момент импульса $\mathbf{L} = m[\mathbf{rv}]/\sqrt{1-v^2/c^2}$, перпендикулярный к скорости \mathbf{v} . Земля получает такой же момент в обратном направлении. При этом вектор угловой скорости вращения Земли ω отклоняется вбок на угол $\alpha = L/(I\omega)$. Подставив сюда $I = \frac{2}{5}Mr^2$ и учтя, что разность $c-v$ очень мала, получим

$$\frac{c-v}{c} \approx \frac{25m^2c^2}{8M^2l^2\omega^2} \approx 1,9 \cdot 10^{-22}.$$

Заметим, что приведенная оценка годится для поворота земной оси «в пространстве», т. е. относительно системы «неподвижных звезд». Для исследования поворотов оси вращения «в теле», т. е. относительно самой Земли, надо учесть сплюснутость земного шара. Это связано с тем, что вращение шара вокруг фиксированного в нем диаметра неустойчиво.

425. $\text{tg } \beta = a^3 m^2 g \sin \alpha / (I_{\parallel} \omega^2)$, где I_{\parallel} — момент инерции волчка относительно оси фигуры, m — масса волчка, a — расстояние от точки опоры волчка до его центра массы.

$$426. \alpha \approx m a \dot{v}_0 \tau / (I_{\parallel} \omega) \approx 0,43^\circ \approx 25'.$$

427. Решение. После удара центр ударяемого шара начнет двигаться с начальной скоростью v_0 . По теореме о движении центра масс его скорость в момент времени t будет $v = v_0 - kgt$. Пусть ω — мгновенное значение вектора угловой скорости. Момент силы трения относительно центра шара

будет $kmg\mathbf{i}$, где \mathbf{i} — единичный вектор, направленный за плоскость рисунка и перпендикулярный к ней. Из уравнения моментов $I d\omega/dt = kmg\mathbf{i}$ получаем $\frac{2}{5}r d\omega/dt = kg\mathbf{i}$. Отсюда $\omega = \omega_0 + \frac{5}{2} \frac{kg}{r} \mathbf{i}$. Мгновенная ось вращения всегда лежит в плоскости, перпендикулярной к плоскости рисунка. Угол α определяется уравнением $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{2}kg/(r\omega_0)$.

Определим теперь момент начала чистого качения. Скорость поступательного движения шара зависит только от горизонтальной составляющей вектора ω . Момент начала чистого качения найдется из условий $\frac{5}{2}kg = v_0 - kgt$. С этого момента угол α становится и продолжает оставаться постоянным, причем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{7}v_0/r\omega_0$. В частном случае, когда $v_0 = \omega_0 r$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{7}$, $\alpha = 35^\circ 32'$. Заметим, что найденное решение определяет поворот оси вращения относительно внешнего пространства, а не внутри самого шара.

428. $F_{\text{дав}} = P + I_{\parallel}\Omega^2/r = P + \frac{1}{2}m\Omega^2r$, где P — вес бегуна, а m — его масса. При $r = 50$ см и рабочей скорости 1 об/с ($\Omega = 2\pi$ рад/с) получаем $\frac{1}{2}m\Omega^2r \approx mg = P$. Следовательно, $F_{\text{дав}} \approx 2P$. Заметим, что полный момент импульса \mathbf{L} не направлен вдоль оси фигуры бегуна, так как имеется еще момент, возникающий из-за вращения вокруг вертикальной оси. Однако последний момент остается неизменным при вращении катка, а потому при решении задачи его можно не принимать во внимание.

$$\mathbf{429.} \quad T = \frac{3\pi\omega r}{g} \operatorname{tg} \alpha, \quad R = \frac{3}{2} \frac{\omega^2 r^2}{g} \operatorname{tg} \alpha.$$

430. Решение. Разделим мысленно кольцо на бесконечно малые элементы — материальные точки с массами dm . Рассмотрим движение одной из таких материальных точек. Так как $\mathbf{v}_{\text{отн}} = [\omega\mathbf{r}]$, то по теореме Кориолиса действующая на точку сила

$$d\mathbf{f} = -dm \omega^2 \mathbf{r} + dm [\Omega[\Omega\mathbf{r}]] + 2dm [\Omega[\omega\mathbf{r}]].$$

Это выражение меняет знак при изменении знака \mathbf{r} , а потому при интегрировании по всему кольцу дает нуль. Отсюда следует, что результирующая сила, действующая на кольцо, должна равняться нулю. Для вычисления момента $d\mathbf{M}$ силы $d\mathbf{f}$ введем прямоугольную систему координат с осями \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , направив ось X вдоль ω , а ось Y — вдоль Ω . После простых вычислений получим

$$d\mathbf{M} = 2[\Omega\omega]y^2 dm + \Omega(2\omega\mathbf{j} - \Omega\mathbf{i})yz.$$

При интегрировании по всему кольцу последнее слагаемое дает нуль, а потому

$$\mathbf{M} = 2[\Omega\omega]I_z = [\Omega\omega]I_x,$$

где I_z и I_x — моменты инерции кольца относительно осей Z и X соответственно. Таким образом, искомый момент \mathbf{M} должен быть перпендикулярен как к ω , так и к Ω . Результат верен и в том случае, когда векторы ω и Ω не взаимно перпендикулярны.

431. Согласно закону динамики, $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{M}$, где \mathbf{L} — вектор момента количества движения, а \mathbf{M} — момент силы, действующей на тело. В рассматриваемом случае момент силы, действующей на планету (рассчитанный относительно Солнца), $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$, где \mathbf{r} — радиус-вектор планеты, а \mathbf{F} — сила тяготения, действующая со стороны Солнца на планету. Так как векторы \mathbf{r} и \mathbf{F} направлены по одной прямой, то $\mathbf{M} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{L} = \text{const}$. Это утверждение справедливо для всех движений под действием центральных сил.

432. Решение. Для доказательства можно воспользоваться следующими соотношениями:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}(m\mathbf{v})] = [m\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \left[m\mathbf{r} \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \mathbf{r} \right] \right],$$

где $\boldsymbol{\omega} = d\boldsymbol{\alpha}/dt$ — угловая скорость планеты, а $\boldsymbol{\alpha}$ — угол поворота ее радиуса-вектора. Учитывая, что

$$\left[m\mathbf{r} \left[\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \mathbf{r} \right] \right] = \frac{mr^2 d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = 2m \frac{ds}{dt} = 2m\boldsymbol{\sigma},$$

получаем искомое равенство. В самом деле, по правилам векторной алгебры, последнее векторное произведение может быть представлено так: $[\mathbf{r}[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]] = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}\mathbf{r}^2$, так как $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\omega}$. Но $\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}^2 dt = \mathbf{r}^2 d\boldsymbol{\alpha}$ есть удвоенная площадь, описываемая радиус-вектором \mathbf{r} за время dt . Из ранее доказанного (см. предыдущую задачу) следует, что $\boldsymbol{\sigma} = \text{const}$. Последнее соотношение представляет содержание второго закона Кеплера.

433. Решение. В случае одной материальной точки $\mathbf{L} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{p}]$, где \mathbf{r} — радиус-вектор материальной точки относительно неподвижного начала, \mathbf{r}_0 — радиус-вектор движущейся точки O относительно того же неподвижного начала, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — количество движения материальной точки. Дифференцированием по времени получаем $\dot{\mathbf{L}} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\dot{\mathbf{p}}] + [(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)\mathbf{p}]$. Первое слагаемое в правой части есть момент \mathbf{M} силы $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ относительно движущегося начала. Слагаемое $[\mathbf{v}\mathbf{p}]$ обращаются в нуль ввиду коллинеарности векторов \mathbf{v} и \mathbf{p} . В результате получается $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + [\mathbf{p}\mathbf{v}_0] = \mathbf{M} + m[\mathbf{v}\mathbf{v}_0]$.

Для обобщения полученного результата на случай системы материальных точек напомним последнее соотношение для каждой материальной точки, а затем такие соотношения сложим. Введя при этом скорость движения центра масс системы $\mathbf{v}_C = \sum m_i \mathbf{v}_i / m$, найдем $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} + m[\mathbf{v}_C \mathbf{v}_0]$, где m , \mathbf{L} и \mathbf{M} теперь означают массу, момент количества движения и момент внешних сил для всей системы материальных точек. Если скорости \mathbf{v}_C и \mathbf{v}_0 коллинеарны, то $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}$. В частности, это имеет место, когда начало O помещено в центре масс системы.

434. Главная полуось эллипсоида инерции направлена по диагонали, соединяющей противоположные вершины куба, и равна $a = 1/\sqrt{I_0}$; две другие полуоси равны между собой: $b = c = a/\sqrt{5}$, где $I_0 = \frac{1}{6}ml^2$ — момент инерции для любой оси, проходящей через центр масс куба.

Решение. Эллипсоид инерции для центра куба — шар радиуса $a = 1/\sqrt{I_0}$. Для точки A ось, совпадающая с диагональю куба, остается главной с моментом инерции I_0 . Для любой оси, перпендикулярной к диагонали в точке A , момент инерции определяется по теореме Штейнера

$$I_A = I_0 + m(d/2)^2,$$

где $d = \frac{l}{2}\sqrt{3}$ — диагональ куба. Отсюда следует приведенный выше ответ.

$$\mathbf{435.} \quad I = \frac{M}{6} \frac{l^2 m^2 + l^2 n^2 + m^2 n^2}{l^2 + m^2 + n^2}.$$

Решение. Главные моменты инерции для центра масс:

$$I_1 = \frac{M}{12} (m^2 + n^2), \quad I_2 = \frac{M}{12} (l^2 + n^2), \quad I_3 = \frac{M}{12} (l^2 + m^2);$$

направляющие косинусы для оси вращения относительно системы координат, связанной с главными направлениями и с началом в центре масс, равны

$$\cos \alpha = \frac{l}{d}, \quad \cos \beta = \frac{m}{d}, \quad \cos \gamma = \frac{n}{d},$$

где $d^2 = l^2 + m^2 + n^2$ (d — диагональ параллелепипеда). Момент инерции для оси любого направления представляется через главные моменты инерции следующей формулой:

$$I = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

Подстановка в эту формулу значений величин приводит к данному ответу.

§ 8. Тяготение

436. $g = 4\pi R G d / 3 \approx 974 \text{ см/с}^2$.

437. $g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \approx 975 \text{ см/с}^2$.

438. $g_{\text{л}} \approx 162 \text{ см/с}^2$.

439. $a = 4\pi^2 R^3 / (T^2 r^2) \approx 28g$, где g — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

440. Такое же, как и самой Земле (если пренебречь размерами Земли по сравнению с расстоянием до Солнца), т. е. ускорение $a = 4\pi^2 R / T^2 \approx 0,6 \text{ см/с}^2$, где R — радиус земной орбиты, а T — период обращения Земли вокруг Солнца.

441. Веса обоих тел одинаковы.

442. Решение. Веса тел в диаметрально противоположных точках земного шара 1 (день) и 2 (ночь) будут соответственно равны

$$P_1 = F_3 - F_C(R-r) - m\omega^2 r + m\omega_0,$$

$$P_2 = F_3 + F_C(R+r) - m\omega^2 r - m\omega_0$$

(рис. 233). Здесь F_3 и F_C — силы гравитационного притяжения Земли и Солнца соответственно, R — расстояние между их центрами, r — радиус Земли, ω_0 — ускорение центра Земли под действием гравитационного притяжения Солнца. Очевидно, $m\omega_0 = F(R)$. Вычитая, находим

$$P_2 - P_1 = [F_C(R+r) - F_C(R)] + [F_C(R-r) - F_C(R)].$$

Разлагая обе разности в квадратных скобках по формуле Тейлора и ограничиваясь квадратичными членами по r , получим $P_2 - P_1 = r^2 d^2 F_C / dR^2$. Преобразуем это выражение, используя соотношения $F_C = GMm/R^2 = 4\pi^2 R/T^2 m$, $P = mg$ (M — масса Солнца, T — период обращения Земли вокруг Солнца, m — масса тела). После несложных преобразований найдем

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2 r^2}{gT^2 R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}.$$

Здесь $s = 1/2 g T^2$ означает расстояние, которое проходила бы Земля в течение года, если бы она двигалась равноускоренно с ускорением g . Вычисляя это расстояние, получим $s \approx 5 \cdot 10^{12}$ км и далее $(P_2 - P_1)/P \approx 6,5 \cdot 10^{-12}$.

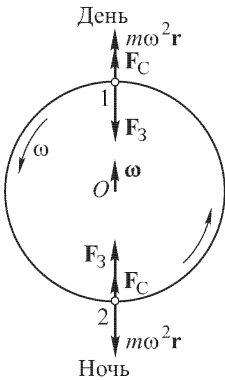


Рис. 233

443. $\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{M_{\text{Л}}}{M_3} \frac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8 \cdot 10^{-10}$, где M_3 и $M_{\text{Л}}$ — массы Земли и Луны, R — расстояние между их центрами, T — период обращения Луны вокруг Земли, r — радиус Земли. Таким образом, влияние Луны на разность весов $P_2 - P_1$ примерно на два порядка больше, чем Солнца.

444. $g_{\text{л}} = g_{\text{м}}(1 + 2\Delta T/T) = g_{\text{м}}(1 + 0,0008)$, где ΔT — разность значений периодов T колебаний маятника в Москве и Ленинграде.

445. Часы шли бы медленнее примерно в 2,5 раза, так как $g_{\text{л}}/g_3 \approx 0,16$ (см. задачу 438).

446. $R \approx 785 \cdot 10^6$ км.

447. $\frac{M}{m} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{T}\right)^2 = 3,3 \cdot 10^5$.

448. $g_{\text{с}} \approx \frac{4\pi^2 R}{T^2} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 \approx 275$ м/с².

449. $d = \sqrt[3]{MGT^2/4\pi^2}$.

450. $g = 4\pi^2 60^3 R/T^2 \approx 985$ см/с².

451. Решение. Используя приведенные данные, находим: момент инерции Луны относительно оси вращения Земли $I_{\text{л}} = ma_0^2 = 1,08 \cdot 10^{47}$ г · см² (моментом инерции Луны относительно ее собственной оси пренебрегаем), угловую скорость вращения Луны по орбите $\omega_{\text{л}} = 2,67 \cdot 10^{-6}$ рад/с, момент количества движения Луны $L_{\text{л}} = I_{\text{л}}\omega_{\text{л}} = 28,9 \cdot 10^{40}$ г · см²/с, полный момент количества движения системы Земля–Луна $L = L_3 + L_{\text{л}} = 34,8 \cdot 10^{40}$ г · см²/с. По закону сохранения момента количества движения $(I_3 + ma^2)\omega = L$. По закону Кеплера $a^3\omega^2 = a_0^3\omega_{\text{л}}^2$. Из этих двух уравнений можно получить неизвестные a и ω . Пренебрегая моментом инерции I_3 , пишем $ma^2\omega = L$ и находим

$$a = a_0 \frac{L^2}{m^2 a_0^4 \omega_{\text{л}}^2} = a_0 \left(\frac{L}{L_{\text{л}}}\right)^2 = 1,45a_0 = 5,58 \cdot 10^{10} \text{ см,}$$

$$\frac{\omega}{\omega_{\text{л}}} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3/2} = 0,573, \quad T = \frac{27,3}{0,573} = 47,7 \text{ сут.}$$

452. $U(R) = -mgR_0^2/R$, где R_0 — радиус Земли.

Решение. Сила тяготения, действующая на тело, находящееся на расстоянии r от центра Земли, равна $f = mgR_0^2/r^2$. Тогда потенциальная энергия на расстоянии R будет

$$U(R) = \int_{\infty}^R f dt = -\frac{mgR_0^2}{R}.$$

453. $K \equiv a^3/T^2 = GM/4\pi^2$, G — гравитационная постоянная.

Указание. Рассмотреть круговое движение планеты.

454. Решение. Когда масса планеты пренебрежимо мала, Солнце можно считать неподвижным и написать $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$. С учетом движения Солнца это уравнение заменится на $\mu\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$, где $\mu = Mm/(M+m)$ — приведенная масса. Переписав его в форме $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{M+m}{M}\mathbf{F}$, видим, что учет движения Солнца формально эквивалентен увеличению гравитационной постоянной в $(M+m)/M$ раз. Поэтому

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{M+m}{M} G \frac{M}{4\pi^2}, \quad \text{или} \quad \frac{a^3}{T^2(M+m)} = \frac{G}{4\pi^2}.$$

455. $R = R_0 \sqrt[3]{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{M_1 + M_2}{M_0}} = 2R_0 = 3 \cdot 10^8$ км.

456. $r_2 = \left(\frac{2GM}{2GM - r_1 v_1^2} - 1 \right) r_1$, $v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$. Звезда распадается, если $v_1 \geq \sqrt{2GM/r_1}$.

$$\mathbf{458.} \quad \rho \approx \frac{3\rho_0}{2 - \frac{g - g_0}{g_0} \frac{R}{h}} \approx 6,5 \text{ г/см}^3.$$

459. Кинетическая энергия планеты $K = mv_r^2/2 + L^2/(2I)$, где первый член представляет энергию радиального, а второй — вращательного движения, причем момент импульса планеты L относительно Солнца сохраняется. Так как момент инерции планеты относительно Солнца $I = mr^2$, то уравнение сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{Mm}{r} = E = \text{const},$$

где M — масса Солнца, а m — масса планеты. При $r = \infty$ $E = mv_r^2/2$. Это равенство может выполняться только при $E > 0$. При $E < 0$ оно выполняться не может. Отсюда следует, что при $E < 0$ движение будет финитным, а при $E > 0$ — инфинитным.

460. Если $E < 0$, то траектория планеты — эллипс, если $E > 0$ — гипербола. В промежуточном случае $E = 0$ траектория — парабола. Эллипс может вырождаться в отрезок прямой, а гипербола — в прямую, уходящую в бесконечность.

461. По гиперболической.

462. Оба осколка будут двигаться по параболам.

$$\mathbf{463.} \quad c - V \approx \frac{m_0^2 c^2}{2(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})M^2 v^2} c = 8 \cdot 10^{-28} c = 2,4 \cdot 10^{-17} \text{ см/с};$$

$$K_{\text{сн}}/K_3 \approx 2(\sqrt{2} - 1)c/v \approx 8,3 \cdot 10^3.$$

464. Решение. В перигелии P и в афелии A (рис. 234) радиальная скорость планеты равна нулю. Поэтому момент количества движения планеты в этих точках можно записать в виде mvr . Учтя уравнения сохранения момента количества движения и энергии, получим для этих точек

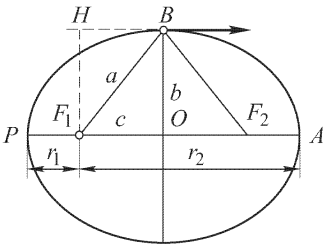


Рис. 234

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0. \quad (464.1)$$

При $E < 0$ это квадратное уравнение имеет два вещественных положительных корня r_1 и r_2 . Один из корней соответствует перигелию P , другой — афелию A . Сумма корней $r_1 + r_2$ дает длину большой оси эллипса:

$$2a = r_1 + r_2 = -G\frac{Mm}{E} = -G\frac{M}{\varepsilon}, \quad (464.2)$$

где $\varepsilon = E/m$ — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты. Так как для движения по эллипсу $\varepsilon < 0$, то выражение (464.2) существенно положительно, как это и должно быть.

465. Решение. Пусть комета движется по правой ветви гиперболы (рис. 235). В ее вершине справедливо уравнение

$$r^2 + G\frac{Mm}{E}r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Вообразим, что по сопряженной ветви гиперболы движется вспомогательная частица с той же массой m и энергией E , но на эту частицу действует сила

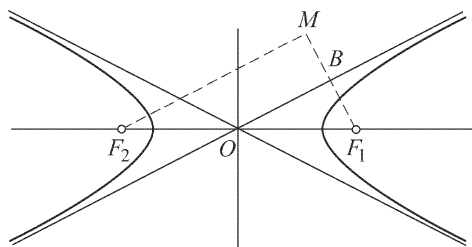


Рис. 235

отталкивания, исходящая из фокуса F_1 , величина которой совпадает с силой притяжения, действующей на комету. Для такой частицы в вершине гиперболы

$$r^2 - G \frac{Mm}{E} r - \frac{L^2}{2mE} = 0.$$

Разность положительных корней написанных уравнений и дает искомую длину

$$2a = G \frac{Mm}{E} = \frac{GM}{\varepsilon},$$

где $\varepsilon = E/m$ — полная энергия, приходящаяся на единицу массы планеты.

466. $v = v_{II} \sqrt{1 - R_0/2a} = 8,1$ км/с, где $v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,2$ км/с — вторая космическая скорость, $2a$ — длина большой оси эллиптической орбиты.

467. $\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2}{3} \frac{\Delta T}{T} \approx -0,02$ ($E < 0$).

468. Решение. Если p — импульс, а r — радиус-вектор планеты относительно Солнца, то

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{pr}) = \mathbf{Fr} + \mathbf{pv} = -G \frac{Mm}{r} + 2K = U + 2K = E + K.$$

При периодическом движении среднее по времени значение $\frac{d}{dt}(\mathbf{pr})$, очевидно, равно нулю, откуда и вытекает результат: $\overline{E} + \overline{K} = 0$.

470. $v = \sqrt{3gR_0}$, где R_0 — радиус Земли.

471. $v = v_0 \sqrt{R_0/R}$, где $v_0 = \sqrt{gR_0} \approx 7,9$ км/с — скорость движения спутника по круговой орбите (теоретической) с радиусом Земли R_0 .

Указание. Сила тяготения, действующая со стороны Земли на спутник массы m , равна mgR_0^2/R^2 .

472. $R = \sqrt[3]{\frac{g}{\omega^2 R_0}} R_0 \approx 6,61 R_0$, где $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}$ рад/с.

Указание. Центробежное ускорение спутника $\omega^2 R$ должно быть равно ускорению, сообщаемому спутнику силой тяготения, gR_0^2/R^2 .

473. 1) Первый. 2) $R_1/R_2 = 2gR_0/v_0^2$.

Решение. Для первого снаряда, по закону сохранения энергии, имеем

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = -g \frac{R_0^2}{R_1}, \quad \text{или} \quad R_1 = \frac{2gR_0^2}{2gR_0 - v_0^2},$$

так как его скорость в верхней точке равна нулю. (См. также задачу 452 и ее решение.)

Для второго снаряда, по закону сохранения энергии,

$$\frac{v_0^2}{2} - gR_0 = \frac{v_1^2}{2} - g\frac{R_0^2}{R_2},$$

где v_1 — скорость в наиболее удаленной точке; кроме того, по закону сохранения момента количества движения, $v_0R_0 = v_1R_2$. Отсюда получаем

$$R_2 = \frac{v_0^2 R_0}{2gR_0 - v_0^2}.$$

474. $R_1 = \frac{R_0}{\mu_1 - 1} \approx 6,8R_0$, $R_2 = \frac{R_0}{\mu_2 - 1} \approx 2,52R_0$, где $\mu_{1,2} = \frac{2gR_0}{(v_0 \pm \omega R_0)^2}$, ω — угловая скорость и R_0 — радиус Земли.

У к а з а н и е. См. решение задачи 473.

475. $T = \sqrt{3\pi/(G\rho)} \approx 1,2 \cdot 10^{-3}$ с.

476. Если $\rho = \text{const}$, то $T_1 = T_2$. Если ρ возрастает к центру планеты, то $T_1 > T_2$.

477. $M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{T^2} \approx 6 \cdot 10^{27}$ г, где a — большая полуось эллиптической орбиты спутника.

478. $\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \approx 0,11$, где $R_1 = R + h = 6625$ км — среднее расстояние корабля-спутника от центра Земли.

479. $\Delta R/R \sim 3\pi R\rho/(r\rho_0) = 1,2 \cdot 10^{-5}$, $\Delta R \sim -8$ м, где R — радиус земного шара. (При решении использовано выражение для силы сопротивления $F \sim \rho v^2 S$, где $S = \pi r^2$ — площадь поперечного сечения спутника.) Почему снижение спутника не зависит от значения гравитационной постоянной?

480. Минимальное удаление $\rho_1 = 1,25R_3$; максимальное удаление $\rho_2 = 2,1R_3$.

Р е ш е н и е. Энергия спутника в полярных координатах равна

$$E = \frac{m}{2} [\dot{\rho}^2 + (\rho^2 \dot{\varphi})^2] - \frac{C}{\rho} \quad (C = GmM_3).$$

Момент количества движения относительно центра сил равен $L = m\rho(\rho\dot{\varphi})$. Исключая из уравнения энергии $\dot{\varphi}$ и учитывая, что в точках максимального и минимального удаления спутника от центра Земли $\dot{\rho} = 0$, уравнение энергии можно записать в следующем виде:

$$\rho^2 - \frac{G}{|E|} \rho + \frac{L^2}{2m|E|} = 0.$$

Здесь учтено, что полная энергия спутника E на эллиптических орбитах всегда отрицательна. Два корня этого уравнения дают расстояние до перигея ρ_1 и апогея ρ_2 эллиптической орбиты. Согласно теореме Виета

$$\rho_1 + \rho_2 = 2a = \frac{C}{|E|}, \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{L^2}{2m|E|},$$

где a — главная полуось эллиптической орбиты. Используя уравнение эллипса в полярных координатах, записанное для перигея и апогея: $\rho_{1,2} = \rho/(1 \pm \epsilon)$,

можно представить все геометрические параметры орбиты через механические константы движения.

В данной задаче полная энергия спутника:

$$E = -\frac{C}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -0,3 \frac{C}{R_3},$$

где $v_0^2 = v_1^2 = \frac{C}{mR_3}$ — квадрат первой космической скорости. Большая ось орбиты $2a = \frac{C}{|E|} = \rho_1 + \rho_2$, отсюда $\rho_1 = 1,25R_3$, $\rho_2 = \frac{C}{|E|} - \rho_1 \approx 2,1R_3$.

$$481. v_A = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0.$$

Решение. Для круговой орбиты $v_0^2 = \frac{C}{mR_0}$, $R_0 = \rho_1$ — радиус круговой орбиты, $C = GmM_3$, m — масса спутника, G — гравитационная постоянная. Для эллиптической орбиты: $v_1 = v_0 \cdot \sqrt{1,5} = v_P$. Полная энергия спутника

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{C}{R_0} = \left(\frac{1,5}{2} - 1\right) \frac{C}{R_0} = -\frac{1}{4} \frac{C}{R_0}.$$

Большая ось орбиты

$$2a = \rho_1 + \rho_2 = \frac{C}{|E|} = 4R_0 = 4\rho_1, \quad \text{отсюда } \rho_2 = 4\rho_1 - \rho_1 = 3\rho_1 = 3R_0.$$

Для концов большой оси орбиты имеет место равенство $L = m\rho_1 v_P = m\rho_2 v_A$ (L — момент количества движения), отсюда

$$v_A = v_P \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\sqrt{1,5}}{3} v_0.$$

$$482. T_3/T_k = 2\sqrt{2} \approx 2,82.$$

Решение (см. решение задачи 480). Выражая момент количества движения через секторальную скорость для эллиптической орбиты: $L = 2m ds/dt$, получаем для периода

$$T_3 = \frac{2m}{L} S = 2\pi \frac{m}{L} ab.$$

Поскольку $b^2 = a \frac{L^2}{mC}$, то

$$T_3^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} a^3 \quad (C = GmM_3).$$

Для круговой орбиты:

$$T_k^2 = (2\pi)^2 \frac{m}{C} R^3.$$

Отсюда, с учетом данных задачи, получим

$$\left(\frac{T_3}{T_k}\right)^2 = \frac{a^3}{R^3} = \frac{2^3 R_3^3}{R_3^3} = 2^3, \quad \text{или } \frac{T_3}{T_k} = 2\sqrt{2}.$$

$$483. v_\rho = \sqrt{2/3 g R_3} = v_{II}/\sqrt{3}, \quad v_{II} — \text{вторая космическая скорость.}$$

Решение. Условие преодоления спутником земного притяжения: $\frac{mv^2}{2} - \frac{C}{R} = E = 0$, где $C = GmM_3$, E — полная энергия спутника; отсюда $v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = \frac{2C}{mR}$. На круговой орбите $v_\varphi^2 = \frac{C}{mR}$, поэтому

$$v_\rho^2 = \frac{2C}{mR} - \frac{C}{mR} = \frac{C}{mR} = \frac{2}{3}gR_3 = \frac{v_{II}^2}{3}.$$

484. $\rho_{\min} = \frac{mv_\varphi^2 R^2}{2C} = \frac{R}{2} = R_3$, $v = \frac{R}{\rho_{\min}} v_\varphi = \sqrt{\frac{2C}{mR_3}} = v_{II}$, v_{II} — вторая космическая скорость.

Решение. Момент количества движения спутника массы m на новой орбите определяется из условия:

$$L = mv_\varphi R = mv\rho_{\min} = \text{const.} \quad (484.1)$$

Квадрат скорости движения спутника на круговой орбите равен

$$v_\varphi^2 = \frac{C}{mR} \quad (C = GmM_3). \quad (484.2)$$

Полная энергия спутника на новой орбите:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{C}{\rho_{\min}} = \frac{m}{2}(v_\varphi^2 + v_\rho^2) - \frac{C}{R} = 0. \quad (484.3)$$

Из (484.1)–(484.3) следует ответ.

485. Скорость запуска с Земли $v_1 = (2/\sqrt{3})v_1 \approx 1,16v_1$, где v_1 — первая космическая скорость. Добавочная скорость в апогее $\Delta v = (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3})v_1 \approx 0,13v_1$.

Решение (см. решение задачи 480). Для эллиптической орбиты большая ось равна

$$2a = 2R_3 + R_3 = 3R_3 = C/|E| \quad (C = GmM_3).$$

Энергия спутника

$$|E| = \frac{C}{3R_3} = \frac{C}{R_3} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{C}{2R_3} - \frac{mv_2^2}{2},$$

откуда скорость запуска спутника $v_1^2 = \frac{4}{3} \frac{C}{mR_3} = \frac{4}{3} v_1^2$, скорость в апогее $v_2^2 = \frac{1}{3} \frac{C}{mR_3} = \frac{1}{3} v_1^2$, скорость на круговой орбите $v_k^2 = \frac{1}{2} v_1^2$; отсюда добавочная скорость

$$\Delta v = v_k - v_2 = (1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{3})v_1.$$

486. Время снижения $\tau = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_3}{g}}$.

Решение. Большая ось орбиты снижения $2a = R_3 + 2R_3 = 3R_3$. Время обращения по эллиптической орбите

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C} a^3} = 2\tau \quad (C = GmM_3).$$

Время снижения

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{m}{GmM_3} \left(\frac{3}{2}\right)^3 R_3^3} \approx \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_3^3}{gR_3^2}} = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{R_3}{g}}.$$

487. Спутник будет описывать малый эллипс:

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t), \quad y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t,$$

вершина которого лежит в точке равновесного положения спутника, а центр смещен на запад на расстояние $2v_0/\omega$, ω — угловая скорость вращения Земли.

Решение. Исходим из уравнения динамики: $m\mathbf{a}_0 = \mathbf{P} - [2m\omega\mathbf{v}_0]$, где \mathbf{P} — «вес» тела, который для точки равновесия спутника A равен нулю:

$$P_A = -\frac{C}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 = 0 \quad (C = GmM).$$

Для возмущенного движения

$$P = -\frac{C}{(R_0 + y)^2} + m\omega^2(R_0 + y) \approx \frac{2C}{R_0^3} y + m\omega^2 y = 3m\omega^2 y.$$

В проекциях на оси координатной системы X, Y, Z с началом в точке A уравнения динамики записываются в виде

$$\ddot{x} = -2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = 3\omega^2 y + 2\omega\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Отсюда $\dot{x} = -2\omega y$, $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$, что при начальных условиях $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$ дает

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Для координаты x при $x(0) = 0$ получаем

$$x(t) = -\frac{2v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t).$$

488. $v_{II} = \sqrt{2gR_0} \approx 11,2$ км/с. Скорость может составлять любой угол с вертикалью.

Решение. По закону сохранения энергии $\frac{mv_{II}^2}{2} - mgR_0 = 0$. Потенциальная энергия на поверхности Земли (см. задачу 452) $-mgR_0$, а на бесконечном расстоянии кинетическая и потенциальная энергии равны нулю.

489. Решение. Все скорости относительно Земли условимся обозначать малыми, а относительно Солнца — большими буквами. Разделим движение ракеты на два этапа. На первом этапе движение будем рассматривать в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, пренебрегая при этом полностью неоднородностью поля солнечного тяготения. В этом приближении сила гравитационного притяжения Солнца полностью компенсируется силой инерции, связанной с ускоренным движением центра Земли. Считая массу Земли M бесконечно большой по сравнению с массой корабля m , запишем уравнение энергии в виде

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = \frac{mv_\infty^2}{2},$$

где v_∞ — скорость ракеты в тот момент, когда она практически выходит из зоны действия земного тяготения. Вводя круговую скорость $v_k^2 = GM/r$, получим $v_\infty^2 = v^2 - 2v_k^2$. После того как ракета выйдет из зоны действия

земного тяготения, будем относить ее движение к системе отсчета, в которой неподвижно Солнце. Скорость ракеты в этой системе отсчета векторно складывается из скорости \mathbf{v}_∞ и скорости кругового движения Земли \mathbf{V}_k : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_k + \mathbf{v}_\infty$. Возведя в квадрат, получим

$$V^2 = V_k^2 + v_\infty^2 + 2\mathbf{V}_k\mathbf{v}_\infty = V_k^2 + v_\infty^2 + 2V_kv_\infty \cos\theta.$$

Чтобы найти третью космическую скорость, надо в этом соотношении положить $V = V_n = \sqrt{2} V_k$, где V_n — параболическая, а $V_k = 29,8$ км/с — круговая скорости движения ракеты относительно Солнца. Это приводит к уравнению

$$v_\infty^2 + 2V_kv_\infty \cos\theta - V_k^2 = 0,$$

из которого находим

$$v_\infty = (\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta)V_k$$

(Положительный знак перед квадратным корнем выбран потому, что величина v_∞ по своему смыслу существенно положительна.) После этого получаем

$$v^2 = (\sqrt{1 + \cos^2\theta} - \cos\theta)^2 V_k^2 + 2v_\infty^2.$$

Наименьшее значение третьей космической скорости получается при $\theta = 0$ (ракета выпущена в направлении орбитального движения Земли), наибольшее при $\theta = \pi$ (ракета выпущена в направлении против орбитального движения Земли):

$$v_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)V_k^2 + 2v_k^2} \approx 16,7 \text{ км/с},$$

$$v_{\max} = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)V_k^2 + 2v_k^2} \approx 72,7 \text{ км/с}.$$

490. Решение. Ракета на старте движется вокруг Солнца вместе с Землей со скоростью \mathbf{V}_k . Чтобы ракета упала на Солнце, надо ее движение затормозить. Как и в предыдущей задаче, находим, что по выходе из поля земного тяготения ракета будет иметь скорость $\mathbf{V} = \mathbf{V}_k + \mathbf{v}_\infty$ (относительно Солнца). Наименьшая для замедления ракеты затрата энергии соответствует случаю, когда скорости \mathbf{V}_k и \mathbf{v}_∞ направлены противоположно. В соответствии с этим полагаем $V = V_k - v_\infty$ (все скорости положительны) и находим энергию, приходящуюся на единицу массы ракеты:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2}(V_k - v_\infty)^2 - GM/R = \\ &= -\frac{1}{2}(V_k^2 + 2V_kv_\infty - v_\infty^2) \end{aligned}$$

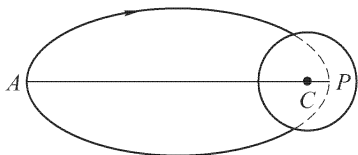


Рис. 236

($R = CA$ — расстояние ракеты до центра Солнца, рис. 236). Если эта величина отрицательна, то ракета будет описывать вокруг Солнца эллипс с большой осью

$$2a = -\frac{GM}{\varepsilon} = \frac{2RV_k^2}{V_k^2 + 2V_kv_\infty - v_\infty^2}.$$

Один из фокусов эллипса находится в центре Солнца. Пусть $x = CP$ — расстояние от центра Солнца до ближайшей вершины этого эллипса, тогда

$2a = R + x$. Это приводит к квадратному уравнению, меньший корень которого

$$v_{\infty} = V_k \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right).$$

Заданием расстояния x на поверхности Солнца определяется линия, на которой должна лежать заданная точка. Таким образом, искомая скорость v определяется выражением

$$v^2 = v_{\infty}^2 + 2v_k^2 = V_k^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2x}{R+x}} \right)^2 + 2v_k^2.$$

При $x = 0$ (прямолинейное движение по направлению к центру Солнца) скорость v максимальна и равна

$$v_{\max} = \sqrt{V_k^2 + 2v_k^2} \approx 31,8 \text{ км/с.}$$

Ракета упадет в передней точке Солнца. При $x = r$ (r — радиус Солнца) скорость минимальна:

$$v_{\min} \approx \sqrt{V_k^2 \left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R+r}} \right)^2 + 2v_k^2} \approx \sqrt{V_k^2 (1 - \sqrt{\alpha})^2 + 2v_k^2} \approx 29,2 \text{ км/с.}$$

Ракета упадет в задней точке Солнца, двигаясь по касательной к его поверхности.

491. Решение. Обозначим через E_k полную энергию спутника при движении по круговой орбите, тогда

$$E_k = -K, \quad U = -2K.$$

После того как отработал двигатель, скорость спутника возросла в α раз, а кинетическая энергия K — в α^2 раз. Потенциальная энергия не изменилась, так как за время работы двигателя спутник переместился пренебрежимо мало. Таким образом, полная энергия спутника на эллиптической орбите будет

$$E_3 = \alpha^2 K + U = (\alpha^2 - 2)K = (2 - \alpha^2)E_k.$$

Большие оси эллиптических орбит обратно пропорциональны полным энергиям (см. решение задачи 464). Поэтому

$$\frac{a}{R} = \frac{1}{2 - \alpha^2}, \quad a = R(2 - \alpha^2).$$

Орбита будет эллиптической, если $\alpha^2 \leq 2$. Максимальное расстояние спутника от центра Земли (в апогее)

$$R_{\max} = 2a - R = \frac{\alpha^2 R}{2 - \alpha^2}.$$

Период обращения T_2 найдется из третьего закона Кеплера:

$$T_2 = T_1 / (2 - \alpha^2)^{3/2}.$$

492. Решение. Изменением потенциальной энергии корабля во время кратковременной работы двигателя в периселении (или апоселении) можно пренебречь. Поэтому $\Delta\varepsilon = \Delta(v^2/2) = v\Delta v$. С другой стороны, так как $2a = -GM/\varepsilon$, $\Delta\varepsilon = \frac{GM}{2a^2} \Delta a = \frac{1}{2} g' \Delta a$, где g' — ускорение свободного падения

на Луне в периселении. Приравнивая оба выражения, после некоторых преобразований получим

$$\Delta v = \frac{R}{2a} \sqrt{\frac{g}{a}} \Delta a = -42 \text{ м/с.}$$

493. $\frac{m_0 - m}{m_0} = (\sqrt{2} - 1) \frac{\sqrt{gR}}{u} \approx 0, 17.$

494. $v = \frac{2\pi R}{T} \sqrt{\frac{2R}{r}} \approx 60 \text{ км/с.}$

495. Решение. Движение спутника почти круговое, а потому $K = -E$ (см. задачу 469). Сопротивление среды уменьшает полную энергию спутника, а следовательно, увеличивает кинетическую энергию его. Момент количества движения спутника уменьшается. Перепишем предыдущее соотношение в виде $mv^2 = -U$ и дифференцируем по времени: $2mv dv/dt = -dU/dt$. Подставив сюда $U = mgR^2/r$ (R — радиус Земли) и введя скорость снижения спутника $w = -dr/dt$, получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{2v} \frac{R}{r^2} w \approx \frac{g}{2v} w \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2.$$

Здесь можно считать, что $v \approx 8 \text{ км/с}$ (первая космическая скорость). Тангенциальное ускорение направлено по движению спутника. Сила сопротивления среды может быть найдена из уравнения энергии и равна $F = m dv/dt \approx 80 \text{ дин}$.

496. Посередине между центром Земли и начальным положением корабля.

497. Решение. Так как энергия корабля зависит только от длины $2a$ большей оси его орбиты, то переход на круговую орбиту произойдет на расстоянии a , т.е. в точке пересечения эллипса с его малой осью. Направление скорости корабля надо повернуть на такой угол, чтобы оно оказалось перпендикулярным к линии, соединяющей корабль с центром Земли.

498. Увеличить в $\sqrt{2}$ раз.

499. $v_2 = v_1 h/l = 54, 6 \text{ км/с.}$

500. $v_\infty = R \sqrt{\frac{2gR}{l^2 - R^2}}$. При $l = 2R$ $v_\infty = \sqrt{2/3} gR \approx 6, 5 \text{ км/с.}$

501. $F_{\text{гп}}/F_{\text{эл}} = Gm^2/e^2$, где $e = 4, 8 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ — элементарный заряд. Подставляя в формулу массу электрона $m_e = 9, 11 \cdot 10^{-28}$ г и массу протона $m_p = 1, 67 \cdot 10^{-24}$ г, получим для электрона $F_{\text{гп}}/F_{\text{эл}} = 2, 4 \cdot 10^{-43}$, для протона $F_{\text{гп}}/F_{\text{эл}} = 8 \cdot 10^{-37}$.

502. Решение. Соединим центр сферы O с точкой A , в которой помещена точечная масса m (рис. 237). Из точки O , как из вершины, опишем два круговых конуса с общей осью OA , образующие которых наклонены к этой

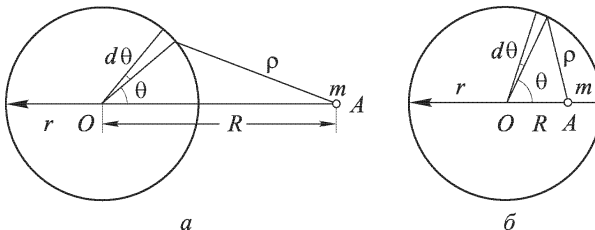


Рис. 237

оси под углами θ и $\theta + d\theta$. Они вырежут на поверхности сферы элементарный пояс с площадью $dS = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$, где r — радиус сферы. Масса этого пояса $dM = M \frac{dS}{4\pi r^2} = M \sin \theta d\theta$. Так как точки пояса равноудалены от точки A , то потенциальная энергия гравитационного взаимодействия пояса и точечной массы m равна

$$dU = -G \frac{Mm}{2} \sin \theta d\theta.$$

Перейдем к новой переменной ρ — расстоянию между точечной массой m и какой-либо точкой пояса. Эта переменная связана с θ соотношением $\rho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$, где R — расстояние OA между центром сферы и точечной массой m . При перемещении вдоль поверхности сферы величины R и r остаются постоянными, поэтому

$$\rho d\rho = Rr \sin \theta d\theta,$$

а, следовательно,

$$dU = -G \frac{Mm}{2Rr} d\rho, \quad U = -G \frac{Mm}{2Rr} \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} d\rho.$$

Если точка A лежит вне сферы (рис. 237 а), то максимальное и минимальное значения ρ равны соответственно $\rho_{\max} = R + r$ и $\rho_{\min} = R - r$. В этом случае интегрирование дает

$$U = -\frac{GMm}{R}. \quad (502.1)$$

Потенциальная энергия такая же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в одной точке, а именно в центре сферы. То же справедливо и для силы взаимодействия $F = -dU/dR = -GMm/R^2$. Можно сказать, что сфера притягивает материальную точку так, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре. Можно сказать и иначе: точечная масса притягивает сферу так, как если бы вся масса последней была сосредоточена в ее центре.

Если же точка A лежит внутри сферической полости (рис. 237 б), то $\rho_{\max} = r + R$, $\rho_{\min} = r - R$, и интегрирование дает

$$U = -\frac{GMm}{r}. \quad (502.2)$$

На границе полости выражения (502.1) и (502.2) совпадают. Согласно (502.2) потенциальная энергия материальной точки внутри полости не зависит от R , она постоянна. Сила F , действующая на материальную точку в этом случае, равна нулю, так как $U = \text{const}$, а потому $F = -U/dR = 0$.

503. Доказательство. Как показано в предыдущей задаче, гравитационное поле первой сферы не изменится, если всю массу этой сферы сосредоточить в ее центре. Поэтому не изменится и сила, с которой это поле действует на вторую сферу. Задача свелась к нахождению силы, с которой точечная масса действует на сферу. Но в предыдущей задаче показано, что эта сила не изменится, если и массу второй сферы сконцентрировать в ее центре. Этим и завершается доказательство.

505. Решение. Поле вне шара равно $g = GM/r^2$, где M — масса шара. Для вычисления поля в точке A (рис. 238), лежащей внутри шара на расстоянии r от центра, проведем через эту точку вспомогательную сферу с центром в точке O . Вещество шара, расположенное вне вспомогательной сферы, не

влияет на поле внутри нее. В частности, оно не влияет на поле в точке A . Гравитационное поле в точке A создается только веществом, сосредоточенным внутри вспомогательной сферы. Оно равно Gm/r^2 , где m — масса вещества, ограниченного вспомогательной сферой. Таким образом,

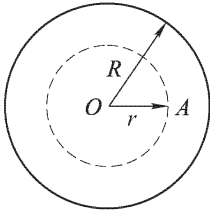


Рис. 238

$$g = \begin{cases} G \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi G}{3} \frac{R^3}{r^2} \rho, & \text{если } r \geq R, \\ G \frac{m}{r^2} = \frac{4\pi G}{3} \rho r, & \text{если } r \leq R. \end{cases} \quad (505.1)$$

При $r = R$ оба выражения совпадают.

506. Решение. Гравитационная энергия шара есть потенциальная энергия, обусловленная силами тяготения, действующими между материальными точками, на которые можно мысленно разбить шар. Она равна взятой с противоположным знаком работе, которую должны затратить внешние силы, чтобы привести вещество шара в бесконечно разрозненное состояние, когда каждая частица вещества удалена в бесконечность. Эта работа не зависит от способа, каким шар переводится из начального состояния в конечное. Поэтому при вычислении можно поступить следующим образом. Разделим мысленно весь шар на бесконечно тонкие концентрические слои и будем последовательно удалять в бесконечность каждый из таких слоев, начиная с самого крайнего. Напряженность поля тяготения в любой точке выделенного слоя, создаваемая веществом, внешним по отношению к этому слою, равна нулю. Поле создается только веществом, которое окружено рассматриваемым слоем. Если m — масса этого вещества, а dm — масса слоя, то работа, затрачиваемая на удаление слоя в бесконечность, равна $dA = Gm dm/r$. Но для однородного шара $m = M(r/R)^3$, где M — масса всего шара. Поэтому $dA = 3G \frac{M^2}{R^6} r^4 dr$. Учитывая, что $dA = -dU$ и интегрируя, получим

$$U = -3 \frac{GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

За нуль потенциальной энергии мы приняли энергию шара в бесконечно разрозненном состоянии.

$$\mathbf{507.} \quad t \approx \frac{3}{5} \frac{GM^2}{RP} \approx 5,9 \cdot 10^{14} \text{ с} \approx 1,9 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

508. Решение. Вообразим, что полость заполнена веществом, плотность которого равна плотности шара. Тогда искомое гравитационное поле \mathbf{g} представится разностью гравитационных полей двух сплошных шаров с центрами в O и O_1 соответственно. Точка наблюдения A расположена внутри каждого из этих шаров. Поэтому можно воспользоваться формулой (505.1) и написать

$$\mathbf{g} = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r} - \left(-\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{r}_1 \right) = -\frac{4\pi}{3} \rho \mathbf{R},$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из центра шара O к центру полости O_1 . Поле однородно, т. е. во всех точках полости одинаково по величине и направлению.

509. $U(r) = \frac{mgr^2}{2R_0} - \frac{3}{2} mgR_0$, где m — масса тела и r — расстояние его от центра Земли.

Решение. Внутри шахты (см. задачу 505) сила тяготения $f = mg \frac{r}{R_0}$, поэтому

$$U(r_1) - U(0) = \int_0^{r_1} f dt = \frac{m g r_1^2}{2 R_0}, \quad \text{или} \quad U(r_1) = U(0) + \frac{m g r_1^2}{2 R_0}.$$

Можно выбрать величину $U(0)$ так, чтобы значение потенциальной энергии по формуле, приведенной в задаче 452, совпадало с полученным на поверхности Земли при $r_1 = R_0$; тогда

$$U(R_0) = U(0) + \frac{m g R_0}{2} = -m g R_0, \quad \text{или} \quad U(0) = -\frac{3}{2} m g R_0.$$

510. $v = \sqrt{g R_0} = 7,2$ км/с.

Указание. См. задачу 509.

511. Все тела в снаряде, находясь в том же поле тяготения, что и снаряд, испытывают такое же, как снаряд, ускорение, поэтому тело, подвешенное к неподвижным относительно снаряда пружинным весам, не вызовет их растяжения. Массу тела можно измерить, например, так. С помощью пружины можно сообщить телу некоторое ускорение относительно снаряда, и по отношению силы (отсчитываемой по растяжению пружины) к ускорению можно найти массу тела (предполагается, что масса снаряда много больше измеряемой массы).

512. Весы покажут «вес» $p = ma$. Подвешенные в снаряде пружинные весы будут в этом случае растягиваться в направлении, противоположном ускорению снаряда (вызванному сопротивлением атмосферы планеты).

513. Если бы не было сопротивления воздуха, то приборы в снаряде перестали бы регистрировать наличие силы тяжести при выходе снаряда из жерла орудия. Вследствие сопротивления воздуха снаряд получает дополнительное отрицательное ускорение, а приборы, находящиеся в снаряде, регистрируют силу «тяжести», направленную в сторону, противоположную испытываемому снарядом ускорению, т. е. в сторону движения снаряда.

514. Линейная скорость движения любого спутника по орбите обратно пропорциональна квадратному корню из расстояния спутника от центрального тела. Линейная же скорость элементов сплошного кольца, наоборот, прямо пропорциональна их расстоянию от центрального тела.

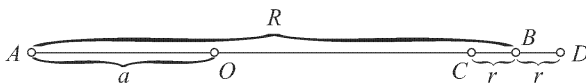


Рис. 239

515. Решение. Пусть центр масс тел A и B находится в точке O (рис. 239). Неизменное расстояние между телами A и B будет сохраняться только при вращении их с угловой скоростью $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{G(M_A + M_B)}{R}}$ вокруг точки O . Условия равновесия тел C и D во вращающейся (связанной с телами A и B) системе координат запишутся так:

$$M_C \left\{ -\frac{G M_A}{(R-r)^2} + \omega^2 (R-a-r) + \frac{G M_B}{r^2} \right\} + F_C = 0,$$

$$M_D \left\{ -\frac{G M_A}{(R+r)^2} + \omega^2 (R-a+r) - \frac{G M_B}{r^2} \right\} + F_D = 0,$$

где положительное направление выбрано от A к B , F_C и F_D — искомые силы, G — постоянная тяготения. Исключая ω , принимая во внимание соотношение $\omega^2 = GM_B/R^2$ и пренебрегая членами высших порядков относительно r/R , получаем окончательно:

$$F_C = GM_C \left\{ -\frac{M_B}{r^2} + \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right\},$$

$$F_D = GM_D \left\{ \frac{M_B}{r^2} - \frac{r}{R^3} (3M_A + M_B) \right\},$$

т. е. при $M_C = M_D$ обе силы меньше силы притяжения этих масс телом B на одинаковую величину.

516. Решение. В задаче 515 можно рассматривать A как центр Солнца и M_A как его массу, B — как центр Земли и M_B — как ее массу, C и D — как два положения одного и того же тела массы $M_C = M_D$ на поверхности Земли (C — днем, D — ночью) (см. рис. 239). Из решения этой задачи следует, что все тела будут в полночь и в полдень весить немного меньше, чем утром и вечером. Но эта разница в весе, как легко видеть, гораздо меньше, чем сила притяжения Солнца, так как сила притяжения Солнца $GM_C M_A/R^2$ умножается на очень малую величину $3r/R$. (Массой Земли M_B по сравнению с $3M_A$, где M_A — масса Солнца, при оценке изменений веса, конечно, можно пренебречь.)

517. Схему задачи 515 можно применить к объяснению происхождения приливов, вызываемых Луной. Луна A и Земля B вращаются вокруг общего центра масс O (см. рис. 239). В точках C и D на поверхности Земли, где вода «весит» меньше, чем во всех других точках, образуются водные «горбы». Для расчета приливообразующей силы подставим вместо M_A и M_B соответственно массы Луны и Земли. Тогда из формул, полученных в задаче 515 (так как массой Луны по сравнению с массой Земли можно пренебречь), найдем приближенно вес тела массы M в ближайшей к Луне и в наиболее удаленной от нее точках земной поверхности

$$Mg \approx Mg_0 \left[1 - 3 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \frac{M_A}{M_B} \right],$$

где g_0 — ускорение, сообщаемое Землей, r — радиус Земли, R — расстояние от центра Земли до центра Луны.

518. Точка, в которой $g = 0$, делит отрезок прямой линии между центрами этих планет в отношении 9 : 1 и, следовательно, лежит на расстоянии $\approx 36,7 \cdot 10^3$ км от поверхности Луны.

519. $A \approx 6,12 \cdot 10^6$ кгс · м.

Решение. Минимальная работа по перемещению массы m с Земли на Луну может быть записана следующим образом: $A \approx mR_3 g_3 - mR_l g_l$, где R_3 и R_l — радиусы Земли и Луны, g_3 и g_l , соответственно, ускорения свободного падения на поверхности этих планет, вызванные силами тяготения самих планет (см. решение задачи 473).

§ 9. Упругие деформации

520. $p = 2450$ кгс/см².

521. Нет. Длина цилиндра, который не выдержит собственного веса, равна $l = p/\rho g$, где p — напряжение разрыва, а ρ — плотность материала; $l = 175$ м.

522. $p = E\alpha(t_1 - t_2)$; $p_{\text{взм}} \approx + 1000 \text{ кгс/см}^2$ (растяжение) и $p_{\text{лет}} \approx - 375 \text{ кгс/см}^2$ (сжатие).

523. $D = 27 \text{ мм}$.

524. $\Delta V = \frac{1-2\mu}{E} l P$, где E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона. $\Delta V < 0$ при сжатии, $\Delta V > 0$ при растяжении.

525. $Q = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 p \approx 11,7 \cdot 10^3 \text{ кгс}$.

526. $\Delta l = \rho g l^2 / 2E$, где ρ — плотность вещества стержня, l — его длина, E — модуль Юнга; объем увеличивается на $\Delta V = \frac{1-2\mu}{2SE} V_0^2 \rho g$, где V_0 — первоначальный объем, μ — коэффициент Пуассона, S — поперечное сечение.

527. $\alpha = 45^\circ$, $\tau = F/2S$.

528. $U = P^2 h / (6ES)$. Упругая энергия увеличится в 7 раз.

529. Решение. В силу симметрии касательное напряжение τ , действующее в оболочке, одно и то же и одинаково во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий форму прямоугольника. При вычислении относительного изменения площади этого элемента под действием касательных напряжений τ можно отвлечься от кривизны элемента, приняв его за плоскую прямоугольную пластинку. Тогда вычисление дает $\Delta S/S = 2(1-\mu)\tau/E$ (изменением площади, вызванным нормальным давлением, пренебрегаем). Поскольку площадь S пропорциональна $V^{2/3}$, относительное изменение объема будет $\Delta V/V = \frac{3}{2} \Delta S/S$. Так как поверхность искривлена, то натяжение τ создаст разность нормальных давлений. Для нее нетрудно получить $2\tau d/R$ (см. формулу Лапласа в учении о поверхностном натяжении). Эта разность должна быть уравновешена разностью давлений газа ΔP по разные стороны оболочки. В результате получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-\mu)R}{2Ed} \Delta P \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

530. $P_x = \mu P$, $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E} (1 + \mu)$, $\frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E} (1 - \mu^2)$, $u = \frac{P^2}{2E} (1 - \mu^2)$.

531. $\Delta l_1 = 2\Delta l_2 = \frac{4P}{k_2 + 4k_1}$, $P_1 = \frac{4k_1}{k_2 + 4k_1} P$, $P_2 = \frac{2k_2}{k_2 + 4k_1} P$.

532. Деформации (удлинения) тросов показаны на рис. 240 в увеличенном виде. Если длина среднего троса L , то относительные удлинения первого и третьего тросов $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \frac{\Delta l_1}{L} \cos \alpha$, второго $\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{L} = \frac{\Delta l_1}{L \cos \alpha}$. Напряжение $\sigma = E\varepsilon$ для каждого троса, E — модуль Юнга материала. Поэтому $\sigma_1 = \sigma_3 = \sigma_2 \cos^2 \alpha$.

533. Силы натяжения среднего троса P_2 , бокового троса P_1 :

$$P_1 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}, \quad P_2 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha}.$$

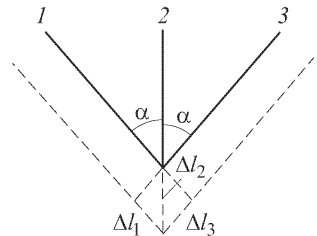


Рис. 240

З а м е ч а н и е. Полезно рассмотреть случай, когда сечение среднего троса в два раза меньше, чем крайних.

534. Силы натяжения: $P_1 = \frac{P}{2} \frac{6\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3}$, $P_2 = \frac{P}{2} \frac{3\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3}$, $P_3 = \frac{P}{2} \frac{2\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3}$, где $\alpha_1 = 1/S_1$, $\alpha_2 = 1/S_2$, $\alpha_3 = 1/S_3$. Все тяги растянуты при $S_1 > S_2/2$.

Решение. Если удлинение первой тяги Δx_1 , а третьей — Δx_3 , то можно составить следующие уравнения:

$$P_1 = AS_1\Delta x_1, \quad P_2 = AS_2 \frac{\Delta x_1 + \Delta x_3}{2}, \quad P_3 = AS_3\Delta x_3,$$

где A — определенная постоянная величина. Добавим еще два уравнения: $P_1 + P_2 + P_3 = P$ — уравнение равновесия сил и $P_1 = P_2 + 3P_3$ — следствие уравнения моментов. Решая эти пять уравнений, найдем ответ.

535. $P = 125$ кгс, $\lambda = 5$ мм.

Указание. 1) Если максимальное напряжение в поперечном сечении стержня у места заделки будет равно σ , то распределение нормальных напряжений в этом сечении описывается выражением $(2\sigma/a)z$, где a — высота поперечного сечения и z — расстояние от середины сечения. Тогда равенство моментов внешних сил Pl и внутренних сил в сечении заделки можно записать так:

$$Pl = \frac{4\sigma b}{a} \int_0^{a/2} z^2 dz = \frac{\sigma b a^2}{6},$$

где b — ширина сечения стержня.

2) Кривая прогибов консольно закрепленного стержня $y(x)$ (рис. 241) определяется дифференциальным уравнением¹⁾

$$P(l-x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2},$$

где $P(l-x)$ — момент внешних сил относительно сечения балки, имеющего координату x , I — момент инерции площади поперечного сечения стержня относительно горизонтальной оси, проходящей через центр масс сечения. Для прямоугольника высотой a и шириной b $I = a^3 b/12$. Уравнение, определяющее прогибы, можно два раза проинтегрировать, и учесть, что $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = 0$.

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI} \int_0^x (l-\xi) d\xi = \frac{P}{EI} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$y(x) = \frac{P}{EI} \int_0^x \left(l\xi - \frac{\xi^2}{2} \right) d\xi = \frac{P}{2EI} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right),$$

отсюда $\lambda = y(l) = Pl^3/(3EI)$; подставляя значение l , получаем для стрелы прогиба $\lambda = 4Pl^3/(a^3 bE) = 5$ мм.

536. $\lambda = Pl^3/(48EI)$.

Указание. Стрелу прогиба можно подсчитать по формуле, указанной в ответе предыдущей задачи, если учесть, что поперечное сечение в середине

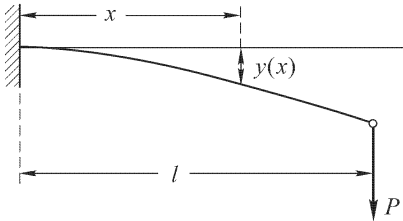


Рис. 241

¹⁾ См., например, С. П. Стрелков. Механика. — М.: «Наука», 1975, § 88, 89.

балки не повернулось при деформации. Поэтому прогиб будет такой же, как и прогиб консольно закрепленной половины балки под действием реакции опоры конца балки, равной $P/2$.

537. Решение. Пусть смещение конца стержня Δl . Под действием силы P_2 средней пружины стержень выгнется вверх и стрела прогиба будет δ . Тогда стержень будет находиться в равновесии под действием сил, показанных на рис. 242, где $P_1 = k_1 \Delta l$, $P_2 =$

$= k_2 \left(\frac{\Delta l}{2} - \delta \right)$. Считая Δl очень малым, можно определить δ по формуле, указанной в ответе предыдущей задачи, или $\delta = \frac{(P - P_1)l^2}{24EI}$. Усло-

вие равенства моментов сил: $P_2 \frac{l}{2} + P_1 l = Pl$. Из этих уравнений находим

$$\Delta l = \frac{4 + 2\alpha}{4 + \beta + 2\alpha} \frac{P}{k_1},$$

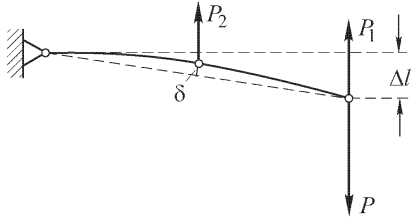


Рис. 242

где $\alpha = \frac{k_2 l^3}{24EI}$ («жесткость средней пружины») и $\beta = \frac{k_2}{k_1}$. Исключая Δl и δ , получим ответ:

$$P_1 = \frac{4 + 2\alpha}{4 + \beta + 2\alpha} P, \quad P_2 = \frac{2\beta}{4 + \beta + 2\alpha} P \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l}{2} - \delta = \frac{2}{4 + \beta + 2\alpha} \frac{P}{k_1}.$$

Проверьте случай абсолютно жесткого стержня ($\alpha = 0$) и случай идеального гибкого стержня ($\alpha = \infty$).

538. $\lambda = Pl^3/(2ab^3E) \approx 0,03$ мм (см. указание к задаче 536).

539. $\lambda = Pl^3/(4a^4E) \approx 1,25$ мм.

540. Так как момент инерции сечения трубки $I = \pi(D^4 - d^4)/64$, то $\lambda = \frac{4Pl^3}{3\pi(D^4 - d^4)E} \approx 1,6$ мм.

541. $E = \frac{4Pl^3}{3\pi R^4 \lambda} \approx 10^4$ кгс/мм² (см. момент инерции в ответе предыдущей задачи).

542. $E = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{\pi R^4 \lambda}$.

Указание. Стрелу прогиба и в этом случае можно подсчитать по формуле задачи 536, если учесть, что вследствие симметрии каждую четвертую часть длины балки можно рассматривать как консольно закрепленную (рис. 243).

Это возможно потому, что изгибающий момент равен нулю в тех местах, где мы мысленно рассекли балку. Вследствие симметрии кривизна в этих местах равна нулю, а следовательно, и изгибающий момент равен нулю.

543. Решение. Считаем, что при закручивании поперечное сечение стержня, находящееся на расстоянии dl от другого сечения, поворачивается на угол $d\varphi$ относительно него. Кольцо, вырезанное между этими сечениями, имеющее радиус ρ и толщину $d\rho$, сдвинется на угол (рис. 244) $d\alpha = \rho d\varphi/dl$. Касательное напряжение в сечении на расстоянии ρ от оси будет $\tau = N\rho d\varphi/dl$. Момент сил, действующих на поверхность кольца радиуса ρ и толщины $d\rho$,

$$dM = 2\pi\rho d\rho\tau = 2\pi N \frac{d\varphi}{dl} \rho^3 d\rho.$$

Момент сил в сечении

$$M = 2\pi N \frac{d\varphi}{dl} \int_0^r \rho^3 d\rho = \pi N \frac{d\varphi}{dl} \frac{r^4}{2},$$

где r — радиус стержня. Момент M равен моменту внешних сил; отсюда $M = 2PR$. Подставляя это в предыдущее выражение, получаем $\frac{d\varphi}{dl} = \frac{4PR}{\pi N r^4}$, следовательно, $\varphi = \frac{4PRl}{\pi N r^4}$, $\varphi = \frac{1}{5\pi} \approx 3,6^\circ$.

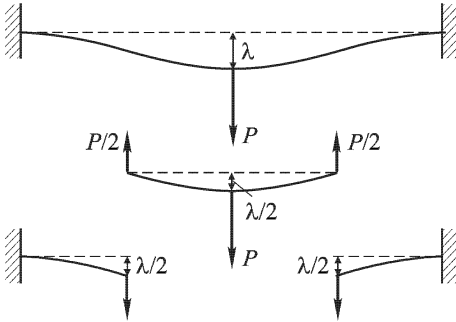


Рис. 243

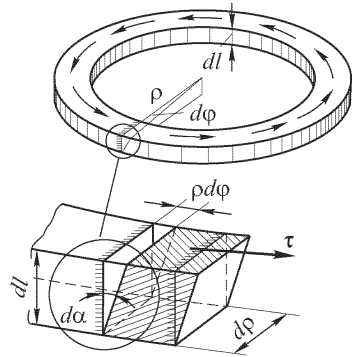


Рис. 244

544. Центр масс диска описывает при вращении окружность радиуса $d + \xi$, где ξ — прогиб вала, зависящий от числа его оборотов. Упругая сила $k\xi$ сообщает центру масс центростремительное ускорение. Поэтому можно написать $m\omega^2(d + \xi) = k\xi$, откуда прогиб (в мм)

$$\xi = \frac{d}{k/(m\omega^2) - 1}. \quad (544.1)$$

(Угловую частоту $\omega = \sqrt{k/m}$, при которой $\xi \rightarrow \infty$, называют критической частотой и, очевидно, стараются так подобрать условия работы вала, чтобы он не работал при критических частотах. Вал может работать и при частоте выше критической. Для этого надо, ускоряя вращение вала, достаточно быстро пройти через критическое значение угловой частоты. Амплитуда колебаний вала не успевает заметно возрасти.)

545. $v = k\sqrt{F/\rho}$, где k — безразмерный коэффициент, значение которого не может быть найдено примененным методом решения задачи.

Решение. $[F] = MLT^{-2}$, $[\rho] = ML^{-1}$, $[v] = LT^{-1}$, где M — масса, L — длина и T — время. Имеем: $v = f(F, \rho)$, или $[v] = [F^m \rho^n]$, $LT^{-1} = (MLT^{-2})^m \cdot (ML^{-1})^n$, откуда для степеней T , L и M в выражении для размерности скорости получаем соответственно уравнения: $m - n = 1$, $2m = 1$, $m + n = 0$, из которых находим $m = +1/2$, $n = -1/2$.

546. 0,4 гс.

547. $v = k\sqrt{E/\rho}$.

Указание. См. решение задачи 545.

548. Решение. Для простоты введем такие единицы, чтобы плотности кинетической и потенциальной энергий выражались формулами $w_{кин} = v^2$,

$w_{\text{пот}} = P^2$. Представим начальное возмущение P , v (P — давление, v — скорость частиц стержня) в виде суммы двух возмущений: P_1 , v_1 и P_2 , v_2 . Тогда $P = P_1 + P_2$, $v = v_1 + v_2$. Величины P_1 , v_1 и P_2 , v_2 подберем так, чтобы каждое из начальных возмущений P_1 , v_1 и P_2 , v_2 порождало возмущение, бегущее в одном направлении. Тогда $P_1^2 = v_1^2$, $P_2^2 = v_2^2$. Если первое возмущение бежит вправо, а второе — влево, то $P_1 v_1 > 0$, $P_2 v_2 < 0$. Учитывая это, получаем $P_1 = v_1$, $P_2 = -v_2$ и далее

$$P_1 = v_1 = (P + v)/2, \quad P_2 = -v_2 = (P - v)/2.$$

Отношение энергий, уносимых возмущениями, равно

$$\frac{E_1}{E_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{P + v}{P - v}\right)^2 = \frac{1 + 2P/v + (P/v)^2}{1 - 2P/v + (P/v)^2},$$

или

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{1 + 2\sqrt{\alpha} + \alpha}{1 - 2\sqrt{\alpha} + \alpha} = \left(\frac{\sqrt{\alpha} + 1}{\sqrt{\alpha} - 1}\right)^2.$$

549. $\lambda = \frac{l}{2} \sqrt[3]{\frac{4P}{\pi d^2 E}}$.

550. $v = 2x_0 \sqrt{\frac{T_0 + \frac{2}{3}\varkappa x_0}{ml}}$, где m — масса стрелы, l — длина тетивы.

Решение. Сила, действующая на стрелу,

$$f = 2T \cos \alpha = 2T \frac{x}{l/2} = 2(T_0 + \varkappa x) \frac{2x}{l}.$$

Приравняв энергию деформации лука кинетической энергии стрелы, находим ее скорость.

551. Из подобия треугольников (рис. 245) следует: $\frac{\Delta l}{d/2} \approx \frac{2l}{D+d}$ при $D \gg l$, откуда $\frac{\Delta l}{l} = \frac{d}{D+d}$. Напряжения, возникающие при удлинении верхнего волокна, равны

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = F \frac{d}{D+d} = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{2000} = 10 \text{ кгс/мм}^2.$$

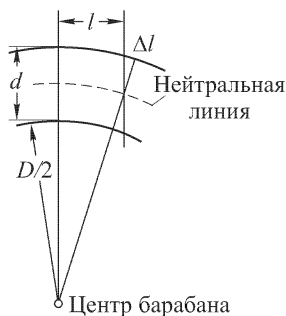


Рис. 245

552. Укорочение бруска будет в два раза меньше.

Решение. В отсутствие упора брусок будет ускоренно двигаться. Сила сжатия в сечении стержня на расстоянии x от A будет $T = F(1 - x/L)$, так как предшествующие элементы бруска должны сообщать ускорение последующим. Изменение длины элемента стержня dx , удаленного на x от A , будет

$$d\xi = \frac{T}{ES} dx = \frac{F}{ES} \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx.$$

Общее изменение длины, следовательно, будет

$$\Delta L = \int_0^L d\xi = \frac{1}{2} \frac{LF}{ES}.$$

553. $U = ma^2 l / (6ES)$.

554. Никакого напряжения не будет, так как в этом случае сила притяжения Земли действует на все элементы бруска, сообщая им одинаковое

ускорение. В задаче 552 сила была приложена к одному концу бруска, и последующие элементы бруска получили ускорение только вследствие сжатия предшествующих.

$$555. F = \frac{\beta}{2} \frac{r^2}{2\pi R^2} M.$$

556. $T = \frac{M\omega^2}{2L} (L^2 - x^2)$, $\Delta L = \frac{M\omega^2}{3ES} L^2$, где x — расстояние рассматриваемого сечения от оси вращения.

§ 10. Колебания

557. Графики зависимости от времени — синусоиды, смещенные относительно друг друга по фазе (на рис. 246 эти графики изображены для колебания

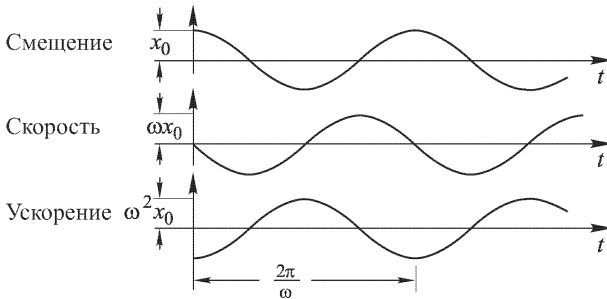


Рис. 246

$x = x_0 \cos \omega t$). Графики зависимости скорости от смещения — эллипс, ускорения от смещения — прямая. Если амплитуда смещения x_0 , то амплитуда скорости $v = \omega x_0$ и амплитуда ускорения $y_0 = \omega^2 x_0$, где ω — угловая частота колебаний.

$$558. E_{\text{кин}} = \frac{mA^2\omega^2}{4} (1 - \cos 2\omega t), \quad E_{\text{пот}} = \frac{mA^2\omega^2}{4} (1 + \cos 2\omega t), \quad E_{\text{полн}} = \frac{1}{2} mA^2\omega^2.$$

559. Уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

$$560. T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi m}{g\rho}}.$$

$$561. T_1 = T\sqrt{1 + a/g}.$$

Решение. Во время взлета ракеты с ускорением часы будут идти быстрее в $\sqrt{1 + a/g}$ раз, чем в обычных условиях. После выключения двигателя часы остановятся. Таким образом они покажут время $T_1 = T\sqrt{1 + a/g}$.

$$562. T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

563. Движение поршня будет происходить по закону

$$x = \frac{mgv_0}{S^2\gamma\rho_0} \left[1 - \cos \left(S\sqrt{\frac{\gamma\rho_0}{mv_0}} t \right) \right],$$

т. е. возникнут колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{S} \sqrt{\frac{mv_0}{\gamma p_0}} \approx 0,15 \text{ с.}$$

564. 1) Не изменится ничего; 2) частота уменьшится, а амплитуда увеличится. (Для двухатомных молекул N_2 , O_2 и H_2 $\gamma = c_p/c_v = 7/5$. Для одноатомного газа He $\gamma = 5/3$.)

565. Гармоническое колебание с периодом $T = 2\pi\sqrt{R_0/g_0}$, где R_0 — радиус земного шара, g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Решение. Ускорение в точке, находящейся на расстоянии r от центра земного шара, если $r < R_0$, есть $g_0 r/R_0$, т. е. ускорение пропорционально смещению. Значит, тело будет совершать гармонические колебания около центра земного шара с амплитудой R_0 и периодом $T = 2\pi\sqrt{R_0/g_0}$ (см. задачу 509).

566. Если T_0 — период колебаний маятника при отсутствии полости, то при наличии полости период будет

$$T = T_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0} \frac{r^2}{Rh^2}\right)^{-1/2} \approx T_0 \left(1 + \frac{\rho}{2\rho_0} \frac{r^3}{Rh^2}\right) \approx T_0(1 + 5 \cdot 10^{-8}).$$

567. Поезд будет совершать гармонические колебания с периодом $T' = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 84$ мин, не зависящим от длины хорды l . Линия отвеса будет перпендикулярна к хорде, вдоль которой движется поезд. Часы в поезде будут идти медленнее, чем на Земле, в $\sqrt{1/\cos\varphi}$ раз, где 2φ — центральный угол, опирающийся на хорду длины l . По прибытии в противоположную точку земного шара часы покажут время $t' = t\sqrt{\cos\varphi} = 0,933t$, где t — время, отсчитываемое по неподвижным часам. Таким образом, часы отстанут на 2,8 мин.

568. Нить отвеса установится перпендикулярно к полу салона самолета. $T = 2\pi\sqrt{l \cos\alpha/g}$.

$$\mathbf{569.} \quad t' = t \left(1 + \frac{v^4}{4R^2g^2}\right) = 1 \text{ ч } 56 \text{ с.}$$

570. 1) Муфта будет постепенно (по мере роста ускорения) смещаться в направлении, обратном ускорению; максимальное смещение $\xi = ma/k \approx 1$ см. 2) Муфта начнет совершать колебания по закону $x = \frac{ma}{k}(1 - \cos\omega t)$, где x — координата муфты относительно тележки, отчитываемая от начального положения муфты, причем x считается положительным в направлении, противоположном ускорению тележки; $\omega = \sqrt{k/m} \approx 9,9 \text{ с}^{-1}$. Вследствие наличия трения и сопротивления воздуха эти колебания постепенно будут затухать.

З а м е ч а н и е. При вычислении величин смещения ξ и частоты ω необходимо соответствующие величины, указанные в условии задачи, перевести в одну систему единиц (СИ, СГС и т.п.). Это замечание следует иметь в виду и при решении других задач.

571. Если отклонение муфты от общего центра масс будет x_1 , а отклонение тележки — x_2 , то $mx_1 = Mx_2$. Уравнение движения тележки $M\ddot{x}_2 = -k(x_2 + x_1)$; заменяя x_1 из предыдущего равенства, получаем

$$M\ddot{x}_2 + k\left(1 + \frac{M}{m}\right)x_2 = 0.$$

Аналогично для муфты

$$m\ddot{x}_1 + k\left(1 + \frac{m}{M}\right)x_1 = 0.$$

Следовательно, будут происходить гармонические колебания тележки и муфты с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}} \approx 10,8 \text{ с}^{-1}$. Амплитуды колебаний муфты $l \frac{M}{M+m} = 5 \text{ см}$, тележки $l \frac{m}{M+m} = 1 \text{ см}$.

$$572. T = \pi \sqrt{mL/P}.$$

$$573. T = 8\sqrt{l/g}.$$

$$574. T = 2\pi \sqrt{(l/r^2 + m)/k}.$$

575. $x = \frac{P}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{kg}{P}} t\right)$. Максимальное натяжение пружины равно $2P$.

$$576. \omega_0^2 = \frac{g}{l/2} \frac{(2m_2/m_1) \sin^3 \varphi_0}{1 + \cos \varphi_0} = \frac{g}{l} \sqrt{3}.$$

Решение. Для малых колебаний около положения равновесия кинетическая энергия системы равна

$$K = \frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{2m_2}{m_1} \cos^2 \varphi_0\right) \xi^2,$$

а потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1^0} \xi^2 = \frac{1}{2} \frac{2m_2}{l/2} g \sin^3 \varphi_0 \cdot \xi^2,$$

здесь $\xi = x_1 - x_1^0$ — малое отклонение среднего груза от положения равновесия. Полагая $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ и $U_{\text{макс}} = K_{\text{макс}}$, находим искомый ответ.

577. Если сила, действующая на груз со стороны доски, $F' = -F$, то уравнение движения груза $P - F' = m d^2 x / dt^2$. Значение ускорения груза находим из закона его колебаний: $x = a \cos \omega t$; тогда получаем

$$-F' = F = -P - m a \omega^2 \cos \omega t = -(1 + 0,32 \cos 4\pi t) \text{ кгс}.$$

Рекомендуем начертить график изменения силы F со временем.

578. $A > \frac{P}{m\omega^2} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,8}{16\pi^2} \text{ м}$. При предельной амплитуде $A_0 \approx 6,2 \text{ см}$ сила давления груза в верхней точке становится равной нулю.

579. Решение. При снятии груза M положение равновесия сместится вверх на величину $x_0 = Mg/k$. Возникнут колебания чашки относительно нового положения равновесия: $x = x_0 \cos \omega t$. Когда чашка начнет подниматься вверх, то вместе с ней будет подниматься и грузик m . В верхнем положении ускорение чашки достигает максимального значения $a_{\text{макс}} = \omega^2 x_0 = kx_0/m = Mg/m$ и направлено вниз. Если $a_{\text{макс}} < g$, т.е. $M < m$, то при обратном движении чашки вниз грузик будет продолжать лежать на ней, и подсакивания не возникнут. Если $a_{\text{макс}} > g$, т.е. $M > m$, то грузик отстанет от чашки и появятся подсакивания.

580. При $\omega^2 A > g$ грузик будет подсакивать, при $\omega^2 A < g$ — колебаться вместе с мембраной.

$$581. k = 4\pi^2 A / (gT^2) \approx 0,1.$$

$$582. A = \frac{mg}{k} \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}.$$

$$583. x \leq mg/k = 20 \text{ см}.$$

585. При резонансе сила трения равна внешней силе: $F_{\text{тр}} = 100 \text{ дин}$. Амплитуда скорости $v_0 = A_p \omega = 20\pi \text{ см/с}$, $k = F_{\text{тр}}/v_0 = 5/\pi \text{ г/с}$.

586. При резонансе фаза скорости совпадает с фазой внешней силы и амплитуда скорости наибольшая, поэтому работа внешней силы за период $A = \int_0^T f ds = \int_0^T f v dt$ будет наибольшей.

$$\mathbf{587.} \quad T = 2\pi\sqrt{L/3g}.$$

588. Решение. Рассматривая движение тела как вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью ω , напомним для скорости его центра $v = \omega a$. Ту же скорость можно представить в виде $v = (R - a)\dot{\varphi}$. Приравнявая оба выражения, находим $\omega = \frac{R - a}{a}\dot{\varphi}$. Кинетическая энергия по теореме Кёнига

$$K = \frac{I}{2}\omega^2 + \frac{m}{2}(R - a)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)(R - a)^2\dot{\varphi}^2.$$

Потенциальная же энергия

$$U = mg(R - a)(1 - \cos \varphi) \approx \frac{mg}{2}(R - a)\varphi^2.$$

Применяя общий метод, находим

$$T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{R - a}{g}}.$$

В частности, для сплошного цилиндра и сплошного шара

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R - a}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R - a}{g}}.$$

589. $T = 2\pi\sqrt{\left(1 + \frac{I}{ma^2}\right)\frac{A^2/B - a}{g}}$. В частности, для сплошного цилиндра и сплошного шара

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{A^2/B - a}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{A^2/B - a}{g}}.$$

590. $T = 2\pi\sqrt{h/2g}$, где h — высота треугольника.

591. $T_2/T_1 = 2/\sqrt{3}$.

592. $l = 15$ см.

593. $T_A/T_B \approx 0,9$.

Решение. Пусть x — расстояние центра масс полудиска от центра диска, y — расстояние центра масс всего диска от центра диска. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции полудиска относительно оси, проходящей через его центр масс, $I_0 = m(R^2/2 - x^2)$, где m — масса полудиска и R — радиус диска. Момент инерции относительно оси, проходящей через точку A , равен

$$\begin{aligned} I_A &= m_{\text{св}}(R + x)^2 + m_{\text{св}}\left(\frac{R^2}{2} - x^2\right) + m_{\text{ал}}(R - x)^2 + m_{\text{ал}}\left(\frac{R^2}{2} - x^2\right) = \\ &= R\left[m_{\text{св}}\left(\frac{3}{2}R + 2x\right) + m_{\text{ал}}\left(\frac{3}{2}R - 2x\right)\right]. \end{aligned}$$

Момент инерции относительно точки B :

$$I_B = R\left[m_{\text{св}}\left(\frac{3}{2}R - 2x\right) + m_{\text{ал}}\left(\frac{3}{2}R + 2x\right)\right].$$

Периоды колебаний будут:

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{(m_{ал} + m_{св})(R + y)g}}, \quad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{(m_{ал} + m_{св})(R - y)g}}.$$

Учитывая, что $y = \frac{m_{св} - m_{ал}}{m_{св} + m_{ал}}x$ и $\frac{m_{св}}{m_{ал}} = \frac{10}{2,5} = 4$, получаем $y = \frac{3}{5}x$. Так как $x = \frac{3}{2}R/\pi$, то $T_A/T_B \approx 0,9$.

$$\mathbf{594.} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l[\frac{1}{3}\alpha^2/\beta + (1 + \frac{1}{2}\beta)^2 + \frac{1}{6}\beta^2]}{g(1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\alpha^2/\beta)}} \approx 1,29 \text{ с, где } \alpha = b/a = 0,1; \beta = a/l = 0,1.$$

Решение. $T = 2\pi\sqrt{I/(Mgh)}$, где I — момент инерции колеблющейся системы, M — ее масса, h — расстояние от точки подвеса до центра масс. В данном случае

$$I = \rho\left[\frac{1}{3}l^3b^3 + \left(l + \frac{a}{2}\right)^2a^3 + \frac{1}{6}a^5\right], \quad Mh = \rho\left[\frac{1}{2}l^2b^2 + \left(l + \frac{a}{2}\right)a^3\right],$$

где ρ — плотность материала.

595. $\alpha'_0 = \arccos(1 - l\omega^2\alpha_0^2/(3g)) \approx 8^\circ$, где ω — частота колебаний маятника до отрыва груза; $T = 2\pi\sqrt{2l/3g} \approx 1,04$ с.

Указание. В момент отрыва груза стержень обладает угловой скоростью $\dot{\alpha} = \alpha_0\omega$, кинетической энергией $E_{кин} = I_{ст}\omega^2\alpha_0^2/2$, где $I_{ст}$ — момент инерции стержня. Приравнивая эту энергию работе по подъему центра масс стержня до его полной остановки $Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha'_0)$, находим новую амплитуду.

596. Период будет таким же, как и в предыдущей задаче. Амплитуда будет равна начальному отклонению маятника, т. е. 10° .

597. Да, это место — центр качаний, находящийся на расстоянии $\frac{2}{3}l$ от подвеса. Подвеска груза в центре качания любого физического маятника не изменит его периода, однако размеры груза должны быть значительно меньше расстояния от центра качания до точки подвеса.

$$\mathbf{598.} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I + mx^2}{Ma - mx}}.$$

Решение. Уравнение малых колебаний системы грузов будет

$$(I + mx^2)\ddot{\varphi} + (Ma - mx)g\varphi = 0,$$

откуда и получаем ответ (I — момент инерции маятника без грузика относительно оси качания.)

599. $s_{\max} = \sqrt{\frac{I_0}{m}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}$, $\omega_{\max}^2 = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{m}{I_0}} = \frac{g}{l}\sqrt{3}$, где s — расстояние точки подвеса от середины стержня.

$$\text{Решение. Для физического маятника: } \omega^2 = \frac{mgs}{I_s} = \frac{mgs}{I_0 + ms^2} \left(I_0 = \frac{m}{12}l^2\right).$$

Максимум частоты находим из условия: $d\omega^2/ds = 0$, откуда и получаем ответ.

600. Решение. Движение маятника происходит по закону $\alpha = \alpha_0 \cos \sqrt{3g/2l}t$. Второй закон Ньютона для кольца дает: $F - mg \sin \alpha = m\ddot{\alpha}d$, где F — нормальная составляющая искомой силы (нормальное давление стержня). Так как $\sin \alpha \approx \alpha$, то $F = m(\ddot{\alpha}d + g\alpha)$; подставляя вместо

α и $\ddot{\alpha}$ их значения из закона движения стержня, находим

$$F = \alpha_0 mg(1 - 3d/2l) \cos \sqrt{3g/2l} t.$$

Касательную к стержню компоненту искомой силы (силу трения) Q определим из следующего уравнения: $Q - mg \cos \alpha = m(\dot{\alpha})^2 d$. Заменяя $\cos \alpha$ на $1 - \alpha^2/2$, получим $Q = m[g(1 - \alpha^2/2) + (\dot{\alpha})^2 d]$ или, окончательно,

$$\begin{aligned} Q &= m \left[g \left(1 - \frac{\alpha_0^2}{2} \cos^2 \sqrt{\frac{3g}{2l}} t \right) + \alpha_0^2 \frac{3gd}{2l} \sin^2 \sqrt{\frac{3g}{2l}} t \right] = \\ &= mg \left[1 - \frac{\alpha_0^2}{2} \left(\cos^2 \sqrt{\frac{3g}{2l}} t - \frac{3d}{l} \sin^2 \sqrt{\frac{3g}{2l}} t \right) \right]. \end{aligned}$$

601. $T = \pi \sqrt{L/g}$.

602. $T = \frac{2\pi}{r} \sqrt{\frac{I + mr^2}{2k}}$. Для сплошного цилиндра $T = \pi \sqrt{3m/k}$.

603. $T = 2\pi \sqrt{l/3g}$. В более общем случае, когда плита не однородна, но центр масс ее совпадает с геометрическим центром плиты, $T = 2\pi \sqrt{2I/(Mga^2)}$, где I — момент инерции плиты относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр, a — длина одной из сторон плиты.

604. $T = 2\pi \sqrt{l/2g}$.

605. $T = 2\pi \sqrt{m(1/k_1 + 1/k_2)}$.

606. $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

607. $T = 2\pi \sqrt{I/(mga + ka^2)}$.

608. $x_0 = mga/kl$, $T = 2\pi \sqrt{I/kl^2}$.

609. $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{2k - mgl}{2k + mgl}}$.

610. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)k}}$.

611. $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{f(I_1 + I_2)}}$.

612. $\frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + I/I_0}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{I}{I_0}$, где T — период колебаний неподвижных часов, а T' — часов, лежащих на абсолютно гладком горизонтальном столе. Ход часов ускорится на 0,1%.

613. $T = \pi \sqrt{\frac{3m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$.

614. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{M + m} \frac{l}{g}}$.

615. $T_1 = 2\pi \sqrt{2l/3g}$, $T_2 = 2\pi \sqrt{l/6g}$, $T_1/T_2 = 2$.

616. Решение. Задача сводится к нахождению выражений для потенциальной и кинетической энергий системы. С этой целью мысленно заполним полость тем же веществом, из которого сделан цилиндр. Образовавшийся таким образом сплошной однородный цилиндр назовем цилиндром 1, а цилиндр вдвое меньшего радиуса, заполняющий полость, — цилиндром 2. Массы цилиндров обозначим соответственно через m_1 и m_2 . Энергия системы, как

потенциальная, так и кинетическая, будет равна разности энергий цилиндров 1 и 2. При повороте системы из положения равновесия на угол φ (рис. 247) центр масс цилиндра 1 остается на прежней высоте, его потенциальная энергия U_1 не изменяется. Потенциальная же энергия цилиндра 2 становится равной $U_2 = m_2gh_2$, где $h_2 = R + \frac{1}{2}R \cos \varphi$ — высота центра масс этого цилиндра над горизонтальной плоскостью, на которой находится система. Полная потенциальная энергия всей системы

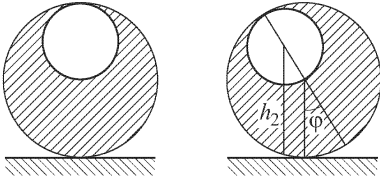


Рис. 247

$- \frac{1}{2}m_2gR \cos \varphi$. Поэтому при надлежащем выборе аддитивной постоянной величину U всегда можно представить в виде

$$U = \text{const} + \frac{1}{2}m_2gR(1 - \cos \varphi) = \text{const} + m_2gR \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

или для малых углов φ $U \approx \text{const} + \frac{1}{4}m_2gR\varphi^2$. Кинетическая энергия системы $K = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\dot{\varphi}^2$, где I_1 и I_2 — моменты инерции цилиндров относительно мгновенной оси. При изменении угла φ величины I_1 и I_2 изменяются. Но для малых колебаний этими изменениями можно пренебречь и отнести I_1 и I_2 к тому моменту, когда система находится в положении равновесия. В этом положении с помощью теоремы Гюйгенса—Штейнера нетрудно получить $I_1 = \frac{3}{2}m_1R^2$, $I_2 = \frac{19}{8}m_2R^2$. Приняв еще во внимание, что $m_1 = 4m_2$, найдем $K = \frac{29}{16}m_2R^2\dot{\varphi}^2$. На основании полученных выражений для U и K заключаем, что малые колебания системы будут гармоническими с периодом $T = \pi\sqrt{29R/g}$.

617. $a = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + \frac{2}{5}r^2)} = 7,42$ см, $l = a + \frac{(a+b)^2 + \frac{2}{5}r^2}{a} = 49,6$ см, $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 1,42$ с, $x = 2(a+b) = 34,8$ см.

618. $r = r_0 \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega_0 t\right)$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. При этом должно быть

$\omega < \omega_0$. В противном случае груз на вращающейся штанге неограниченно удалялся бы от оси вращения, и равновесие, вопреки условию задачи, было бы невозможно.

619. $T = 2\pi \frac{M+m}{mv} a \approx 1,26$ с.

620. 1) Если отвести оба грузика в одну сторону в плоскости, проходящей через точки крепления струны, на одинаковое расстояние, то период колебаний $T_1 = 2\pi\sqrt{ml/F} \approx 0,05$ с. 2) Если отвести оба грузика на одинаковые расстояния в разные стороны, то период $T_2 = 2\pi\sqrt{ml/2F} \approx 0,035$ с. См. замечание к ответу задачи 570.

Указание. В первом случае средняя часть струны (между грузиками) будет всегда параллельна первоначальному положению, и ускорение массам будут сообщать натяжения только крайних отрезков струны. Следовательно, массы будут двигаться так, как вдвое большая масса, находящаяся на середине укороченной в два раза струны при том же натяжении. Во втором случае средняя точка струны находится в покое; следовательно, каждый грузик колеблется так, как если бы он находился в середине струны, укороченной в два раза.

621. Если при колебаниях маятника его максимальная угловая скорость $(d\varphi/dt)_{\max}$ меньше угловой скорости вала ω , или $\omega - d\varphi/dt > 0$ для любого момента времени, то момент силы трения, действующей со стороны вала на маятник, всегда направлен в одну сторону. Так как этот момент постоянен, а маятник при колебаниях проходит по направлению вращения и против вращения один и тот же путь, то работа момента сил трения за период равна нулю.

622. При колебаниях сила трения, действующая на муфту со стороны вращающегося вала за одну половину периода, направлена по движению маятника, когда вал и муфта вращаются в одну сторону, а в другом полупериоде эта сила направлена против движения маятника.

1) Если сила трения увеличивается со скоростью скольжения, то она больше в ту половину периода, когда муфта и вал вращаются в противоположные стороны. Следовательно, работа силы трения маятника о вал за целый период положительна, затухание маятника возрастает из-за трения между муфтой и валом.

2) Если сила трения уменьшается со скоростью скольжения, то по тем же причинам, наоборот, работа силы трения маятника о вал за весь период отрицательна, вал сообщает энергию маятнику и затухание колебаний уменьшается. В том случае, когда работа силы трения о вал больше, чем потери энергии на трение других частей маятника, энергия колебаний маятника будет увеличиваться, амплитуда будет возрастать, а маятник может совершать автоколебания.

623. Положение равновесия смещено в сторону вращения вала на угол $\varphi_0 = \arctg(\mu R/a)$.

§ 11. Гидростатика и аэростатика

624. 1) Да. 2) Равновесие может нарушиться, если объем тел различно изменяется при погружении в воду вследствие того, что сжимаемость их различна. Сжимаемостью называется величина $-\Delta V/(\Delta p V)$, где ΔV — изменение объема V , вызванное изменением давления Δp .

625. Гири должны быть из того же вещества, что и взвешиваемое тело.

$$626. p = \frac{\pi}{6} [d_1^3(\rho_2 - \rho_1) + d_2^3\rho_1]g.$$

$$627. B^2 > 6\rho(1 - \rho)C^2.$$

$$628. r^2 > 2\rho(1 - \rho)l^2.$$

629. $l/r > [2\sin(\alpha/2)]^2$, где угол α определяется из трансцендентного уравнения $\alpha - \sin\alpha = 2\rho r$. Например, при $\rho = 1/2$ из него получаем $\alpha = \pi$, и условие устойчивости принимает вид $l > 4r$. При других значениях ρ равновесие может быть устойчивым и при меньших значениях l . Так, при $\alpha = \pi/2$ и $\alpha = 3\pi/2$ получаем соответственно $\rho = 1/4 - 1/2\pi \approx 0,091$ и $\rho = 3/4 + 1/2\pi \approx 0,841$. При таких значениях ρ равновесие устойчиво, если $l > 2r$. При $l > 4r$ равновесие устойчиво, каково бы ни было $\rho < 1$.

$$630. F \approx 1, 12 \text{ кгс.}$$

$$631. 1) \Delta_1 Q \approx 400 \text{ кгс, } 2) \Delta_2 Q = 196 \text{ кгс.}$$

Указание. Давление водорода в баллоне аэростата практически будет равно внешнему атмосферному давлению и на высоте 2 км. Часть водорода уйдет из баллона через клапан. Зная вес 1 м^3 воздуха на высоте 2 км, можно найти вес 1 м^3 водорода при новом давлении из пропорции $1/1, 3 = x/90$.

632. Если сжимаемость жидкости (или газа) больше сжимаемости тела, то принципиально можно.

$$\mathbf{633.} P = H + \frac{h \cdot 10^3}{\rho} \text{ мм рт. ст.}$$

$$\mathbf{634.} \rho = 1 - 1/n^2.$$

$$\mathbf{635.} F = 1/2 a^3 \rho g, \text{ где } \rho \text{ — плотность воды, } h = 1/3 a.$$

$$\mathbf{636.} P = 8,64 \text{ кгс, } M = 41,6 \text{ кгс} \cdot \text{см.}$$

$$\mathbf{637.} P = 32,56 \text{ кгс, } M = 332,8 \text{ кгс} \cdot \text{см.}$$

$$\mathbf{638.} P = h^2 \frac{c+2d}{6} = 146 \text{ тс.}$$

$$\mathbf{639.} M = 210 \text{ кгс} \cdot \text{м.}$$

640. Решение. Выделим в стенке сосуда пояс шириной 1 см, расположенный на высоте 1 м. Силы со стороны соседних к поясу частей стенки не действуют на пояс в горизонтальном направлении, и поэтому силы давления жидкости уравновешиваются только упругими силами пояса. Выделим элемент этого пояса длиной $R d\varphi$, где R — радиус цилиндра и $d\varphi$ — угол. К концам этого элемента приложены со стороны соседних элементов силы, уравновешивающие силу давления $pR d\varphi$ на элемент, т.е. $2F d\varphi/2 = pR d\varphi$. F представляет искомое усилие. Подставляя $\rho = 0,4 \text{ кгс/см}^2$, $R = 1 \text{ м}$, получаем $F = 40 \text{ кгс/см}$.

$$\mathbf{641.} \Delta p = 0,017 \text{ кгс/см}^2.$$

Указание. Для решения задачи можно воспользоваться следующими ображениями. Рассечем мысленно баллон произвольной диаметральной плоскостью. На каждую полусферу будет действовать сила $\Delta p \pi R^2$. Полусфера будет удерживаться в равновесии силами натяжения ткани T , приложенными на окружности большого круга (в сечении баллона диаметральной плоскостью). Это значит, что $\Delta p \pi R^2 = T \cdot 2\pi R$, откуда $\Delta p = 2T/R$. Подставляя для T его предельное значение 850 кгс/м , находим максимально допустимое превышение давления газа в баллоне над внешним атмосферным давлением.

$$\mathbf{642.} h \approx 5,4 \text{ км.}$$

Указание. Изменение давления dp с изменением высоты dh связано равенством $dp = -\rho g dh$, где ρ — плотность воздуха. При постоянной температуре $p/\rho g = p_0/\rho_0 g$. Подставляя это в предыдущее равенство и интегрируя, получаем $\rho = \rho_0 e^{-\rho_0 g h/p_0}$.

643. $P = \frac{\rho g}{2R} (R^2 - r^2)$, $P_{\text{н}} = 1/2 \rho g R$, где r — расстояние от центра Земли, R — радиус Земли. Если бы земной шар состоял из несжимаемой воды, то было бы $P_{\text{н}} = 1/20 R$ ($P_{\text{н}}$ — в атмосферах, R — в метрах). С учетом плотности Земли ($\rho = 5,5$) $P_{\text{н}} = 0,275 R \approx 1,75 \cdot 10^6 \text{ атм}$.

$$\mathbf{644.} \alpha = \text{arctg } 0,29 = 16^\circ 10'.$$

645. $a = 0,5g$ при ускорении в направлении удаленного днища, $a = 5g$ — в обратном направлении.

646. Не изменится.

647. Сила давления на переднюю и заднюю стенки цистерны

$$P_1 = \frac{\rho a h}{2} \left(gh + \frac{v_0^2 l}{S} \right), \quad P_2 = \frac{\rho a h}{2} \left(gh - \frac{v_0^2 l}{S} \right).$$

648. Решение. Так как фигура Земли мало отличается от шаровой, то ускорение свободного падения внутри земного шара можно считать направленным к центру Земли и пропорциональным расстоянию до ее центра. В этом приближении с учетом центробежной силы уравнения гидростатики

принимают вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \frac{x}{R_0} + \rho \omega^2 x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \frac{y}{R_0} + \rho \omega^2 y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \frac{z}{R_0},$$

где R_0 — радиус Земли, ω — угловая скорость ее вращения. Начало координат мы поместили в центре Земли, а ось Z направили вдоль оси ее вращения. Интегрируя эти уравнения, получим

$$P = \frac{\rho}{2} \left(\omega^2 - \frac{g}{R_0} \right) (x^2 + y^2) - \frac{\rho g}{2R_0} z^2 + C,$$

где C — постоянная интегрирования, определяющаяся значением давления P на земной поверхности (его можно считать равным нулю, так как атмосферное давление пренебрежимо мало). Сплюснутость Земли определится из требования постоянства давления на земной поверхности. Выбрав сначала точку на экваторе, а затем на полюсе, пишем $P(R_э, 0, 0) = P(0, 0, R_п)$, где $R_э$ и $R_п$ — экваториальный и полярный радиусы Земли. С учетом явного вида давления отсюда получаем $\left(\omega^2 - \frac{g}{R_0} \right) R_э^2 = -\frac{g}{R_0} R_п^2$ и далее

$$R_э - R_п = \frac{\omega^2}{g} \frac{R_э^2 R_п}{R_э + R_п} \approx \frac{\omega^2 R_0^2}{2g}.$$

Следовательно, для сплюснутости ε земного шара получается

$$\varepsilon \equiv \frac{R_э - R_п}{R_0} = \frac{\omega^2 R_0}{2g} \approx \frac{1}{580}.$$

Действительное сжатие Земли заметно больше, а именно $1/297$. Расхождение объясняется грубостью модели, положенной в основу рассуждений, а также несовершенством метода расчета. При строгой постановке задачи надо учитывать, что поле тяготения сплюснутого шара не является центральным¹⁾. Тем самым задача сильно усложняется, так как само гравитационное поле заранее неизвестно, а зависит от неизвестной формы поверхности Земли. Подробное исследование показывает, что задача, сформулированная таким образом, не имеет однозначного решения. Возможно несколько различных форм равновесной поверхности, в том числе и эллипсоид вращения с определенной степенью сжатия.

§ 12. Гидродинамика и аэродинамика

649. $v = \sqrt{2gh} = 9,8 \text{ м/с.}$

650. $v = \sqrt{2g(h_1 + 0,9h_2)} \approx 9,5 \text{ м/с.}$

651. $p = 2,5 \text{ см вод. ст.}$

652. Точка пересечения струй лежит ниже второго отверстия на 25 см.

653. $Q = S_1 S_2 \sqrt{2g \Delta h / (S_2^2 - S_1^2)}.$

654. $h = v^2 / 2g = 5,1 \text{ м.}$

655. Когда моряк подносил доску к отверстию, то врывающаяся струя воды действовала на доску с силой $\rho v^2 S = 2\rho g h S$, где h — высота столба воды над отверстием и S — площадь отверстия. Когда доска закрыла отверстие, на нее действовала сила $\rho g h S$, т. е. в два раза меньшая.

¹⁾ С учетом этого обстоятельства расчет дает $\varepsilon = \frac{5}{4} \omega^2 R_0 / g \approx 1/232$.

656. 1) $\Delta p = \rho v^2/2 \approx 0,06$ атм (ρ — плотность воздуха). Вентилятор создает разрежение, и воздух под действием разности давления Δp получает в трубе скорость v . 2) Из-за вязкости давление увеличится, ибо часть перепада давления уравнивается силами трения.

657. $h = p_0/(\rho g)$, где ρ — плотность жидкости.

658. $F = \rho Q^2/S \approx 40$ гс.

659. Решение. Вертикальная скорость струи на уровне воды в стакане $v = \sqrt{2g(H-h)}$. За 1 с уровень воды поднимается на величину $\Delta h = Q/S$. Сила давления на дно от падающей воды: $\Delta h \rho S v$, где ρ — плотность воды. Все давление равно $F = hgSp + \Delta h S v \rho$. Через время t после начала $h = \Delta h t = (Q/S)t$ и $F = \Delta h \rho S [gt + \sqrt{2g(H-h)}]$. Окончательно

$$F = Q\rho \left[gt + \sqrt{2g \left(H - \frac{Q}{S} t \right)} \right].$$

$$660. t = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2}{g}} (\sqrt{H} - \sqrt{h}), T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

$$661. t = \frac{S}{\sigma} \frac{H-h}{\sqrt{2gh}}.$$

$$662. t = \frac{16\pi R^2}{15\sigma} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

$$663. h = H/2, x_{\max} = H.$$

664. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда должна быть пропорциональна квадратному корню из расстояния этого сечения от отверстия. Если сосуд обладает осевой симметрией, то он должен иметь форму параболоида вращения четвертого порядка.

665. $P = P_0 - \rho g x + \rho g H \left\{ 1 - \frac{h^2 l_1^2}{[hl_1 + x(l_2 - l_1)]^2} \right\}$, где x — расстояние по вертикали от нижнего конца насадки.

$$666. H = \frac{(P_0 - P)/\rho g - l(d_2/d_1)^4}{1 - (d_2/d_1)^4}.$$

667. $v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho + 2gh}$, где P_0 — атмосферное давление.

668. Пока уровень жидкости в сосуде выше нижнего конца трубки AB , скорость истечения постоянна и равна $v = \sqrt{2gh}$. После этого скорость истечения начнет уменьшаться.

669. Решение. Рассмотрим кольцевой слой жидкости с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$. Сила внутреннего трения, действующая на него в направлении течения, равна

$$2\pi l \eta \left[\left(r \frac{dv}{dr} \right)_{r+dr} - \left(r \frac{dv}{dr} \right)_r \right] = 2\pi l \eta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) dr.$$

(Индексы r и $r + dr$ обозначают, что величины, заключенные в круглые скобки, должны быть вычислены при значениях радиусов r и $r + dr$ соответственно.) В том же направлении действует сила разности давлений $(P_1 - P_2) \cdot 2\pi r dr$. При стационарном течении сумма обеих сил обращается в нуль. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta} r.$$

Решение его, обращаясь в нуль при $r = R_1$ и $r = R_2$, есть

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4l\eta} \left\{ R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} \right\}.$$

Расход жидкости:

$$Q = \frac{\pi\rho(P_1 - P_2)}{8\eta l} \left\{ R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln(R_2/R_1)} \right\}.$$

670. Решение. Возьмем прямоугольную систему координат X, Y, Z с осью X , направленной вдоль трубы (рис. 248). Выделим столб жидкости, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными координатным осям. На боковую грань этого параллелепипеда, перпендикулярную к оси Y , действует сила внутреннего трения $-\eta l dz (\partial v / \partial y)_y$, на противоположную — сила $\eta l dz (\partial v / \partial y)_{y+dy}$, где l — длина параллелепипеда. Сумма этих сил:

$$\eta l dz \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_y \right] = \eta l \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy dz. \quad (670.1)$$

Аналогично находится результирующая сил внутреннего трения, действующих на остальные две грани. Полная сила внутреннего трения будет $\eta l S \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$. Она должна быть уравновешена силой разности давлений $(P_2 - P_1) dS$. Отсюда и следует искомый результат.

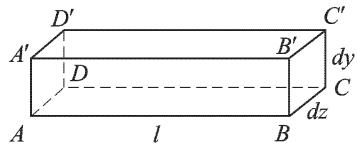


Рис. 248

671. Эта задача относится к типу задач, решаемых методом угадывания. Угадывается вид решения дифференциального уравнения (670.1), а затем коэффициенты в этом решении подбираются так, чтобы удовлетворить граничному условию на стенке трубы: $v = 0$. Направим координатные оси Y и Z вдоль главных осей нормального эллиптического поперечного сечения трубы и будем искать решение в виде $v = Ay^2 + Bz^2 + v_0$. Это выражение удовлетворяет уравнению (670.1), если $2A + 2B = -\frac{P_1 - P_2}{l\eta}$.

На внутренней поверхности эллиптической трубы $v = 0$, т. е. $Ay^2 + Bz^2 + v_0 = 0$. Это уравнение должно переходить в уравнение эллиптического сечения трубы $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, а потому $A = -v_0/a^2$, $B = -v_0/b^2$. Для определения постоянных A, B, v_0 получилось три линейных уравнения. Решая их, находим

$$v_0 = \frac{P_1 - P_2}{2l\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad v = v_0 \left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right).$$

Постоянная v_0 есть, очевидно, скорость течения на оси трубы.

Вычислим теперь расход жидкости. Поверхности, на которых скорость v постоянна, суть эллиптические цилиндры $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, полуоси которых определяются соотношениями $a'^2 = a^2 \frac{v_0 - v}{v_0}$ и $b'^2 = b^2 \frac{v_0 - v}{v_0}$. Возьмем два таких эллиптических цилиндра с бесконечно близкими значениями параметра v .

Площадь нормального сечения между ними $dS = d(\pi a'b') = -\pi \frac{ab}{v_0} dv$. Расход жидкости:

$$Q = \rho \int v dS = -\rho \frac{\pi ab}{v_0} \int_0^0 v dv, \quad \text{или} \quad Q = \frac{\rho \pi ab}{2} v_0.$$

672. Решение. При стационарном ламинарном течении силы вязкости уравновешиваются градиентами давлений. В уравнения движения давления входят только через градиенты. Поэтому разность давлений $P_1 - P_2$ на концах трубы и длина последней l могут войти только в комбинации $(P_1 - P_2)/l$. А так как жидкость движется без ускорения, то характер течения не может зависеть от плотности жидкости ρ . Поэтому плотность ρ и расход жидкости Q могут войти лишь в комбинации Q/ρ . Принимая все это во внимание, методом размерностей нетрудно получить

$$Q = C \frac{P_1 - P_2}{l \eta} S^2,$$

где S — площадь поперечного сечения трубы, а C — постоянный числовой коэффициент, значение которого зависит от формы этого поперечного сечения. В полученной формуле содержатся все законы, экспериментально установленные Пуазейлем.

673. Нужно приложить силу $F = 2S\rho g(h_1 - h_2) = 0,5$ кгс, толкающую тележку со стороны отверстия, расположенного выше.

674. Показания весов уменьшаются на 12,5 кгс.

Решение. Вытекающая из отверстия вода приобретает каждую секунду количество движения $\rho v^2 S = 2\rho ghS$. Следовательно, с такой силой вода в цилиндре действует на воду в струе. Значит, струя действует вверх на воду в цилиндре с силой $2\rho ghS$. Поэтому со стороны сосуда, стоящего на весах, к покоящейся воде должна быть приложена сила, меньшая веса воды на эту величину. Таким образом, уменьшение давления воды в цилиндре на его дне будет в два раза больше прежнего давления ρghS столбика покоящейся жидкости на ту же площадку S .

675. Сила давления воды на щит уменьшится на 72,5 кгс.

Указание. Вытекающая под щитом вода будет каждую секунду получать количество движения $\rho S v^2 = 2\rho ghS = 72,5$ кгс·с, т.е. вода перед щитом будет действовать на вытекающую струю с силой 75 кгс. По третьему закону динамики струя с равной и обратной по направлению силой будет действовать на воду в канале (реакция струи).

676. Полагаем, что струя после удара о лопасть продолжает движение со скоростью лопасти v . Тогда каждую секунду масса воды $S(\sqrt{2gh} - v)\rho$ теряет скорость $(\sqrt{2gh} - v)$. Поэтому на колесо действует сила $F = S(\sqrt{2gh} - v)^2 \rho$, работа которой за секунду равна $S\rho(\sqrt{2gh} - v)^2 v$. Максимум будет при $v = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$. Следовательно, максимальная мощность будет $\frac{4}{27}(2gh)^{3/2} S\rho \approx 8,75$ кгс·м/с и оптимальная угловая скорость вращения $\frac{1}{3}\sqrt{2gh}/R \approx 2,2$ с⁻¹.

677. На 0,047 °С.

678. Если бы кинетическая энергия струи, составляющая около 6 Дж на 1 см³ воды ($\approx 1,5$ кал/см³), полностью превращалась в тепло, то температура струи в результате удара о лед повышалась бы всего на 1,5 °С; этого явно недостаточно для объяснения эффекта.

679. Параболоид вращения; образующая парабола $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2$, где x — расстояние от оси вращения, z — повышение уровня поверхности по сравнению с уровнем ее в центре сосуда.

680. 1) $p = p_0 + \frac{\rho\omega^2 R^2}{2}$, где p_0 — давление в центре дна, ρ — плотность воды и R — расстояние от центра дна; 2) $p \approx 42,3$ гс/см³.

681. Пробка — у оси вверху, свинец — у стенки цилиндра внизу, тело A — в любом положении (если его сжимаемость равна сжимаемости воды).

682. $T \approx 16$ гс.

683. Разность давлений сообщает каждой частице жидкости центростремительное ускорение как раз такое, которое необходимо, чтобы частицы двигались по окружности и не приближались к оси вращения.

684. 1) Жидкость в трубочке B поднимается до того уровня, где продолжение поверхности параболоида вращения, образованного поверхностью вращающейся жидкости, пересечется со стенками трубочки. Следовательно, высота жидкости в трубочке не покажет давления у измерительного отверстия трубочки.

2) При любом положении отверстия A жидкость в трубочке D поднимается только до уровня жидкости на оси цилиндра, так как жидкость в трубочке CA находится во вращательном движении. Поэтому в горизонтальном колене трубочки CA будет перепад давления, измеряемый разностью высоты над точкой A и центром. Следовательно, и этот способ непригоден.

3) Высота столба в трубочке D будет равна высоте уровня жидкости над отверстием A . Таким способом можно измерить распределение давления.

685. Наличие масла не изменяет формы поверхности воды. Высота уровня будет ниже того уровня, о котором шла речь в предыдущей задаче, на 4 мм.

686. $F \approx 112,5$ гс.

687. Решение. Перейдем в систему отсчета, в которой жидкость покоится. В ней добавятся две силы инерции: центробежная и кориолисова. Кориолисова сила не совершает работы. Она лишь искривляет линии тока, но не сказывается на справедливости и форме общего уравнения Бернулли. Центробежная сила добавляет новый член к потенциальной энергии. Полная потенциальная энергия единицы массы жидкости будет $u = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2$, так что уравнение Бернулли запишется в виде

$$\frac{v^2}{2} + gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{P}{\rho} = B = \text{const}, \quad (687.1)$$

где v — относительная скорость жидкости (т. е. скорость относительно вращающейся системы отсчета). Постоянная Бернулли B одна и та же для всех линий тока, поскольку все они начинаются вблизи поверхности жидкости, где скорость v пренебрежимо мала. Применим уравнение (687.1) к линии тока AB , начинающейся на поверхности жидкости в точке A (рис. 249). Если начало координат поместить в точке A , то $z_A = r_A = v_A = 0$, $P_A = P_B = P_0$, $v_B = v$, $z_B = -h$, $r_B = R$, и мы получим $v = \sqrt{2(gh + \omega^2 R^2)}$. Здесь h означает высоту наиболее низкой (центральной) точки A уровня жидкости относительно отверстия. Переход к неподвижной системе отсчета не представляет затруднений.

688. Потому, что для равномерного вращения сосуда к нему необходимо приложить момент сил M , больший момента сил трения $M_{тр}$. Работа момента $M - M_{тр}$ идет на увеличение энергии воды, переходящей при переливании

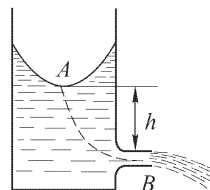


Рис. 249

от центра к периферии сосуда A , и энергия падающей воды не может быть больше этой работы. Следовательно, работа водяного колеса недостаточна для поддержания равномерного вращения сосуда.

689. Сосуд должен иметь ускорение $a \leq 2g(H - h)/l$, направленное вправо на рис. 193.

$$690. v = 2\sqrt{2gh_0}.$$

$$691. v = 6\sqrt{2gh_0}.$$

692. Падение давления на трение на участке трубы между сосудом и первой манометрической трубкой должно быть тоже 5 см; следовательно напор в 3 см сообщает кинетическую энергию жидкости, текущей в трубке. Эта энергия на 1 см^3 жидкости равна $\rho gh = 2940 \text{ эрг/см}^3$, откуда скорость жидкости $\approx 77 \text{ см/с}$.

693. Решение. На рис. 250 показано сечение бесконечно длинного цилиндрического тела, образующая которого перпендикулярна к рисунку. Там же

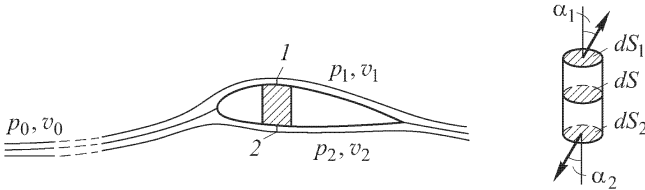


Рис. 250

показаны трубки тока, прилегающие к телу, и указаны давления p и скорости v вблизи трех сечений трубок тока, отмеченных индексами 0, 1, 2. Сечение 0 достаточно удалено от тела. Тогда, по уравнению Бернулли,

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Сила, действующая вверх на цилиндр, вырезанный из тела, будет равна

$$(p_2 - p_1) dS = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) dS.$$

При выводе учитывается, что $dS_1 \cos \alpha_1 = dS$ и $dS_2 \cos \alpha_2 = dS$, где dS_1 — площадь верхней поверхности цилиндра, а α_1 — угол, который образует нормаль к этой поверхности с вертикалью; так же и для нижней поверхности.

694. Решение. Кинематическая вязкость воды $\nu = 0,010 \text{ см}^2/\text{с}$. Вычисляя числа Рейнольдса и Фруда для модели, получаем

$$\text{Re} = \frac{l_1 v_1}{\nu} = 2,1 \cdot 10^7, \quad \text{F} = \frac{v_1^2}{gl_1} = 0,022.$$

Определяющую роль играет число Фруда, влияние числа Рейнольдса не очень существенно. Из равенства чисел Фруда получаем $v = v_1(l/l_1)^{1/2} = 60 \text{ км/ч}$. Далее из соображений размерности находим

$$P = \rho v^2 l^{5/2} g^{1/2} f(\text{Re}, \text{F}) = \rho l^{7/2} g^{3/2} f(\text{Re}, \text{F}).$$

Отсюда, если пренебречь влиянием числа Рейнольдса, $P = P_1(l/l_1)^{7/2} \approx 80000 \text{ л.с.}$

695. Решение. Из соображений размерности следует, что подъемная сила и мощность должны выражаться формулами

$$F = \rho l^4 \omega^2 f_1 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right), \quad P = \rho l^5 \omega^3 f_2 \left(\frac{l^2 \omega \rho}{\eta} \right).$$

Поскольку плотность воздуха и его вязкость в обоих случаях одинаковы, подъемная сила не изменится, если не изменятся значения функции f_1 и коэффициента при ней. Условием этого является $l_1^2 \omega_1 = l_2^2 \omega_2$, откуда $\omega_2 / \omega_1 = (l_1 / l_2)^2 = 1 / \alpha^2$ и далее

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{p_2^5 \omega_2^3}{l_1^5 \omega_1^3} = \frac{l_2 \omega_2}{l_1 \omega_1} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

§ 13. Акустика

696. $x \approx 9,6$ м.

Решение. Звук, вышедший из точки A , через время τ достигнет уха человека D (рис. 251); в это время пуля будет в точке C . Учитывая, что угол ADC — прямой, а $AD = 340\tau$, $AC = 660\tau$, получим ответ.

697. 10^{-3} с.

698. Высота тона повышается приблизительно на 18 Гц, высота гармоник — на $n \cdot 18$ Гц, где n — номер гармоники.

699. 254 или 258.

700. Биения с частотой $2\nu_0 u/c$ будут зарегистрированы приемником только в первом случае.

701. $v = 3400$ м/с.

702. $N_k = kc / (2L)$, где c — скорость звука в газе, заполняющем трубу, L — длина трубы, $k = 1, 2, 3, \dots$ Основной тон, если труба заполнена воздухом, соответствует $N_1 = 100$ Гц.

703. $N_{k+1} = \frac{2k+1}{4} \frac{c}{L}$; обозначения те же, что и в предыдущей задаче. Основной тон соответствует частоте $N_1 = 50$ Гц.

704. См. рис. 252. Точки 2 и 4 — узлы смещений и скорости, пучности давления, места наибольших значений потенциальной энергии (при $t = 0, t = \frac{1}{2}T$). Точки 1, 3 и 5 — узлы давлений, пучности скоростей и смещений, места наибольших значений кинетической энергии (при $t = \frac{1}{4}T, t = \frac{3}{4}T$), T — период колебаний.

Указание. Частота колебаний $\nu = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, где T — натяжение струны, ρ — масса струны на единицу длины и L — длина струны. Пользуясь этим соотношением, находим первоначальную длину.

705. Если

$$y_1 = a_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda} \right) = a_1 \sin(\omega t - \varphi_1)$$

— колебание рассматриваемой частицы, вызываемое первой системой волн, а

$$y_2 = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda} \right) = a_2 \sin(\omega t - \varphi_2)$$

— колебание, вызываемое второй системой волн, то суммарное колебание

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(\omega t + \psi),$$

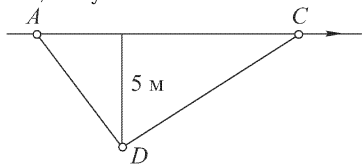


Рис. 251

где

$$A = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)]^{1/2}, \quad \psi = \arctg \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}.$$

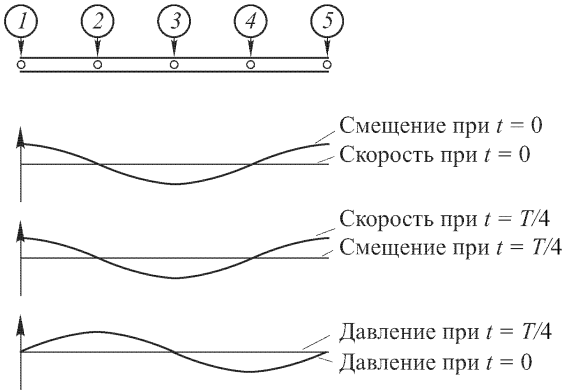


Рис. 252

706. $L = 30$ см.

707. Скорость звука u связана с адиабатической сжимаемостью $\beta = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp}$

соотношением $u = \sqrt{1/\rho\beta}$, где ρ — плотность среды, v — ее объем и p — давление. Для воды находим $\beta \approx 4,35 \cdot 10^{-5}$ см²/кгс.

708. $\beta \approx 1,35 \cdot 10^{-2}$ см²/кгс. Жидкий гелий выделяется среди других жидкостей, в частности, своей большой сжимаемостью.

709. $c = 2\nu_0 l = 1400$ м/с. Обертоны $\nu = k\nu_0$, где $k = 2, 3$ и т.д.

710. Период колебаний тонкой струны меньше в два раза.

711. Уменьшить в девять раз.

712. Скорость звука в газе зависит от отношения давления к плотности. Так как это отношение при постоянной температуре — величина постоянная, то скорость звука от давления не зависит.

713. Ускорение $a = 0,1(2\pi)^2 \cdot 5^2 \cdot 10^8$ мкм/с² ≈ 1000 g, скорость $v = 0,1 \times 2\pi \cdot 5 \cdot 10^4$ мкм/с $\approx 3,14$ см/с.

714. 1) Зажать струну на очень коротком участке в середине; 2) так же зажать на расстоянии $1/3$ от конца. Понизить тон звучания струны такими способами нельзя.

715. Решение. Из уравнения адиабаты следует $dp/p = \gamma d\rho/\rho$. Если y — смещение частицы в волне, то относительное сжатие есть $-\partial y/\partial x$ и $d\rho/\rho = -\partial y/\partial x$. Следовательно, $dp/p = -\gamma \partial y/\partial x$. С другой стороны, если смещение в бегущей волне $y = A \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda})$, то

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2\pi A}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

а скорость частицы

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Отсюда

$$\frac{u}{c} = \frac{A\omega}{c} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = \frac{2\pi A}{\lambda} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right) = -\frac{\partial y}{\partial x},$$

а значит, $dp/p = \gamma u/c$.

716. 1) $\nu = 990/\pi \approx 315 \text{ с}^{-1}$, 2) $c = 330 \text{ м/с}$, 3) $\lambda = \pi/3 \approx 1,05 \text{ м}$, 4) $u = 99 \text{ см/с}$, 5) $\Delta p = \gamma pu/c \approx 3,2 \text{ мм рт. ст.}$

$$\mathbf{717.} \quad u = \frac{v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Решение. Ищем точки x_1 и x_2 , в которых в момент t фазы обеих волн совпадают. Координаты точек должны удовлетворять уравнениям:

$$(\omega_1 t - k_1 x_1) - (\omega_2 t - k_2 x_1) = 0, \quad (\omega_1 t - k_1 x_2) - (\omega_2 t - k_2 x_2) = 2\pi,$$

где k_1 и k_2 — волновые числа, равные $2\pi/\lambda_1$ и $2\pi/\lambda_2$ соответственно. Отсюда $\Lambda = x_2 - x_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$. Точка, в которой фазы совпадают, в момент времени t' будет иметь координату x'_1 т.е.

$$(\omega_1 t' - k_1 x'_1) - (\omega_2 t' - k_2 x'_1) = 0,$$

откуда скорость перемещения этой точки

$$u = \frac{x'_1 - x_1}{t' - t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

$$\mathbf{718.} \quad u = v_1 - d_1 \frac{v_2 - v_1}{d_2 - d_1}.$$

$$\mathbf{719.} \quad J = \frac{\Delta p^2}{2} \frac{S}{\rho c} \approx 460 \text{ эрг/с} = 4,6 \cdot 10^{-5} \text{ Вт.}$$

Указание. Поток энергии $J = \frac{\rho u^2}{2} c S$, из решения задачи 715 $u/c = \Delta p/(\gamma p)$; учтя, что скорость звука $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$, получаем ответ.

720. $A = \frac{u}{\omega} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta p}{p} \frac{c}{\omega} \approx 2 \cdot 10^{-9} \text{ см}$ (см. решение задачи 715, атмосферное давление считать равным $1013 \cdot 10^3 \text{ дин/см}^2$).

$$\mathbf{721.} \quad T = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{Vl}{S}}.$$

722. Частота колебаний увеличится в $1/\sqrt{0,069} \approx 3,8$ раз.

§ 14. Специальная теория относительности

723. $t_2 = 10 \text{ с}$, $t_3 = 9,9 \text{ с}$, $t_4 = 11 \text{ с}$.

В момент времени t_1 ракета будет находиться на расстоянии $x_1 = Vt_1$ от начала координат O . Момент времени t_2 можно найти двумя эквивалентными способами:

1) Скорость, с которой световой сигнал догоняет ракету, равна $c - V$. Поэтому $t_2 - t_1 = \frac{x_1}{c - V} = \frac{V}{c - V} t_1$. Определяя отсюда t_2 , получим $t_2 = \frac{1}{1 - V/c} t_1$.

2) В момент времени t_1 расстояние между ракетой и началом координат O равно x_1 . Пусть световой сигнал догонит ракету в точке $x_2 = Vt_2$. Ясно, что $x_2 = x_1 + (V/c)x_2$, откуда $x_1 = (1 - V/c)x_2$. Но $x_1 = Vt_1$, а $x_2 = Vt_2$, и мы снова получаем $t_2 = \frac{1}{1 - V/c} t_1$.

Скорость сигнала, идущего от ракеты к точке O , равна c , поэтому $t_3 - t_1 = x_1/c = (V/c)t_1$, откуда $t_3 = (1 + V/c)t_1$.

В момент времени t_2 ракета находится на расстоянии $x_2 = Vt_2$ от точки O , и отраженный сигнал придет в точку O в момент t_4 такой, что $t_4 - t_2 = (V/c)t_2$, откуда $t_4 = \frac{1 + V/c}{1 - V/c} t_1$.

724. Очевидно, что $\Delta\tau_0 = 2z'_0/c$. Но в системе K источник и зеркало движутся, так что путь светового луча — ломаная OAO' . Длина этой ломаной больше, чем z'_0 , поэтому промежуток времени Δt между той же парой событий больше $\Delta\tau_0$ (скорость света c во всех системах одинакова!). Из рис. 199 ясно, что $OA = \sqrt{OB^2 + z_0^2}$, а $\Delta t = 2 \cdot OA/c$. Но $OB = V \Delta t/2$, и комбинируя два последних равенства с учетом того, что $z_0 = z'_0$, мы найдем, что $\Delta t = \Gamma \Delta\tau_0$, где Γ определяется согласно (2).

Показание часов из K' в точке O' равно $t' = 0 + \Delta\tau_0 = \Delta\tau_0$. Показание часов из K в точке O' равно $t = 0 + \Delta t = \Gamma \Delta\tau_0$.

725. Если на корабле отсчитан промежуток собственного времени $\Delta t'$, то по земным часам будет отсчитан промежуток $\Delta t = \Gamma \Delta t'$, где $\Gamma = 25/7$, поэтому

$$S = V \Delta t = \frac{24}{25} c \cdot \frac{25}{7} \Delta t' = 24c\tau \quad (\Delta t' = 7\tau, \tau = 1 \text{ с}).$$

726. Обозначим длину стержня в системе K через l . Тогда промежуток времени Δt между посылкой и приходом светового сигнала в O' можно сосчитать так. Время, необходимое свету, чтобы дойти до зеркала S_1 , равно $t_1 = l/(c - V)$, а чтобы после отражения вернуться к источнику $t_2 = l/(c + V)$. Ясно, что $\Delta t = t_1 + t_2 = (2l/c)\Gamma^2$. Но $\Delta t = \Gamma \Delta\tau_0 = \Gamma(2l_0/c)$. Из двух последних равенств следует искомая формула

$$l = l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}.$$

727. Да, увидит; если пренебречь временем реакции глаза, мгновенно!

728. $v = c/\sin \alpha$. В обоих случаях скорости v не соответствуют распространению какого-либо физического объекта, а потому не являются скоростями распространения сигнала.

729. Пусть источник покоится в K , а наблюдатель — в K' . Если источник посылает импульсы с интервалом T , то удаляющийся наблюдатель в K' получает эти сигналы через промежуток времени

$$T' = \frac{1}{1 - V/c} T$$

(по часам K). Чтобы получить промежуток времени по часам наблюдателя K , следует перейти к собственному времени наблюдателя T'_0 , для которого $T'_0 = (1/\Gamma)T'$, и мы получим $T'_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} T$. Переходя к частотам, получим

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \omega_0 \quad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Аналогично, при сближении источника и наблюдателя

$$\omega' = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \omega_0.$$

730. 1) Используя формулу (3), получим при $\Delta t = 0$

$$\Delta t' = -\Gamma(V/c^2)\Delta x \neq 0.$$

2) Используя формулу (3), получим при $\Delta x = 0$

$$\Delta x' = -\Gamma V \Delta t \neq 0.$$

731. Очевидно, $l_0 = x'_2 - x'_1$. Однако по формуле (3) $\Delta x' = -\Gamma V \Delta t = \Gamma l$ ($\Delta x = 0$), поскольку $\Delta t = t_2 - t_1$.

732. $\Delta t = \Delta \tau_0$. Согласно (3) $\Delta x' = -\Gamma V \Delta \tau_0$, а наблюдатель из K' должен считать $\Delta t' = -(\Delta x'/V)$; отсюда $\Delta t' = \Gamma \Delta \tau_0$.

733. В системе K проекции стержня на оси x и y будут равны $\Delta x = \Delta x'/\Gamma$, $\Delta y = \Delta y'$. Очевидно, $l_0^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$, а $\operatorname{tg} \varphi' = \Delta y'/\Delta x'$. Таким образом, в системе K :

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + (\Delta y')^2} = \\ &= \sqrt{l_0^2 - \frac{V^2}{c^2} (\Delta x')^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2} \cos^2 \varphi'}, \end{aligned}$$

так как $\Delta x' = l_0 \cos \varphi'$. Что касается угла φ , то он определится из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Gamma \operatorname{tg} \varphi'.$$

734. Из формул (1) и (1'), положив $t = 0$ и $t' = 0$, получим искомые формулы. Различие в знаках обусловлено тем, что для K направление относительной скорости совпадает с положительным направлением оси x , а для системы K' эти направления противоположны.

735. В системе K все точки стержня пересекают ось x , x' одновременно, однако этого нет в системе K' . В момент времени $t = 0$ (по часам K) часы из K' вдоль положительной части оси x отстают от часов системы K , а вдоль отрицательной части их опережают (см. задачу 734). Значит, по часам системы K' в момент $t' = 0$ правый конец стержня уже пересечет ось x' , а левый будет только к ней приближаться, но середина стержня в момент $t' = 0$ будет находиться на оси x (в начале координат). Следовательно, в системе K' стержень несколько наклонен по отношению к оси x , x' .

В системе K правый конец пересекает ось x в точке $x_1 = l_0/2$ в момент $t = 0$. Координаты этого же события в системе K' (см. (1)): $x' = \Gamma l_0/2$, $t' = -\Gamma(l_0/2)(V/c^2)$. Но нам нужно положение правого конца в момент $t' = 0$, т. е. на время $\delta t' = \Gamma(l_0/2)(V/c^2)$ позже. Чтобы определить положение правого конца в этот момент времени, нужно знать компоненту скорости стержня по оси y в системе K' . Она найдется по формуле (6): $w'_y = w/\Gamma$, тогда как $w'_x = -V$. В момент $t' = 0$ правый конец окажется в точке с координатами

$$\begin{aligned} y'_0 &= w'_y \delta t' = (w/\Gamma)\Gamma(l_0/2)(V/c^2) = (l_0/2)(wV/c^2), \\ x'_0 &= \Gamma(l_0/2) = w'_x \delta t' = \Gamma l_0/2 - V\Gamma(l_0/2)(V/c^2) = \\ &= \Gamma(l_0/2)(1 - V^2/c^2) = (l_0/2\Gamma). \end{aligned}$$

Имея в виду, что в этот момент времени середина стержня находится в начале координат, получим для угла φ' значение:

$$\operatorname{tg} \varphi' = y'_0/x'_0 = \Gamma wV/c^2.$$

736. Соударения не произойдет и в системе K' . В системе K' стержень не подвергается лоренцеву сокращению, но плоскость движущейся пластинки наклоняется (ср. решение задачи 735). В итоге метровый стержень с полностью «сохранившейся» длиной проскальзывает через сократившееся отверстие, но расположенное уже под углом к стержню. При этом концы стержня в системе K проходят через плоскость пластинки не одновременно.

737. Запишем последовательно выполняемые преобразования Лоренца, при переходе от системы K к системе K' и от системы K' к системе K'' :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - V_1x/c^2}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2}}, & x' &= \frac{x - V_1t}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2}}, & y' &= y, & z' &= z; \\ t'' &= \frac{t' - V_2x'/c^2}{\sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & x'' &= \frac{x' - V_2t'}{\sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & y'' &= y', & z'' &= z'. \end{aligned}$$

Путем простого пересчета можно показать, что выражения для t'' и x'' могут быть приведены к виду

$$t'' = \frac{t - Wx/c^2}{\sqrt{1 - (W/c)^2}}, \quad x'' = \frac{x - Wt}{\sqrt{1 - (W/c)^2}},$$

где $W = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1V_2/c^2}$ — относительная скорость систем K'' и K . Последнее выражение не изменяется при перестановке в нем величин V_1 и V_2 , что и требовалось доказать.

738. Запишем последовательно выполняемые преобразования Лоренца при переходе от системы K к системе K' и от системы K' к системе K'' :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - V_1x/c^2}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2}}, & x' &= \frac{x - V_1t}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2}}, & y' &= y, & z' &= z, \\ t'' &= \frac{t' - V_2y'/c^2}{\sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & x'' &= x, & y'' &= \frac{y' - V_2t'}{\sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & z'' &= z. \end{aligned}$$

Из написанных формул легко получить:

$$\begin{aligned} t'' &= \frac{t - \frac{V_1x}{c^2} - \frac{V_2y}{c^2} \sqrt{1 - (V_1/c)^2}}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2} \sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & x'' &= \frac{x - V_1t}{\sqrt{1 - (V_1/c)^2}}, \\ y'' &= \frac{y - V_2t}{\sqrt{1 - (V_2/c)^2}}, & z'' &= z, \end{aligned}$$

откуда очевидна некоммутативность окончательного результата относительно скоростей V_1 и V_2 систем отсчета K' и K'' .

739. Если движение частицы в K задано, то через преобразование Лоренца можно найти: $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = z'(t')$, поскольку $t' = t'(t)$. Пусть в K время изменилось на dt . Тогда непосредственно найдем dx , dy , dz , а согласно (1) и $dx' = \Gamma(dx - V dt)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$, $dt' = \Gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)$. Разделив почленно первые три равенства на четвертое, получим формулы (6).

740. 1) $v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$.

2) Решение. Согласно предыдущему результату нетрудно получить

$$\frac{v'}{c} - 1 = -\frac{1 + V/c}{1 - (v/c)V/c} \left(1 - \frac{v}{c}\right) < 0,$$

откуда и следует нужный результат.

741. Пусть K' — система отсчета, где вода покоится. В этой системе скорость света v' равна c/n . Переходя к системе K , относительно которой K' движется со скоростью V , имеем

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{cn}\right)}{\left(1 + \frac{V}{cn}\right)\left(1 - \frac{V}{cn}\right)} = \frac{\frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{cn}}{\left(1 - \frac{1}{n^2} \frac{V^2}{c^2}\right)}.$$

Для скорости воды $V/c \ll 1$ знаменатель можно принять равным единице с точностью до V^2/c^2 . Тогда

$$v = \frac{c}{n} \left[1 + \frac{V}{cn} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{c^2}\right] \approx \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

опять же с точностью до V^2/c^2 .

742. Пусть v_1 направлено в положительном направлении оси x ($v_1 > 0$), а v_2 — в отрицательном ($v_2 < 0$). Скорость их сближения в системе K равна

$$v_{\text{сбл}} = v_1 - v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)c > c.$$

Однако это не есть реальная скорость распространения чего бы то ни было физического. Относительная скорость частиц в теории относительности — это скорость одной частицы в системе отсчета, где другая частица покоится. Воспользуемся формулой преобразования скоростей, полученной в задаче 740. Чтобы v'_1 было равно нулю, необходимо, чтобы $V = v_1 = \alpha_1 c$ (это очевидно, так как система K' связана с частицей). Но тогда

$$v'_2 = \frac{-\alpha_2 c - \alpha_1 c}{1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 c^2}{c^2}} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 + \alpha_1 \alpha_2} c.$$

Остается только доказать, что при заданных условиях коэффициент при c всегда меньше единицы, но это сразу же следует из неравенства $(\alpha_1 - 1) \times (1 - \alpha_2) < 0$.

743. 1) Используя формулы (5), легко обнаружить, что $v_z = 0$, т. е. что и в K частица движется в плоскости xy . Вводя углы θ и θ' , образуемые скоростью частицы соответственно с (совпадающими) осями x , x' , запишем: $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, $v'_x = v' \cos \theta'$, $v'_y = v' \sin \theta'$. Подставляя значения компонент в (5), получим ($B = V/c$):

$$v \cos \theta = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + \frac{v' \cos \theta'}{c} B}, \quad v \sin \theta = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v' \cos \theta'}{c} B},$$

а разделив вторую формулу на первую, —

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - B^2} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}.$$

Возводя в квадрат эти же формулы и складывая, получим

$$v^2 = \frac{v'^2 + V^2 + 2v'V \cos \theta' - v'^2 B^2 \sin^2 \theta'}{\left(1 + \frac{v \cos \theta}{c} B\right)^2} = \frac{(\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}' \mathbf{V}]^2}{\left(1 + \frac{\mathbf{v}' \mathbf{V}}{c^2}\right)^2}.$$

2) В случае распространения света (для фотона!) $v = v' = c$. Пусть свет падает вдоль оси y' . Тогда $\theta' = \pi/2$ (свет идет сверху вниз), и из формулы для $\operatorname{tg} \theta$ предыдущей задачи имеем $\operatorname{tg} \theta = \left(\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} / \frac{V}{c}\right)$. Угол абберации

$$\alpha_r - \text{дополнительный к углу } \theta \text{ } (\alpha_r + \theta = \pi/2); \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{ctg} \theta = \frac{V}{c} / \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

По классическим формулам $v'_x = 0$, $v'_y = c$, $v'_z = 0$, и так как $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}$, то $v_x = V$, $v_y = c$, $v_z = 0$; отсюда $\operatorname{tg} \alpha_r = V/c$. Классическая и релятивистская формулы совпадают с точностью до V^3/c^3 .

745. $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$. В системе K' : $dx' = dy' = dz' = 0$, а $dt' = \tau$. Отсюда

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \left(1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}\right) dt^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2,$$

и окончательно $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} dt$.

746. $s_{12}^2 = s_{12}'^2$, т. е. $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$.

1) Если $l'_{12} = 0$, то $s_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 \geq 0$;

2) если $t'_{12} = 0$, то $s_{12}^2 = -l_{12}'^2 \leq 0$;

3) если $l'_{12} = 0$ и $t'_{12} = 0$, то это означает (за исключением случая, когда распространяется световой сигнал), что $t_{12} = 0$ и $l_{12} = 0$.

747. В обоих случаях применяем один и тот же прием. Обе части уравнения движения

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$$

скалярно умножаются на скорость \mathbf{v} . Справа получим работу силы над частицей в единицу времени (мощность). Следовательно, по закону сохранения энергии, слева должно стоять изменение энергии в единицу времени. Преобразование левой части для классического и релятивистского уравнений различно. Из уравнения Ньютона:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \mathbf{v}, \quad T = \frac{mv^2}{2} + T_0,$$

причем T_0 приравниваем нулю. Из релятивистского уравнения, имея в виду, что $\dot{\gamma} = \gamma^3 \beta \dot{\beta}$ ($\beta = v/c$), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \frac{d}{dt} (m\gamma \mathbf{v}) &= \mathbf{v} m \gamma \dot{\mathbf{v}} + mv^2 \dot{\gamma} = c^2 (m\gamma \beta \dot{\beta} + m\beta^2 \gamma^3 \beta \dot{\beta}) = \\ &= m\gamma \beta \dot{\beta} c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2) = mc^2 \dot{\gamma} = \frac{d}{dt} (mc^2 \gamma). \end{aligned}$$

Мы воспользовались также соотношением $\mathbf{v} \dot{\mathbf{v}} = v \dot{v}$, вытекающим из равенства $\mathbf{v}^2 = v^2$. Таким образом, получается:

$$\frac{d}{dt} (mc^2 \gamma) = \mathbf{F} \mathbf{v}, \quad \mathcal{E} = mc^2 \gamma + A,$$

где A — некоторая постоянная. Нужно показать, что она равна нулю. Для этого рассматривается предельный нерелятивистский случай $v/c \rightarrow 0$, $V/c \rightarrow 0$. Из (29) имеем для преобразования импульса

$$mv'_x = mv_x - \frac{V}{c^2}(mc^2 + A).$$

Следствием этой формулы должен быть классический закон сложения скоростей. Однако он получается только при условии $A = 0$.

748. $\frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right) = F$. Интегрируя, получим

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = Ft$$

(считаем, что при $t = 0$ скорость $v = 0$). Из последнего выражения находится зависимость скорости от времени:

$$v = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}} = \frac{v_c}{\sqrt{v_c^2 + c^2}} c < c,$$

где $v_c = Ft/m$.

749. Так как $\mathbf{p}_r = m\gamma\mathbf{v}$, а $\mathbf{p}_c = m\mathbf{v}$, то их отличие определяется множителем $\gamma = 25/7$.

750. $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left\{ \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \right\}$.

Указание. Раскрыть левую часть (11), произведя дифференцирование, и учесть (28).

751. Выберем ось y параллельно начальной скорости электрона, а ось x — в направлении, противоположном полю \mathbf{E} . Движение происходит в плоскости xy . Уравнение движения запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E},$$

поскольку сила, действующая со стороны электрического поля на заряд, равна $e\mathbf{E}$. Импульс — релятивистский — $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. Уравнение движения в компонентах $\dot{p}_x = eE$, $\dot{p}_y = 0$, откуда $p_x = eEt + p_{0x}$, $p_y = p_{0y}$. Так как, исходя из начальных условий, $p_{0x} = 0$, а $p_{0y} = p_0$, то

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = (eEt)^2 + p_0^2.$$

Пользуясь связью между энергией и импульсом $\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$, найдем $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}$, где $\mathcal{E}_0^2 = m^2c^4 + p_0^2c^2$.

Согласно (30) $\mathbf{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \mathbf{p}$, откуда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}}.$$

Подставляя полученные выше выражения для p_x , p_y и \mathcal{E} и интегрируя, с учетом начальных условий найдем

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{eE}, \quad y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}.$$

Исключив t из этой системы, получим траекторию

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left(\operatorname{ch} \frac{eEy}{cp_0} - 1 \right) \quad (\text{цепная линия}).$$

Для сравнения с классическим результатом (он предполагается известным) полагают $v/c \ll 1$. Тогда $\gamma \approx 1$, $p_0 = mv_0$, а $\mathcal{E}_0 = mc^2$. Кроме этого, нужно использовать формулу, годную для $a \ll 1$:

$$\operatorname{ch} a = 1 + \frac{a^2}{2} + \dots$$

752. Кинетическая энергия равна работе поля, так что

$$T_r \equiv mc^2(\gamma - 1) = eV,$$

откуда $\gamma = 1 + \frac{eV}{mc^2}$, а следовательно, $v = c\sqrt{1 - (1/\gamma)^2}$. Окончательно:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \sqrt{\frac{1 + eV/(2mc^2)}{[1 + eV/(mc^2)]^2}}.$$

Если $eV \ll mc^2$, то

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{eV}{mc^2} \right);$$

если $eV \gg mc^2$, то

$$v = c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{mc^2}{eV} \right)^2 \right] \sim c.$$

В последних двух случаях используется разложение подкоренного выражения основной формулы в ряд по малому параметру.

753. В лабораторной системе K $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = mc^2\gamma = \mathcal{E}$; импульсы частиц $p_1 = -m\gamma\mathbf{v}$, $p_2 = m\gamma\mathbf{v}$; 4-векторы частиц: $\mathbf{P}_1 \left(-\mathbf{p}, \frac{i}{c} \mathcal{E} \right)$, $\mathbf{P}_2 \left(\mathbf{p}, \frac{i}{c} \mathcal{E} \right)$. В системе K' , где частица 2 покоится ($\mathbf{v}'_2 = 0$), $\mathbf{p}'_2 = 0$. Согласно (29)

$$\mathcal{E}'_1 = \Gamma(\mathcal{E}_1 - Vp_{1x}) \approx \Gamma \left(\mathcal{E} + V \frac{\mathcal{E}}{c} \right) \approx 2\Gamma\mathcal{E};$$

последние преобразования выполнены для ультрарелятивистских частиц, когда, согласно (30), для $v \approx c$ имеем $p = \mathcal{E}/c$, а $V/c \sim 1$. Этот же результат легко получается из общей формулы (13)

$$\mathcal{E}'_1 = mc^2\gamma',$$

где γ' относится к скорости частицы I в системе K' . Согласно (6)

$$v'_1 = -\frac{2v}{1+v^2/c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-(v'_1/c)^2}} = \gamma^2(1+v^2/c^2) \approx 2\gamma^2.$$

Но в системе K $\Gamma = \gamma$, и следовательно, $\mathcal{E}'_1 = 2\gamma^2 mc^2$, т.е. $\mathcal{E}'_1 \approx 2\Gamma\mathcal{E}$. Отсюда видно, что ту же «полезную» энергию столкновения можно получить при покоящейся частице 2, разгоняя частицу I до энергии $2\Gamma\mathcal{E}$, в Γ раз большей, чем для «встречных» пучков.

754. Релятивистское уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} (m\gamma\mathbf{v}) = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}].$$

Так как магнитное поле не меняет энергии частицы и $\gamma = \text{const}$, то уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{m\gamma c} [\mathbf{v}\mathbf{H}],$$

где множитель перед векторным произведением — постоянная величина. Это уравнение движения отличается от нерелятивистского только тем, что вместо массы тела m стоит масса $m\gamma$.

755. По закону сохранения энергии кинетическая энергия T_r полностью расходуется на работу против сил поля: $T_r \equiv \mathcal{E} - mc^2 = eEl$, откуда и можно определить l .

Другой способ использует соотношение

$$l = \int_0^{\tau} v dt,$$

где τ — время полной остановки частицы.

Из формулы (30) $v = c^2 p / \mathcal{E}$, а из (11) $dp = eE dt$, поэтому

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\tau} v dt = \frac{c^2}{eE} \int_{p_0}^0 \frac{p dp}{\mathcal{E}} = \frac{c}{eE} \int_{p_0}^0 \frac{p dp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}} = \\ &= \frac{c}{eE} (\sqrt{p_0^2 + m^2 c^2} - mc) = \frac{1}{eE} (\mathcal{E} - mc^2). \end{aligned}$$

756. Воспользовавшись разложением бинома:

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots,$$

получим для $(v/c) \ll 1$:

$$T_r = mc^2(\gamma - 1) = \frac{mv^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{mv^4}{c^2} + \dots$$

Составив отношение второго члена T_r к первому, приравняем это отношение одной сотой:

$$\frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} = 0,01, \quad \text{откуда} \quad \frac{v}{c} = 0,1 \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

В этом же приближении:

$$\frac{T_r}{mc^2} \approx \frac{v^2/c^2}{2} = \frac{1}{150}.$$

757. Энергия покоя электрона 0,51 МэВ, протона — 938,2 МэВ.

758. Если пренебречь потерями при распространении света, полная энергия, излучаемая Солнцем в секунду, равна солнечной постоянной, умноженной на площадь сферы, проведенной из центра Солнца радиусом, равным расстоянию от Солнца до Земли. Эта площадь равна $\approx 3 \cdot 10^{23} \text{ м}^2$, а энергия

$$(1,4 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2)) \cdot (3 \cdot 10^{23} \text{ м}^2) \approx 4 \cdot 10^{23} \text{ Дж}/\text{с}.$$

Таким образом, Солнце за счет излучения света теряет в секунду массу:

$$\frac{4 \cdot 10^{23} \text{ Дж}/\text{с}}{9 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ кг}/\text{с}.$$

Десятая часть массы Солнца составляет $2 \cdot 10^{29}$ кг. Она будет израсходована за $2 \cdot 10^{29} / 4 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^{22}$ с $\approx 10^{15}$ лет.

760. Пусть в K задана 4-скорость $\mathbf{V}(\gamma\mathbf{v}, ic\gamma)$. Компоненты 4-скорости \mathbf{V}' в системе K' выразятся уже через новые переменные: $\mathbf{V}'(\gamma'\mathbf{v}', ic\gamma')$, так как абсолютная величина скорости меняется: $\gamma \neq \gamma'$. Используя формулы (17) и (19), запишем

$$u'_1 = \Gamma\left(u_1 + i\frac{V}{c}u_4\right), \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3, \quad u'_4 = \Gamma\left(u_4 - i\frac{V}{c}u_1\right);$$

подставляя значения компонент, имеем

$$\begin{aligned} \gamma'v'_x &= \Gamma(\gamma v_x - \gamma V), & \gamma'v'_y &= \gamma v_y, & \gamma'v'_z &= \gamma v_z; \\ ic\gamma' &= \Gamma(ic\gamma - iB\gamma v_x). \end{aligned} \quad (760.1)$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma(1 - Vv_x/c^2)}.$$

С помощью этого соотношения три первых равенства (760.1) сводятся к (6).

761. 1) Воспользуемся соотношениями (5), связывающими значения v_x , v_y , v_z и v'_x , v'_y , v'_z , для того, чтобы найти связь между бесконечно малыми приращениями скоростей dv_x и dv'_x (и остальных). Имеем

$$dv_x = \frac{1 - V^2/c^2}{(1 + Vv'_x/c^2)^2} dv'_x.$$

Разделим обе части этого равенства почленно на $dt = \Gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right)$ (см. (3)). Левая часть полученного равенства dv_x/dt даст значение ускорения тела v_x в системе K , а отношение $dv'_x/dt' = \dot{v}'_x$ — ускорение тела в системе K' . Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{\dot{v}'_x}{\Gamma^3(1 + Vv'_x/c^2)^3}, \\ \dot{v}_y &= \frac{\dot{v}'_y + \frac{V}{c^2}(v'_x\dot{v}'_y - \dot{v}'_x v'_y)}{\Gamma^2(1 + Vv'_x/c^2)^3}. \end{aligned}$$

Формула для \dot{v}'_z записывается аналогично формуле для \dot{v}_y . Движение тела в системе K не будет равноускоренным даже в том случае, если оно равноускоренно в K' , так как \dot{v}_x , \dot{v}_y , \dot{v}_z зависят от v'_x .

2) В формулы (17) подставляют значения компонент 4-вектора \mathbf{W} и \mathbf{W}' :

$$\mathbf{W}(\gamma^2\dot{\mathbf{v}} + \gamma\mathbf{v}\dot{\gamma}, ic\gamma\dot{\gamma}), \quad \mathbf{W}'(\gamma'^2\dot{\mathbf{v}}' + \gamma'\mathbf{v}'\dot{\gamma}', ic\gamma'\dot{\gamma}').$$

Из соотношения $A_1 = \Gamma\left(A'_1 - i\frac{V}{c}A'_4\right)$ следует, например,

$$\gamma^2\dot{v}_x + \gamma v_x\dot{\gamma} = \Gamma\left(\gamma'^2\dot{v}'_x + \gamma'v'_x\dot{\gamma}' - i\frac{V}{c}ic\gamma'\dot{\gamma}'\right).$$

Или

$$\gamma\dot{v}_x + v_x\dot{\gamma} = \Gamma\frac{\gamma'}{\gamma}(\gamma'\dot{v}'_x + \dot{\gamma}'v'_x + V\dot{\gamma}'). \quad (761.1)$$

Из соотношения $A_4 = \Gamma \left(A'_4 + i \frac{V}{c} A'_1 \right)$ следует:

$$\dot{\gamma} = \Gamma \frac{\gamma'}{\gamma} \left(\dot{\gamma}' + \frac{V}{c^2} (\gamma' \dot{v}'_x + \dot{\gamma}' v'_x) \right). \quad (761.2)$$

Используя соотношение

$$\Gamma \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{1 + V v'_x / c^2}$$

и (761.2), найдем выражение для \dot{v}_x из (761.1), совпадающее с выражением, найденным способом (1). Для нахождения формул преобразования \dot{v}_y и \dot{v}_z нужно воспользоваться соотношениями $A_2 = A'_2$, $A_3 = A'_3$.

762. В системе K^0 4-импульс: $\mathbf{P}^0(0, i\mathcal{E}_0/c)$, где $\mathcal{E}_0 = mc^2$ — энергия покоя. Переход к K' производим по формулам (17):

$$P'_1 = \Gamma \left(P_1 + i \frac{V}{c} P_4 \right), \quad P'_2 = P_2, \quad P'_3 = P_3, \quad P'_4 = \Gamma \left(P_4 - i \frac{V}{c} P_1 \right),$$

т. е. $p'_x = -\Gamma \frac{V/c}{c} \mathcal{E}_0 = -\frac{V/c}{c} \mathcal{E}' = -\frac{\mathcal{E}'}{c^2} V$, так как $\mathcal{E}' = \Gamma \mathcal{E}_0$, $p'_y = p'_z = 0$.

$$\mathbf{763.} \quad \mathbf{P}^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 = p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = (m\gamma\mathbf{v})^2 - \left(\frac{mc^2\gamma}{c} \right)^2 = -m^2c^2, \\ p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m^2c^2, \quad \mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$

764. В системе K^0 : $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{F}, 0)$. Используя (17), получим

$$\begin{aligned} \gamma' F'_x &= \Gamma F_x, & \gamma' F'_y &= F_y, & \gamma' F'_z &= F_z, \\ \frac{i}{c} \gamma' (F'_x \dot{v}') &= \Gamma \left(-i \frac{V}{c} F_x \right), \end{aligned} \quad (764.1)$$

откуда (так как $\gamma' = \Gamma$)

$$F'_x = F_x, \quad F'_y = F_y \sqrt{1 - V^2/c^2}, \quad F'_z = F_z \sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Физический смысл равенства (764.1) предоставляем выяснить читателям.

$$\mathbf{765.} \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v}'_{\parallel} + \mathbf{v}'_{\perp} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} + (\Gamma - 1) \frac{\mathbf{V}}{V^2} [(\mathbf{v}\mathbf{V}) + V^2]}{\Gamma(1 - \mathbf{v}\mathbf{V}/c^2)},$$

$$\dot{\mathbf{v}}' = \frac{1}{\Gamma^2 s^2} \dot{\mathbf{v}} - \frac{(\Gamma - 1)(\mathbf{v}\mathbf{V})\mathbf{V}}{\Gamma^3 s^3 V^2} + \frac{(\mathbf{v}\mathbf{V})\mathbf{v}}{\Gamma^2 s^2 c^2},$$

где $s = 1 - \mathbf{v}\mathbf{V}/c^2$.

Решение. В векторной записи необходимо различать преобразование векторов, параллельных направлению относительной скорости и перпендикулярных к ней. Если есть два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} , то слагающими вектора \mathbf{a} , параллельными и перпендикулярными вектору \mathbf{b} , будут векторы

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{b})}{b} = \frac{\mathbf{b}}{b^2}(\mathbf{a}\mathbf{b}), \quad \mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{b^2}(\mathbf{a}\mathbf{b}).$$

3-радиус-вектор можно представить, следовательно, так:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel} = \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{r}\mathbf{V}) + \mathbf{r} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{r}\mathbf{V}), \\ \mathbf{r}_{\parallel} &= x\mathbf{i}, \quad \mathbf{r}_{\perp} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Помня о том, что пространство изотропно и что ось x в наших обычных формулах (1) направлена по \mathbf{V} , можно переписать (1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_{\perp} &= \mathbf{r}_{\perp}; \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \Gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V}t), \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_{\perp} + \mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r}_{\perp} + \Gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{V}t) = \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + (1 - \Gamma)\mathbf{r}_{\perp} = \\ &= \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + (1 - \Gamma) \frac{V^2 \mathbf{r} - \mathbf{V}(\mathbf{r}\mathbf{V})}{V^2} = \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + (\Gamma - 1) \frac{[\mathbf{V}[\mathbf{V}\mathbf{r}]]}{V^2}. \end{aligned}$$

Аналогично для преобразования скорости и ускорения нужно воспользоваться формулами (6) и формулами, полученными в задаче 761. Формула для \mathbf{v}' может быть получена дифференцированием формулы для \mathbf{r}' по $dt' = \Gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)$. Аналогичным образом из формулы для \mathbf{v}' можно получить выражение для $\dot{\mathbf{v}}'$.

766. Воспользуемся соотношениями $p^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2 c^2$, $\mathcal{E} = mc^2 + T$. Подставляя \mathcal{E} , выраженное через T , в выражение для импульса, непосредственно находим

$$pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}.$$

767. Исходя из (30) и результата задачи 763, имеем

$$\mathbf{v} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \mathbf{p} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}.$$

768. Исходим из соотношения $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, откуда $v/c = \sqrt{1 - (\mathcal{E}_0/\mathcal{E})^2}$, где $\mathcal{E}_0 = mc^2$. Для перехода к нерелятивистскому случаю нужно учесть, что $\mathcal{E} = T + mc^2$, причем по условию задачи $T \ll mc^2$. Тогда:

$$v/c = \sqrt{2T/\mathcal{E}_0}.$$

Ультрарелятивистский случай соответствует неравенству $(\mathcal{E}_0/\mathcal{E}) \ll 1$, откуда $v/c = 1 - \frac{1}{2}(\mathcal{E}_0/\mathcal{E})^2$.

769. Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E, \quad \text{где } E_1 = m_1 c^2, \quad E_2 = m_2 c^2 + T_2, \\ \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{P}, \quad \text{где } \mathbf{p}_1 = 0, \quad \mathbf{p}_2 \text{ задан.} \end{aligned}$$

Масса M образовавшейся системы определяется из соотношения

$$M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2 = c^2(m_1 + m_2)^2 + 2T_2 m_1.$$

Суммарная масса примерно равна сумме масс исходных частиц, если $(T_2 m_1/c^2) \ll (m_1 + m_2)^2$. Скорость образовавшейся частицы

$$V = \frac{c^2}{E} P = \frac{c\sqrt{T_2(T_2 + 2m_2 c^2)}}{(m_1 + m_2)c^2 + T_2}.$$

770. $M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - P^2$, $E = E_1 + E_2$, $E_{1,2} = c\sqrt{p_{1,2}^2 + m_{1,2}^2 c^2}$, $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, где индексы 1 и 2 относятся к частицам, возникшим после распада,

$$M^2 c^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{c^2} - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2 = \\ = (m_1^2 + m_2^2)c^2 + 2(\sqrt{(p_1^2 + m_1^2 c^2)(p_2^2 + m_2^2 c^2)} - p_1 p_2 \cos \theta).$$

771. Запишем законы сохранения энергии и импульса в системе, где покоится исходное тело:

$$Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2, \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad (771.1)$$

откуда $p_1^2 = p_2^2$, т. е. $\mathcal{E}_1^2 - m_1^2 c^4 = \mathcal{E}_2^2 - m_2^2 c^4$, или $\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_2^2 = c^4(m_1^2 - m_2^2)$. Разделив это на (771.1), получим

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \frac{c^2}{M}(m_1^2 - m_2^2). \quad (771.2)$$

Из (771.1) и (771.2) найдем \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2M}[M^2 c^2 + c^2(m_1^2 - m_2^2)], \\ \mathcal{E}_2 = \frac{1}{2M}[M^2 c^2 - c^2(m_1^2 - m_2^2)].$$

Отсюда

$$T_1 = \mathcal{E}_1 - m_1 c^2 = \frac{c^2}{2M} \{(M - m_1)^2 - m_2^2\}, \\ T_2 = \frac{c^2}{2M} \{(M - m_2)^2 - m_1^2\}.$$

772. Запишем законы сохранения энергии и импульса для процесса соударения:

$$T_0 = T_1 + T_2, \quad T_2 = T_0 - T_1, \\ \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1, \\ (\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1)^2 = p_2^2, \quad p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = -2p_0 p_1 \cos \theta_1.$$

Но $p^2 c^2 = T(T + 2mc^2)$, поэтому

$$p_2^2 - p_1^2 - p_0^2 = -\frac{2T_1(T_0 + 2mc^2)}{c^2}. \quad (772.1)$$

С другой стороны:

$$-2p_0 p_1 \cos \theta_1 = -\frac{2 \cos \theta_1}{c^2} \sqrt{T_0 T_1 (T_0 + 2mc^2)(T_1 + 2mc^2)}. \quad (772.2)$$

Приравнявая (772.1) и (772.2), получим после некоторых алгебраических преобразований:

$$T_1 = \frac{T_0 \cos^2 \theta_1}{1 + \frac{1}{2} \frac{T_0}{mc^2} \sin^2 \theta_1}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

В специальной теории относительности (СТО) под событием понимают все то, что происходит в данной точке пространства в данный момент времени. В СТО рассматриваются только *инерциальные системы отсчета*, которые определяются как системы отсчета, в которых справедливы все три закона Ньютона. Все инерциальные системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и поступательно (с различными скоростями). В задачах предполагается, что во всех системах отсчета оси y, y' и z, z' соответственно параллельны друг другу, а относительная скорость любых двух систем отсчета направлена по общей оси x, x' . Скорость системы K' относительно K обозначается через V (скорость системы K относительно K' равна $-V$). Система отсчета всегда связана с материальными телами, и поэтому ее скорость V всегда меньше c . Здесь и всюду через c обозначена скорость электромагнитных волн (света) в вакууме. В каждой системе отсчета можно определить координаты любого события (в «координаты» включается также и время наступления события). Преобразования Лоренца — это преобразование координат события при переходе от одной системы к другой. Эти преобразования при переходе от K к K' и от K' к K имеют следующий вид:

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \quad (1)$$

$$x = \Gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \Gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \quad (1')$$

где

$$\Gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}. \quad (2)$$

В (2) входит постоянная скорость относительного движения двух систем отсчета, поэтому Γ — постоянная величина. Ниже вводится величина

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

в которую входит переменная скорость частицы v .

Преобразования Лоренца (1) и (1') подразумевают, что наборы часов, покоящихся в каждой системе отсчета, синхронизованы по Эйнштейну, а в момент совпадения начал отсчета O и O' часы из систем K и K' , находящиеся в точке O, O' , показывают соответственно $t = 0$ и $t' = 0$.

Если рассмотреть два события с координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) , то, записав для каждого из них преобразования (1) и составив разности $x_2 - x_1 = \Delta x', y_2 - y_1 = \Delta y', z_2 - z_1 = \Delta z', t_2 - t_1 = \Delta t', x_2 - x_1 = \Delta x$ и т.д., мы

получим удобные формулы для преобразования пространственных расстояний и промежутков времени между событиями:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \Gamma(\Delta x - V\Delta t), & \Delta y' &= \Delta y, & \Delta z' &= \Delta z, \\ \Delta t' &= \Gamma\left(\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right), & & & & (3) \\ \Delta x &= \Gamma(\Delta x' + V\Delta t'), & \Delta y &= \Delta y', & \Delta z &= \Delta z', \\ \Delta t &= \Gamma\left(\Delta t' + \frac{V}{c^2}\Delta x'\right). & & & & (3') \end{aligned}$$

Промежутком *собственного времени* между двумя событиями называется промежуток времени, отсчитываемый в той системе отсчета, в которой эти два события наступают в одной точке; промежуток собственного времени отсчитывается одними часами; здесь мы его будем обозначать через $\Delta\tau$. Промежуток собственного времени для двух данных событий можно отсчитать лишь в одной системе отсчета. Во всех других системах отсчета эти события наступают уже в разных точках, и промежуток времени между их наступлением отсчитывается уже двумя часами, находившимися в точках, где наступили события. Отсчитанный промежуток времени будет промежутком координатного времени Δt . Промежутки координатного и собственного времени пропорциональны друг другу:

$$\Delta t = \Gamma\Delta\tau. \quad (4)$$

При переходе от одной системы отсчета к другой компоненты скорости преобразуются следующим образом: для перехода от K' к K

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}, \quad (5)$$

для перехода от K к K'

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}, \quad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}. \quad (6)$$

Сигналом в СТО называется любой способ передачи энергии и импульса из одной точки пространства в другую, так что, передав сигнал, можно инициировать (прекратить) некоторое явление или включить (или выключить) какой-либо прибор. СТО учит, что всякая передача энергии связана с передачей импульса. Скорость передачи сигнала не может превышать c .

Интервалом между двумя событиями 1 и 2 называется выражение

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (7)$$

где (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) — координаты первого и второго событий. Удобно ввести обозначения

$$\begin{aligned} t_{12} &= t_2 - t_1 \equiv \Delta t, \\ l_{12}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2. \quad (9)$$

Основное свойство интервала — его инвариантность по отношению к преобразованиям Лоренца:

$$s_{12}^2 \equiv c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = s_{12}'^2 \equiv c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2. \quad (10)$$

Релятивистское уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad (11)$$

где

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}, \quad (12)$$

$v = v(t)$ — скорость частицы.

Полная энергия частицы

$$\mathcal{E} = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}}. \quad (13)$$

Кинетическая энергия в релятивистской механике T_r определяется как разность

$$T_r = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = mc^2(\gamma - 1), \quad (14)$$

где $\mathcal{E}_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы. В формулах (11)–(14) через m обозначена масса покоя. Никакой другой массы ни в формулировках задач, ни в решениях не встречается.

Очень плодотворной оказалась четырехмерная интерпретация теории относительности. В 4-пространстве-времени («мир Минковского») в каждой точке с координатами (x, y, z, t) может наступать событие. Существенное упрощение в выкладках достигается введением четвертой мнимой координаты ¹⁾ ict и симметризацией обозначений $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ ($i^2 = -1$). Таким образом, вводится 4-радиус-вектор \mathbf{R} (4-векторы обозначаются стрелочкой над буквой) с компонентами:

$$\mathbf{R} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x & y & z & ict \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{r}, ict). \quad (15)$$

Преобразования Лоренца — это преобразование компонент 4-вектора \mathbf{R} :

$$x'_1 = \Gamma \left(x_1 + i \frac{V}{c} x_4 \right), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \Gamma \left(x_4 - i \frac{V}{c} x_1 \right), \quad (16)$$

$$x_1 = \Gamma \left(x'_1 - i \frac{V}{c} x'_4 \right), \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \Gamma \left(x'_4 + i \frac{V}{c} x'_1 \right). \quad (16')$$

(С помощью (15) нетрудно проверить, что эти формулы совпадают с (1) и (1').)

¹⁾ Необходимо подчеркнуть, что появление мнимой координаты связано исключительно с тем, что мы хотим сохранить тот вид основных геометрических формул, к которому привыкли в трехмерном евклидовом пространстве. Можно избежать введения мнимой координаты, но тогда появляется необходимость введения метрического тензора и разделения ко- и контравариантных координат; введение этих понятий едва ли оправдано в курсе общей физики.

Все 4-векторы преобразуются по правилам преобразования 4-радиуса-вектора. Если заданы компоненты 4-вектора $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ в системе K , то компоненты этого же вектора в K' найдутся по формулам (мы приводим также и формулы обратного перехода):

$$A'_1 = \Gamma\left(A_1 + i\frac{V}{c} A_4\right), \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_4 = \Gamma\left(A_4 - i\frac{V}{c} A_1\right), \quad (17)$$

$$A_1 = \Gamma\left(A'_1 - i\frac{V}{c} A'_4\right), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \Gamma\left(A'_4 + i\frac{V}{c} A'_1\right). \quad (17')$$

Квадрат модуля 4-вектора является инвариантом и определяется по формуле

$$\mathbf{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 + A_4'^2. \quad (18)$$

В механике СТО вводят 4-векторы:

4-скорости

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau},$$

где $d\tau = dt/\gamma$ — собственное время частицы. Компонентами 4-скорости являются (приводим обычные и симметричные обозначения в фигурных скобках, а также сокращенное обозначение с использованием трехмерных векторных величин)

$$\mathbf{V} \left\{ \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \gamma v_x & \gamma v_y & \gamma v_z & ic\gamma \end{array} \right\} \equiv (\gamma\mathbf{v}, ic\gamma); \quad (19)$$

4-импульса

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}, \quad (20)$$

где m — инвариантная масса покоя, с компонентами

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ m\gamma v_x & m\gamma v_y & m\gamma v_z & i\frac{\mathcal{E}}{c} \end{array} \right\} = \left(\mathbf{p}, i\frac{\mathcal{E}}{c} \right). \quad (21)$$

В (21) \mathbf{p} — релятивистский импульс частицы:

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}, \quad (22)$$

а \mathcal{E} — релятивистская энергия частицы (13);

4-силы Минковского \mathbf{F} с компонентами

$$\mathbf{F} \left\{ \begin{array}{cccc} \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{F}_3 & \mathfrak{F}_4 \\ \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z & \frac{i}{c} \gamma(\mathbf{F}\mathbf{v}) \end{array} \right\} \equiv \left(\gamma\mathbf{F}, \frac{i}{c} \gamma(\mathbf{F}\mathbf{v}) \right), \quad (23)$$

где \mathbf{F} — обычная трехмерная сила;

4-ускорения

$$\mathbf{W} = \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \quad (24)$$

с компонентами

$$\mathbf{W} \left\{ \begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma \dot{\gamma} \mathbf{v} & & & ic\gamma \dot{\gamma} \end{array} \right\}. \quad (25)$$

Запишем четырехмерное уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \equiv m \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \mathbf{F} \quad (26)$$

в компонентах (первые три компоненты сведены в одно трехмерное векторное уравнение):

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = \mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) легко получаются из (24), если воспользоваться (21), (23) и учесть, что $d\tau = dt/\gamma$.

Используя (17) и определение (21), получим закон преобразования импульса и энергии частицы:

$$p'_2 = \Gamma\left(p_x - \frac{V}{c^2}\mathcal{E}\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad \mathcal{E}' = \Gamma(\mathcal{E} - Vp_x). \quad (29)$$

Из определения релятивистской энергии частицы и релятивистского импульса следует полезное соотношение

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = \frac{mc^2\gamma}{c^2}\mathbf{v} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\mathbf{v}. \quad (30)$$

Для системы невзаимодействующих частиц масса M системы определяется соотношением

$$M^2c^2 = \left(\sum \frac{\mathcal{E}_i}{c^2}\right)^2 - \left(\sum \mathbf{p}_i\right)^2, \quad (31)$$

где суммирование ведется по всем частицам, а \mathcal{E}_i и \mathbf{p}_i , определяются согласно (13) и (22).

Для системы невзаимодействующих частиц можно определить также скорость центра масс системы. Из (29) видно, что для того, чтобы $p'_x = 0$, необходимо скорость V принять равной

$$V = c^2 p_x / \mathcal{E}. \quad (32)$$

Обобщение этого результата на систему частиц очевидно:

$$\mathbf{V} = \frac{c^2 \sum \mathbf{p}_i}{\sum \mathcal{E}_i}. \quad (33)$$

