

XXXII. BİLİM OLİMPİYATLARI-2024 İKİNCİ AŞAMA 3. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI

1. Kütlesi $M_1 = M_\odot$ olan ana kol bir yıldız ve kütlesi $M_2 = 2M_\odot$ olan nötron yıldızdan oluşan izole bir sistem, sistemin kütle merkezi etrafında çembersel yörüngeler üzerinde hareket etmektedir. Yıldızların dolanım periyotları $T=8$ yıldır. Ana kol yıldızından nötron yıldızına doğru kütle aktarımı $\dot{M}_1 = 10^{-7} M_\odot$ sabit hızıyla gerçekleşmekte olup kütle aktarımı sadece iki yıldız arasındadır. Aktarılan madde nötron yıldızın çok çok büyük çekimin etkisi ile nötronlara dönüşmektedir. Bu dönüşümlerde kütle kayıpları ihmal edilebilir.

a) Yıldızlar arasındaki uzaklık kaç AB dir?

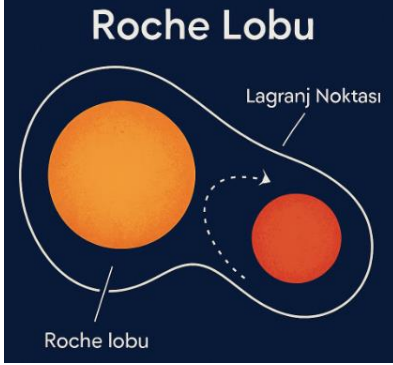
b) Yıldızların birbirine göre bağıl hızı kaç km/s dir?

c) Sistemin açısal momentumu kaç kg.m/s dir?

d) Sistemin dolanım periyodun hız değişimi yılda kaç saniyedir?

e) Normal yıldız kütlelerinin yarısını nötron yıldızına aktarıldığında nötron yıldızı çökme sonucu kara deliğe dönüş-
tüğünde iki yıldız arasındaki uzaklık yaklaşık olarak kaç AB kadar değişmiştir?

f) Nötron yıldız kara deliğe dönüşmeden önce yıldızın yüzeyindeki çekim alanının artışı yüzde kaçtır?



Lagrange noktaları ikili bir sistemde iki büyük kütleli kütleçekim kuvvetleri ile sistemle birlikte dönen bir gözlemcinin hissettiği merkezkaç kuvvetinin birbirini tam olarak dengelediği beş özel noktalardır. Bu noktalar, kütleçekimsel potansiyel haritasındaki "tepeler" veya "vadiler" gibidir. Beş Lagrange noktalarından birisi L_1 noktası iç Lagrange noktası olarak bilinmektedir. L_1 noktası İki büyük kütle arasında, tam olarak kütle-çekimsel "eşik" üzerinde yer alır ve Roche Lobunun uç noktasını belirler. Roche Lobu (bölgesi) bir ikili yıldız sisteminde, her bir gök cisminin etrafındaki kütleçekimsel olarak baskın olduğu bölgeyi tanımlayan hacimdir. Eğer bir yıldız kendi Roche Lobunu dolduracak kadar genişlerse, maddesi kütleçekimsel denge L_1 noktasından geçerek diğer yıldızına doğru akmaya başlar;

bu duruma Roche Lobu Taşması (Roche Lobe Overflow) denir. Roche Lobu küresel şeklinde olmamasına rağmen hesaplamalarda kolaylık olması için bu hacme eşdeğer bir ortalama yarıçap kullanılır. Roche Lobunun ortalama yarıçapının iki yıldız arasındaki uzaklıktan küçük olması, sistemin dinamik kararlılığı ve madde aktarımı açısından önemlidir. Fiziksel olarak bu durum, sistemin parçalanmadan bir arada kalabilmesi için temel bir şarttır. Bu yarıçap;

$$R_L = 0,46r \sqrt[3]{\frac{M_1}{M_1 + M_2}}$$

ile verilir.

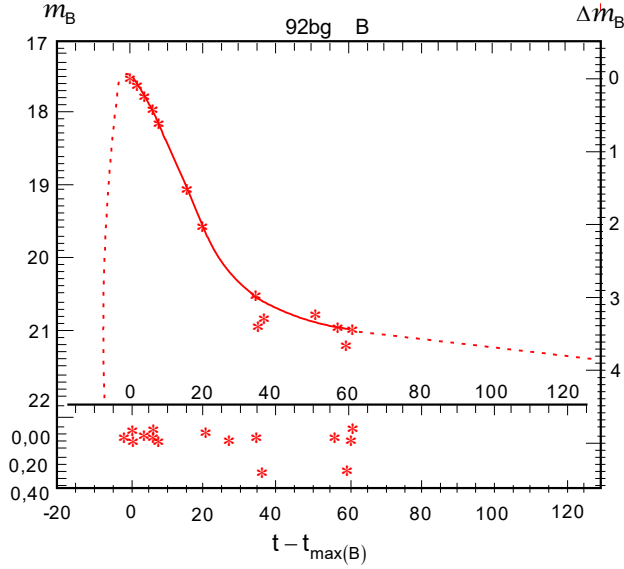
g) Normal yıldız için Roche Lobun ortalama yarıçapı kaç AB dir? Normal yıldız nötron yıldızı kara deliğe dönüş-
meye başladığında nötron yıldızı tarafından çekilip parçalanmaya başlar mı?

h) Normal yıldız yerine aynı kütleli ve yarıçapı Güneşin yarıçapının 90 kat olan kırmızı dev olsaydı kırmızı yıldız kara delik tarafından çekilip parçalanmaya başlar mı?

Bir nötron yıldızı kara deliğe dönüştüğünde, kütlesi kaybolmaz; yalnızca daha kompakt (sıkışık) hale gelir ve bu şekilde uzay-zamanı bükür. Dışarıdan bakıldığında, kara deliğin kütlesi, nötron yıldızın sahip olduğu kütleyle çok yakın kalır. Çok az bir kütle gravitasyonel dalgaların ve nötrinoların enerjisine dönüşmektedir. Her kara delik olay ufku ile karakterize edilir. Olay ufku hangi yarıçapta kara delikten kaçış hızı ışık hızına eşit belirlir.

i) Olay ufku ile olay ufkundan $\ell=100$ m kadar uzaklıkta bulunan iki nokta arasındaki çekim ivmesi farkı nedir?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Güneşin kütlesi $M_\odot=2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, Güneşin yarıçapı $R_\odot=700000 \text{ km}$, nötron yıldızların özkütlesi $\rho=3 \cdot 10^{17} \text{ kg/m}^3$, $1 \text{ AB}=150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $\pi=3,14$, olarak veriliyor. Kütlesi Güneşin kütlesi mertebesinde olan ana kol bir yıldızın yarıçapı 10^6 km den küçüktür.)



2. Süpernova taksonomisi yöntemi, süpernovaların gözlemsel özelliklerine göre sınıflandırılmasıdır. Temel olarak spektrum ve ışık eğrisinin zamana göre özelliklerine bakılarak Tip I ve Tip II olarak ayrılır. Tip I süpernovalar spektrumlarında hidrojen çizgisi bulunmaz. Tip Ia süpernovalar beyaz cücelerin kütle aktarımı sonucu Chandrasekhar limitini aşmasıyla oluşur ve yıldızın kritik kütleyle ulaşarak karbon-oksijen füzyonuyla patlamasıyla meydana gelir. Güçlü bir Silisyum (Si II) spektrum çizgisi içerir. Tip Ib: hidrojen ya da silisyum spektrum çizgileri yok, ama helyum spektrum çizgileri var ve genellikle dış katmanlarını kaybetmiş büyük kütleli yıldızlardan kaynaklanır. Tip Ic ne hidrojen ne de helyum çizgisi vardır. Ağır elementlerin spektrum çizgileri yoğundur. Yıldızın dış katmanları tamamen soyulmuştur. Tip II süpernovalarda spektrumlarında hidrojen çizgileri belirgindir. Tip II-P süpernovalarda ışık eğrisinde parlaklık uzun süre sabit kalır. Tip II-L süpernovalarda ışık eğrisinde parlaklık sürekli azalır. Tip IIn süpernovalarda spektrumda dar

emiyon çizgileri; yoğun yıldız rüzgarı veya çevre gazıyla etkileşim. Tip IIb süpernovalarda başlangıçta hidrojen çizgileri görülür, sonra kaybolur ve zamanla Tip Ib ye benzer hale gelir. Şekilde verilen ışık eğrisi 1992 yılında patlamış ve SN 1992bg gibi adlandırılan süpernova Tip Ia süpernovaların bir alt grubudur. Süpernovanın parlaklık değişimine ait model, veri olan bölüm için düz çizgiyle; veri olmayan bölüm için noktali çizgiyle belirtilmiştir. Yatay ekseninde patlama maksimumundan itibaren geçen gün sayısı, dikey ekseninde ise B-bandında görünen parlaklık verilmektedir. 0 zamanı süpernovanın parlaklığı en yüksektir. SN 1992bg tipi süpernovalar Tip Ia süpernovaların özel bir alt grubudur. Bu grup, normal süpernovalardan çok daha sönüktür ve mutlak parlaklığı $M \approx -16,5$ kadir, maksimum ışıma gücü $L \approx 10^{35}$ olarak kabul edilmektedir. Bu yıldızların 15 gün içinde ne kadar sönümlendiği inceleyerek süpernova yıldızı hakkında bilgi sahibi olabiliriz. Eğer süpernova 15 günde az sönümleniyorsa, bu onun mutlak olarak daha parlak olduğunu gösterir. Eğer süpernova 15 günde çok sönümleniyorsa, bu onun mutlak parlaklık olarak daha sönük olduğunu gösterir. Tip Ia süpernovaların parlaklığını ilk aşamada sağlayan temel enerji kaynağı, patlama anında sentezlenen radyoaktif $^{56}_{28}\text{Ni}$ izotopunun bozunmasıdır- $^{56}_{28}\text{Ni} \rightarrow ^{56}_{27}\text{Co} + e^+ + \nu_e + \gamma$. $^{56}_{28}\text{Ni}$ radyoaktif izotopun yarı ömrü $t_{1/2} = 6,1$ gündür. Bu bozunmalar ışık eğrisinin maksimuma ulaşmasını ve ilk hızlı sönümlenmeyi sağlar. Tip Ia süpernovaların parlaklığını ikinci aşamada sağlayan temel enerji kaynağı, sentezlenen radyoaktif $^{56}_{27}\text{Co}$ bozunmasıdır- $^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow ^{56}_{26}\text{Fe} + e^+ + \nu_e + \gamma$. $^{56}_{27}\text{Co}$ radyoaktif izotopun yarı ömrü $t_{1/2} = 77,2$ gündür. Bu daha yavaş olan bozunma, süpernovanın aylar boyunca gözlemlenebilmesini sağlayan düşük eğimli kuyruk kısmını oluşturur. 15. gün, Nikel bozunumunun baskın olduğu ilk parlama evresi ile kobalt bozunumunun enerjisi domine etmeye başladığı "yavaş sönümlenme" evresi arasındaki geçişin en belirgin gözlemlendiği, eğrinin karakteristiğinin oturduğu zamandır.

a) Hem Samanyolundan hem de barınak galaksiden kaynaklanan sönümlenmenin toplam $A_B = 0,8$ kadir kabul edersek süpernova patlamanın gerçekleştiği galaksinin uzaklığını Mpc cinsinden nedir?

b) Süpernovanın tayfindan ölçülen dikine hızın 3100 km/s olduğuna göre Hubble sabitinin değeri nedir?

c) 15 günde süpernovanın ışıma gücünün ortalama azalma hızı nedir?

Süpernova patlamasıyla saçılan maddenin küresel olarak genişlediğinin kabul edelim. Süpernovanın maddesel yarıçap patlamayla fırlatılan en dıştaki atomların ulaştığı fiziksel sınırdır. Madde genişledikçe daha içteki, daha yavaş hareket eden katmanlara doğru çekilir. Bu genişleyen dış kısmın ve gözlemcinin ölçtüğü hızın zamanla azalması demektir. Genişleyen maddenin yarıçapı 15 gün sonra yaklaşık olarak 10^9 km, genişleyen maddenin hızı 9500 km/s olarak ölçülmektedir.

Hız değişimi özellikle 15. günden sonra $v(t) = v_{15} \left(\frac{t_{15}}{t} \right)^{0.2}$ şeklinde verilir.

d) 20. gün genişleyen dış bölgenin sıcaklığı, 15. gündeki dış bölgenin sıcaklığının yaklaşık olarak kaç katıdır?

3. 70 Ophiuchi (YılanCI) ikili yıldız sistemi her birisi Güneşten daha soğuk ve daha küçük olan iki turuncu cüce yıldızlardan oluşmaktadır. 70 Oph yıldız sistemin paralaksı 0,1956", paralaktik kaymadan arındırılmış astrometrik gözlemler sonucu yoldaş K4V tayf türü B bileşenin baş KOV tayf türü A bileşeni ana kol yıldızlarıdır, yani hidrojen yakarak enerji üretirler. A bileşenin yarıçapı $R_A = 0,83R_{\odot}$, B bileşenin yarıçapı $R_B = 0,7R_{\odot}$ dir. A bileşenin görünür parlaklığı 4,21 kadir, sistemin görünür parlaklığı ise 4,02 kadirdir. İki yıldız ortak kütle merkezleri etrafında eliptik yörüngeler üzerinde hareket etmektedir. Hareketi incelemek için daha kütleli olan A bileşeni sabit kabul edilip daha küçük kütleli B bileşeni A'nın etrafında bir elips çizer. B bileşenin dolanım periyodu 88,38 yıl;

a) A bileşenin sıcaklığı kaç K dir?

b) A bileşenin ortalama özkütlesi Güneşin ortalama özkütlesinin ne kadarıdır?

c) B bileşenin mutlak parlaklığı kaç kadirdir?

d) B bileşenin sıcaklığı kaç K dir?

e) B bileşenin ortalama özkütlesi Güneşin ortalama özkütlesinin ne kadarıdır?

f) Göreli yörüngenin yarı büyük eksenin açısai büyüklüğü kaç yay saniyedir?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Güneşin yarıçapı $R_{\odot} = 700000 \text{ km}$, Güneşin sıcaklığı $T_{\odot} = 5780 \text{ K}$, Güneşin kütlesi $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, Güneşin ışıma gücü $L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$, Güneşin mutlak parlaklığı $M_{\odot} = 4,83$ kadir, Güneşin görünür parlaklığı $m = -26,74$ kadir, Stefan-Boltzmann sabiti $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ olarak veriliyor.)

4. Asteroit kuşağı, Güneş Sistemi'nde Mars ile Jüpiter yörüngeleri arasında yer alan, küçük gök cisimlerinin yoğunlaştığı toroidal bir bölgedir. Bu kuşağın iç sınırı yaklaşık 2 AB olup Güneş'e en yakın kısımdır. Bu kuşağın dış sınırı yaklaşık 3,3 AB olup Jüpiter gezegenin etkisinin arttığı bölgedir. Asteroitlerin büyük çoğunluğu 2,2 AB ile 3,2 AB arasındaki "Ana Kuşak" olarak adlandırılan bölgede bulunur. Asteroit kuşağın sınırlarını ve iç yapısını belirleyen en önemli unsur Jüpiterin kütleçekimsel etkisidir. Asteroit kuşağın sınırları kesin olmamasına rağmen farklı asteroit grupları bu sınırların hemen içinde veya dışında kümelenir. Hungaria Ailesi asteroitleri sınırları 1,78 AB-2 AB arasında olup Ana Kuşağın hemen iç kısmında yer alan kararlı gruptur. Ana Kuşak asteroitleri sınırları 2,1 AB-3,3 AB arasında olup asteroitlerin %90'ından fazlasının bulunduğu asıl bölgedir. Cybele Asteroitleri 3,3 AB-3,5 AB arasında olup asteroitlerin Ana kuşağının hemen dışındaki küçük bir asteroit grubudur. Hilda Asteroitleri 3,7 AB-4,2 AB arasında olup asteroitlerin Ana kuşağının dış sınırın ötesindeki dinamik bir asteroit grubudur. Asteroitleri incelemek için odak/çap oranı 10 olan bir aynalı teleskop kullanılıyor. Bu teleskopa odak uzaklığı 32 mm lik bir göz merceği takıldığında teleskobun büyütmesi 800 kat oluyor. Bu teleskopla 500 nm dalga boyunda çapı 100 km olan eliptik yörünge üzerinde hareket eden ve Ana Kuşağında yer alan küresel şeklindeki bir asteroit gözlenmektedir. Asteroit gözlemciye en yakında iken asteroidin görüntüsü gözlem alanını tamamen doldurmaktadır. Asteroidin dolanım periyodu 2091 gün, görünür parlaklığı 11,78 kadirdir. Gözlemcinin göz bebeğinin çapı $d = 5 \text{ mm}$, bu gözün ayırt edebileceği yıldızların görünür parlaklığı $m_{\text{göz}} = 6$ kadirdir.

a) Buna göre asteroidin hareket ettiği elipsin alanı kaç kilometre karedir?

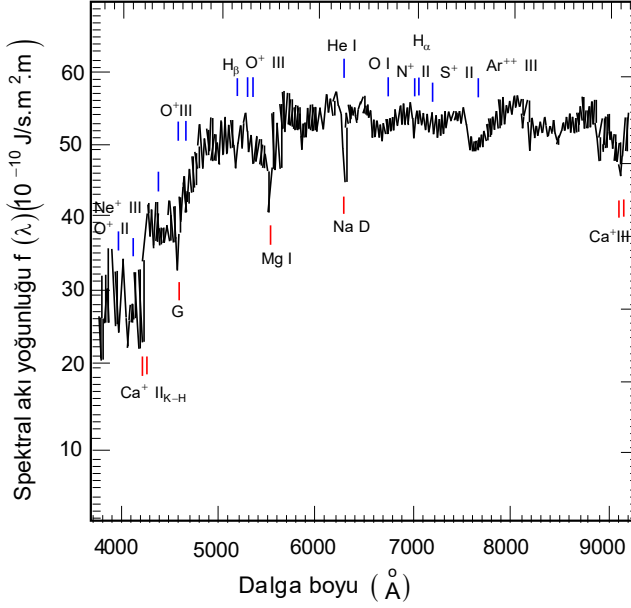
b) Asteroit perihelion noktasında 1000 km yolu kat ettiği sürede aphelion noktasında kaç km yol alır?

c) Gözün göz merceğine ve teleskopun aynasına düşen ışık akıları eşit ise bu teleskopla gözlenebilecek en düşük görünür parlaklığı kaç kadirdir?

Bu teleskopla Hilda Asteroitleri de incelenmektedir. İncelenen asteroitler bu kuşağın en dışında yer almakta ve Ana Kuşağında bulunan ve incelenen asteroit ile aynı albedoya sahiptir. İnceleme asteroit ile Dünya arasındaki uzaklık minimum olduğu durumda gerçekleşmektedir.

d) Buna göre teleskopla Hilda Asteroitleri kuşağının en dışında gözlenebilecek bir asteroidin minimum çapı kaç km dir?

(Dünya Güneşin etrafında çembersel yörünge üzerinde hareket ediyor kabul ediliyor. 1 AB = $150 \cdot 10^6 \text{ km}$, Dünyanın yörüngesel hızı 30 km/s olarak veriliyor.)



5. Abell 2255 galaksi kümesi Hercules (Herkül) takım-yıldızında yer alıp gökyüzünde oldukça geniş bir alan kaplar. Bu galaksi kümesi oldukça yoğun bir galaksi kümesidir ve çok sayıda eliptik ve sarmal galaksi barındırır. Galaksi kümesi daha çok K ve M tipi yıldızlardan (K turuncu cüceler ve M kırmızı cüceler) ve ağırlıklı olarak K tipi yıldızlardan oluşur. Eliptik galaksilerdeki K tipi yıldızlar yaşlı olan yıldızlar ve bu gaz ve toz az olduğu için yıldız oluşumunun az olduğu da anlamına gelir. K türü yıldızların ortalama kütleleri $M_K = 0,7M_\odot$ ve ışıma güçleri $L_K = 0,3 L_\odot$ olarak kabul edilebilir. Galaksi kümeden incelenen spektrumda bazı laboratuvar dalga boyları bilinmektedir. $Ca^{+} II$ K&H kalsiyum elementinin tek kat iyonlaşmış (Call) hali tarafından oluşturulan ve spektrumun mor ötesinde yer alan belirgin K soğurma

çizgisinin dalga boyu $3933,7 \text{ Å}$ ve belirgin H soğurma çizgisinin dalga boyu $3968,5 \text{ Å}$ olan bir dublet çizgisidir. G bandı yıldız atmosferinde moleküllerin varlığını

gösterir. CH karbon monohibrit gibi moleküller düşük sıcaklıklarda daha kararlı halde oldukları için bu çizgi nispeten daha

soğuk yıldızlarda belirgin olur ve dalga boyu 4304 Å dur. Düşük sıcaklarda nötr atomlar da bulunmaktadır ve ışınım ya da soğurma çizgileri spektrumda elektronların atom içindeki geçişlerden kaynaklanmaktadır. Mg atomu için dalga boyu

5175 Å , Na atomu için dalga boyu 5894 Å dur. Abell 2255 galaksi kümesinin görünür parlaklığı $m = 13,57$ kadirdir. Galaksi kümesinin etkin çapı (küme içerisindeki en parlak eliptik galaksilerin bulunduğu bölgenin çapı) $1,9'$ yay dakika açısı ile gözlenmektedir. Galaksi kümesindeki etkin çapında bulunan yıldızların hız dispersiyonu en doğru bir şekilde Mg I spektrumun incelenmesinden elde ediliyor. K tipi yıldızların baskın olduğu eliptik galaksilerde Mg I çizgisi, spektrumun en derin ve en temiz soğurma çizgilerinden birisi olduğu için ölçüm hassasiyeti artar. Magnezyum çizgisi, yıldız atmosferindeki basınç ve sıcaklık değişimlerinden ziyade, galaktik ölçekteki hız değişimlerine karşı çok kararlıdır. Ayrıca optik teleskoplardaki CCD dedektörlerin kuantum verimliliğinin en yüksek olduğu bölge $5100 \text{ Å} - 5500 \text{ Å}$ dur. Bu soğurma çizgisinin termal ve basınç etkilerinden arındırılmış net genişliği (Doppler genişlemesi) $\Delta\lambda_{Mg I} = 4,3 \text{ Å}$ olarak ölçülüyor.

a) Bu eliptik galaktik kümenin yıldızların kütlesi Güneş kütlesinin yaklaşık olarak kaç katıdır?

b) Galaksi kümesinin karanlık maddenin kütlesi yıldızların kütlesinin yaklaşık olarak kaç katıdır?

Galaksiler arasında gaz ve bu gazda en çok protonlar ve elektronlar bulunmaktadır. Bu gazda termal hız dağılımı, galaksilerin dinamik hız dağılımına eşit olduğunu kabul edelim.

c) Buna göre gazdan yayılan ışımanın dalga boyu kaç nm dir?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, ışık hızı $c = 300000 \text{ km/s}$, Hubble sabiti $H = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, Güneşin kütlesi $M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, Güneşin mutlak parlaklığı $M_G = 4,83$ kadir, Güneşin görünür parlaklığı $m = -26,74$ kadir, Güneşin ışıma gücü $L_G = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$, Boltzmann sabiti $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$, Wien sabiti $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$, protonun kütlesi $1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, olarak veriliyor.)

6. Astronomide kompakt gök cisimler, kütlesi çok büyük olmasına rağmen hacmi bu kütleye oranla son derece küçük olan gök cisimlerini tanımlamak için kullanılan genel bir terimdir. Bu cisimler, normal atomik maddenin taşıyabileceği basınç sınırlarını aşmış, maddenin alışlagelmiş yapısının bozulduğu yüksek özkütleli yapılardır. Yıldız evriminin sonunda, nükleer yakıtını tüketen bir yıldız artık kütleçekim kuvvetine karşı koyacak dışa doğru bir ışıma basıncı üretemez. Bu durum, kütleçekimsel çökme (gravitasyonel collapse) sürecini başlatır. Kütlesi M olan bir kompakt bir gök cisim (örneğin bir nötron yıldızı), çevresindeki tamamen iyonize olmuş hidrojen gazını küresel simetrik bir şekilde kendine doğru çekmektedir (akresyon). Sistemin kararlı bir yapıda kalabilmesi için dışa doğru olan radyasyon kuvveti ile içe doğru olan kütleçekim kuvvetinin dengelenmesi gerekir. Radyasyonun ya da ışımanın birim alandan, birim zamanda taşıdığı enerjiye ışıma gücü ya da ışık akısı denir. Radyasyonun ana kaynağının sadece Thomson saçılması olduğunu kabul edebiliriz. Thomson saçılmasının bir elektronun radyasyon basıncının oluşturduğu kuvvet ile kütleçekim kuvvetleri arasındaki dengeye dayanır. Thomson saçılmasının tesir kesiti σ_T ile tanımlanır. Eddington ışıma gücü L_{Ed} dışa doğru radyasyon kuvveti ile içe doğru kütleçekim kuvvetinin dengede olduğu ışıma gücü olarak tanımlanır. Eddington sınırı kütle ile lineer artar. Kompakt gök cismin kütlesi ne kadar büyük ise yutabileceği ve dolayısıyla radyasyona dönüştürebileceği madde miktarı o kadar fazladır. Kara delikler ve nötron yıldızları üzerlerine yığılan maddenin radyasyon üretilmesi yoluyla bu sınıra çok yaklaşabilirler. Bir quasarın parlaklığı genellikle merkezi kara deliğin kütlesine bağlı olan bu Eddington sınırı belirler.

a) Eddington ışıma gücünü proton için nedir?

Eddington ışıma gücü sınırı çıkarımında kompakt gök cismine hidrojen gazın küresel simetrik bir şekilde merkeze çekildiği kabul edilir. Ancak kompakt gök cisimler ve özellikle kara delikler çok yüksek bir ω açısal hızla sahipse, olay ufkuna yakın akresyon diskinde yer alan protonlar da bu açısal hızla dönmeye başlar. Olay ufkunda dönen protonlara etki eden merkezkaç kuvveti kütleçekimine karşı koyar ve radyasyon basıncının kütleçekimini yenmesini kolaylaştırır. Bu durumda Eddington sınırı azalır. Çok düşük açısal hızla dönen kara delikler için merkezkaç kuvvetin etkisi ihmal edilebilir. M kütleli iki kara delikten birisinin dönmesini ihmal edebiliriz, diğeri ise yüksek açısal hızla dönmektedir.

b) Hangi kritik açısal hız için kara cisim ışıma yapmasa dahi olay ufkundaki protonlar kara delik tarafında çekilerek yutulmaz?

c) Dönen kara deliğin Eddington sınırı dönmeyen kara deliğin Eddington sınırının yarısı kadar olduğuna göre dönen kara deliğin ω açısal hızı nedir?

Dönen bir kara deliğin etrafında dönen akresyon diskinde birim zamanda kara deliğe düşen protonların kütlesi $\dot{M}_p$ olsun. Bu maddenin ne kadarını enerjiye dönüştüğünü maddenin kütle-enerji dönüşüm verimi ya da verimlilik η katsayısı ile tanımlanabilir.

d) Güneşin kütlesine eşit ve Eddington sınırı dönmeyen aynı kütleli kara deliğin Eddington sınırının yarısı kadar olan bir kara deliğin verimlilik katsayısı $\eta=0,25$ olduğuna göre bu kara deliğe birim zamanda düşen kütle nedir?

İşimaya dönüşemeyen ve akresyon diskinde kara delik üzerine düşen protonlar kara deliğin kütlesinin artmasına sebep olur. Zamanla kara deliğin kütlesi artar. Artan kütle daha çok kütle çeker ve kara deliğin verimlilik katsayısı artmaya başlar. Kütle artışı kara deliğin kütlesi mertebesinde ise verimlilik katsayısı sabit olarak kabul edilebilir.

e) Kara delik üzerine birim zamanda düşen protonların kütlesi sabit kabul edilirse kara deliğin kütlesinin iki katına çıkması için kaç yıl gerekir?

Kara delik üzerine birim zamanda düşen protonların kütlesi kara deliğin kütlesinin artması ile artmaktadır. Kütle artışına rağmen kütle artışı kara deliğin kütle mertebesinde ise kara deliğin verimlilik katsayısı kabul edilebilir.

f) Kara delik üzerine birim zamanda düşen protonların kütlesi kara deliğin kütlesinin artması ile arttığını göz önünde bulundurursak kara deliğin kütlesinin iki katına çıkması için kaç yıl gerekir?

(Işık hızı $c=300000$ km/s, $\pi=3,14$, protonun kütlesi $1,672 \cdot 10^{-27}$ kg, Güneşin kütlesi $M_{\odot}=1,989 \cdot 10^{30}$ kg, Güneşin ışıma gücü $L_{\odot}=3,846 \cdot 10^{26}$ W, Thomson saçılmasının tesir kesiti $\sigma_T=6,652 \cdot 10^{-29}$ m² olarak veriliyor.)

7. Liu Cixin (d. 23 Haziran 1963), çağdaş bilimkurgu edebiyatının dünyadaki en önemli temsilcilerinden biri olarak kabul edilen çinli bir yazardır. Liu Cixin'in ünlü bilimkurgu serisi "Üç Cisim Problemi" (The Three-Body Problem) evrenine ait ve Güneş Sisteminden $r_{T-\odot}=50$ pc uzaklıkta üçlü bir yıldız sisteminde yer alan Trisolaris gezegeni yer almaktadır. Bu gezegenden Güneşin dikine olan hız gözlemleri yapılıyor. Bu gözlemlerden Jüpiter'in yörünge dönemi 4322 Dünya günü olarak belirleniyor. Ayrıca Güneşin ve Jüpiterin yüzey sıcaklıklarını, sırasıyla 5800 K ve 165 K olarak hesaplanıyor. Gözlemlerden Güneşin yarıçapının da doğru hesaplandığı bilinmektedir. Jüpiter gezegenin yörüngesinin çembersel olduğunu ve Jüpiter ile Güneşin birer küre oldukları kabul ediliyor. Trisolaris gezegeninde yaşayan astronomların kullandıkları teleskopa bağlı spektrometre ölçüm cihazları Doppler olayı sebebiyle radyal hızların değişimlerini 0,01 m/s hassasiyetle ölçebilmektedir.

a) Geçiş geometrisini kullanarak Trisolaris astronomlarının Jüpiteri Güneş önünden geçerken yakalama olasılığı yüzdesi yaklaşık olarak nedir?

b) Jüpiter Güneşe en büyük açısal uzaklığı kaç yay saniyesidir?

c) Güneşten alınan ışıktaki Jüpiter geçişi kaynaklı kaybın %1 olduğu gözlemlendiğine göre Jüpiterin yarıçapı kaç km dir?

d) Güneş ve Jüpiteri kara cisim varsayılırsa maksimum açısal uzaklıkta Jüpiter'i görüntüleyebilmek için ölçülmesi gereken iki cismin parlaklıkları (kontrast) oranı nedir?

e) Jüpiter gezegenin kütlesi de hesaba katılırsa bu gezegenin ölçülen radyal hızının genlik değişimi kaç km/s dir?

f) Kütlesi Jüpiter kütlesinin 0,3 kadarı olan Satürn gezegenin en büyük açısal sapma Trisolaris gezegeni astronomlardan 1,9" olarak ölçülürse, Satürn gezegenin Jüpiter gezegenin üzerindeki radyal hız değişimleri ölçülebilir mi?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma=6,67.10^{-11}$ m³/kg.s², Güneşin kütlesi $M_{\odot}=2.10^{30}$ kg, Güneşin yarıçapı $R_{\odot}=700000$ km, Güneş-Dünya arasındaki uzaklık 1 AB=150.10⁶ km, Jüpiter gezegenin kütlesi $M_J=1,9.10^{27}$ kg olarak veriliyor.)

Uydu	T (gün)	S_{Eur} (gün)	a (.10 ³ km)
Io	-	3,525464	421,8
Europa	3,551181	x	671,1
Ganymede	-	7,050926	1070,4
Callisto	-	4,511071	1882,7

8. Jüpiter'in en büyük dört uydusu olan Io, Europa, Ganymede ve Callisto, 1610 yılında Galileo Galilei tarafından keşfedildikleri için "Galileo Uyduları" olarak bilinmektedir. Galileo uydularının en dikkat çekici özelliği, en içteki üç uydu arasındaki Laplace Rezonansıdır. Bu rezonans, uyduların birbirlerine uyguladıkları kütleçekimsel etkilerle yörüngelerini stabilize eder. Rezonans oranı sırasıyla 4:2:1 dir. Ganymede Jüpiter etrafında 1 tam tur attığında, Europa 2 tam tur, Io ise 4 tam tur atar. Europa uydusunun dolanım periyodu ve dört uydunun Jüpiter'e olan a uzaklıkları tabloda verilmiştir. Sinodik periyot, bir gök cisminin başka bir referans cismiyle aynı gökyüzü dizilimine (kavuşum) geri dönmesi için geçen süredir. Io, Ganymede ve Callisto uyduların Europa uydusuna göre sinodik (S_{Eur}) periyotları da verilmiştir.

a) Yörünge-Kavuşum Dönemi ilişkisini kullanarak yukarıda verilen tablodaki boş kalan değerleri hesaplayınız.

b) Hesapladığınız yörünge dönemlerini Dünya yılına, yörünge yarı-büyük eksen uzunluklarını Astronomi Birimine (AB) çevirerek yeni bir tablo oluşturun. Bu tabloyu kullanarak yörünge yarı-büyük eksen uzunluklarına (a) karşılık yörünge dönemlerini (T), her iki parametrenin logaritmalarını alarak çiziniz.

c) Bu grafiğe bir doğru uyumlayınız ve doğrunun eğimini bulunuz.

d) Galilei uydularının kütlelerinin Jüpiter'in kütlesinden çok küçük olduğunu, uydular arası kütleçekimin ihmal edildiğini ve uydu yörüngelerinin çembersel olduğunu varsayarak Jüpiter'in kütlesini hesaplayınız.

(Evrensel çekim sabiti $\gamma=6,67.10^{-11}$ m³/kg.s, $\pi=3,14$, 1 AB=149,6.10⁶ km, 1 yıl=365,25 gün olarak veriliyor.)

9. Süpernova SN1987A, $m = 3$ kadir ile en parlak konumuna 15 Mayıs 1987 tarihinde ulaşmıştır. Daha sonra sönerek 4 Şubat 1988 tarihinde çıplak gözle görülemez hale gelmiştir ($m_{\text{göz}} = 6$ kadir). Spektrumun B bandındaki aydınlanma (E) ya da akı (flux $\mathcal{F}$) t zamana göre;

$$E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}; E = \mathcal{F}; E_0 = \mathcal{F}_0$$

şeklinde değişmektedir. Burada $E_0 = \mathcal{F}_0$ ve τ birer sabittir.

a) τ sabiti kaç gündür?

Teleskoba gelen ışınma gücü ya da ışık akısı;

$$E_{\text{göz}} d_{\text{göz}}^2 = T E_T D_T^2$$

gibi tanımlanmaktadır. Burada $E_{\text{göz}}$ gözdeki aydınlanma ya da akı, E_T teleskoptaki aydınlanma ya da akı, $d_{\text{göz}}$ gözün çapı, d_T teleskobun çapı, T teleskobun iletim verimliliği olarak tanımlanır. Gözün ortalama çapı $d_{\text{göz}} = 6$ mm, bir teleskobun çapı $D = 15,24$ cm dir.

b) Teleskobun iletim verimliliği $T = \%70$ olduğuna göre süpernovanın gözle görülebileceği son günün tarihini ± 1 gün hassasiyetle nedir?

Süpernova patlamalarda açığa çıkan patlama enerjisi o kadar devasadır ki ($10^{44} - 10^{45}$ J mertebesinde) fırlatılan madde ilk birkaç yıl boyunca yıldızlararası ortamın çok küçük özkütlesinden dolayı bu hızı kayda değer miktarda değiştiremez. Bundan dolayı kısa vadeli (birkaç yıllık) hesaplamalarda maddenin uzayda yayılma hızı sabit olarak kabul edilebilir. SN1987A süpernovanın spektrum inlemelerinden fırlatılan maddelerin uzaydaki hızları yaklaşık olarak 20000 km/s olarak olduğu ölçülmüştür. Bir yıl boyunca fırlatılan maddenin hızı sabit kalıyor ve madde küresel olarak yayıldığı kabul edilirse süpernovanın yüzey alanı S , genişleyen maddenin sıcaklığı 5450 K oluyor. Bir yıl sonra uzayda kattı maddeden dolayı hız;

$$v = v_0 (1 - e^{-\chi t})$$

şeklinde azalmaya başlıyor. Burada $\chi = 4,6 \text{ yıl}^{-1}$ bir nevi direnç katsayısıdır.

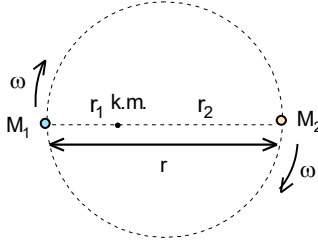
c) Bir yıldan sonra teleskopla görünemeyecek duruma gelene kadar süpernovanın alanı kaç S olur?

d) Bir yıldan sonra teleskopla görünemeyecek duruma gelene kadar fırlatılan maddelerin sıcaklığı kaç K dir?

XXXII. BİLİM OLİMPİYATLARI-2024 İKİNCİ AŞAMA 3. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI CEVAPLARI

1. a) 5,76 AB; b) $\approx 21,5$ km/s; c) $24,8 \cdot 10^{45}$ kg.m/s; d) $1,89 \cdot 10^{-29}$ s/yıl; e) ≈ 2 AB
f) %16; g) normal yıldız parçalanmaz; h) parçalanması mümkün olabilir; i) $16,386 \cdot 10^{10}$ m/s²
2. a) 43,65 Mpc; b) ≈ 71 km/s.Mpc; c) $75,22 \cdot 10^{27}$ w/s; d) 0,76
3. a) 5229 K; b) 1,4; c) 7,4 kadir; d) 3823 K; e) 1,5 ; f) 4,26"
4. a) $71,25 \cdot 10^{16}$ km² ; b) ≈ 778 km; c) 19,546 kadir; d) ≈ 4 km
5. a) $6,5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$; b) ≈ 5 ; c) $16 \text{ \AA}$
6. a) $L_{\text{Ed-p}} = 6,3226 \cdot M = 6,3226 \cdot M_{\odot} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = 12,5188 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{12,5188 \cdot 10^{30}}{3,846 \cdot 10^{26}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot} = 32550 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot}$
b) $\frac{c^3}{2\sqrt{2}\gamma M}$; c) $\frac{c^3}{4\gamma M}$; d) $\dot{M}_p = 2,782 \cdot 10^{14}$ kg/s; e) $302 \cdot 10^6$ yıl; f) $10,43 \cdot 10^6$ yıl
7. a) $\approx 9 \cdot 10^{-4}$; b) $\approx 0,104''$; c) 70000 km; d) $\approx 6,55 \cdot 10^{-9}$; e) 12 m/s; f) Etki teleskoptaki spektroskopik sistemi ile ölçülebilir.
8. a) 1,7691388 gün; 7,154554 gün; 16,689 gün; b) $\log\left(\frac{a}{AB}\right)$ -2,549825; -2,348144; -2,1453855; -2,1453855
de $\log\left(\frac{T}{T_D}\right)$ -2,314828; -2,0122174; -1,7080076; -1,34016; $\log\left(\frac{a}{AB}\right) = \frac{2}{3} \log\left(\frac{T}{T_D}\right) + n$
c) Elde edilen denklem tamamen Kepler yasasına uymaktadır; d) $\approx 1,9 \cdot 10^{27}$ olarak bulunur.
9. a) 95,9 gün; b) 12 Eylül 1989; c) $\approx 5,44$; d) ≈ 1000 K

XXXII. BİLİM OLİMPİYATLARI-2024 İKİNCİ AŞAMA 3. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI ÇÖZÜMLERİ



1. a) Yıldızların kütle merkezine olan uzaklıklar;

$$M_1 r_1 = M_2 r_2 ; r = r_1 + r_2 ; r_1 = \frac{M_2 r}{M_1 + M_2} ; r_2 = \frac{M_1 r}{M_1 + M_2}$$

yıldızların kütle merkezi etrafındaki açısal hız ve dolanım periyodu;

$$M_1 \omega^2 r_1 = \frac{M_1 M_2 \omega^2 r}{M_1 + M_2} = \frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} ; \omega = \sqrt{\frac{\gamma (M_1 + M_2)}{r^3}} ; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma (M_1 + M_2)}}$$

iki yıldız arasındaki uzaklık;

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} (1+2) \cdot 2 \cdot 10^{30} (8.365 \cdot 24 \cdot 3600)^2}{4 \cdot 3,14^2}} =$$

$$= 8,64 \cdot 10^{11} \text{ m} = 8,64 \cdot 10^8 \text{ km} = \frac{8,64 \cdot 10^8}{150 \cdot 10^6} = 5,76 \text{ AB}$$

olarak bulunur.

b) Her bir yıldızın hızı;

$$v_1 = \omega r_1 = \frac{2\pi}{T} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \sqrt[3]{\frac{\gamma (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2}} = M_2 \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma}{(M_1 + M_2)^2 T}}$$

$$v_2 = \omega r_2 = \frac{2\pi}{T} \frac{M_1}{M_1 + M_2} \sqrt[3]{\frac{\gamma (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2}} = M_1 \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma}{(M_1 + M_2)^2 T}}$$

aralarındaki bağıl hız;

$$v = v_1 + v_2 = (M_1 + M_2) \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma}{(M_1 + M_2)^2 T}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\gamma (M_1 + M_2)}{T}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 3,14 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} (1+2) \cdot 2 \cdot 10^{30}}{8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}} = 21520 \text{ m/s} = 21,5 \text{ km/s}$$

olarak bulunur.

c) Sistemin açısal momentumu

$$L = M_1 r_1^2 \omega + M_2 r_2^2 \omega = M_1 \left(\frac{M_2 r}{M_1 + M_2} \right)^2 \frac{2\pi}{T} + M_2 \left(\frac{M_1 r}{M_1 + M_2} \right) \frac{2\pi}{T} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \left(\sqrt[3]{\frac{\gamma (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2}} \right)^2 \frac{2\pi}{T} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\gamma^2 M_1^3 M_2^3 T}{2\pi (M_1 + M_2)}} = \sqrt[3]{\frac{(6,67 \cdot 10^{-11})^2 (2 \cdot 10^{30})^3 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 10^{30})^3 \cdot 8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{2 \cdot 3,14 \cdot (1+2) \cdot 2 \cdot 10^{30}}} = 24,8 \cdot 10^{45} \text{ kg.m/s}$$

olarak bulunur.

d) Sistemin açısal momentum sabittir. Logaritma alırsak;

$$3 \ln L = 2 \ln \gamma + 3 \ln M_1 + 3 \ln M_2 + \ln T - \ln (M_1 + M_2) ; M_1 + M_2 = \text{sabit}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi türevlersek;

$$0 = \frac{3\dot{M}_1}{M_1} + \frac{3\dot{M}_2}{M_2} + \frac{\dot{T}}{T} ; \dot{M}_1 = -\dot{M}_2 = -\dot{M}$$

denklemleri elde edilir. Buradan;

$$3\dot{M} \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right) = \frac{\dot{T}}{T} ; \dot{T} = \frac{3\dot{M}(M_2 - M_1)T}{M_1 M_2} = \frac{3 \cdot 10^{-7} (2-1) \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 8 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{2 \cdot 10^{30} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^{30}} = 1,89 \cdot 10^{-29} \text{ s/yıl}$$

olarak bulunur.

e) Sistemin açısal hızı sadece yıldızların kütlelerin toplamına bağlıdır. Bu durumda iki yıldız arasındaki yeni uzaklık r' cinsinden yeni açısal hız;

$$\omega' = \sqrt{\frac{\gamma(M_1 + M_2)}{r'^3}}$$

ile verilir. Yıldızların yeni kütleleri;

$$M'_1 = 0,5M_\odot; M'_2 = 2,5M_\odot; M'_1 + M'_2 = M_1 + M_2 = 3M_\odot$$

yıldızların kütle merkezine yeni olan uzaklıklar;

$$M'_1 r'_1 = M'_2 r'_2; r'_1 = r'_1 + r'_2; r'_1 = \frac{M'_2 r'}{M'_1 + M'_2} = \frac{2,5M_\odot r'}{3M_\odot} = \frac{5r'}{6}; r'_2 = \frac{M'_1 r'}{M'_1 + M'_2} = \frac{0,5M_\odot r'}{3M_\odot} = \frac{r'}{6}$$

sistemin açısal momentumu;

$$\begin{aligned} L' &= M'_1 r'^2_1 \omega' + M'_2 r'^2_2 \omega' = M'_1 \left(\frac{M'_2 r'}{M'_1 + M'_2} \right)^2 \sqrt{\frac{\gamma(M_1 + M_2)}{r'^3}} + M'_2 \left(\frac{M'_1 r'}{M'_1 + M'_2} \right)^2 \sqrt{\frac{\gamma(M_1 + M_2)}{r'^3}} = \\ &= \frac{2M'_1 M'_2 r'^2}{M_1 + M_2} \sqrt{\frac{\gamma(M_1 + M_2)}{r'^3}} = 2M'_1 M'_2 \sqrt{\frac{\gamma r'}{M_1 + M_2}} \end{aligned}$$

korunduğu için iki yıldız arasındaki yeni uzaklık;

$$\begin{aligned} 2M'_1 M'_2 \sqrt{\frac{\gamma r'}{M_1 + M_2}} &= \sqrt[3]{\frac{\gamma^2 M_1^3 M_2^3 T^2}{2\pi(M_1 + M_2)}}; 64M'^6_1 M'^6_2 \cdot \frac{\gamma^3 r'^3}{(M_1 + M_2)^3} = \frac{\gamma^4 M_1^6 M_2^6 T^2}{4\pi^2 (M_1 + M_2)^2} \\ r' &= \frac{M_1^2 M_2^2}{M'^2_1 M'^2_2} \sqrt[3]{\frac{\gamma(M_1 + M_2) T^2}{256\pi^2}} = \frac{M_1^2 M_2^2}{4M'^2_1 M'^2_2} \sqrt[3]{\frac{\gamma(M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2}} = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4 \cdot 0,5^2 \cdot 2,5^2} \cdot 5,76 \text{ AB} = 3,686 \text{ AB} \end{aligned}$$

iki yıldız arasındaki uzaklığın değişimi;

$$\Delta r = r - r' = 5,76 - 3,686 = 2,074 \text{ AB} \approx 2 \text{ AB}$$

olarak bulunur.

f) Nötron yıldızın ilk andaki yarıçapı;

$$V_{2,1} = \frac{4\pi R_{21}^3}{3} = \frac{M_2}{\rho}; \frac{4,3,14 \cdot R_{21}^3}{3} = \frac{2,2 \cdot 10^{30}}{3 \cdot 10^{17}}; R_{21} = 1,471 \cdot 10^4 \text{ m}$$

kara deliğe dönüşmeden önce nötron yıldızın yarıçapı;

$$V_{2,1} = \frac{4\pi R_{22}^3}{3} = \frac{M'_2}{\rho}; \frac{4,3,14 \cdot R_{22}^3}{3} = \frac{2,2,5 \cdot 10^{30}}{3 \cdot 10^{17}}; R_{21} = 1,584 \cdot 10^4 \text{ m}$$

nötron yıldızın yüzeyindeki ilk çekim alanı;

$$g_{21} = \frac{\gamma M_2}{R_{21}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,2 \cdot 10^{30}}{1,471 \cdot 10^4} = 18,137 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

kara deliğe dönüşmeden önce nötron yıldızın yüzeyindeki çekim alanı;

$$g_{21} = \frac{\gamma M'_2}{R_{22}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,5 \cdot 10^{30}}{1,584 \cdot 10^4} = 21,054 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$$

aranan artış;

$$\frac{g_{22} - g_{21}}{g_{21}} = \frac{21,054 - 18,137}{18,137} = 0,16 = \%16$$

olarak bulunur.

g) İki yıldızın yeni kütleler ve aralarındaki yeni uzaklık için normal yıldızın Roche Lobun ortalama yarıçapı;

$$R_{L1} = 0,46 r' \sqrt[3]{\frac{M'_1}{M'_1 + M'_2}} = 0,46 \cdot 3,686 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,5M_\odot}{3M_\odot}} = 0,93 \text{ AB}$$

olarak bulunur. Bu mesafede kara deliğin etkisi kendisini göstermeye başlar. Ana kol yıldızın kütlesi Güneşin kütlelerinin yarısına düştüğüne göre yıldızın yarıçapı bir 500000 km nin altındadır. Bu mesafe AB cinsinden;

$$500000 \text{ km} = \frac{500000}{150 \cdot 10^6} = 0,0033 \text{ AB}$$

olur. Bir yıldız yıkıma sürükleyecek gel-git olaylarıdır. Çok basit olarak nötron yıldızın hareketsiz olduğunu ve normal yıldızın nötron yıldızın etrafında yarıçapı r çembersel yörünge üzerinde hareket ettiğini kabul edelim. Bu durumda yıldızın açısal hızı;

$$\frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} = M_1 \omega^2 r; \omega^2 = \frac{\gamma M_2}{r^3}$$

olur. R yarıçaplı bir yıldızdan herhangi m kütleli bir parçanın durumu inceleyelim. Kara delik tarafından çekilmesi için;

$$\frac{\gamma M_1 m}{(r-R)^2} - \frac{\gamma M_1 m}{R^2} = m \omega^2 (r-R)$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{\gamma M_2}{(r-R)^2} = \frac{\gamma M_2}{r^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2} = \frac{\gamma M_2}{r^2 \left(1 - \frac{2R}{r}\right)} = \frac{\gamma M_2}{r^2} \left(1 + \frac{2R}{r}\right) = \frac{\gamma M_2}{r^2} + \frac{2\gamma M_2 R}{r^3}$$

$$\frac{\gamma M_2}{r^2} + \frac{2\gamma M_2 R}{r^3} - \frac{\gamma M_1}{r^2} = \frac{\gamma M_2 (r-R)}{r^3}; \frac{3M_2 R}{r^3} = \frac{M_1}{R^2}; r = R \sqrt[3]{\frac{3M_2}{M_1}}$$

olarak bulunur. Soruda verilenler için bu mesafe;

$$r_{\text{gel-git}} = 0,0033 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,5 M_{\odot}}{0,5 M_{\odot}}} = 0,08 \text{ AB} \ll \mathcal{R}_{L1} = 0,93 \text{ AB}$$

olduğu için normal yıldız parçalanmaz.

h) Kızıl yıldızın yarıçapı;

$$R_{\text{kızıl}} = 90 R_{\odot} = 90 \cdot 700000 = 63 \cdot 10^6 \text{ km} = \frac{63 \cdot 10^6}{150 \cdot 10^6} = 0,42 \text{ AB}$$

olur. Soruda verilenler için gel-git olayın baskın olacağı mesafe;

$$r_{\text{gel-git}} = 0,42 \cdot \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2,5 M_{\odot}}{0,5 M_{\odot}}} = 1,0358 \text{ AB}$$

artık $\mathcal{R}_{L1} = 0,93 \text{ AB}$ mesafesiyle kıyaslanır olduğu için kızıl devin parçalanması mümkün olabilir.

i) Kara deliğin yarıçapı;

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R} = 0; v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}; c = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R_{\text{gr}}}}; R_{\text{gr}} = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

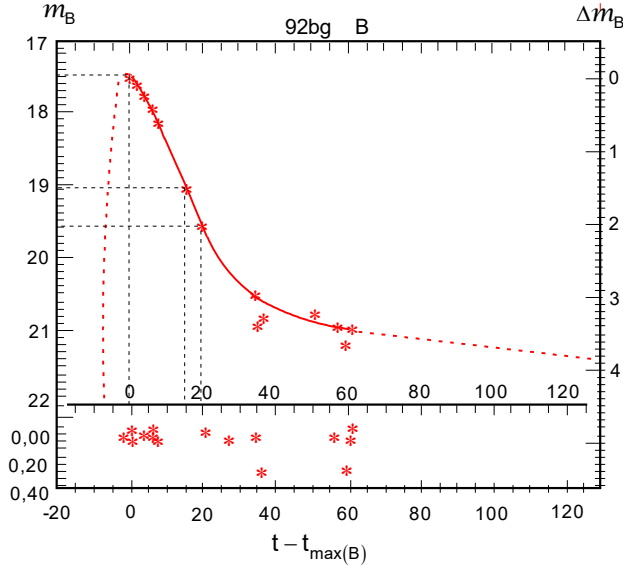
ile verilir. Aranan yerçekimi ivme farkı;

$$\Delta g = \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2} - \frac{\gamma M}{(R_{\text{gr}} + \ell)^2} = \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2} - \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2 \left(1 + \frac{\ell}{R_{\text{gr}}}\right)^2} = \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2} - \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2 \left(1 + \frac{2\ell}{R_{\text{gr}}}\right)} = \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2} - \frac{\gamma M}{R_{\text{gr}}^2} \left(1 - \frac{2\ell}{R_{\text{gr}}}\right) = \frac{2\gamma M \ell}{R_{\text{gr}}^3} = \frac{\ell c^6}{4\gamma^2 M^2}$$

olarak bulunur. Sorudaki veriler için aranan yerçekimi farkı;

$$\Delta g = \frac{\ell c^6}{4\gamma^2 M^2} = \frac{(300000 \cdot 10^3)^6 \cdot 100}{4 \cdot (6,67 \cdot 10^{-11})^2 (2,5 \cdot 2 \cdot 10^{30})^2} \approx 16,386 \cdot 10^{10} \text{ m/s}^2$$

olur. Olay ufku civarındaki kütleçekim gradyanının ne kadar şiddetli olduğunu gösterir. Bu kadar kısa bir mesafede çekim ivmesinin bu ölçüde değişmesi, herhangi bir fiziksel nesnenin parçalanmadan bu bölgeye yaklaşması imkansızdır.



2. a) Görünür ve mutlak parlaklık arasındaki ilişki sönüm-
lenmeyi hesaba katarsak;

$$m - M = -5 + 5 \cdot \log r + A_B$$

şeklinde yazılabilir. Grafikten maksimum görünür parlak-
lık 17,5 kadir olarak alınabilir. Buradan;

$$17,5 - (-16,5) = -5 + 5 \cdot \log + 0,8; 38,2 = 5 \cdot \log; \log r = 7,64$$

$$r = 10^{7,64} = 43,65 \cdot 10^6 \text{ pc} = 43,65 \text{ Mpc}$$

olarak bulunur.

b) Hubble sabiti ile ilgili Hubble genişleme yasası için;

$$v = H \cdot r$$

yazabiliriz. Buradan Hubble sabiti;

$$H = \frac{v}{r} = \frac{3100}{43,65} \approx 71 \text{ km/s.Mpc}$$

olarak bulunur.

c) 15. dünde yıldızın görünür parlaklığı yaklaşık olarak
19,1 kadir. Bu süre içinde sönümleme;

$$19,1 - 17,5 = 1,6 \text{ kadir}$$

olur. Görünür parlaklık ve ışıma gücü arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log \frac{L}{4\pi r^2}$$

ile verilir. Maksimum görünür parlaklık ve 15 gün sonraki görünür parlaklık için;

$$m - m_{15} = -2,5 \cdot \log \frac{L}{4\pi r^2} + 2,5 \cdot \log \frac{L_{15}}{4\pi r^2}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$-1,6 = \frac{L_{15}}{L}; L_{15} = L \cdot 10^{-1,6} = 0,02512 L$$

ışmanın ilk 15 günde azalma hızı;

$$\frac{L - L_{15}}{15 \text{ gün}} = \frac{L - 0,02512L}{15 \text{ gün}} = \frac{0,97488L}{15 \text{ gün}} = \frac{0,97488 \cdot 10^{35}}{15 \cdot 24 \cdot 3600} = 75,22 \cdot 10^{27} \text{ w/s}$$

olarak bulunur.

d) 15. gün ile 20. gün arasında yarıçap artışı;

$$\Delta r = v_{15} \int_{15}^{20} \left(\frac{t_{15}}{t} \right)^{0,2} dt = 9500 \int_{15}^{20} \left(\frac{15}{t} \right)^{0,2} dt = 16328,336 \int_{15}^{20} t^{-0,2} dt = 16328,33 \cdot \left[\frac{t^{0,8}}{0,8} \right]_{15}^{20} = 16328,33 \left[(20 \cdot 24 \cdot 3600)^{0,8} - (15 \cdot 24 \cdot 3600)^{0,8} \right] = 328067174 \text{ km}$$

20. günündeki yarıçapı;

$$r_{20} = r_{15} + \Delta r = 1000000000 + 328067174 = 1328067174 \text{ km}$$

olur. 20. gündeki görünür parlaklık grafikten 19,6 kadir alınabilir. Buradan 20 gündeki ışıma gücü;

$$m_{20} - m_{15} = -2,5 \cdot \log \frac{L_{20}}{4\pi r^2} + 2,5 \cdot \log \frac{L_{15}}{4\pi r^2}$$

$$19,6 - 19,1 = 2,5 \cdot \log \frac{L_{15}}{L_{20}}; 0,2 = \log \frac{L_{15}}{L_{20}}; L_{20} = L_{15} \cdot 10^{-0,2} = 0,02512 L \cdot 0,63 = 0,0158496 L$$

olur. Sıcaklığa bağlı ışıma gücü;

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

ile verilir. Buradan aranan oran;

$$\frac{L_{20}}{L_{15}} = \frac{4\pi r_{20}^2 \cdot \sigma T_{20}^4}{4\pi r_{15}^2 \cdot \sigma T_{15}^4}; 0,63 = \frac{(1,328 \cdot 10^9)^2 \cdot T_{20}^4}{(10^9)^2 \cdot T_{15}^4} = 1,763584; \frac{T_{20}}{T_{15}} = \sqrt[4]{\frac{0,63}{1,763584}} \approx 0,76$$

olarak bulunur.

3. a) Sisteme olan uzaklık;

$$\pi'' = \frac{1}{r}; r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0,1956''} = 5,11247 \text{ pc} = 5,11247 \cdot 3,26 = 16,666 \text{ ışık yılı} =$$

$$= 16,666 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 = 1,5767 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

olur. Bir yıldızın görünür ve mutlak parlaklığı arasındaki ilişki;

$$m - M = -5 + 5 \log r$$

ile verilir. Buradan 70 Oph A bileşeninin mutlak parlaklığı;

$$4,21 - M_A = -5 + 5 \cdot \log(5,11247) = -5 + 5 \cdot 0,7086 = -5 + 3,54 = -1,46; M_A = 5,67 \text{ kadir}$$

olur. Mutlak parlaklık ve ışıma gücü arasındaki ilişki;

$$M = -2,5 \cdot \log \frac{L}{4\pi \cdot 10^2}; L = 10^{-0,4M} \cdot 4\pi \cdot 10^2$$

ile verilir. 70 Oph A bileşeni ve Güneş için;

$$M_A - M_{\odot} = -2,5 \cdot \log \frac{L_A}{L_{\odot}}; \frac{L_A}{L_{\odot}} = 10^{-0,4(M_A - M_{\odot})} = 10^{-0,4(5,67 - 4,83)} = 10^{-0,336} = 0,461318$$

$$L_A = 0,461318 L_{\odot} = 0,461318 \cdot 3,846 \cdot 10^{26} = 1,774 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

olur. Işıma gücü ile yıldızın yarıçapı ve sıcaklık arasındaki ilişki;

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

ile verilir. 70 Oph A bileşeni ve Güneş için;

$$M_A - M_{\odot} = -2,5 \cdot \log \frac{4\pi R_A^2 \cdot \sigma T_A^4}{4\pi R_{\odot}^2 \cdot \sigma T_{\odot}^4} = -5 \cdot \log \frac{R_A}{R_{\odot}} - 10 \cdot \log \frac{T_A}{T_{\odot}}$$

yazabiliriz. Buradan A bileşeninin sıcaklığı;

$$5,67 - 4,83 = -5 \cdot \log \frac{0,83}{1} - 10 \cdot \log \frac{T_A}{5780}; -0,04354 = \log \frac{T_A}{5780}; \frac{T_A}{5780} = 10^{-0,04354} = 0,90463; T_A = 5229 \text{ K}$$

olarak bulunur.

b) Ana kol yıldızlarının ışıma ile kütle arasındaki ilişki;

$$L \sim M^{3,5}$$

ile verilir. A bileşeni ve Güneş için;

$$\frac{L_A}{L_{\odot}} = \left(\frac{M_A}{M_{\odot}} \right)^{3,5}$$

yazabiliriz. Buradan A bileşeninin kütlesi;

$$\frac{M_A}{M_{\odot}} = \sqrt[3,5]{\frac{L_A}{L_{\odot}}} = \sqrt[3,5]{0,461318} = 0,8; M_A = 0,8 M_{\odot} = 0,8 \cdot 2 \cdot 10^{30} = 1,6 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

olur. Yıldızın özkütlesi için;

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

ile verilir. Aranan oran;

$$\frac{\rho_A}{\rho_{\odot}} = \frac{\frac{3M_A}{4\pi R_A^3}}{\frac{3M_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^3}} = \frac{M_A R_{\odot}^3}{M_{\odot} R_A^3} = \frac{0,8 M_{\odot} \cdot R_{\odot}^3}{M_{\odot} (0,83 R_{\odot})^3} = 1,4$$

olarak bulunur.

c) Görünür parlaklık ve aydınlanma arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log E; E = 10^{-0,4m}$$

ile verilir. Sistemin toplam aydınlanması;

$$E = 10^{-0,4m_s} = 10^{-0,4 \cdot 4,01} = 10^{-1,604} = 0,02488857 \text{ Lx}$$

A bileşeninin sağladığı aydınlanma;

$$E_A = 10^{-0,4m_A} = 10^{-0,4 \cdot 4,21} = 10^{-1,684} = 0,02070014 \text{ Lx}$$

B bileşeninin sağladığı aydınlanma;

$$E_B = E - E_A = 0,02488857 - 0,02070014 = 0,00418843$$

B bileşeninin görünür parlaklığı;

$$m_s = -2,5.\log E_B = -2,5.\log(0,00418843)=5,94 \text{ kadir}$$

B bileşenin mutlak parlaklığı;

$$m_s - \mathcal{M}_B = -5+5.\log r; 5,94- \mathcal{M}_B = -5+5.0,7086= -5+3,54= -1,46; \mathcal{M}_B =7,4 \text{ kadir}$$

olarak bulunur.

d) 70 Oph B bileşeni ve Güneşin mutlak parlaklık ve ışıma gücü arasındaki ilişki için;

$$\mathcal{M}_B - \mathcal{M}_\odot = -2,5.\log \frac{L_B}{L_\odot}; \frac{L_B}{L_\odot} = 10^{-0,4(\mathcal{M}_B - \mathcal{M}_\odot)}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{L_B}{L_\odot} = 10^{-0,4(7,4-4,83)} = 10^{-1,028} = 0,09756; L_B = 0,09756 L_\odot = 0,09756.3,846.10^{26} = 36,05.10^{24} \text{ W}$$

olur. 70 Oph B bileşeni ve Güneş için;

$$\mathcal{M}_B - \mathcal{M}_\odot = -2,5.\log \frac{4\pi R_B^2 \cdot \sigma T_B^4}{4\pi R_\odot^2 \cdot \sigma T_\odot^4} = -5.\log \frac{R_B}{R_\odot} - 10.\log \frac{T_B}{T_\odot}$$

yazabiliriz. Buradan B bileşenin sıcaklığı;

$$7,4-4,83= -5.\log \frac{0,7}{1} - 10.\log \frac{T_B}{5780}; -0,17955 = \log \frac{T_B}{5780}; \frac{T_B}{5780} = 10^{-0,17955} = 0,6613784; T_B = 3823 \text{ K}$$

olarak bulunur.

e) B bileşeni ve Güneş için;

$$\frac{L_B}{L_\odot} = \left(\frac{M_B}{M_\odot} \right)^{3,5}$$

yazabiliriz. Buradan B bileşenin kütlesi;

$$\frac{M_B}{M_\odot} = \sqrt[3,5]{\frac{L_B}{L_\odot}} = \sqrt[3,5]{0,09756} = 0,5143; M_B = 0,5143 M_\odot = 0,5143.2.10^{30} = 1,0286.10^{30} \text{ kg}$$

olur. Aranan oran;

$$\frac{\rho_B}{\rho_\odot} = \frac{\frac{3M_B}{4\pi R_B^3}}{\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}} = \frac{M_B R_\odot^3}{M_\odot R_B^3} = \frac{0,5143 M_\odot \cdot R_\odot^3}{M_\odot (0,7 R_\odot)^3} = 1,5$$

olarak bulunur.

f) Hareketi incelemek için daha kütleli olan A bileşeni sabit kabul edilip daha küçük kütleli B bileşeni A'nın etrafında bir elips çizdiğini soruda bilgi olarak veriliyor. Bu durumda B bileşeni A bileşenin etrafında indirgenmiş kütle ile hareket eder. İndirgenmiş kütle;

$$M = \frac{M_A M_B}{M_A + M_B}$$

ile verilir. Sistemin enerjisi için;

$$E = E_k + E_p = \frac{M(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)}{2} - \frac{\gamma M_A M_B}{r}$$

sistemin açısal momentumu için;

$$L = M r^2 \dot{\theta}$$

alan hızı için;

$$\sigma = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{L}{2M} = \frac{\pi a b}{T} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T}$$

yazabiliriz. Burada ε eliptik yörüngenin elips eksantrisitesidir. Alan hızı için bir ifade bulmak için indirgenmiş kütleli cismin perihelion ve aphelion noktalarındaki durumları inceleyelim. Bu indirgenmiş kütleli cismin açısal momentumu için;

$$L = M v_P r_P = M v_A r_A = \text{sabit}$$

Δt sürede taranan üçgenlerin alanları için ve alan hızı için;

$$\Delta S = \frac{r_P v_P \Delta t}{2} = \frac{m r_P v_P \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \Delta S = \frac{r_A v_A \Delta t}{2} = \frac{m r_A v_A \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}$$

$$\sigma = \frac{r_P v_P}{2} = \frac{r_A v_A}{2}$$

yazabiliriz. Enerji korunumu yasasından alan hızı;

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{Mv_P^2}{2} - \frac{\gamma M_A M_B}{r_P} = \frac{Mv_A^2}{2} - \frac{\gamma M_A M_B}{r_A}, \quad \frac{Mv_P^2 r_P^2}{2r_P^2} - \frac{\gamma M_A M_B}{r_P} = \frac{Mv_A^2 r_A^2}{2r_A^2} - \frac{\gamma M_A M_B}{r_A} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_P} \right)^2 - \frac{\gamma M_A M_B}{Mr_P} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_A} \right)^2 - \frac{\gamma M_A M_B}{Mr_A}, \quad \frac{2\sigma^2}{r_P^2} - \frac{2\sigma^2}{r_A^2} = \frac{\gamma M_A M_B}{M} \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right), \quad \frac{2\sigma^2 (r_A^2 - r_P^2)}{r_P^2 r_A^2} = \frac{\gamma M_A M_B (r_A - r_P)}{M r_P r_A} \\ \frac{2\sigma^2 (r_A - r_P)(r_A + r_P)}{r_P^2 r_A^2} &= \frac{\gamma M_A M_B (r_A - r_P)}{M r_P r_A}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{\gamma M_A M_B}{M} \frac{r_P r_A}{2(r_A + r_P)}} = \sqrt{\frac{\gamma M_A M_B}{M} \frac{a(1-\varepsilon) \cdot a(1+\varepsilon)}{2 \cdot 2a}} = \sqrt{\frac{\gamma M_A M_B}{M} \frac{a(1-\varepsilon^2)}{4}} \end{aligned}$$

cismin dolanım periyodu;

$$\frac{\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} = \sqrt{\frac{\gamma M_A M_B}{M} \frac{a(1-\varepsilon^2)}{4}}, \quad T = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} \sqrt{\frac{4M}{\gamma M_A M_B a(1-\varepsilon^2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{M_A M_B}{M_A + M_B} \frac{a^4 (1-\varepsilon^2)}{\gamma M_A M_B a(1-\varepsilon^2)}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma (M_A + M_B)}}$$

olarak bulunur. Buradan büyük yarı eksen;

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{\gamma (M_A + M_B) T^2}{4\pi^2}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1,6 \cdot 10^{30} + 1,0286 \cdot 10^{30}) \cdot (88,38.365.24.3600)^2}{4 \cdot 3,14^2} = \\ &= 3,2554 \cdot 10^{12} \text{ m} = 3,2554 \cdot 10^9 \text{ km} = \frac{3,2554 \cdot 10^9}{150 \cdot 10^6} = 21,7 \text{ AB} \end{aligned}$$

büyük yarı eksenin gözleendiği açı;

$$\theta = \frac{a}{r} = \frac{3,2554 \cdot 10^9}{1,5767 \cdot 10^{14}} = 2,0647 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 2,0647 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 118,298 \cdot 10^{-5}^\circ = 1208,5 \cdot 10^{-5}^\circ \cdot 3600 = 4,26''$$

olarak bulunur.

4. a) Verilen büyütme oranından teleskopun aynanın odak uzaklığı;

$$m = \frac{f_{ob}}{f_{göz}}; f_{ob} = m f_{ok} = 800.32 = 25600 \text{ mm}$$

aynının çapı;

$$10 = \frac{f_{ob}}{D}; D = \frac{f_{ob}}{10} = \frac{25600}{10} = 2560 \text{ mm} = 2,56 \text{ m}$$

olur. Teleskopun çözme gücü;

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{1,22.500.10^{-9}}{2,56} = 238,28125.10^{-9} \text{ rad}$$

olur. Asteroide olan uzaklık minimum ise örüntü en büyüktür. Bu minimum uzaklık;

$$r_p = \ell = \frac{2R}{\theta} = \frac{100}{238,28125.10^{-9}} = 4,1967.10^7 \text{ km} = \frac{41,967.10^7}{150.10^6} = 2,7978 \text{ AB} \approx 2,8 \text{ AB}$$

olarak bulunur. Asteroidin dolanım periyodu ifadesinden asteroidin büyük yarı eksen;

$$\frac{T_D^2}{a_D^3} = \frac{T_{As}^2}{a_{As}^3}; a_{As} = a_D \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{As}}{T_D}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2091}{365,25}\right)^2} = 3,2 \text{ AB}$$

eliptik yörüngenin elips eksantrisitesi;

$$r_p = r = a(1-\varepsilon); 2,8 = 3,2(1-\varepsilon); \varepsilon = 0,125$$

eliptik yörüngenin küçük yarı eksen;

$$b = a \sqrt{1-\varepsilon^2} = 3,2 \sqrt{1-0,125^2} = 3,15 \text{ AB}$$

elipsin alanı;

$$S = \pi ab = 3,14.3,2.150.10^6.3,15.150.10^6 = 71,25.10^{16} \text{ km}^2$$

olarak bulunur.

b) Perihelion ve aphelion noktalarındaki hızları bulmak için açısal momentum korunumu yasası ve enerji korunumu yasasından faydalanabiliriz. Açısal momentum korunumu yasası için

$$m v_p r_p = m v_A r_A; v_A = \frac{v_p r_p}{r_A}$$

enerji korunumu yasası için;

$$\frac{mv_p^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r}$$

yazabiliriz. Buradan uydunun perihelion ve noktasındaki hızı; aphelion noktasındaki

$$v_p^2 - \frac{2\gamma M}{r_p} = v_A^2 - \frac{2\gamma M}{r_A} = \frac{v_p^2 r_p^2}{r_A^2} - \frac{2\gamma M}{r_A}$$

$$v_p^2 \left(1 - \frac{r_p^2}{r_A^2}\right) = 2\gamma M \left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_A}\right) \Rightarrow v_p^2 \frac{(r_A - r_p)(r_A + r_p)}{r_A^2} = \frac{2\gamma M(r_A - r_p)}{r_p r_A}$$

$$v_p^2 = \frac{2\gamma M r_A}{r_p(r_A + r_p)} = \frac{2\gamma M a(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon).2a} = \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} \Rightarrow v_p = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}}; v_A = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}} \frac{a(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} = \sqrt{\frac{\gamma M(1-\varepsilon)}{a(1+\varepsilon)}}$$

gök cismin çekim merkezinden herhangi r uzaklıktaki uydunun hızı;

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{m}{2} \cdot \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} - \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} = \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} \left(\frac{1+\varepsilon}{2} - 1\right) = -\frac{\gamma Mm}{2a}; v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

olur. Dünyanın yörüngesel hızı;

$$\frac{m_D v^2}{r_D} = \frac{\gamma M m_D}{r_D^2}; v_D = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_D}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{1 \text{ AB}}} = 30 \text{ km/s}$$

olur. Buradan asteroidin perihelion noktasındaki hızı;

$$v_p = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\gamma M(1+0,125)}{3,2 \text{ AB}(1-0,125)}} = 30 \sqrt{\frac{1,125}{3,2.0,875}} = 19,016 \text{ km/s}$$

1000 km yol kat etmek için gereken süre;

$$t = \frac{\ell}{v_p} = \frac{\ell}{v_p} = 52,576 \text{ s}$$

olur. Asteroidin aphelion noktasındaki hızı;

$$v_A = \sqrt{\frac{\gamma M(1-\varepsilon)}{a(1+\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\gamma M(1-0,125)}{3,2 \text{ AB}(1+0,125)}} = 30 \sqrt{\frac{0,875}{3,2 \cdot 1,125}} = 14,79 \text{ km/s}$$

bu sürede kat edilen yol;

$$x = v_A t = 14,79 \cdot 52,576 = 777,6 \text{ km} \approx 778 \text{ km}$$

olarak bulunur.

c) Görünür parlaklık ile aydınlanma arasındaki ilişki için;

$$m = -2,5 \cdot \log E; E = \frac{I}{r^2} = \frac{\Phi}{S} = \frac{4\Phi}{\pi D^2}$$

yazabiliriz. Görünür parlaklık ile optik aletlerin çapı arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log E = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi D^2}$$

olur. Buradan optik teleskopu çapı ile arasındaki ilişki;

$$m_{\text{göz}} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi D_{\text{göz}}^2} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi} - 2,5 \cdot \log D_{\text{göz}}^{-2} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi} + 5 \cdot \log D_{\text{göz}}$$

$$m_{\text{tel}} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi D_{\text{tel}}^2} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi} - 2,5 \cdot \log D_{\text{tel}}^{-2} = -2,5 \cdot \log \frac{4\Phi}{\pi} + 5 \cdot \log D_{\text{tel}}$$

$$m_{\text{tel}} - m_{\text{göz}} = 5 \cdot \log D_{\text{tel}} - 5 \cdot \log D_{\text{göz}} = 5 \cdot \log \frac{D_{\text{tel}}}{D_{\text{göz}}}$$

olur. Verilenlerden asteroidin teleskopta gözlenen görünür parlaklığı;

$$m_{\text{tel}} - 6 = 5 \cdot \log \frac{2560}{5} = 13,546; m_{\text{tel}} = 19,546 \text{ kadir}$$

olarak bulunur.

d) Güneşin ışıma gücü L olsun. r uzaklıkta bulunan bir gök cisme gelen birim alana ışıma gücü;

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}$$

gök taşı üzerine düşen ışık akısı;

$$\Phi = E \cdot \pi R^2 = \frac{LR^2}{4r^2}$$

olur. Burada R gök taşın yarıçapıdır. Gök taşıya düşen ışımanın ρ kadarı olsun. Burada ρ yansımaya katsayısıdır. Gök taşın yaydığı ışık akısı;

$$\Phi_{\text{gök}} = (1-\rho)\Phi = \frac{(1-\rho)LR^2}{4r^2}$$

Dünyanın bulunduğu yerde bu göktaşın oluşturduğu aydınlanma;

$$E_D = \frac{\Phi_{\text{gök}}}{4\pi(r-r_D)^2} = \frac{(1-\rho)LR^2}{16\pi r^2(r-r_D)^2}$$

olur. Burada r_D Dünyanın çembersel yörüngesinin yarıçapıdır. Aydınlanması ile görünür parlaklık arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log E$$

ile verilir. Buradan;

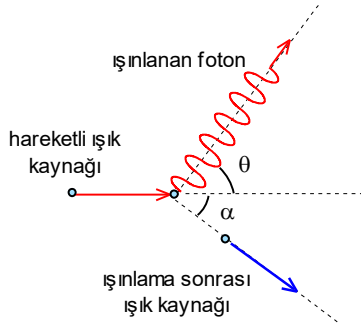
$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log \frac{\frac{(1-\rho)LR_1^2}{16\pi r^2(a_1-1)^2}}{\frac{(1-\rho)LR_2^2}{16\pi r^2(a_2-1)^2}} = -2,5 \cdot \log \frac{R_1^2(a_2-1)^2}{R_2^2(a_1-1)^2} = -2,5 \cdot \log \frac{D_1^2(a_2-1)^2}{D_2^2(a_1-1)^2}$$

$$11,78 - 19,546 = -2,5 \cdot \log \frac{100^2 \cdot (4,2-1)^2}{D_2^2(3,2-1)^2} = -2,5 \cdot \log \frac{21157,0248}{D_2^2(3,2-1)^2} =$$

$$= -2,5 \log(21157,0248) + 5 \log D_2 = -10,8136 + 5 \log D_2$$

$$3,0476 = 5 \log D_2; 0,60952 = \log D_2; D_2 = 10^{0,60952} = 4,069 \text{ km} \approx 4 \text{ km}$$

olarak bulunur.



5. Rölativistik hız parametresi β olan ışık kaygı kendi referans sistemine göre açılal frekansı ω_0 olan foton ışınlamaktadır. Işınlanan foton hareket doğrusuna göre θ açısı ile hareket etmektedir. Kaynağın kütlesi foton ışınlanmadan önce m , ışınlandıktan sonra m' , kaynağın foton ışınlandıktan sonra rölativistik hız parametresi β' olsun. Kaynağın referans sistemine göre saçılan fotonun enerjisi;

$$\hbar\omega_0 = mc^2 - m'c^2; m' = m - \frac{\hbar\omega_0}{c^2}$$

olur. Fotonun ışınlanmasından önce ve sonrası momentum korunumu yasası için;

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m'v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} + \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta; \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m'v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} + \frac{m'c\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

$$0 = \frac{m'v'\sin\alpha}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta; \frac{m'v'}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{m'v'c}{c\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{m'c\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

enerji korunumu yasası için;

$$\hbar\omega = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{m'c^2}{\sqrt{1-\beta'^2}}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{m'c^2}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hbar\omega; \frac{m'^2c^4}{1-\beta'^2} = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hbar\omega \right)^2; \frac{m'^2c^2}{1-\beta'^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \hbar\omega \right)^2 = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2$$

$$\frac{m'c\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \frac{\hbar\omega}{c} \cos\theta = \frac{m'c\beta' \cos\alpha}{\sqrt{1-\beta'^2}}; \frac{m'c\beta' \sin\alpha}{\sqrt{1-\beta'^2}} = \frac{\hbar\omega}{c} \sin\theta$$

$$\left(\frac{m'c\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \frac{\hbar\omega \cos\theta}{c} \right)^2 + \left(\frac{\hbar\omega \sin\theta}{c} \right)^2 = \left(\frac{m'c\beta' \cos\alpha}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right)^2 + \left(\frac{m'c\beta' \sin\alpha}{\sqrt{1-\beta'^2}} \right)^2 = \frac{m'^2c^2\beta'^2}{1-\beta'^2}$$

$$\left(\frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 - \left(\frac{m'c\beta'}{\sqrt{1-\beta'^2}} - \frac{\hbar\omega \cos\theta}{c} \right)^2 + \left(\frac{\hbar\omega \sin\theta}{c} \right)^2 = \frac{m'^2c^4}{1-\beta'^2} - \frac{m'^2c^2\beta'^2}{1-\beta'^2} = \frac{m'^2c^2(1-\beta'^2)}{1-\beta'^2} = m'^2c^2$$

$$\left(\frac{m^2c^2}{1-\beta^2} - \frac{2m\hbar\omega}{c\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\hbar^2\omega^2}{c^2} \right) - \left(\frac{m^2c^2\beta^2}{1-\beta^2} - \frac{2m'c\beta' \hbar\omega \cos\theta}{\sqrt{1-\beta'^2}} + \frac{\hbar^2\omega^2 \cos^2\theta}{c^2} + \frac{\hbar^2\omega^2 \sin^2\theta}{c^2} \right) = \left(m - \frac{\hbar\omega_0}{c^2} \right)^2 c^2$$

$$\frac{m^2c^2}{1-\beta^2} - \frac{m^2c^2\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{2m\hbar\omega \cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{2m'\hbar\omega}{\sqrt{1-\beta'^2}} = m^2c^2 - 2m\hbar\omega_0 + \frac{\hbar^2\omega_0^2}{c^2}$$

$$\frac{m^2c^2(1-\beta^2)}{1-\beta^2} - \frac{2m\hbar\omega(1-\beta \cos\theta)}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx m^2c^2 - 2m\hbar\omega_0; \omega = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos\theta}$$

olarak bulunur. Rölativistik olmayan hızlar algılanan açılal frekansı;

$$\omega \approx \frac{\omega_0}{1-\beta \cos\theta} = \omega_0 (1-\beta \cos\theta)$$

olur. $\theta=0^\circ$ ise hareketsiz gözlemcinin algıladığı fotonun açılal frekansı ve dalga boyu;

$$\omega_1 = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos 0^\circ} = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta} = \omega_0 \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1-\beta)^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$\theta=180^\circ$ ise hareketsiz gözlemcinin algıladığı fotonun açılal frekansı ve dalga boyu;

$$\omega_2 = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos 180^\circ} = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} = \omega_0 \sqrt{\frac{(1-\beta)(1+\beta)}{(1+\beta)^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}; \lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$\theta=90^\circ$ ise hareketsiz gözlemcinin algıladığı fotonun açılal frekansı;

$$\omega_2 = \frac{\omega_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos 90^\circ} = \omega_0\sqrt{1-\beta^2}$$

olarak bulunur. Fizikte;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \text{ ya da } \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

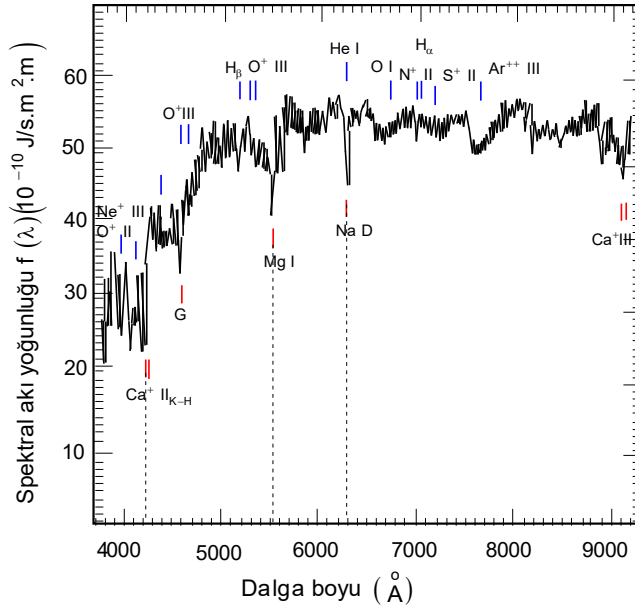
z Doppler spektrum kayması parametresi olarak bilinir. Genelde galaksiler bizim galakside uzaklaştıkları için dalga boyları kırmızıya doğru kaymaktadır. Galaksilerin uzaklaşma hızları ışık hızından çok küçük ise;

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx 1 - \sqrt{(1-\beta)^2} \approx 1 - 1 + \beta = \beta = \frac{v}{c}; v = cz$$

ile verilir. Rölativistik olmayan Doppler olayı için;

$$\lambda = \lambda_0 (1 \pm \beta); \beta = \frac{v}{c}$$

yazabiliriz.



a) Ca⁺ II K&H dublet çizgisi için ortalama dalga boyu;

$$\frac{3933,7 \text{ Å} + 3968,5 \text{ Å}}{2} \approx 3950 \text{ Å}$$

ile çalışabiliriz. Bu dublet için Doppler kayması;

$$z_1 = \frac{4225 \text{ Å} - 3950 \text{ Å}}{3950 \text{ Å}} = 0,06962$$

galaksi kümenin uzaklaşma hızı;

$$v_1 = cz_1 = 300000 \cdot 0,06962 \approx 20886 \text{ km/s}$$

olur. Sodyum Na D çizgisi için Doppler kayması;

$$z_2 = \frac{6300 \text{ Å} - 5894 \text{ Å}}{5894 \text{ Å}} = 0,06888$$

galaksi kümenin uzaklaşma hızı;

$$v_2 = cz_2 = 300000 \cdot 0,06888 \approx 20655 \text{ km/s}$$

olur. Galaksi kümesi için ortalama hız;

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{20886 + 20655}{2} \approx 20770 \text{ km/s}$$

ortalama z parametresi;

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{0,069826 + 0,06888}{2} \approx 0,06925 \text{ km/s}$$

olarak alınabilir. Hubble yasasından galaksi kümesine olan uzaklık;

$$v = H r; r = \frac{v}{H} = \frac{20770}{70} \approx 296 \text{ Mpc} = 965 \cdot 10^6 \text{ ışık yılı}$$

olur. Görünür ve mutlak parlaklık arasındaki ilişki;

$$m - M = -5 + 5 \cdot \log r$$

ile verilir. Galaksi kümesinin maksimum parlaklık;

$$13,57 - M = -5 \cdot \log(296 \cdot 10^6) = -5 + 5,8,4713 = -37,356; M = -23,786 \text{ kadir}$$

olur. Mutlak parlaklık ve ışınım gücü arasındaki ilişki;

$$M = -2,5 \cdot \log \frac{L}{4\pi \cdot 10^2}$$

ile verilir. Buradan;

$$M - M_\odot = -2,5 \cdot \log \frac{L}{L_\odot}; \frac{L}{L_\odot} = 10^{-0,4(M - M_\odot)} = 10^{-0,4(23,786 - 4,83)} = 10^{11,4464} \approx 2,8 \cdot 10^{11}$$

yıldız sayısı;

$$N_{\text{yıldız}} = \frac{L}{L_K} = \frac{L}{0,3 L_\odot} = \frac{2,8 \cdot 10^{11}}{0,3} = 9,3 \cdot 10^{11}$$

galaksi kümesindeki yıldızların toplam kütlesi;

$$M_{\text{yıldız}} = N M_K = 9,3 \cdot 10^{11} \cdot 0,7 M_\odot \approx 6,5 \cdot 10^{11} M_\odot$$

olarak bulunur.

b) Galaksi kümesinin etkin çapı;

$$\theta = \frac{D_{et}}{r}; D_{etk} = r\theta = 296 \text{ Mpc} \cdot 1,9' = 296 \text{ Mpc} \cdot \frac{1,9}{60}^\circ = 9,373 \text{ Mpc} \cdot \frac{1}{180}^\circ = \frac{9,3733 \cdot \pi}{180} = 0,1636 \text{ Mpc} =$$

$$= 0,1636 \cdot 10^6 \text{ pc} = 0,533 \cdot 10^6 \text{ ışık yılı} = 0,533 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 \cdot 10^3 = 5,048^{21} \cdot 10 \text{ m}$$

olur. Bir $\vec{a}$ vektörün bileşenleri (a_x, a_y, a_z) olsun. Bu vektörün büyüklüğü;

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

ile verilir. Bu vektörün ortalaması bileşenlerin ortalaması cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle + \langle a_z^2 \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Üç boyutlu uzayda $\vec{a}$ vektörün rastgele bir konumda olacağı için bu vektörün bileşenleri küresel simetri sonucu birbirine eşit olur.

$$\langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \langle a_z^2 \rangle$$

Bu durumda $\vec{a}$ vektörün büyüklüğü bileşenlerin büyüklükleri cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = 3 \langle a_x^2 \rangle$$

hız için bu ifade;

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 \sigma_v^2$$

olarak yazılabilir. Çembersel hareket için;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \quad E = E_k + E_p = \frac{m v^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r} = \frac{\gamma M m}{2r} - \frac{\gamma M m}{r} = -\frac{\gamma M m}{2r}; \quad E_k = \frac{\gamma M m}{2r}$$

yazabiliriz. Çok sayıda cisim için kinetik ve potansiyel enerjilerin ortalama değerleri için;

$$2 \langle E_k \rangle = - \langle E_p \rangle$$

ifadesi virial teorimi olarak bilinir. Bir cismin çekim merkezin etrafında r yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket şartından kütle çekim merkezin kütlesi;

$$M = \frac{r v^2}{\gamma} = \frac{3 r \sigma_v^2}{\gamma}; \quad M_{GK} = \frac{3 R_{GK} \sigma_v^2}{\gamma}$$

$$\sigma_v = c z_{Mg I} = c \cdot \frac{\Delta \lambda_{Mg I}}{\lambda_{Mg I}} = c \cdot \frac{\Delta \lambda_{Mg I}}{\lambda_{Mg I} (1+z)} = 300000 \cdot \frac{4,3 \text{ Å}}{5175 \text{ Å} (1+0,06925)} \approx 233 \text{ km/s}$$

olarak alınabilir. Buradan;

$$M_{GK} = \frac{3 \cdot 0,5 D \sigma_v^2}{\gamma} = \frac{1,5 \cdot 5,048 \cdot 10^{21} \cdot (233 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,16 \cdot 10^{42} \text{ kg} = \frac{6,16 \cdot 10^{42}}{2 \cdot 10^{30}} = 3,08 \cdot 10^{12} M_\odot$$

aranan oran;

$$\frac{3,08 \cdot 10^{12}}{6,5 \cdot 10^{11}} \approx 4,74 \approx 5$$

olarak bulunur.

c) Gazın bulunduğu ortamın sıcaklığı T olsun. Bir serbestliğe düşen enerji den protonların ya da hız dispersiyonu;

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{k T}{2}; \quad v = \sigma_{v(T)} = \sqrt{\frac{k T}{m}}$$

ile verilir. Gazda eşit sayıda proton ve elektron olduğunu kabul edelim. Bu durumda formülde elektronun kütlesi ihmal edilirse 0,5m almalıyız. Buradan hız termal dispersiyonu;

$$\sigma = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} T}{0,5 \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27}}} = 128,457 \sqrt{T}$$

soruda verilen şarttan gazın sıcaklığı;

$$128,457 \sqrt{T} = 233000; \quad T \approx 1,8 \cdot 10^6 \text{ K}$$

bu sıcaklığa karşılık olarak gelen dalga boyu;

$$\lambda_T = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{1,8 \cdot 10^6} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ m} \approx 16 \text{ Å}$$

olarak bulunur.

6. a) Bir yıldızın yaydığı ışıma gücü ya da ışık akısı;

$$L = \Phi = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

ile verilir. Bir fotonun açısal frekansı ω , cismin yıldız olan uzaklığı r olsun. Birim zamanda çıkan foton sayısı;

$$N = \frac{\Phi}{\hbar\omega}$$

yıldızdan r uzaklıkta birim alana düşen foton sayısı;

$$n = \frac{N}{4\pi r^2} = \frac{L}{4\pi r^2 \hbar\omega}$$

cisim üzerine düşen ışımanın momentumu;

$$p_c = n \sigma_T \Delta p_f$$

olur. Işıma soğrulursa momentum değişimi $\Delta p_1 = p$, ışıma tamamen yansıtılırsa momentum değişimi $\Delta p_2 = 2p$ olur.

Burada önemli olan merteye olduğu için $\Delta p_1 = p = \frac{\hbar\omega}{c}$ kabul edilebilir. Birim zamanda momentum değişimi radyasyon kuvveti;

$$F_{\text{rad}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{L}{4\pi r^2 \hbar\omega} \cdot \sigma_T \cdot \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{L \sigma_T}{4\pi r^2 c}$$

olur. Bu itme radyasyonun kuvveti çekim kuvveti ile dengelenir. İki kuvvetin basınçları eşit olma şartından Eddington sınırı ;

$$\frac{L \sigma_T}{4\pi r^2 c} = \frac{\gamma M m}{r^2} ; L_{\text{Ed}} = \frac{4\pi \gamma c M m}{\sigma_T}$$

olarak bulunur. Proton için bu sınır gök cisminin M kütlesine bağlı olarak;

$$L_{\text{Ed-p}} = \frac{4\pi \gamma c M m_p}{\sigma_T} = \frac{4.3, 14.6, 67.10^{-11}, 300000.10^3, 1.6726.10^{-27}}{6.652.10^{-29}} \cdot M = 6,3226 \cdot M \text{ W/kg}$$

olarak yazılabilir. Standart olarak Eddington sınırı güneş için hesaplanır. Bu değer;

$$L_{\text{Ed-p-}\odot} = 6,3226 \cdot M_{\odot} = 6,3226 \cdot 1,989.10^{30} = 12,5188.10^{30} \text{ kg}$$

olur. Bu değeri kullanarak;

$$L_{\text{Ed-p}} = 6,3226 \cdot M = 6,3226 \cdot M_{\odot} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = 12,5188.10^{30} \cdot \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) = \frac{12,5188.10^{30}}{3,846.10^{26}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot} = 32550 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot}$$

olarak temsil edilebilir.

b) Kara delikten kaçış hızı ışık hızına eşit olma şartından kara deliğin yarıçapı;

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R} = 0; v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} ; c = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} ; R = \frac{2\gamma M}{c^2}$$

ile verilir. Dönen bir kara deliğin olay ufkunda bulunan bir proton için;

$$\frac{\gamma M m_p}{R^2} = \frac{L_{\text{kd}} \sigma_T}{4\pi R^2 c} + m_p \omega^2 R$$

yazabiliriz. Burada $L_{\text{Ed-p-kd}}$ kara delik için protonun Eddington sınırır. Buradan bu sınır;

$$L_{\text{Ed-p-kd}} = \frac{4\pi \gamma c M m_p}{\sigma_T} - \frac{4\pi c m_p \omega^2 R^3}{\sigma_T} = \frac{4\pi \gamma c M m_p}{\sigma_T} \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma M} \right) = L_{\text{Ed-p}} \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma M} \right) = L_{\text{Ed-p}} \left[1 - \frac{\omega^2}{\gamma M} \left(\frac{2\gamma M}{c^2} \right)^3 \right] =$$
$$= L_{\text{Ed-p}} \left(1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2 M^2}{c^6} \right)$$

Işıma gücü sıfır olsa bile yüzeyindeki maddeyi tutamaması için merkezkaç kuvvetinin kütleçekimine eşit olması gerekir. Bunun için gerekli olan kritik açısal hız;

$$1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2 M^2}{c^6} = 0; \omega_{\text{kr}} = \frac{c^3}{2\sqrt{2}\gamma M}$$

olmalıdır.

c) Verilen şarttan açısal hız;

$$\frac{L_{\text{Ed-p}}}{2} = L_{\text{Ed-p}} \left(1 - \frac{8\gamma^2 \omega^2 M^2}{c^6} \right) ; \frac{1}{2} = \frac{8\gamma^2 \omega^2 M^2}{c^6} ; \omega^2 = \frac{c^6}{16\gamma^2 M^2} ; \omega = \frac{c^3}{4\gamma M}$$

olarak bulunur.

d) Güneş kütleline sahip olan bir karadeliğ için Eddington sınırı;

$$L_{\text{Ed-p-}\odot} = 12,5188 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{M_{\odot}}{M_{\odot}} \right) = 12,5188 \cdot 10^{30} \text{ W}$$

olur. Akresyon diskten kara delik üzerine düşen protonlardan üretilen ışıma gücü;

$$L = \eta \dot{M}_p c^2$$

ile verilir. Verilen şarttan;

$$L = \eta \dot{M}_p c^2 = 0,5 \cdot 12,5188 \cdot 10^{30} ; 0,25 \dot{M}_p (300000 \cdot 10^3)^2 = 6,2594 \cdot 10^{30} ; \dot{M}_p = 2,782 \cdot 10^{14} \text{ kg/s}$$

olarak bulunur.

e) Kara delik üzerine düşen kütleinin;

$$(1-\eta) \dot{M}_p = (1-0,25) \dot{M} = 0,75 \dot{M}_p$$

kadarı kara deliğın kütlelinein artmasına sebep olur. Bu durumda kara deliğın kütle artış hızı;

$$\frac{dM}{dt} = 0,75 \dot{M}_p = 0,75 \cdot 2,782 \cdot 10^{14} \text{ kg/s} = 2,08646 \cdot 10^{14} \text{ kg/s}$$

olur. Buradan kara deliğın kütlelinein Güneşin kütlelinein kadar artması için gereken süre;

$$t = \frac{M_{\odot}}{\frac{dM}{dt}} = \frac{1,989 \cdot 10^{30}}{2,08646 \cdot 10^{14}} = 0,9532883 \cdot 10^{16} \text{ s} = \frac{0,953286 \cdot 10^{16}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 302 \cdot 10^6 \text{ yıl}$$

olarak bulunur.

f) Eddington sınırı kütle ile lineer arttığından kara deliğın maksimum madde yutma hızı da kütle ile lineer artar. Bu durumda protonların yutma hızı;

$$L = \eta \dot{M}_p c^2 = \frac{4\pi\gamma c M \dot{M}_p}{\sigma_T} ; \dot{M}_p = \frac{4\pi\gamma M \dot{M}_p}{\eta c \sigma_T}$$

olur. Yıldızın kütle artış hızı için;

$$\frac{dM}{dt} = (1-\eta) \cdot \frac{4\pi\gamma M \dot{M}_p}{\eta c \sigma_T} = \frac{4\pi\gamma M \dot{M}_p (1-\eta)}{\eta c \sigma_T} = \frac{4,3 \cdot 14,6 \cdot 67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27} (1-0,25) M}{0,25 \cdot 300000 \cdot 10^3 \cdot 6,652 \cdot 10^{-29}} = 21,075 \cdot 10^{-16} M$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{dM}{M} = 21,075 \cdot 10^{-16} dt ; \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = 21,075 \cdot 10^{-16} \cdot \int_0^t dt ; \ln M \Big|_{M_0}^M = 21,075 \cdot 10^{-16} t = \ln 2$$

$$t = \frac{\ln 2}{21,075 \cdot 10^{-16}} = 328,895459 \cdot 10^{12} \text{ s} = \frac{328,895 \cdot 10^{12}}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 10,43 \cdot 10^6 \text{ yıl}$$

olarak bulunur.

7. a) Jüpiter gezegenin büyük yarı eksen;

$$\frac{T_D^2}{a_D^3} = \frac{T_J^2}{a_J^3}; a_J = a_D \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_J}{T_D}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{4322}{365,25}\right)^2} = 5,19 \text{ AB}$$

Jüpiter gezegenin Güneşin önünden geçişinin geometrik olasılığı;

$$\xi = \frac{R_{\odot}}{a_J} = \frac{700000}{5,19 \cdot 150 \cdot 10^6} \approx 9 \cdot 10^{-4}$$

olarak bulunur.

b) Jüpiter Güneşe en büyük açısal uzaklığı;

$$\theta_J = \frac{a_J}{r_{T-\odot}} = \frac{5,19 \cdot 150 \cdot 10^6}{50,3 \cdot 26 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000} = 5,0482767 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 5,0482767 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} =$$

$$= 2,89245 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \approx 2,89245 \cdot 10^{-5} \cdot 3600' \approx 0,104''$$

olarak bulunur.

c) Bu kadar büyük mesafeden bakılırsa yıldız ve gezegen de disk şeklinde incelenebilir. Gezegenin geçişi sırasında yıldız diski üzerinde gezegen diskinin alanı kadar bir alan kapatılır. Jüpiterin sıcaklığı da Güneşin sıcaklığından çok daha düşük olduğu için ışıması tamamen ihmal ediliyor. Bu durumda ışıma kaybı için;

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\pi R_J^2}{\pi R_{\odot}^2} = \frac{R_J^2}{R_{\odot}^2}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$0,01 = \frac{R_J^2}{700000^2}; R_J = 0,1700000 = 70000 \text{ km}$$

olarak bulunur.

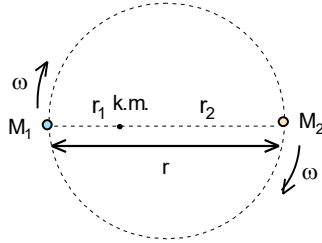
d) Kara cismin sıcaklığına bağlı ışıma gücü;

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

ile verilir. Güneş ve Jüpiterin parlaklıkları (kontrast) oranı;

$$\alpha = \frac{4\pi R_J^2 \cdot \sigma T_J^4}{4\pi R_{\odot}^2 \cdot \sigma T_{\odot}^4} = \frac{R_J^2 T_J^4}{R_{\odot}^2 T_{\odot}^4} = \frac{0,01 \cdot 165^4}{5800^4} \approx 6,55 \cdot 10^{-9}$$

olarak bulunur.



e) Çekim merkezi hareketsiz kabul edilirse bu çekim merkezinin etrafında hareket eden gök cismin hızı;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r}; v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

olur. İki gök cisminin ortak kütle merkezi etrafında hareketi göz önünde bulunursa iki gök cismin kütle merkezine olan uzaklıklar;

$$M_1 r_1 = M_2 r_2; r = r_1 + r_2; r_1 = \frac{M_2 r}{M_1 + M_2}; r_2 = \frac{M_1 r}{M_1 + M_2}$$

yıldızların kütle merkezi etrafındaki açısal hız ve hız;

$$M_1 \omega^2 r_1 = \frac{M_1 M_2 \omega^2 r}{M_1 + M_2} = \frac{\gamma M_1 M_2}{r^2}; \omega = \sqrt{\frac{\gamma (M_1 + M_2)}{r^3}}; u = \omega r = \sqrt{\frac{\gamma (M_1 + M_2)}{r}}$$

olur. $M = M_1 = M_{\odot}$; $M_2 = M_J$ olsun. Jüpiterin kütlesi ihmal edilirse hızı;

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M_{\odot}}{a_J}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{5,19 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 10^3}} = 13090 \text{ m/s}$$

Jüpiterin kütlesi ihmal edilmezse hızı;

$$u = \sqrt{\frac{\gamma (M_{\odot} + M_J)}{a_J}} = \sqrt{\frac{\gamma M_{\odot}}{a_J}} \sqrt{1 + \frac{M_J}{M_{\odot}}} \approx \sqrt{\frac{\gamma M_{\odot}}{a_J}} \left(1 + \frac{M_J}{2M_{\odot}}\right) = 13090 \cdot \left(1 + \frac{1,9 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{30}}\right) = 13096 \text{ m/s}$$

aralarındaki fark;

$$\Delta v_{J-\odot} = u - v = 13096 - 13090 = 6 \text{ m/s}$$

hız genliğinin değişimi;

$$\Delta v_{\text{genlik}} = 2\Delta v_{J-\odot} = 2 \cdot 6 = 12 \text{ m/s}$$

olarak bulunur. Jüpiter gezegenin hıza olan katkısı;

$$\Delta v = \frac{M_J}{2M_{\odot}} \sqrt{\frac{\gamma M_{\odot}}{a_J}}$$

olarak da yazılabilir.

f) Satürn gezegenin en büyük açısal büyüklüğü Jüpiter gezegenin en büyük açısal genliğinin kaç katı ise Satürn gezegenin büyük yarı eksen Jüpiter gezegenin büyük eksenin o kadar katı olur. Buradan Satürn gezegenin büyük yarı eksen;

$$\frac{a_S}{a_J} = \frac{\theta_S}{\theta_J}; a_S = \frac{a_J \theta_S}{\theta_J} = \frac{5,19 \cdot 1,9}{1,04} = 9,4817 \text{ AB}$$

Jüpiter ile Satürn arasındaki uzaklık;

$$a_{S-J} = a_S - a_J = 9,4817 - 5,19 = 4,2917 \text{ AB}$$

olur. Güneşin Jüpiter üzerindeki çekim ivmesi;

$$g_{J-\odot} = \frac{\gamma M_{\odot}}{a_J^2}$$

Satürn gezegenin Jüpiter üzerindeki maksimum çekim ivmesi;

$$g_{J-S} = \frac{\gamma M_S}{a_{S-J}^2}$$

ile verilir. Jüpiter üzerindeki Satürn etkisi Güneşin etkisi ile kıyasladığında aralarındaki oran;

$$\frac{g_{J-S}}{g_{J-\odot}} = \frac{M_S a_J^2}{M_{\odot} a_{S-J}^2}$$

olur. Satürn gezegenin Jüpiter üzerindeki etkisi çekim ivmesi oranında Jüpiterin $\Delta v_{J-\odot}$ hızını değiştirir. Buradan;

$$\Delta v_{J-S} = v_{J-\odot} \cdot \frac{M_S a_J^2}{M_{\odot} a_{S-J}^2} = 6 \cdot \frac{0,3 \cdot 1,9 \cdot 10^{27} \cdot 5,19^2}{2 \cdot 10^{30} \cdot 4,2917^2} = 0,03275 \text{ m/s}$$

genlik de

$$\Delta v_{\text{gen-J-S}} = 2\Delta v_{J-S} = 2 \cdot 0,03275 = 0,0655 \text{ m/s}$$

olarak bulunur. Bu kadar etki teleskoptaki spektroskopik sistemi ile ölçülebilir.

8. a) Europa uydusunu referans alırsak Io uydusu iç uydusu, Ganymede ve Callisto uyduları dış uydusu olur. Io ve Europa uyduları arasındaki bağıl açısal hız ve yörünge-kavuşum dönemi ilişkisi;

$$\omega_{1,2} = \omega_1 - \omega_2; \frac{2\pi}{T_{1,2}} = \frac{2\pi}{T_1} - \frac{2\pi}{T_2}; \frac{1}{T_{1,2}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

ile verilir. Buradan Io uydusunun dolanım periyodu;

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{1,2}} + \frac{1}{T_2}; T_1 = \frac{T_{1,2} T_2}{T_{1,2} + T_2} = \frac{3,525464 \cdot 3,551181}{3,525464 + 3,551181} = 1,7691388 \text{ gün}$$

olarak bulunur. Europa uydusunu ve herhangi bir dış uydusu için bağıl açısal hız ve yörünge-kavuşum dönemi ilişkisi

$$\omega_{2;d} = \omega_2 - \omega_d; \frac{2\pi}{T_{2;d}} = \frac{2\pi}{T_2} - \frac{2\pi}{T_d}; \frac{1}{T_{2;d}} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_d}$$

bir dış uydusunun dolanım periyodu;

$$\frac{1}{T_d} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_{2;d}}; T_d = \frac{T_{2;d} T_2}{T_{2;d} - T_2}$$

ile verilir. Ganymede uydusunun dolanım periyodu;

$$T_3 = \frac{T_{2,3} T_2}{T_{2,3} - T_2} = \frac{7,050926 \cdot 3,551181}{7,050926 - 3,551181} = 7,154554 \text{ gün}$$

Callisto uydusunun dolanım periyodu;

$$T_4 = \frac{T_{2,4} T_2}{T_{2,4} - T_2} = \frac{4,511071 \cdot 3,551181}{4,511071 - 3,551181} = 16,689 \text{ gün}$$

olarak bulunur.

b) Io, Europa, Ganymede ve Callisto uyduların büyük yarı eksenleri AB birimi cinsinden ve bu mesafelerin logaritmaları sırasıyla;

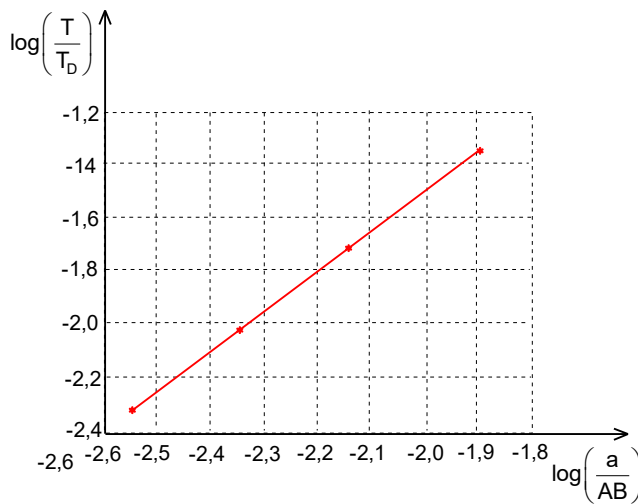
$$a_1 = \frac{421,8 \cdot 10^3}{149,6 \cdot 10^6} = 0,002812; \log a_1 = \log(0,002812) = -2,549825$$

$$a_2 = \frac{671,1 \cdot 10^3}{149,6 \cdot 10^6} = 0,00448596; \log a_1 = \log(0,00448596) = -2,348144$$

$$a_3 = \frac{1070,4 \cdot 10^3}{149,6 \cdot 10^6} = 0,00715508; \log a_1 = \log(0,00715508) = -2,1453855$$

$$a_4 = \frac{1882,7 \cdot 10^3}{149,6 \cdot 10^6} = 0,01258489; \log a_1 = \log(0,01258489) = -1,90015$$

olur.



Bu doğrunun eğimi;

Bu uyduların dolanım periyotların logaritma değerleri sırasıyla;

$$\log T_1 = \log\left(\frac{1,7691388}{365,25}\right) = -2,314828$$

$$\log T_2 = \log\left(\frac{3,551181}{365,25}\right) = -2,0122174$$

$$\log T_3 = \log\left(\frac{7,154554}{365,25}\right) = -1,7080076$$

$$\log T_4 = \log\left(\frac{16,689}{365,25}\right) = -1,34016$$

olarak bulunur. Yatay eksen $\log\left(\frac{a}{AB}\right)$; dikey eksen-

de $\log\left(\frac{T}{T_d}\right)$ olan grafik şekildeki gibidir.

$$m = \frac{-1,9 - (-2,55)}{-1,34 - (-2,31)} = 0,67 = \frac{2}{3}$$

doğrunun denklemi;

$$\log\left(\frac{a}{AB}\right) = m \log\left(\frac{T}{T_D}\right) + n = \frac{2}{3} \log\left(\frac{T}{T_D}\right) + n$$

olarak bulunur.

c) Yazılan doğrunun denklemi;

$$\log\left(\frac{a}{AB}\right) - \frac{2}{3} \log\left(\frac{T}{T_D}\right) = n; \log\left(\frac{a}{AB}\right) - \log\left(\frac{T}{T_D}\right)^{\frac{2}{3}} = n; \log\left(\frac{\left(\frac{a}{AB}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{T}{T_D}\right)}\right) = n$$

$$\left(\frac{a}{AB}\right)^{\frac{3}{2}} = \text{sabit}; a T^{-\frac{2}{3}} = \text{sabit}; \frac{a^3}{T^2} = \text{sabit}$$

şeklinde yazılabilir. Elde edilen denklem tamamen Kepler yasasına uymaktadır.

d) Jüpiter kütlesi tüm uydulardan çok büyük olduğu için Jüpiter hareketsiz olarak kabul edilebilir. Çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir uydunun dolanım periyodu ile yörüngenin yarıçapı arasındaki ilişki;

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma Mm}{r^2}; v^2 = \frac{\gamma M}{r}; T = \frac{2\pi r}{v}; T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}$$

ile verilir. Buradan kütle;

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}$$

olarak ifade edilebilir. Io uydusunun verilerini kullanarak Jüpiterin kütlesi;

$$M_J = \frac{4.3.14^2.(421,8.10^3)^3}{6,67.10^{-11}.(1,769138.24.3600)^2} = 1,90109.10^{27} \text{ kg}$$

olarak bulunur. Europa uydusunun verilerini kullanarak Jüpiterin kütlesi;

$$M_J = \frac{4.3.14^2.(671,1.10^3)^3}{6,67.10^{-11}.(3,551181.24.3600)^2} = 1,9003.10^{27} \text{ kg}$$

olarak bulunur. Ganymede uydusunun verilerini kullanarak Jüpiterin kütlesi;

$$M_J = \frac{4.3.14^2.(1070,4.10^3)^3}{6,67.10^{-11}.(7,154554.24.3600)^2} = 1,899676.10^{27} \text{ kg}$$

olarak bulunur. Callisto uydusunun verilerini kullanarak Jüpiterin kütlesi;

$$M_J = \frac{4.3.14^2.(1882,7.10^3)^3}{6,67.10^{-11}.(16,689.24.3600)^2} = 1,899718.10^{27} \text{ kg}$$

olarak bulunur. Bulunan sonuçlar Jüpiterin kütlesin $1,9.10^{27} \text{ kg}$ neredeyse aynıdır.

9. a) Görünür parlaklık ve aydınlanma arasındaki ilişki;
 $m = -2,5 \cdot \log E$

ile verilir. Süpernova SN1987A görünür parlaklığı $m = 3$ kadirden, $m_{\text{göz}} = 6$ kadire düşmesi için geçen süre;

$$t = 16 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 4 = 265 \text{ gün}$$

olur. Buradan aranan τ sabiti;

$$m - m_{\text{göz}} = -2,5 \cdot \log E_0 + 2,5 \cdot \log E = -2,5 \cdot \log \frac{E_0}{E} = -2,5 \cdot \log e^{\frac{t}{\tau}} = -\frac{t}{\tau} \cdot \log e$$

$$3 - 6 = -2,5 \cdot \frac{265}{\tau} \cdot \log 2,7182818 = -\frac{287,720094}{\tau}; \tau = 95,9 \text{ gün}$$

olarak bulunur.

b) Süpernova SN1987A çıplak gözle görülemez hale geldikten sonra teleskopta görünmelidir. Artık teleskopta görünmüyorsa son görünür parlaklığı;

$$m_{\text{göz}} - m_s = -2,5 \cdot \log \frac{E_{\text{göz}}}{E_s} = -2,5 \cdot \log \frac{TD_{\text{T}}^2}{d_{\text{göz}}^2}$$

$$6 - m_s = -2,5 \cdot \log \frac{0,7 \cdot 152,4^2}{6^2} = -2,5 \cdot 2,65476547 = -6,6369; m_s = 12,6369 \text{ kadir}$$

olarak bulunur. Bu görünür parlaklığa süpernovanın ulaşması gereken süre;

$$m_s - m = -2,5 \cdot \log \frac{E_s}{E_{\text{göz}}} = -2,5 \cdot \log \frac{E_0 e^{\frac{t}{\tau}}}{E_0} = 2,5 \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \log e$$

$$12,6369 - 3 = 2,5 \cdot \frac{t}{95,9} \cdot \log 2,7182818 = 0,0113215454t; t = 851,2 \text{ gün} \approx 851 \text{ gün} = 365 + 366 + 120 \text{ gün}$$

gözlenebilecek son tarih;

$$15 \text{ Mayıs } 1989 + 16 + 30 + 31 + 31 + 12 \rightarrow 12 \text{ Eylül } 1989$$

olur.

c) Süpernovanın ilk bir yıldaki yarıçapı;

$$R_1 = vt_1 = 20000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 63 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

olur. Bundan sonra hız;

$$t_2 = 851 - 365 = 486 \text{ gün} = 1,3315 \text{ yıl}$$

süreyle eksponansiyel olarak azalmaktadır. Saniyedeki hızına azalma katsayısı;

$$\chi_s = \frac{\chi}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = \frac{0,02}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 6,342 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$$

Bu sürenin sonunda yıldızın yarıçapı;

$$R_2 = R_1 + \int_0^{486 \text{ gün}} v_0 (1 - e^{-\chi t}) dt = R_1 + v_0 \left(t - \frac{e^{-\chi t}}{\chi} \right) \Big|_0^{486 \text{ gün}} = R_1 + v_0 \left(t - \frac{e^{-\chi t} - e^0}{\chi} \right) \Big|_0^{486 \text{ gün}} =$$

$$= R_1 + v_0 \left(486 + \frac{1}{4,6} - e^{-4,6 \cdot 1,3315} \right) = R_1 + v_0 \left(486 + \frac{1}{4,6} - e^{-4,6 \cdot 1,3315} \right) = R_1 + v_0 \cdot 486,1517 =$$

$$= 63 \cdot 10^9 + 20000 \cdot 486,1517 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \approx 63 \cdot 10^9 + 84 \cdot 10^9 = 147 \cdot 10^9 \text{ km}$$

aranan oran;

$$\frac{S_{851}}{S_{365}} = \frac{4\pi R_2^2}{4\pi R_1^2} = \left(\frac{147 \cdot 10^9}{63 \cdot 10^9} \right)^2 \approx 5,44$$

olarak bulunur.

d) SN1987A süpernovanın ilk olarak görünmeye başlamasından 1 yıl sonraki görünür parlaklığı;

$$m_{365} - m = -2,5 \cdot \log \frac{E_{365}}{E_0} = -2,5 \cdot \log \frac{E_0 e^{\frac{t}{\tau}}}{E_0} = 2,5 \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \log e$$

$$m_{365} - 3 = 2,5 \cdot \frac{365}{95,9} \cdot \log 2,7182818 = 4,13; m_{365} = 7,1323$$

olur. Görünür parlaklık ve aydınlanma arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log \frac{L}{4\pi r^2}$$

ile verilir. 365 gün ve 851 gün sonra ışıma güçleri arasındaki oran;

$$m_{365} - m_s = -2,5 \cdot \log \frac{L_{365}}{L_s} ; \frac{L_{365}}{L_s} = 10^{-0,4(m_{365} - m_s)} = 10^{-0,4[7,1323 - (12,6369)]} = 10^{2,20184} = 159,16$$

olur. Işıma gücü için;

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

Stefan Boltzmann yasasını yazabiliriz. Buradan;

$$\frac{L_{365}}{L_s} = \frac{4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_1^4}{4\pi R_2^2 \cdot \sigma T_2^4} = \frac{R_1^2 T_1^4}{R_2^2 T_2^4} ; 159,16 = \frac{T^4}{5,44 T_2^4} ; T_2 = \frac{T}{\sqrt[4]{5,44 \cdot 159,16}} = 0,184 T = 0,184 \cdot 5450 = 1002,8 \text{ K} \approx 1000 \text{ K}$$

olarak bulunur.