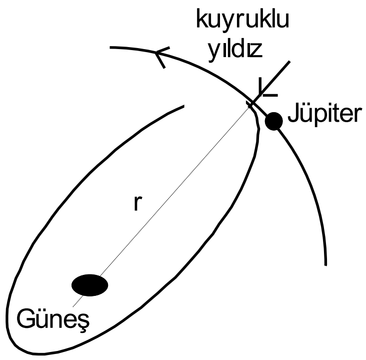


2. Jüpiter'in kuyruklu yıldız ailesinin oluşması basit bir model ile açıklanılabilir. Kuyruklu yıldız ilk hızsız çok büyük uzaklıktan Güneşe doğru yaklaşmakta iken Jüpiter'in çok yakınında geçmektedir. Kuy-ruklu yıldız gezegenin şiddetli çekim kuvvetinin etkisinden kurtul-duktan sonra Güneşin çekim alanında Jüpiter'in hareket yönüne zıt yönde hareket etmeye devam etmektedir. Böyle bir kuyruklu yıldızın yörüngesinin aphelion noktası Jüpiter gezegenin yüzeyin yakın bir noktasında bulunur. Jüpiter gezegeni Güneşten r=5,2R uzaklıkta bulunuyor. Burada R Güneş-Dünya arasındaki uzaklıktır. Kuyruklu yıldızın perihelion noktası Güneşten ne kadar uzaklıkta bulunuyor?

2. Jüpiterin Güneşin etrafında hareket ederken yörüngesel hızı v_0 olsun. Bu hızı bulmak için merkezcil kuvvetin çekim kuvvetine eşit olması durumundan faydalanılabiliriz.

$$\frac{m_J v_0^2}{r} = \frac{\gamma\, m_G m_J}{r^2}\ ;\ v_0 = \sqrt{\frac{\gamma\, m_G}{r}}$$

Kuyruklu yıldız Jüpiterin yakın çevresine gelene kadar Güneşin etkisi ile hız kazanmaktadır. Bu hızı enerji korunumu yasasını kullanarak bulabiliriz.

$$0 = -\frac{\gamma\, m_G m_k}{r} + \frac{m v_k^2}{2}\ ;\ v_k = -\sqrt{\frac{2\gamma m_G}{r}} = \sqrt{2}\, v_0$$

Kuyruklu yıldız Jüpiterin yakınında yön değiştirip ilk yörüngeye 90° lik açı ile hareketine devam etmektedir. Bu durumda kuyruklu yıldızın Jüpitere doğru hızı

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_k^2} = \sqrt{3}\, v_0$$

olarak bulunur. Bundan sonra kuyruklu yıldız yine sadece Güneşin etkisi ile harekete devam ettiğini kabul edebiliriz. Yani Jüpiterin rolü kuyruklu yıldızın yönünü değiştirmektedir. Jüpiterin civarında bulunan yörüngenin noktası eliptik yörüngenin apastron noktası, yani en uzak noktası oluyor. Kuyruklu yıldız bu eliptik yörünge üzerinde

$$v_a = v - v_0 = (\sqrt{3} - 1) v_0$$

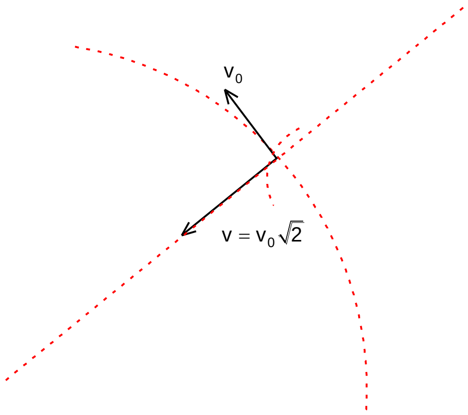
hızı ile hareketine devam etmektedir. Bu hareket için enerji ve açısal momentum korunumu yasaları kullanılabilir.

$$-\frac{\gamma\, m_G m_k}{r} + \frac{m_k v_a^2}{2} = -\frac{\gamma\, m_G m_k}{r_p} + \frac{m_k v_P^2}{2}\ ;\ m_k v_a r = m_k v_p r_p$$

Buradan

$$r_p = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right) r}{2} = 1{,}9R$$

olarak bulunur.



$$\frac{\gamma M m_J}{r^2} = \frac{m_J {v_0}^2}{r} \Rightarrow {v_0}^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

$$-\frac{\gamma M m}{r} + \frac{m v^2}{2} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2\gamma M}{r} = 2{v_0}^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

$$u = \sqrt{2{v_0}^2 + {v_0}^2} = v_0\sqrt{3}$$

$$\frac{\gamma M m_J}{r^2} = \frac{m_J {v_0}^2}{r} \Rightarrow {v_0}^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

$$-\frac{\gamma M m}{r} + \frac{m v^2}{2} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2\gamma M}{r} = 2{v_0}^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

$$v_A = v_0\sqrt{3} - v_0 = v_0\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

$$m v_A r = m v_P r_p \Rightarrow v_P = \frac{v_0 r\left(\sqrt{3}-1\right)}{r_P}$$

$$-\frac{\gamma M m}{r} + \frac{m {v_A}^2}{2} = -\frac{\gamma M m}{r_P} + \frac{m {v_P}^2}{2} \Rightarrow -{v_0}^2 + \frac{{v_0}^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2} = -\frac{{v_0}^2 r}{r_P} + \frac{{v_0}^2 r^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2{r_P}^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\left(3-2\sqrt{3}+1\right)-2}{2} = -\frac{r}{r_P} + \frac{r^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2{r_P}^2} \Rightarrow \frac{\left(2-2\sqrt{3}\right)}{2} = 1-\sqrt{3} = -\frac{r}{r_P} + \frac{r^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2{r_P}^2} \Rightarrow 2\left(1-\sqrt{3}\right){r_P}^2 = -2rr_P + r^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

$$2\left(\sqrt{3}-1\right){r_P}^2 - 2rr_P + r^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2 = 0 \Rightarrow r_P = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - 8\left(\sqrt{3}-1\right)^3}}{4\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^3 = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(3-2\sqrt{3}+1\right) = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{3}\right) = 2\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\left(2\sqrt{3}-2-3+\sqrt{3}\right) = 2\left(3\sqrt{3}-5\right)$$

$$21 - 12\sqrt{3} = \left(m - n\sqrt{3}\right)^2 = m^2 - 2mn\sqrt{3} + 3n^2 \Rightarrow 21 = m^2 + 3n^2 \Rightarrow 12 = 2mn;\ 6 = mn \Rightarrow n = \frac{6}{m}$$

$$21 = m^2 + 3\left(\frac{6}{m}\right)^2 = m^2 + 3.\frac{36}{m^2} \Rightarrow m^4 - 21m^2 + 108 = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 4.108}}{2} = \frac{21 \pm 3}{2} \Rightarrow {m_1}^2 = 12;\ {m_2}^2 = 9$$

$$m = 3 \Rightarrow n = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow 21 - 12\sqrt{3} = \left(3 - 2\sqrt{3}\right)^2$$

$$r_P = \frac{2r - \sqrt{4r^2 - 8\left(\sqrt{3}-1\right)^3 r^2}}{4\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2r\left[1 - \sqrt{1 - 2.2\left(3\sqrt{3}-5\right)}\right]}{4\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{r\left[1 - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}\right]}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} =$$

$$r_P = \frac{r\left[1 - \left[-\left(3 - 2\sqrt{3}\right)\right]\right]}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2r\left[2\sqrt{3}-2\right]}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2r\left[\sqrt{3}-1\right]}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = r$$

$$r_P = \frac{r\left[1 + 3 - 2\sqrt{3}\right]}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{2r\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{r\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{r\left(2\sqrt{3} - 3 + 2 - \sqrt{3}\right)}{2} = \frac{r\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$$