

XXXI. BİLİM OLİMPİYATLARI-2023 İKİNCİ AŞAMA 2. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI

1. Bir Sefeid (zonklayan) yıldızının, en büzüldüğü haldeyken R_1 yarıçapında en parlak, en genişlemiş haldeyken R_2 yarıçapında en sönük olduğunu, bu döngü içinde yıldızın küresel şeklini koruduğunu ve ideal kara cisim gibi davrandığını kabul edelim. Zonklama dönemi boyunca yıldızın görünür parlaklığı 3,46 ile 4,08 kadir arasında ve termal ışıınının tepe yaptığı pik dalga boyu 531 nm ile 649,1 nm arasında değişmektedir.

a) Buna göre $\frac{R_1}{R_2}$ oranı nedir?

b) Bu sefeid yıldızı en genişlemiş haldeyken ve yarıçapı $R_2 = 4,95 \cdot 10^7$ km iken ışıma akısı ya da aydınlanması nedir?

c) Bu sefeid yıldızın olan uzaklık kaç parsektir?

Sefeid bir yıldızın parlaklığın değişimin T periyodu gün cinsinden ile bu yıldızın mutlak parlaklığı arasındaki ilişki;

$$M = -2,43 \cdot \log T - 4,05$$

ile verilmektedir.

d) Buna göre sefeid yıldızın parlaklığın değişim periyodu nedir?

(1 AB=150.10⁶ km, Güneşin ışıma gücü $L_G = 3,846 \cdot 10^{26}$ W, Güneşin görünür parlaklığı $m = -26,74$ kadir, Wien sabiti $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$ m, Stefan-Boltzmann sabiti $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/m² K⁴, olarak veriliyor)

2. Güneş sisteme olan üyeler arasında yer alan kuyruklu yıldızlar (kometler) buz, toz ve kaya karışımından oluşan gök cisimlerdir. Kuyruklu yıldızlar Güneş etrafında elips eksantrisiteyi çok büyük ve 1 e yakın olan eliptik yörüngeler üzerinde hareket etmektedirler. Kuyruklu yıldızlar Güneşe yaklaştıklarında ısınır ve buz süblimleşir. Açığa çıkan gazlardan ve tozlardan karakteristik kuyrukları oluşur. Güneş rüzgarı ve ışıma basıncı bu maddeleri savurur ve oluşan kuyruk her zaman Güneşin ters yönündedir. Bu kuyruklu yıldızlarından en büyük olanlardan birisi Halley kuyruklu yıldızdır. Halley kuyruklu yıldızın dolanım periyodu $T_H = 74,7$ yıl olup dolandığı eliptik yörüngenin elips eksantrisitesi $\varepsilon_H = 0,96658$ olarak veriliyor.

a) Halley kuyruklu yıldızın maksimum hızı yörüngenin orta noktasındaki hızının yaklaşık olarak kaç katıdır?

b) Halley kuyruklu yıldızların bilgilerden faydalanarak bulunan Güneşin kütlesi nedir?

c) Halley kuyruklu yıldızının Güneşe yakın olan yörüngenin yarısını kat etme süresi t_1 , Güneşe uzak olan yörüngenin yarısını kat etme süresi t_2 olduğuna göre $t_2 - t_1$ farkı kaç yaklaşık olarak kaç yıldır?

Güneşe en çok yaklaşan ve eliptik yörünge üzerinde hareket eden Moshup asteroidin dolanım periyodu $T_M = 188,049$ gündür.. Asteroit Moshup ile Halley kuyruklu yıldızı aynı anda Güneşe en yakın noktalarında iken asteroitten gönderilen bir radyo sinyal 8769 saniyede Halley kuyruklu yıldızla ulaşmaktadır.

d) Halley kuyruklu yıldızın bir periyot içinde taradığı alan, Moshup asteroidin bir periyot içinde taradığı alanın yaklaşık olarak kaç katıdır?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³/kg.s², ışık hızı $c = 300000$ km/s, 1 AB=150.10⁶ km, Dünyanın dolanım periyodu $T_D = 365,25$ gün, $\pi = 3,14$ olarak veriliyor.)

3. CMB fotonları, evrenin erken döneminden kalan ve bugün de gözlenebilen Kozmik Mikrodalga Arka Plan fonu (Cosmic Microwave Background-CMB) ışıınının fotonlarıdır. Bunlar Büyük Patlamadan yaklaşık 380000 yıl sonra serbest hale gelmekte ve evrenden ilk elektromanyetik ışıması olarak kabul ediliyor.

CMB fotonlarının yakın kızıl ötesi bölgede K filtresinde (merkezi dalga boyu $22\ 000\ \text{\AA}$) gözlenebildiği durumda evrenin büyüklüğü bugünküne kaçta kaçtır? (Wien sabiti $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ m.K olarak veriliyor.)

4. RS Ophiuchi (RS Oph) ikili yıldız sistem Ophiuchus (Yılan) takımyıldızında bulunmakta olup beyaz cüce ve kırmızı dev yıldızından oluşmaktadır. RS Oph sistemi düzenli aralıklarla tekrarlayan nova patlamalar sınıfından olup Tip Ia süpernova adaydır. RS Oph sistemine kadar olan uzaklık yaklaşık olarak $x=5000$ ışık yılıdır. Oph sistemindeki beyaz (CO WD) cücenin kütlesi yaklaşık olarak $M_{WD}=1,35 M_{\odot}$ olup beyaz cücenin çekirdeğinde karbon ve oksijen tepkimeleri gerçekleşmektedir. Bu beyaz cücenin yarıçapı yaklaşık olarak $R_{WD}=3000$ km dir. Kırmızı dev (M tipi) yıldızın kütlesi yaklaşık olarak $M_{KD}=1 M_{\odot}$ ve yarıçapı yaklaşık olarak $R_{KD}=80R_{\odot}$ dir. RS Oph ikili yıldızın kütle merkezinin etrafındaki dolanım periyodu $T=453,6$ gün, iki yıldız arasındaki uzaklık yaklaşık olarak $r=1,5$ AB dir.

a) İki yıldızın çembersel ya da eliptik yörüngeler üzerinde hareket ettikleri konusundaki yorumunuz nedir?

İki yıldızdan gelen ve hidrojen atomuna ait dalga boyu 21 cm olan radyo dalgalar incelenmektedir. Bunun için iki radyo teleskop kullanılmaktadır. Radyo teleskoplardan birisi Dünyanın ekvator üzerinde, diğeri ise ekvator düzleminde eliptik yörünge üzerinde hareket eden bir uyduda bulunmaktadır. İki yıldız çözebilmek için iki radyo teleskop arasında belli minimum uzaklık olmalıdır.

b) Uydunun yörüngesinin perihelion noktasında Dünyaya çok yakın olduğuna göre uydunun eliptik yörüngesinin elips eksantrisitesi nedir?

Beyaz cüce yıldızları kütleçekimi kuvvetin oluşan basınç ile en çok elektronların kuantum mekaniksel hareketinden kaynaklanan basınç ile dengelenmesi sonucunda evrimini sürdürebilmektedir. Pauli prensibine göre spin sayısı buçuklu sayılara sahip olan fermiyonlar aynı enerji seviyesinde bulunamazlar. Elektronlar da fermiyonlar oldukları için beyaz cücede enerji düzeylerine göre momentum-faz uzayında konumlandıkları için artık ultrarölativistik olurlar yani ışık hızına çok yakın hızlara sahiptirler. Bundan dolayı çok basınç uygulayarak beyaz cücenin çökmesini sağlayacak çekim kuvvetine karşı koyarlar. RS Oph sistemindeki düzenli aralıklarla tekrarlayan nova patlamalarının tekrarlama periyodu yaklaşık olarak 20 yıl olarak kabul edilebilir. Bu yakınlık sayesinde kırmızı devin rüzgarları beyaz cüceye sürekli madde aktarır. Kırmızı dev genişlemiş atmosferinden sürekli gaz ve en çok hidrojen gazı kaybeder. Bu gaz yıldız rüzgarları şeklinde dışarıya doğru akar. Beyaz cüce çok güçlü çekimi sayesinde kırmızı devden çıkan gazın bir kısmını kendisine doğru çeker. Gaz beyaz cüceye doğrudan düşmez; önce onun etrafında bir akresyon diski oluşturur. Bu disk, gazın yavaş yavaş beyaz cüce yüzeyine doğru spiraller çizerek inmesini sağlar. Beyaz cüce yüzeyinde hidrojen birikir. Yoğunluk ve sıcaklık kritik seviyeye ulaştığında hidrojen füzyonu başlar. Biriken hidrojen ani şekilde tepkimeye girdiği için nova patlaması gerçekleşir. Bu olayın gerçekleşmesi beyaz cücenin kütlesi her zaman $0,02M_{\odot}$ kadar artması gerekir. Sistemin parlaklığı birkaç gün içinde binlerce kat artar. Patlama sonrası gaz uzaya fırlatılır, beyaz cüce yeniden madde toplamaya başlar. Beyaz cüce kırmızı devden yayılan yıldız rüzgarının %20 kadar yakaladığını ve kırmızı devden madde aktarımının sabit oranda gerçekleştiğini kabul edelim.

c) Buna göre kırmızı dev bir yılda kendi kütlenin ne kadarı kaybeder?

d) Eğer her patlamada biriken kütlenin sadece %50 u kadar sistemden dışarı atılıyor ve geri kalanı beyaz cüce üzerinde kalıyorsa, bu beyaz cücenin Chandrasekhar limitine ulaşarak bir Tip Ia süpernova olarak patlaması için yaklaşık olarak kaç yıl geçmesi gerekir?

Beyaz cüce yüzeyinde biriken hidrojenin sadece bir kısmı füzyon tepkimeye girer. Bu yaklaşık olarak biriken hidrojenin %5 i kadardır. Tepkimelerde en çok helyum ve daha az karbon ve oksijen oluşur. Patlama başladığında yıldızın parlaklığı çok büyük bir hızla artar. Yaklaşık 1 günde sönük halinden çıplak gözle görülebilecek seviyeye ulaşır. RS Oph, "hızlı nova" olarak sınıflandırılır. Bu, parlaklığın zirve yaptıktan sonra hızla düşmeye başladığı anlamına gelir: Yıldız, zirve parlaklığına yakın değerlerde sadece birkaç gün kalır. Bu süre yaklaşık olarak 10 gün olduğunu kabul edelim.

e) Buna göre süpernovanın görünür parlaklığı nedir?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma=6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Dünyanın yarıçapı $R_D=6400$ km, Güneşin kütlesi $M_{\odot}=2 \cdot 10^{30}$ kg, protonun (${}^1_1\text{H}$) kütlesi $m_{{}_1\text{H}}=1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, Helyum (${}^4_2\text{He}$) çekirdeğinin kütlesi $m_{{}_2\text{He}}=6,6447 \cdot 10^{-27}$ kg, Güneşin ışıma gücü $L_{\odot}=3,846 \cdot 10^{26}$ W, Güneşin mutlak parlaklığı $M_G=4,83$ kadir, 1 AB= $150 \cdot 10^6$ km, ışık hızı $c=300000$ km/s, Chandrasekhar kütle sınırı $1,44M_{\odot}$, $\pi=3,14$ olarak veriliyor.)

5. Bir galaksi kümesinde 6 Mpc yarıçap içinde bulunan üye galaksilerin spektrumu incelendiğinde bu galaksilerin hız dispersiyonu $\sigma_v = 1500$ km/s olarak hesaplanmaktadır. Kümedeki her galaksinin ortalama kütlesi $M_{\text{Gal}} = 10^{11} M_{\odot}$ olarak kabul edilebilir. Galaksi kümesinin kırmızıya kayma parametresi $z=0,18$ olarak ölçülüyor.

a) Virial Kanunuyla bulunan kütlenin kümenin toplam kütlesini temsil ettiğini kabul edersek bu galaksi kümesinde yaklaşık kaç üye galaksi bulunur?

b) Galaktik kümenin gözlemlendiği açı kaç yaysaniyedir?

(Galaksilerin kütlesi kümenin kütlesi %3 ü kadar, evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, ışık hızı $c = 300000$ km/s, Güneşin kütlesi $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}$ kg, Hubble sabiti $H = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ olarak veriliyor.)

6. Kütlesi M olan çekim merkezi etrafında kütlesi m olan bir uydu eliptik yörünge üzerinde hareket etmektedir. Eliptik yörüngenin büyük yarı eksenini a dır. Elipsin merkezinde xOy koordinat sistemi yerleştiriliyor. Uydunun mekanik enerjisi E , açısal momentumu L dir.

a) Buna göre uydunun alan hızı nedir?

b) Uydu çekim merkeze en yakın perihelion P noktasından geçerken hızı v_p , uydu gezegenden a uzaklıkta iken

hızı $\frac{v_p}{2}$ olduğuna göre uydu $\frac{a}{2}$ uzaklıkta iken uydunun x koordinatının büyüklüğü kaç a dır?

c) Uydu aphelion noktasından geçtikten sonra çekim merkezi ile ilgili konum vektörün x eksenini ile yaptığı açı θ olduğunda uydunun hızı ve bu hızın konum vektörü ile yaptığı açı nedir?

(Evrensel çekim sabiti γ olarak veriliyor.)

Bileşenler Mesafe	Mesafe (")	Mesafe (AB)	Not
A-B; C-D	208,2"	10500	$\epsilon^1 - \epsilon^2$
A-B	2,3"	116	ϵ^1
C-D	2,4"	121	ϵ^2

7. Epsilon Lyrae (ϵ Lyr), Çalgı (Lir) Takımyıldızında Dünyadan 162 ışık yılı uzaklıkta, çift-çift (double-double) olduğu bilinen bir çoklu yıldız sistemidir. İlk olarak iki bileşenli bir çift yıldız olarak tanımlanmış ve bileşenleri ϵ^1 ve ϵ^2 olarak adlandırılmıştır. Ayırma gücü daha yüksek bir

teleskopla gözlemlendiğinde ise kendi içlerinde ϵ^1 bileşeninin A ve B, ϵ^2 bileşeninin ise C ve D olarak adlandırılan ikişer bileşene sahip olduğu anlaşılmıştır. Bu 4 yıldızın parlaklıkları sırasıyla A yıldızı için 5,15 kadir, B yıldızı için 6,1 kadir, C yıldızı için 5,25 kadir ve D yıldızı için 5,38 kadir olarak veriliyor. Tabloda bu bileşenlerin birbirlerine göre mesafeleri verilmektedir. Bu sistem odak bir teleskop ile 550 nm dalga boyunda gözlenmektedir. Teleskobun objektifin odak uzaklığı $f_{\text{ob}} = 2000$ mm, odak/çap oranı $f/10$, okülerin (göz merceğinin) odak uzaklığı $f_{\text{ok}} = 25$ mm, $a\text{FOV}_{\text{oküler}} = 60^\circ$ dir.

a) Buna göre sistemi oluşturan 4 bileşenin hangilerinin görüleceğini hangilerinin görülemeyeceğini hesaplayarak gösteriniz.

b) Tüm özellikler ve gözlem koşullarını aynı bırakalım. Dört bileşeni de ayrı olarak gösterecek bir teleskobun objektifin çapı maksimum kaç cm olmalı?

c) Teleskobun okülerin aynı kalma koşulu ile A-B ve C-D iki ikili sistemi gözlemlemek için objektifin odak uzaklığı yaklaşık olarak kaç metre olmalıdır?

d) Dört yıldızın toplam görünür parlaklığı nedir?

XXXI. BİLİM OLİMPİYATLARI-2023 İKİNCİ AŞAMA 2. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI CEVAPLARI

1. a) 0,89; b) $6,39 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$; c) 301 pc; d) 2 gün

2. a) 59; 7,67; b) $1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; c) 46 yıl; d) 96

3. $\frac{1}{500}$

4. a) Elips eksantrisitesi oldukça küçük olan eliptik yörüngeler üzerinde hareket etmektedir.

b) 0,76; c) $5 \cdot 10^{-3} M_{\odot} / \text{yıl}$; d) 180 yıl; e) -9 kadir

5. a) 4680; b) 700"

6. a) $\sqrt{\frac{aL^2|E|}{2\gamma Mm^3}}$; b) $\frac{5a}{6}$; c) $\sqrt{\frac{\gamma^3 M^3 m^3 \left(2 - 2\sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \cos \theta} - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \right)}{2aL^2|E|}}$; $\arctan \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \cos \theta}}{\sqrt{1 - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \sin \theta}}$

7. a) 0,69"; b) 6 cm; c) 26 m; d) 3,9 kadir

XXXI. BİLİM OLİMPİYATLARI-2023 İKİNCİ AŞAMA 2. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI ÇÖZÜMLERİ

1. a) Yıldızın görünür parlaklığı ile yıldızın sağladığı aydınlanma arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \log E = -2,5 \log \frac{L}{4\pi r^2}$$

ile verilir. Yıldızın yüzey sıcaklığı T_1 ve T_2 iken görünür parlaklığı için;

$$m_1 = -2,5 \log E_1; m_2 = -2,5 \log E_2;$$

aydınlanmalar için;

$$E_1 = 10^{-0,4m_1}; E_2 = 10^{-0,4m_2}; \frac{E_1}{E_2} = 10^{-0,4(m_1-m_2)} = 10^{-0,4(3,46-4,08)} = 10^{0,248} = 1,77$$

yıldızın yaydığı ışıma gücü için;

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_1^4; L_2 = 4\pi R_2^2 \cdot \sigma T_2^4$$

yıldızın yüzey sıcaklığı;

$$\lambda = \frac{b}{T}; T_1 = \frac{b}{\lambda_1}; T_2 = \frac{b}{\lambda_2};$$

bu ışımanın sağladığı aydınlanmalar için;

$$E_1 = \frac{4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_1^4}{4\pi r^2} = \frac{R_1^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_1^4 r^2}; E_2 = \frac{4\pi R_2^2 \cdot \sigma T_2^4}{4\pi r^2} = \frac{R_2^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_2^4 r^2}$$

yazabiliriz. Işıma akısı ve aydınlanma aynı şeydir. Burada r yıldızla olan uzaklıktır. Buradan aranan oran;

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{R_1^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_1^4 r^2}}{\frac{R_2^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_2^4 r^2}} = \frac{R_1^2 \cdot \lambda_2^4}{R_2^2 \cdot \lambda_1^4}; 1,77 = \frac{R_1^2 \cdot 649,1^4}{R_2^2 \cdot 531^4} = 2,232895 \cdot \frac{R_1^2}{R_2^2}; 0,79269289 = \frac{R_1^2}{R_2^2}; \frac{R_1}{R_2} = 0,89$$

olarak bulunur.

b) Sefid yıldız en genişlemiş haldeyken görünür parlaklığı ve Güneşin parlaklığı için;

$$m_2 - m_G = -2,5 \log \frac{E_2}{E_G} = -2,5 \log \frac{\frac{E_2}{L_G}}{\frac{L_G}{4\pi r_G^2}}; \frac{4\pi r_G^2 E_2}{L_G} = 10^{-0,4(m_2-m_G)}$$

$$E_2 = \frac{L_G \cdot 10^{-0,4(m_2-m_G)}}{4\pi r_G^2} = \frac{3,846 \cdot 10^{26} \cdot 10^{-0,4[4,08-(-26,74)]}}{4,3 \cdot 14 \cdot (150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)^2} = 6,39 \cdot 10^{-10} \text{ W/m}^2$$

olarak bulunur.

c) Sefid yıldızla olan uzaklık;

$$E_2 = \frac{R_2^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_2^4 r^2}; r = \sqrt{\frac{R_2^2 \cdot \sigma b^4}{\lambda_2^4 E_2}} = \sqrt{\frac{(4,95 \cdot 10^7 \cdot 10^3)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (2,9 \cdot 10^{-3})^4}{(649,1 \cdot 10^{-9})^4 \cdot 6,39 \cdot 10^{-10}}} = 9,29 \cdot 10^{18} \text{ m} = \frac{9,29 \cdot 10^{18}}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000} \approx 301 \text{ pc}$$

olarak bulunur.

d) Görünür parlaklık ve mutlak parlaklık arasındaki ilişki;

$$m - M = -5 + 5 \log r$$

ile verilir. Buradan yıldızın mutlak parlaklığı;

$$4,08 - M = -5 + 5 \cdot \log 301 = -5 + 5 \cdot 2,47856 = -5 + 12,39 = 7,39; M = -3,31 \text{ kadir}$$

sefid yıldızın parlaklığın değişim periyodu;

$$M = -2,43 \cdot \log T - 4,05; -3,31 = -2,43 \cdot \log T - 4,05; 0,74 = 2,43 \cdot \log T; \log T = 0,3; T = 2 \text{ gün}$$

olarak bulunur.

2. a) Keplerin üçüncü yasasından Halley kuyruklu yıldızın büyük yarı eksen;

$$\frac{T_D^2}{a_D^3} = \frac{T_H^2}{a_H^3}; a_H = \sqrt[3]{\frac{a_D^3 T_H^2}{T_D^2}} = a_D \cdot \sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_D^2}} = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{74,7^2}{1^2}} = 17,737 \text{ AB} = 17,737 \cdot 150 \cdot 10^6 = 2660,55 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Halley kuyruklu yıldızın aphelion uzaklığı;

$$r_{PH} = a(1-\epsilon) = 2660,55 \cdot 10^6 (1-0,96658) = 88,91588 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$r_{AH} = a(1+\epsilon) = 2660,55 \cdot 10^6 (1+0,96658) = 5232,18442 \cdot 10^6 \text{ km}$$

hızların oran açısıl momentum korunumu yasasından;

$$mv_{PH} r_{PH} = mv_{AH} r_{AH}; \frac{v_{PH}}{v_{AH}} = \frac{1+\epsilon_H}{1-\epsilon_H} = \frac{1+0,96658}{1-0,96658} = 58,8444 \approx 59$$

olarak bulunur. Perihelion ve aphelion noktalarındaki hızları bulmak için açısıl momentum korunumu yasası ve enerji korunumu yasasından faydalanabiliriz. Açısıl momentum korunumu yasası için

$$m v_P r_P = m v_A r_A; v_A = \frac{v_P r_P}{r_A}$$

enerji korunumu yasası için;

$$\frac{mv_P^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_P} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_A} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r}$$

yazabiliriz. Buradan uydunun perihelion noktasındaki hızı;

$$\begin{aligned} v_P^2 - \frac{2\gamma M}{r_P} &= v_A^2 - \frac{2\gamma M}{r_A} = \frac{v_P^2 r_P^2}{r_A^2} - \frac{2\gamma M}{r_A} \\ v_P^2 \left(1 - \frac{r_P^2}{r_A^2}\right) &= 2\gamma M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A}\right) \Rightarrow v_P^2 \frac{(r_A - r_P)(r_A + r_P)}{r_A^2} = \frac{2\gamma M(r_A - r_P)}{r_P r_A} \\ v_P^2 &= \frac{2\gamma M r_A}{r_P (r_A + r_P)} = \frac{2\gamma M a(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon) \cdot 2a} = \frac{\gamma M(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)} \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)}} = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\epsilon)}{r_P}} \end{aligned}$$

aphelion noktasındaki hızı;

$$v_A = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)} \frac{a(1-\epsilon)}{1+\epsilon}} = \sqrt{\frac{\gamma M(1-\epsilon)}{a(1+\epsilon)}}$$

gök cismin çekim merkezinden herhangi r uzaklıktaki uydunun hızı;

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r} = \frac{m}{2} \cdot \frac{\gamma M(1+\epsilon)}{a(1-\epsilon)} - \frac{\gamma M m}{a(1-\epsilon)} = \frac{\gamma M m}{a(1-\epsilon)} \left(\frac{1+\epsilon}{2} - 1\right) = -\frac{\gamma M m}{2a}; v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

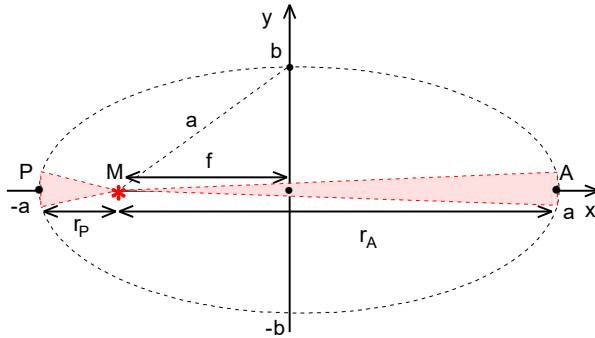
olur. Yörüngenin orta noktası için r=a olur. Bu durumda;

$$v_{Hort} = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{a}}$$

aranan oran;

$$\frac{v_{PH}}{v_{Hort}} = \frac{\sqrt{1+\epsilon_H}}{\sqrt{1-\epsilon_H}} = \sqrt{\frac{1+0,96658}{1-0,96658}} = 7,67$$

olarak bulunur.



b) Elipsin özelliklerinden elipsin küçük yarı eksen;

$$b_H = \sqrt{a^2 - f^2} = a \sqrt{1 - \frac{f^2}{a^2}} = a \sqrt{1 - \epsilon^2} =$$

$$= 2660,55 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{1 - 0,96658^2} = 174,8596 \cdot 10^6 \text{ km}$$

cismin açısıl momentumu için;

$$L = m v_P r_P = m v_A r_A = \text{sabit}$$

Δt sürede taranan üçgenlerin alanları için ve alan hızı için;

$$\Delta S = \frac{r_P v_P \Delta t}{2} = \frac{m r_P v_P \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}$$

$$\Delta S = \frac{r_A v_A \Delta t}{2} = \frac{m r_A v_A \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}$$

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{r_P v_P}{2} = \frac{r_A v_A}{2}$$

yazabiliriz. Enerji korunumu yasasından alan hızı;

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{mv_P^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_P} = \frac{mv_A^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_A} ; \frac{mv_P^2}{2r_P^2} - \frac{\gamma Mm}{r_P} = \frac{mv_A^2}{2r_A^2} - \frac{\gamma Mm}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_P} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_P} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_A} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_A} \\ \frac{2\sigma^2}{r_P^2} - \frac{2\sigma^2}{r_A^2} &= \frac{\gamma M}{r_P} - \frac{\gamma M}{r_A} \Rightarrow \frac{2\sigma^2(r_A^2 - r_P^2)}{r_P^2 r_A^2} = \frac{\gamma M(r_A - r_P)}{r_P r_A} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\gamma M r_P r_A}{2(r_P + r_A)}} = \sqrt{\frac{\gamma M b^2}{2.2a}} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\gamma M}{a}} = \frac{\sqrt{\gamma M a (1 - \varepsilon^2)}}{2} \end{aligned}$$

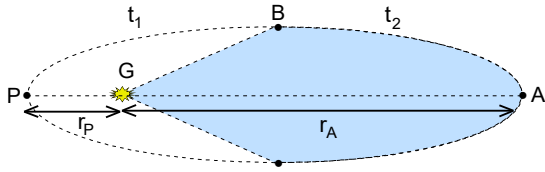
olarak bulunur. Cismin dolanım periyodu T;

$$S = \sigma T; \pi a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\gamma M a (1 - \varepsilon^2)}}{2} \cdot T; T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$

olarak bulunur. Buradan güneşin kütlesi;

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{\gamma T^2} = \frac{4.3,14^2 \cdot (2660,55 \cdot 10^6 \cdot 10^3)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} (74,7 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

olarak bulunur.



c) Hareket sabit alan hızı ile gerçekleşmektedir. Hareket süresi taranan alanlarla doğru orantılıdır. BPC ve CAB yolunda taranan alanlar yarı elipsin alanından GBC üçgenin alanını çıkarılarak ya da ilave edilerek bulunur.

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2} - \frac{(a - r_P) \cdot 2b}{2}; S_2 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{(a - r_P) \cdot 2b}{2}$$

Halley kuyruklu yıldızının Güneşe yakın olan BPC yarı yolunu kat etme süresi;

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{T} &= \frac{\frac{\pi ab}{2} - \frac{(a - r_P) \cdot 2b}{2}}{\pi ab} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2.0,96658}{3,14} \right) = 0,192328; t_1 = 0,192328 \cdot 74,7 = 14,367 \text{ yıl} \\ \frac{t_2}{T} &= \frac{\frac{\pi ab}{2} + \frac{(a - r_P) \cdot 2b}{2}}{\pi ab} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\pi} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2.0,96658}{3,14} \right) = 0,807672; t_2 = 0,807672 \cdot 74,7 = 60,333 \text{ yıl} \end{aligned}$$

aranan zaman farkı;

$$t_2 - t_1 = 60,333 - 14,367 = 45,966 \text{ yıl} \approx 46 \text{ yıl}$$

olarak bulunur.

d) Keplerin üçüncü yasasından Moshup asteroidin büyük yarı eksen;

$$\frac{T_D^2}{a_D^3} = \frac{T_M^2}{a_M^3}; a_M = \sqrt[3]{\frac{a_D^3 T_H^2}{T_D^2}} = a_D \cdot \sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_D^2}} = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{188,049^2}{365,25^2}} = 0,6424 \text{ AB} = 0,6424 \cdot 150 \cdot 10^6 = 96,356 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Moshup asteroidi ile Halley kuyruklu yıldızı arasındaki minimum uzaklık;

$$x = ct = 300000 \cdot 8769 = 2630,7 \cdot 10^6 \text{ km}$$

asteroidin aphelion uzaklığı;

$$x = r_P - r'_P; r'_P = r_P - z = 2660,55 \cdot 10^6 - 2630,7 \cdot 10^6 \text{ km} = 29,85 \cdot 10^6 \text{ km}$$

asteroidin eliptik yörüngesinin elips eksantrisitesi;

Halley kuyruklu yıldızın aphelion uzaklığı;

$$r'_P = a(1 - \varepsilon'); 29,85 \cdot 10^6 = 96,356 \cdot 10^6 (1 - \varepsilon'); \varepsilon' = 0,69$$

eliptik yörüngesinin küçük yarı eksen;

$$b' = a' \sqrt{1 - \varepsilon'^2} = 96,356 \cdot 10^6 \sqrt{1 - 0,69^2} = 50,48 \cdot 10^6 \text{ km}$$

aranan oran;

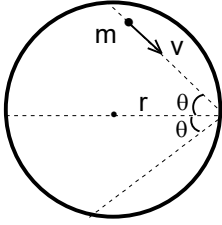
$$\frac{S_H}{S_M} = \frac{a_H b_H}{a_M b_M} = \frac{2660,55 \cdot 10^6 \cdot 174,8596 \cdot 10^6}{96,356 \cdot 10^6 \cdot 50,48 \cdot 10^6} = 95,645 \approx 96$$

olarak bulunur.

3. Kozmoloji evrenin yapısını, niceliklerini ve evrimini inceleyen bir bilim dalıdır. Kozmolojide geliştirilen teorilere göre evrenin evrimi çok büyük bir patlama ile başlamıştır. Bu patlama ile olağanüstü büyük sıcaklıklar ve çok güçlü ışıma (radyasyon) meydana gelmiştir. Yüksek sıcaklıklarda bu ışıma uzun süre taneciklerin atomları oluşturmaya engel olur. Fotonlar, elektronlar ve protonlar sürekli etkileşim halinde oldukları için ışımının termal dengededir. Evrenin genişlemesi ile başlangıçtaki olağanüstü yüksek sıcaklıklar düşmeye başlar. Yaklaşık 3000 K sıcaklığında büyük patlamadan sonra yayılan ışıma nötr atomları artık etkilememektedir. Bu sıcaklığın altında protonlar ve elektronlar birleşerek nötr hidrojen atomları oluşturmaya başlar. Bu olaya rekombinasyon denir. Rekombinasyon olayın başlaması ile fotonlar madde ile etkileşimi keserek serbestçe yayılmaya başlar. Rekombinasyon başlayıncaya kadar termal dengede olan ışıma evrenin genişleme sonucunda kara cisim ışıma spektrumu özellikleri gösterir. Şu anda ise bu ışımının sıcaklığı 2,7255 K olarak ölçülmektedir. Kozmolojik anlamda Evrenin genişlemesini incelemek için foton gazının basıncın ya da birim hacimdeki enerjinin sıcaklıkla nasıl bağlı olduğunu bilmek zorundayız. Fotonlar klasik parçacıklardan farklı olarak kütleleri sıfırdır fakat sahip oldukları momentum sayesinde basınç oluştururlar. Basınç ile hacim arasında belirgin bir ilişki bulunmaktadır. Atomların ve moleküllerin oluşturdukları basıncı bulmak için ideal gaz modelinden faydalanabiliriz. Bu modelde parçacıklar sadece kabın yüzeyi ile esnek olarak çarpıştıkları için sadece hızın normal bileşeni yön değiştirmektedir. Bu değişimlerinin incelemek için yarıçapı r olan bir kürede N tane m kütleli parçacık eşit büyüklükte;

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

hızlarla hareket ettiklerini kabul edebiliriz. Burada k Boltzmann sabitidir.



Esnek çarpışmalarda bir parçacığın momentum değişimi ve çarpışma süresi iki çarpışma arasındaki süre;

$$\Delta p_1 = mv \cos \theta - (-mv \cos \theta) = 2mv \cos \theta; \Delta t = \frac{2rc \cos \theta}{v}$$

olarak kabul edilebilir. Bir molekülün etki ettiği kuvvet ve tüm moleküllerin etki ettiği kuvvet;

$$F_1 = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = \frac{mv^2}{r}; F = NF_1 = \frac{Nmv^2}{r}$$

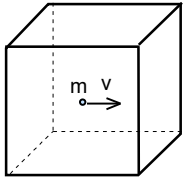
bu moleküllerin yüzeye oluşturdukları basınç;

$$P = \frac{F}{S} = \frac{Nmv^2}{r \cdot 4\pi r^2} = \frac{Nmv^2}{3V}; V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

gaz denklemini;

$$PV = \frac{Nmv^2}{3} = \frac{2}{3} \frac{Nmv^2}{2} = \frac{2}{3} \frac{N3kT}{2} = NkT = nN_A kT = nRT$$

olarak bulunur. Burada N_A Avogadro sayısı, R gaz sabiti olarak bilinmektedir.



Bu denklemi farklı yoldan da türetebiliriz. Bunun için de oldukça basit bir model kullanabiliriz. Yine parçacıkların hızları eşit ve v olduğunu, belli yönde de parçacıkların;

$$\Delta N = \frac{n_0 S v \Delta t}{6}; n_0 = \frac{N}{V}$$

kadarı hareket ettiğini kabul edebiliriz. Burada n_0 parçacıkların konsantrasyonu, S parçacıkların

geçtikleri alan, Δt ise S alanından parçacıkların geçiş süreleridir. Parçacıklar bir küpün içinde

bulunduklarını ve sadece küpün yan yüzeylere doğru dik olarak hareket ettiğini kabul edelim. Bu durumda esnek çarpışmadan sonra bir parçacığın momentum değişimi;

$$\Delta p_1 = mv - (-mv) = 2mv$$

N parçacığın momentum değişimi;

$$\Delta p = N \Delta p_1 = \frac{mv^2 n_0 S \Delta t}{3} = \frac{Nmv^2 S \Delta t}{3V}$$

Bu moleküllerin yüzeye oluşturdukları basınç;

$$P = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Nmv^2}{3V} = \frac{2}{3} \frac{Nmv^2}{2} = \frac{2U}{3V} = \frac{Np \cdot v}{3V} = \frac{N \bar{p} \cdot \bar{v}}{3V}; PV = \frac{N \bar{p} \cdot \bar{v}}{3} = \frac{2U}{3}$$

olarak bulunur. Burada;

$$U = \frac{Nmv^2}{2}$$

gazın iç enerjisi oluyor. Evrende rekombinasyon süreci başladığında foton gazın genişlemesi adyabatik olarak devam etmekte-dir. Birinci termodinamik yasası için;

$$dQ = dW + dU; dW = PdV; dU = c_v dT; c_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{iR}{2}$$

yazabiliriz. Burada dW yapılan iş, dU sistemin bir molün iç enerji değişimi, i serbestlik derecesi olur. Sabit hacimde molar kapasitesi;

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P = \left(\frac{dA}{dT} \right)_P + \left(\frac{dU}{dT} \right)_P = R + \frac{iR}{2} = \frac{(i+2)R}{2} = R + c_v$$

sabit basınçta molar kapasitesi olarak yazılabilir. İki molar kapasitenin oranı;

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$$

olur. Burada i serbestlik derecesi, R ise gaz sabiti olarak bilinmektedir. Adyabatik prosesler için sisteme verilen ısı sıfırdır.

$$PdV + c_v dT = 0$$

Bir mol gaz için;

$$PV = RT$$

yazılabilir. Birinci termodinamik yasasına bu ifadeleri koyduğumuzda;

$$\frac{RTdV}{V} + c_v dT = 0; \frac{(c_p - c_v)dV}{V} + \frac{c_v dT}{T} = 0; \frac{(\gamma - 1)dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0$$

denklemi elde edilir. İntegrasyondan sonra;

$$TV^{\gamma-1} = \text{sabit}; PV^{\gamma} = \text{sabit}; T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{sabit}$$

olarak bulunur. Klasik tek atomlu gaz için $i=3$ adyabatik katsayısı;

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{3+2}{3} = \frac{5}{3}$$

olarak yazılabilir. İdeal gaz için elde edilen denklem;

$$PV = \frac{2U}{3} = \left(\frac{5}{3} - 1 \right) U = (\gamma - 1)U; P = \frac{(\gamma - 1)U}{V}$$

şeklinde yazılabilir. Foton gazının davranışı incelemek için içi aynalı olan bir prizma alabiliriz. Bu prizmanın tabanlarından birisi hareketli piston, diğer tabanı ise ısı geçiriyor. Pistona çarpan fotonların momentum değişimi;

$$\Delta p = 2p$$

pistona Δt sürede düşen foton sayısı;

$$\Delta N = \frac{n_0 S c \Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Fotonların uyguladıkları kuvvet;

$$F = \frac{\Delta N \Delta p}{\Delta t}$$

basınç;

$$P = \frac{F}{S} = \frac{N p c}{3V}$$

olarak bulunur. Fotonların momentumu;

$$p = \frac{\hbar \omega}{c}$$

olarak verilir. Burada;

$$E_1 = \hbar \omega$$

bir fotonun enerjisidir. N fotonun enerjisi;

$$U = N E_1$$

olarak yazılabilir. Buradan fotonların basıncı;

$$P = \frac{U}{3V}$$

olarak bulunur. Basınç iç enerji cinsinden yazılabileceği için foton gazın adyabatik katsayısı;

$$P = \frac{U}{3V} = \frac{(\gamma - 1)U}{V}; \gamma = \frac{4}{3}$$

olarak bulunur. Adyabatik proseslerde sıcaklık ve hacim arasındaki ilişkiden sıcaklık ve yarıçap arasındaki ilişki;

$$TV^{\gamma-1} = TV^{\frac{4}{3}-1} = T \left(\frac{4\pi R^3}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = CTR = \text{sabit}; TR = \text{sabit}$$

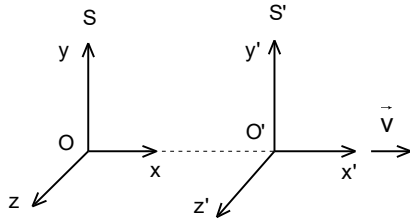
olarak bulunur. Evrenin genişleme hızı sabit olarak kabul edilirse evrenin yaşı;

$$tT = \text{sabit}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$t_{\text{rekombinasyon}} T_{\text{rekombinasyon}} = t_{\text{evren}} T_{\text{CMR}}; 380000.3000 = 2,7255 t_{\text{evren}}; t_{\text{evren}} = 4,18.10^5 \text{ yıl}$$

olarak bulunur. Bugün evrenin yaşı yaklaşık olarak 14 milyar olarak kabul edilmektedir. Elde edilen sonuç evrenin sabit hızla genişlediği varsayımı ile çelişmektedir. Bu durumda farklı bir açıklama getirilmelidir. Evren genişledikçe rekombinasyon dönemi sonrası fotonların dalga boyu da artar. Dalga boyu ne kadar uzamışsa, evren o kadar genişlemiş demektir. Bu olaya kırmızıya kayma (redshift) denir. Fizikte iki farklı mekanizmaya dayanan kırmızıya kayma bilinir. Doppler kırmızıya kayma uzay içerisinde gerçekleşir ve kaynak ile gözlemci arasındaki göreceli hareketinden kaynaklanır. Eğer bir yıldız bizden uzaklaşıyorsa, ışığının dalga boyu uzar ve kırmızıya kayar, yaklaşıyorsa maviye kayma olur. Doppler kırmızıya kayması özel rölativite teori çerçevesinde incelenir ve bu durumda uzay-zaman sabittir. Bu uzay-zaman Minkowski metriği olarak bilinmekte ve yıldız bu metrik üzerinde hareket eder. Hubble kozmolojik kırmızıya kayma ise evrenin genel genişlemesinden kaynaklanır. Burada galaksiler sanki hareket etmiyor gibi düşünülebilir, uzayın kendisi genişlediği için ışık kırmızıya kayıyor. Işık dalgaları bu genişleyen uzayda gerilerek dalga boyu artıyor. Hubble kırmızıya kayma, Büyük Patlama teorisinin ve evrenin genişleme hızının temel gözlemsel kanıtıdır. Hubble kozmolojik kırmızıya kayması genel rölativite teorisini çerçevesinde (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-FLRW) metriği ile incelenir. Bu kayma galaksilerin uzaydaki hareketinden değil, galaksiler arasındaki uzayın kendisinin genişlemesinden kaynaklanır. Işık fotonu, genişleyen uzayda yol alırken dalga boyu da metrikle birlikte "gerilir". İki kırmızı kayma fiziksel mekanizmaları farklı da olsa ışığın dalga boyunun uzamasıyla gözlenir. Bunun anlamı ise matematiksel olarak aynı şekilde ifade edilebilir. Bu matematiksel ifade özel izafiyet teorisinde genel fizik seviyesinde matematiksel yöntemlerle türetilir.



Lineer denklemler sistemlerin çözümlerinde genelde bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşittir. Bazı durumlarda bilinmeyen sayılar kadar denklem verilir fakat çözüm bulmak için ilave bir koşul kullanılır. Klasik fizikte sabit hızla hareket tüm koordinat sistemlere eylemsizlik ya da referans koordinat sistemleri denilir. Eylemsizlik koordinat sistemlerde Newton yasaları geçerlidir. Bu durumda tüm eylemsizlik sistemlerde Newton yasaları aynı şekilde yazılmaktadır. Bu fizikte Galilei prensibi olarak bilinmektedir. Tüm eylemsizlik koordinat sistemleri dinamik açısından birbirine eşdeğer olmalarında rağmen kinematik

açısından bu koordinat sistemleri farklıdır. S' koordinat sisteminde hareket bilinirse, ayrıca da S' koordinat sisteminin S koordinat sisteme göre hareketi bilinirse cismin S koordinat sisteme göre hareketi de bilinir anlama gelir. S' koordinat sistemi S sistemine göre sabit v hızı ile hareket ettiğini, ayrıca iki koordinat sistemin x eksenleri çakışık olduğunu kabul edelim Bu durumda koordinatlar arasındaki bağıntı;

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t; x = x' + vt; y = y'; z = z'$$

ile verilir. Bu bağıntılar Galilei dönüşümlerin matematiksel ifadesidir. Bu dönüşümlerde uzay homojen, izotrop (eş yönlü) zaman da homojen, mutlak ve değişmez olarak kabul edilmektedir. Bu kabulün hiçbir deneysel dayanağı yoktur. Kabul daha çok sezgisel olarak yapılmaktadır. Mesela eşzamanlılık klasik mekanikte sorgusuz olarak kabul edilmektedir. Dünyada ve Evrende her hangi başka bir yerde iki olayın aynı anda gözlenemeyebilme Uzun zaman bu kabullere ters düşecek deneyler de olmadığı için eylemsizlik prensibi yaklaşık olarak 350 yıl kullanılmış ve hiç şüphe uyandırmamıştır. Bunun için en önemli sebep yapılan deneylerde hızın küçük olmasıdır. Bu da başka bir kabulle ilgilidir. Klasik fizikte etkileşimler sonsuz büyük hızla, yani aniden iletilmektedir. Galilei dönüşümlerinden klasik fizikte geçerli olan hız toplama yasası için;

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}; u_x = u'_x + v; u_y = u'_y; u_z = u'_z$$

ivmeler için;

$$\vec{a} = \vec{a}'; a_x = a'_x; a_y = a'_y; a_z = a'_z$$

yazabiliriz.

Kuantum fiziği ve genel çekim gibi iki temel teoriden gelişen kozmoloji bilimi büyük ölçekteki uzay ve zamanda gelişen evreni, temel parçacıkların yapısı ve etkileşmesi göz önünde bulundurularak ve deneysel gözlemlere dayanarak evrenin tümünü izah etmesi amaçlamaktadır. Bu teoriler yüksek hızlarda da geçerli olmalıdır. Yüksek hızda özel rölativite teorisinin temel kuralları geçerlidir. Özel rölativite teorisinde mutlak ve değişmez uzay fikriyle beraber mutlak ve değişmez zaman kavramı da reddedilmektedir. Özel rölativite teorisinde ışık hızı çok önemli rol oynamaktadır. Yapılan çok sayıda deneyde vakumdaki ışık hızı sabit ve ışığı üreten ya da ışığı algılayan cismin hareketinde bağımsız olduğu gösterilmiştir. Yapılan deneylerde mesafe ve zamanın ölçülmesi önemli olduğu için ışık dalga boyu uzunluk ölçülmesinde kullanılabilir. Dalga boyu yerine sadece ve sadece zaman ölçülmesi yapılabilir. Bu durumda mesafeyi ölçmek için iki foton algılamasında ölçülen zaman farkını bilmek yeterli oluyor. Zaman ölçülmesinde ise genelde hep özdeş saatlerle yapılan zaman ölçümlerdeki senkronizasyon önemlidir. Senkronizasyon problemi ışık hızının çok büyük olmasına rağmen yine de sonlu olmasından kaynaklanmaktadır. Yani iki saat arasındaki senkronizasyonunda iki saat arasındaki uzaklık önemlidir. Ayrıca bir koordinat sisteminden başka koordinat sisteme geçişlerinde hareketin niteliği ölçüm sistemlerine nasıl yansıdığını irdelemeliyiz. Özel rölativite teorisinin temelinde, iki farklı referans sisteminde uzay ve zaman açısından incelenen olayla arasındaki ilişkiler bulunur. Bütün sonuçlar iki postulat üzerinde kuruludur. Birinci postulata göre çevreyle hiçbir ilişkisi olmayan bir cismin sabit hızla gittiği hiç bir deneyle kanıtlanamaz. İkinci postulata göre ise, evrende var olan en yüksek hız, ışığın boşluktaki hızı olup tüm referans sistemlerinde bu hız sabittir. Bu postulatlardan yola çıkarak, aynı olayı x eksenleri birbirine çakışık olan hareketsiz S ve bu sisteme göre +x yönünde sabit bir v hızı ile hareket eden S' referans sistemlerinde inceleyelim. S sisteminde x=y=z=0 koordinatlarında ve t=0 anında bir işaret fişeği ateşlenerek etrafında küresel aydınlanma oluşturduğunu kabul edelim. t=0 anında her iki koordinat sisteminin orijinleri üst üste bulunsun. Işığın küresel dağılımını her iki koordinat sisteminde de ifade edebiliriz. Küresel aydınlanma S koordinat sisteminde;

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

şeklinde yazılabilir. Bizi ilgilendiren x yönündeki dönüşümlerdir. Bu sebeple iki koordinat sistemde küresel aydınlanma;

$$x^2 - c^2 t^2 = 0; \quad x'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

olur. Klasik fizikte iki koordinat sistemi arasındaki Galilei dönüşümleri düşük hızlarda geçerli olmasına rağmen yüksek hızlarda özel rölativite teorisindeki ikinci postulata uymamaktadırlar. Bu durumda zaman koordinatlarında değişikliğe uğrayacağını göz önüne alarak iki koordinat sistemin koordinatların arasındaki dönüşüm;

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad t = \alpha(\delta x' + t')$$

şeklinde aranılabilir. Burada γ , α ve δ hızla bağlı birtakım katsayılardır.

Bu dönüşüm kullanarak küresel aydınlanma için;

$$[\gamma(x' + vt')]^2 - c^2 [\alpha(\delta x' + t')]^2 = x^2 - c^2 t^2$$

yazabiliriz. Buradan katsayıları eşitleyerek üç denklem elde edebiliriz.

$$\gamma^2 x'^2 + 2\gamma^2 vx't' + \gamma^2 v^2 t'^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 x'^2 - 2c^2 \alpha^2 \delta x't' - c^2 \alpha^2 t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

$$(\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2) x'^2 + 2(\gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta) x't' + (\gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2) t'^2 = x^2 - c^2 t^2$$

$$\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 = 1; \quad \gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta = 0; \quad \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 = -c^2$$

Bu denklemlerin çözümü;

$$\alpha^2 = \frac{\gamma^2 v^2 + c^2}{c^2} = 1 + \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow \delta = \frac{\gamma^2 v}{c^2 \alpha^2} = \frac{\gamma^2 v}{c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2)} = \frac{\gamma^2 \beta}{c(1 + \gamma^2 \beta^2)}$$

$$\gamma^2 - c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2) \frac{\gamma^4 \beta^2}{c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2)^2} = \gamma^2 - \frac{\gamma^4 \beta^2}{1 + \gamma^2 \beta^2} = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2 \beta^2} = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 1 + \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \delta = \frac{\beta}{c \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right)} = \frac{\beta}{c}$$

$$\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta = 0 \Rightarrow v = \frac{c^2 \alpha^2 \delta}{\gamma^2} \Rightarrow \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 = -c^2 \Rightarrow \gamma^2 \frac{c^4 \alpha^4 \delta^2}{\gamma^4} - c^2 \alpha^2 = -c^2$$

$$\frac{c^2 \alpha^4 \delta^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \frac{c^2 \alpha^4}{\gamma^2} \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \alpha^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \frac{\alpha^2 (\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\delta = \frac{v}{c^2} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \alpha^2}; \quad \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \gamma^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2 \gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak bulunur. Fizikte yüksek hızlarda konum ve zaman arasındaki ilişki Lorentz dönüşümleri olarak bilinmektedir. Bu dönüşümleri ve ters dönüşümleri;

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x' + vt'); \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - vt); \quad y = y'; \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right); \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta x}{c}\right)$$

şeklinde yazılabilir. $\beta \ll 1$ yani $v \ll c$ durumunda Lorentz dönüşümleri Galilei dönüşümlere geçmektedirler. Lorentz dönüşümlerinde rölativistik faktöründe β^2 ifadesi yer almaktadır. Bu ifade hızın yönünden bağımsızdır. Rölativistik faktörü β ile orantılı olsaydı dönüşüm hareket eden koordinat sistemin yönüne bağlı olurdu. Deneysel olarak özel rölativite dönüşümleri hareketin yönünden bağımsız olduğunu göstermektedir. Rölativite teorisinde eş zaman kavramı öne çıkmaktadır. Olayları eş zamanlılık açısından incelemek için senkronize edilmiş saatlere ve zaman ölçümü yapmak için kurallara ihtiyaç vardır. Saatler senkronizasyonu prensip olarak fotonlarla yapılabilir. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli koordinat sisteminde geçen zamanı ölçmek için hareketli koordinat sistemindeki saat bu koordinat sistemine göre hareketsiz olmalıdır. İki farklı an için zaman dönüşümü için;

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\beta x'_1}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\beta x'_2}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

yazabiliriz. Buradan iki koordinat sistemi arasındaki zaman ilişkisi;

$$t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

olarak yazılabilir. Burada t_0 hareketli koordinat sisteminde geçen süre, t ise hareketsiz koordinat sisteminde geçen süredir. Bu bağıntı zaman genişlemesi olarak da adlandırılır. Hareketsiz koordinat sistemindeki saatine göre geçen süre, hareketli koordinat sistemindeki saatine geçen süreden büyüktür. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli koordinat sistemin boyunu ölçmek için ölçüm bu koordinat sistemindeki saatine göre eş zamanlı yapılmalıdır. Bu durumda;

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

yazabiliriz. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli cismin ölçülen boyu;

$$\ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \ell = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2}$$

olarak bulunur. Burada ℓ_0 bir cismin hareketsiz iken boyudur. Hareketli bir cisimde bu uzunluk değişmez çünkü ölçüm yapılacağı metrenin de boyu kısalmaktadır. Bundan dolayı hareketli koordinat sistemindeki gözlemci boyun azaldığını tespit edemez. Hareketsiz bir gözlemciye göre hareketli bir cismin boyu sadece hareket yönünde azalır ve buna uzunluk büzülmesi denir. Uzay ve zaman matematiksel olarak dört boyutlu uzay-zaman olarak da modellenebilir. Dördüncü koordinat (ict) olarak kabul edilirse interval (aralık) olarak adlandırılan bir değişmez;

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (icdt)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2; \quad i = \sqrt{-1}$$

tarif edilir. Bu şekilde tarif edilen interval için Lorentz dönüşümü uygulanırsa;

$$(ds)^2 = \left(\frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2 \left(\frac{dt' + \frac{\beta dx'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right)^2 =$$

$$= \frac{(dx')^2 + 2vdx'dt' + v^2(dt')^2}{1-\beta^2} + (dy')^2 + (dz')^2 - \frac{c^2 \left[(dt')^2 + \frac{2vdx'dt'}{c^2} + \frac{v^2(dx')^2}{c^4} \right]}{1-\beta^2} =$$

$$= \frac{(dx')^2}{1-\beta^2} + \frac{2vdx'dt'}{1-\beta^2} + \frac{v^2(dt')^2}{1-\beta^2} + (dy')^2 + (dz')^2 - \frac{c^2(dt')^2}{1-\beta^2} - \frac{2vdx'dt'}{1-\beta^2} - \frac{v^2(dx')^2}{c^2(1-\beta^2)} =$$

$$= \frac{(dx')^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1-\beta^2} + (dy')^2 + (dz')^2 - \frac{c^2(dt')^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1-\beta^2} = (dx')^2 + (dy')^2 + (dz')^2 - c^2(dt')^2$$

elde edilir. Bu tarif eden interval koordinat sistemler arasında Lorentz dönüşümü yapılsa değişmediğini göstermektedir. ve farklı koordinat sistemlere göre intervalin büyüklüğü sabit kalır. İki koordinat sistemi arasındaki hız toplama yasası;

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + v dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{\beta dx'}{c}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{\beta dx'}{c dt'}} = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{\beta dx'}{c}\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{\beta dx'}{c dt'}\right)} = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)} = \frac{u_y' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{\beta dx'}{c}\right)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma\left(1 + \frac{\beta dx'}{c dt'}\right)} = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)} = \frac{u_z' \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

olarak yazılabilir. Düşük hızlarda rölativite fiziğindeki hız toplama yasası klasik fizikteki Galilei hız toplama yasasına dönüşür. Işık hızı vakumda bir sabit olup tüm referans sistemlerde e hareket yönünden bağımsız olarak aynı değer sahiptir. Hareketli bir nesneden vakumda gönderilen ışık da tüm referans sistemlerinde yine c ışık hızıyla yayılır. Bu durumda hız toplama yasasından;

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = c$$

elde edilir. İvmenin transformasyonu;

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{\left(\frac{du_x}{du_x'}\right) du_x'}{\left(\frac{dt}{dt'}\right) dt'} = \frac{\left(\frac{d}{du_x'} \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}\right) du_x'}{\left(\frac{d}{dt'} \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) dt'} = \frac{\frac{1 + \frac{vu_x'}{c^2} - (u_x' + v) \cdot \frac{v}{c^2}}{\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)^2} du_x'}{\frac{1 + \frac{v}{c^2} \cdot \frac{dx'}{dt'}}{\sqrt{1-\beta^2}} dt'} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sqrt{1-\beta^2}}{\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)^3} \frac{du_x'}{dt'} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{\left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)^3} \frac{du_x'}{dt'} = \frac{a_x'}{\gamma^3 \left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)^3} = \frac{a_x'}{\gamma^3 \left(1 + \frac{\beta u_x'}{c}\right)^3}$$

olarak bulunur. İnterval iki ifadenin farkı olarak temsil edilmesi hiperbolik fonksiyonların temsili ile ifade edilebilir. Bu fonksiyonlar;

$$\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}; \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}; \tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}; \coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}};$$

olarak tarif edilir. Bu tarife göre sinhθ tek fonksiyondur.

$$\sinh(-\theta) = -\sinh\theta$$

olur. Bu tarife göre coshθ çift fonksiyondur.

$$\cosh(-\theta) = \cosh\theta$$

olur. Bu iki fonksiyon arasındaki temel bağlantı;

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta} + 2e^\theta e^{-\theta} + e^{-2\theta}}{4} - \frac{e^{2\theta} - 2e^\theta e^{-\theta} + e^{-2\theta}}{4} = 1$$

ile verilir. Rölativite teorisi ile ilgisini bulmak için;

$$\tanh\theta = \frac{v}{c} = \beta$$

olsun. tanhθ ile sinhθ arasındaki ilişkiyi bulmak için;

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1; \cosh\theta = \sqrt{1 + \sinh^2\theta}$$

ifadesinin yardımı ile sinhθ ve coshθ için;

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\sqrt{1 + \sinh^2\theta}}; \tanh^2\theta = \frac{\sinh^2\theta}{1 + \sinh^2\theta}; (1 + \sinh^2\theta) \tanh^2\theta = \sinh^2\theta$$

$$\tanh^2 \theta = (1 - \tanh^2 \theta) \sinh^2 \theta; \sinh \theta = \frac{\tanh \theta}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1; \sinh \theta = \sqrt{\cosh^2 \theta - 1}$$

$$\tanh \theta = \frac{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}}{\cosh \theta}; \tanh^2 \theta = \frac{\cosh^2 \theta - 1}{\cosh^2 \theta}; \cosh^2 \theta \tanh^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1$$

$$1 = (1 - \tanh^2 \theta) \cosh^2 \theta; \cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

yazabiliriz. Lorentz dönüşümleri hiperbolik fonksiyonların sayesinde;

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{c\beta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = x \cosh \theta - ct \sinh \theta$$

$$ct' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = ct \cosh \theta - x \sinh \theta$$

olarak yazılır. Özel rölativite teorisinde interval ile çalışırsak dört boyutlu konum vektörü;

$$r^\mu = (r, ct)$$

dört hız vektörü;

$$u^\mu = \frac{dr^\mu}{dt'} = \left(\frac{dr}{dt'}, c \frac{dt}{dt'} \right) = \left(\gamma \frac{dr}{dt}, \gamma c \right) = (\gamma v, \gamma c)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda dört boyutlu momentum vektörü;

$$p^\mu = m u^\mu = m (\gamma v, \gamma c)$$

ile verilir. Üç boyutlu momentum vektörü;

$$p = \gamma m v = \frac{mv}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak yazılabilir. Bir cisme F kuvveti uygulanırsa ve cisim $d\ell$ kadar yol alırsa kinetik enerjideki değişim;

$$dE_k = F d\ell = \frac{dp}{dt} \cdot d\ell = \frac{dp}{dv} \frac{dv}{dt} \cdot d\ell = \frac{dp}{dv} \frac{d\ell}{dt} dv = \frac{dp}{dv} v dv v dp = \frac{d}{dv} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v dv =$$

$$= m \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - v \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{-2 \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2} v dv = \frac{m v dv}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3}$$

olur. Cismin ilk sıfır hızından v hızına ulaşana kadar kazandığı kinetik enerji;

$$E_k = \int_0^v \frac{m v dv}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} = -\frac{mc^2}{2} \int_0^v \frac{d \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^3} = -\frac{mc^2}{2} \int_0^v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}} d \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -\frac{mc^2}{2} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \bigg|_0^v =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

cismin toplam enerjisi kinetik ve durgun enerjinin toplamıdır. Buradan cismin toplam enerjisi;

$$E = E_k + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

olarak bulunur. Hareketsiz ve hareketli koordinat sistemi arasında enerji ve momentum arasındaki ilişkiyi bulmak için iki sistem arasındaki dönüşümleri kullanmak zorundayız. S' hareketli koordinat sisteminin S hareketsiz koordinat sistemine göre hızı v, S' hareketli koordinat sistemine göre cismin hızı u' x, S hareketsiz koordinat sistemine göre cismin hızı u x arasındaki ilişkiyi kullanarak enerji dönüşümü için;

$$\begin{aligned} E = E_k + mc^2 &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \right)^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{(u'_x + v)^2}{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2 - (u'_x + v)^2}{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2}}} = \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{\frac{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2 - (u'_x + v)^2}{c \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}}} = \frac{mc^3 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}{\sqrt{c^2 + 2vu'_x + \frac{v^2 u'^2_x}{c^2} - v^2 - 2vu'_x - u'^2_x}} = \frac{mc^3 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - u'^2_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} = \\ &= \frac{mc^3 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u'^2_x}{c^2} \right)}} = \frac{mc^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}} + \frac{mu'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}} \cdot \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{E'_x + p'_x \cdot v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (E'_x + p'_x \cdot v) \end{aligned}$$

momentum dönüşümü için;

$$\begin{aligned} p &= \frac{mu_x}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{m \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \right)^2}} = \frac{m \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{(u'_x + v)^2}{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2}}} = \frac{m \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}{\sqrt{\frac{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2 - (u'_x + v)^2}{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2}}} = \\ &= \frac{m \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}}}{\sqrt{\frac{c^2 \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)^2 - (u'_x + v)^2}{c \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}}} = \frac{m \cdot \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \cdot c \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2} \right)}{\sqrt{c^2 + 2vu'_x + \frac{v^2 u'^2_x}{c^2} - v^2 - 2vu'_x - u'^2_x}} = \frac{mc(u'_x + v)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - u'^2_x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} = \\ &= \frac{mc(u'_x + v)}{\sqrt{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u'^2_x}{c^2} \right)}} = \frac{m(u'_x + v)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}} = \frac{mu'_x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_x}{c^2}}} \cdot \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \\ &= \frac{p'_x + \frac{E'_x \cdot v}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(p'_x + \frac{E'_x \cdot v}{c^2} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu dönüşümleri kullanarak fotonlar için;

$$E'_x = \hbar\omega_0; p'_x = \frac{E'_x}{c} = \frac{\hbar\omega_0}{c}; E_x = \hbar\omega; p_x = \frac{E_x}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\hbar\omega = \frac{\hbar\omega_0 + \frac{\hbar\omega_0 \cdot v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0 (1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} = \hbar\omega_0 \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}} = \hbar\omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca momentum dönüşümünden de ulaşabiliriz.

$$\frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\frac{\hbar\omega_0}{c} + \frac{\hbar\omega_0 \cdot v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0}{c} \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0}{c} \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0}{c} \sqrt{\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega_0}{c} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

Açısal frekans için bulunan bağlantı frekans ve dalga boyu için;

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

olarak yazılabilir. Fizikte;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - 1$$

z Doppler spektrum kayması parametresi olarak bilinir. Işık yayan cisim yaklaşırsa;

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1$$

olarak yazılabilir. Genelde galaksiler bizim galakside uzaklaştıkları için dalga boyları kırmızıya doğru kaymaktadır. Galaksilerin uzaklaşma hızları ışık hızından çok küçük ise;

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx 1 - \sqrt{(1-\beta)^2} \approx 1 - 1 + \beta = \beta = \frac{v}{c}; v = cz$$

ile verilir. Hubble kozmolojik kırmızıya kayma parametresi dalga boyunun değişimiyle ilgilidir. Bu durumda;

$$1+z_H = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

yazabiliriz. Genişleme, evrenin ölçek faktörü olan $a(t_{göz})$ ile ifade edilir. Işığın yayıldığı andaki ölçek faktörü $a(t_{yay})$ ve gözleendiği andaki $a(t_{göz})$ ise;

$$1+z_H = \frac{a(t_{göz})}{a(t_{yay})} = \frac{\lambda(t_{göz})}{\lambda(t_{yay})} = \frac{T(t_{yay})}{T(t_{göz})}$$

şeklinde ifade edilir. Soruda istenilen bilgiler doğrultuda $a(t_{göz})=1$ olarak kabul edilebilir. Bu durumda;

$$1+z_H = \frac{1}{a(t)}$$

ifadesi fotonun kat ettiği yol boyunca uzay-zamanın ne kadar genişlediğinin doğrudan bir ölçüsü oluyor. Soruda verilen yakın kızıl öte bölgedeki K filtresinin merkezi dalga boyuna karşılık gelen kara cisim sıcaklığı;

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{22000 \cdot 10^{-10}} = 1317,27 \text{ K}$$

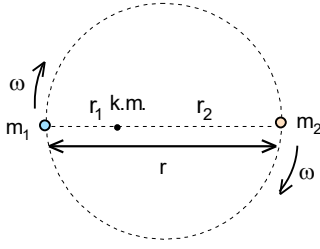
olur. Buradan z faktörü;

$$1+z_H = \frac{1317,27}{2,7255} = 483,3 \approx 483$$

aranan ölçek;

$$a(t_{yay}) = \frac{1}{1+z_H} = \frac{1}{1+483,3} = 0,0020648 \approx 0,002 = \frac{1}{500}$$

olarak bulunur.



4. a) İki yıldız çembersel yörüngeler üzerinde hareket ettiklerini kabul edelim. Çekim merkezlerin kütle merkezine olan uzaklıklar;

$$m_1 r_1 = m_2 r_2; r = r_1 + r_2; r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}; r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$$

ile verilir. Yıldızların kütle merkezi etrafındaki açısal hız ve dolanım periyodu;

$$m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2 \omega^2 r}{m_1 + m_2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma (m_1 + m_2)}{r^3}}; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma (m_1 + m_2)}}$$

ile verilir. Dolanım periyodu hesaplanabilmesi için $r=1,5 \text{ AB}$, yıldızların toplam kütlesi $M=1,35 M_{\odot} + 1 M_{\odot} = 2,35 M_{\odot}$ alınmalıdır. Buradan dolanım periyodu;

$$T_{\text{çem}} = 2,314 \sqrt{\frac{(150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,35 \cdot 2 \cdot 10^{30}}} = 378,74 \cdot 10^5 \text{ s} = 10520,57 \text{ h} = 438,35 \text{ gün}$$

olarak bulunur. Bu soruda verilen 453,6 gün dolanım periyodundan bağıl periyot değişimi;

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{453,6 - 438,35}{453,6} = 0,0336 = \%3,36$$

olur. Bu değişim oldukça küçük. Bunun anlamı iki yıldız da elips eksantrisitesi oldukça küçük olan eliptik yörüngeler üzerinde hareket etmektedir.

b) x uzaklıktaki ikili yıldız gözenebileceği maksimum açı;

$$\theta = \frac{r}{x} = \frac{1,5 \cdot 150 \cdot 10^6}{5000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000} = 4,756 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$$

olur. Teleskopun çözme gücü;

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D}$$

ile verilir. Buradan iki radyo teleskop arasındaki minimum uzaklık;

$$D = \frac{1,22\lambda}{\theta} = \frac{1,22 \cdot 0,21}{4,756 \cdot 10^{-9}} = 53,8688 \cdot 10^6 \text{ m} \approx 53869 \text{ km}$$

olarak bulunur. Uydunun perihelion noktası yaklaşık olarak $r_p = R_D = 6400 \text{ km}$, elipsin büyük yarı eksen $a = 0,5D = 26934 \text{ km}$ alınabilir. Perihelion uzaklığı için;

$$r_p = a(1 - \varepsilon)$$

yazabiliriz. Buradan eliptik yörünge için elips eksantrisitesi;

$$\varepsilon = 1 - \frac{r_p}{a} = 1 - \frac{6400}{26934} = 0,762 \approx 0,76$$

olarak bulunur.

c) Bir yıldızdaki füzyon tepkime hızının artması ile protonlardan helyum çekirdeklerin sentezlenmesi artar. Bazı değerlendirmeleri yapabilmek için yıldızdaki proton sayısı sentezlenen helyum sayısına eşit olduğunda yıldız oluşturan parçacıklar ultrarölativistik olduğu kabul edilebilir. Gazın ultrarölativistik olması durumu faz uzayında bir hücreye ait hacimde en az bir tanecik bulunması ile gerçekleşir. Ultrarölativistik durumda;

$$x = \frac{n_b}{n_f}$$

için bir değerlendirme yapmalıyız. Burada n_b baryon sayısının n_f ultrarölativistik fermiyon elektron sayısına göre oranıdır. Her hidrojen çekirdeği bir helyum çekirdeği düştüğü kabulünden iki çekirdekten baryon sayısı;

$$n_b = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 5$$

olur. Bu baryon sayısına ise karşılık olarak;

$$n_f = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

elektron gelmektedir. Buradan;

$$x = \frac{n_b}{n_f} = \frac{5}{3}$$

olarak değerlendirilir. Yıldızdaki parçacık sayısı;

$$N = \frac{M}{x m_b} = \frac{V_{\text{yıldız}}}{V_{\text{parçacık}}} = \frac{R^3}{r^3}; r = R \sqrt[3]{\frac{x m_b}{M}}$$

olur. Buradan m_b baryonların kütlesidir. Belirsizlik ilkesini kullanarak bir fermiyona düşen hacmin boyutu bulunulabilir. Belirsizlik prensibine göre;

$$\Delta p \Delta r = \hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerinin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinde olduğu için;

$$\Delta p \approx p; \Delta r \approx r; p.r = \hbar$$

yazılabilir. Buradan momentum;

$$p = \frac{\hbar}{r} = \frac{\hbar}{R} \sqrt[3]{\frac{M}{x m_b}}$$

yıldızı oluşturan bir ultrarölativistik taneciğin kinetik enerjisi;

$$E_{k1} \approx pc = \frac{\hbar c}{R} \sqrt[3]{\frac{M}{x m_b}}$$

tüm taneciklerin kinetik enerjisi;

$$E_k = N E_{k1} = \frac{M}{x m_b} \frac{\hbar c}{R} \sqrt[3]{\frac{M}{x m_b}} = \frac{\hbar c}{R} \sqrt[3]{\frac{M^4}{x^4 m_b^4}}$$

olarak bulunur. Denge durumunda taneciklerin kinetik enerjisi ile çekim potansiyel enerjisi ile aynı R bağımlılığına sahiptir.

$$\frac{\hbar c}{R} \sqrt[3]{\frac{M^4}{x^4 m_b^4}} \sim \frac{3\gamma M^2}{5R}$$

Buradan yıldızda çökme gerçekleşmesi için gereken kütle;

$$M_{kr} \sim \frac{1}{x^2 m_b^2} \sqrt[3]{\left(\frac{5\hbar c}{3\gamma}\right)^3} = \frac{1}{(1,66)^2 (1,67 \cdot 10^{-27})^2} \sqrt[3]{\left(\frac{5 \cdot 1,05456 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3,6,67 \cdot 10^{-11}}\right)^3} = 2,87285 \cdot 10^{30} \text{ kg} = 1,436 M_{\odot}$$

olarak bulunur. Bu değer Chandrasekhar kütlesi olarak bilinir. Chandrasekhar kütle sınırı $1,44 M_{\odot}$ olarak kabul edilir.

Soruda verilenlerden beyaz cücenin kütle artış hızı;

$$\dot{M}_{WD} = \frac{0,02 M_{\odot}}{20} = 10^{-3} M_{\odot} / \text{yıl}$$

kızıl devin kütle kaybetme hızı;

$$\dot{M}_{WD} = 0,2 \dot{M}_{KD}; \dot{M}_{KD} = \frac{\dot{M}_{WD}}{0,2} = 5 \cdot 10^{-3} M_{\odot} / \text{yıl}$$

olarak bulunur.

d) Biriken hidrojen kütlenin %50 kadar beyaz cüce üzerinde kalırsa bir patlamada net kazanılan kütle;

$$\Delta M_{WD} = 0,5 \cdot 0,02 M_{\odot} = 0,01 M_{\odot}$$

döngü sayısı;

$$N = \frac{1,44 M_{\odot} - 1,35 M_{\odot}}{0,1 M_{\odot}} = 9$$

gereken süre;

$$t = 20N = 20 \cdot 9 = 180 \text{ yıl}$$

olarak bulunur.

e) Hidrojenin helyuma dönüşmesi ile bir tepkimede kütle kaybı;

$$\Delta m_1 = 4 \cdot 1,6726 \cdot 10^{-27} - 6,6447 \cdot 10^{-27} = 0,0457 \cdot 10^{-27} = 4,57 \cdot 10^{-29}$$

patlamada kütle kaybı;

$$\Delta m = \frac{0,05 \cdot 0,02 M_{\odot}}{4 m_H} \cdot \Delta m_1 = \frac{0,001 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 1,676 \cdot 10^{-27}} \cdot 4,57 \cdot 10^{-29} = 13,63 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

bu kütleye karşılık gelen enerji;

$$\Delta E = \Delta m c^2 = 13,63 \cdot 10^{24} \cdot (300000 \cdot 10^3) = 122,7 \cdot 10^{40} \text{ J}$$

10 gün içinde sağlanan ilave ışıma gücü;

$$\Delta L = \frac{\Delta E}{t} = \frac{122,7 \cdot 10^{40}}{10 \cdot 24 \cdot 3600} = 14,2 \cdot 10^{35} = \frac{14,2 \cdot 10^{35}}{3,846 \cdot 10^{26}} = 3,69 \cdot 10^9 L_{\odot}$$

olur. Görünür parlaklık ile ışıma gücü arasındaki ilişki

görünür ve mutlak parlaklığı arasındaki ilişkiden quasarın mutlak parlaklığı;

$$m - M = -5 + 5 \cdot \log r$$

ile verilir. Verilen sistemin mutlak parlaklığı;

$$r = \frac{5000}{3,26} = 1533,74 \text{ pc}$$

$$12,5 - M = -5 + 5 \cdot \log(1533,74) = -5 + 5 \cdot 3,18575 = 10,93; \quad M = 1,57 \text{ kadir}$$

sistemin ışıma gücü;

$$M - M_{\odot} = -2,5 \cdot \log \frac{L}{L_{\odot}}; \quad \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0,4(M - M_{\odot})} = 10^{-0,4(1,57 - 4,83)} = 10^{1,304} = 20$$

olur. Patlamanın sağladığı ışıma gücü ile kıyasla bu ihmal edilebilir bir ışımadır. Patlama süresince sistemin mutlak parlaklığı;

$$M_{\text{pat}} - M = -2,5 \cdot \log \frac{L_{\text{pat}}}{L}; \quad M_{\text{pat}} - 1,57 = -2,5 \cdot \log \frac{3,69 \cdot 10^9}{20} = -2,5 \cdot 8,266 = -20,66; \quad M_{\text{pat}} = -19,09 \text{ kadir}$$

sistemin görünür parlaklığı;

$$m_{\text{pat}} - (-19,09) = -5 + 5 \cdot \log(1533,74) = -5 + 5 \cdot 3,1857 = 10,93; \quad m_{\text{pat}} = -9 \text{ kadir}$$

olarak bulunur.

5. a) Bir $\vec{a}$ vektörün bileşenleri (a_x, a_y, a_z) olsun. Bu vektörün büyüklüğü;

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

ile verilir. Bu vektörün ortalaması bileşenlerin ortalaması cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle + \langle a_z^2 \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Üç boyutlu uzayda $\vec{a}$ vektörün rastgele bir konumda olacağı için bu vektörün bileşenleri küresel simetri sonucu birbirine eşit olur.

$$\langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \langle a_z^2 \rangle$$

Bu durumda $\vec{a}$ vektörün büyüklüğü bileşenlerin büyüklükleri cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = 3 \langle a_x^2 \rangle$$

hız için bu ifade;

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 \sigma_v^2; \quad \sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{\text{ort}})^2}{n-1}}$$

olarak yazılabilir. Çembersel hareket için;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \quad E = E_k + E_p = \frac{m v^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r} = \frac{\gamma M m}{2r} - \frac{\gamma M m}{r} = -\frac{\gamma M m}{2r}; \quad E_k = \frac{\gamma M m}{2r}$$

yazabiliriz. Çok sayıda cisim için kinetik ve potansiyel enerjilerin ortalama değerleri için;

$$2 \langle E_k \rangle = - \langle E_p \rangle$$

ifadesi virial teorimi olarak bilinir. Bir cismin çekim merkezin etrafında r yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket şartından kütle çekim merkezin kütlesi;

$$M = \frac{r v^2}{\gamma} = \frac{3 r \sigma_v^2}{\gamma}; \quad M_{\text{GK}} = \frac{3 R_{\text{GK}} \sigma_v^2}{\gamma}$$

olarak ifade edilir. Buradan galaksi kümesinin kütlesi;

$$M_{\text{GK}} = \frac{3 R_{\text{GK}} \sigma_v^2}{\gamma} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 3,26 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 \cdot 10^3 \cdot 1500000^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} =$$
$$= 312 \cdot 10^{44} \text{ kg} = \frac{312 \cdot 10^{44}}{2 \cdot 10^{30}} = 156 \cdot 10^{14} M_{\odot}$$

sadece galaksilerin kütlesi;

$$M_{\text{Gal}} = 0,3 M_{\text{GK}} = 0,03 \cdot 156 \cdot 10^{14} M_{\odot} = 4,68 \cdot 10^{14} M_{\odot}$$

galaksilerin sayısı;

$$N = \frac{4,68 \cdot 10^{14}}{10^{11}} = 4,68 \cdot 10^3 = 4680$$

olarak bulunur.

b) Bir elektromanyetik dalganın denklemi;

$$\Psi = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

ile verilmektedir. Burada $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dalga sayısı olarak verilmektedir. Dalganın fazı;

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{sabit}$$

tüm referans sistemlerde sabittir. Bileşenlere göre yazabiliriz. Buradan;

$$\omega t - k_x x = \omega' t' - k'_x x'; \quad \omega t - k_x x = \omega' \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - k'_x \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{\beta \omega'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(k'_x + \frac{\beta \omega'}{c} \right); \quad \omega = \frac{\omega' + v k'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (\omega' + k'_x v)$$

olarak bulunur. $\omega = 2\pi\nu$ bağıntısını kullanarak ve $\vec{n}$ birim vektörü kullanarak;

$$n_x = \cos\theta; \quad n'_x = \cos\theta'$$

$$n_y = \sin\theta; \quad n'_y = \sin\theta'$$

$$v = \frac{v'(1 + \beta \cos\theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak yazabiliriz. Bu formül Doppler olayı formülü olarak bilinmektedir. Kendi referans sisteme göre frekans $\nu' = \nu_0$ olsun.

Işık yayan cisim ve bu ışığı algılayan aygıt aynı doğru üzerinde ise;

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}; \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}$$

boyuna Doppler olayı olarak bilinmektedir. Rölativistik olmayan hızlar için;

$$\nu_{||} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \approx \nu_0 \sqrt{(1 \pm \beta)^2} = \nu_0 (1 \pm \beta); \quad \lambda = \lambda_0 (1 \mp \beta)$$

olur. Doppler olayında;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

parametresi kırmızıya kayma ya da mora kayma olarak bilinir. Nesne ışık yayarak uzaklaşırsa dalga boyu artar ve kırmızıya doğru kayar, nesne ışık yayarak yaklaşırsa dalga boyu azalır mora doğru kayar. Rölativistik olmayan hızlar için;

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \beta; \quad v = cz$$

rölativistik durum için;

$$\sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 = z; \quad z = 1 + \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

olur. Dikine Doppler olayında ışık yayan nesne gözlem doğrusuna dik yönde hareket eder. Bu durumda ışık frekans değişimi;

$$v_{\perp} = \frac{v_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ile verilir. Rölativistik olmayan bir durum için;

$$v_{\perp} \approx v_0 \frac{v_0}{1 - \frac{\beta^2}{2}} \approx v_0 \left(1 + \frac{\beta^2}{2} \right); \quad \Delta v_{\perp} = \frac{v_0 \beta^2}{2}$$

ile verilir. Verilen soru için kırmızıya kayma parametresi;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{1016,2 - 656,28}{656,28} = 0,5484$$

olur. Bu değer çok küçük olmadığı için rölativistik faktörü kullanmalıyız. Galaktik kümenin hızı;

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = 1+z = 1+0,5484 = 1,5484; \quad \frac{1+\beta}{1-\beta} = 2,397618; \quad \beta = \frac{2,397618-1}{2,397618+1} = 0,41135$$

$$v = \beta c = 0,41135 \cdot 300000 = 123405,7 \text{ km}$$

olur. Hubble yasası için;

$$v = H r$$

yazabiliriz. Buradan galaktik kümeye olan uzaklık;

$$r = \frac{123405,7}{70} = 1762,94 \text{ Mpc}$$

galaksi kümenin gözleendiği açı;

$$\theta = \frac{6}{1762,94} = \frac{R_{GK}}{r} = 0,0034 \text{ rad} = 0,0034 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,195^\circ = 0,034.3600'' \approx 700''$$

olarak bulunur.

6. a) Perihelion ve aphelion noktalarına kadar uydunun çekim merkezine olan uzaklar;

$$r_P = a(1-\varepsilon); \quad r_A = a(1+\varepsilon); \quad r_P + r_A = 2a; \quad r_P r_A = a^2 (1-\varepsilon^2)$$

elipsin küçük yarı eksen;

$$a^2 = b^2 + f^2 = b^2 + (\varepsilon a)^2; \quad b = a \sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{r_P r_A}$$

ile verilir Enerji korunumu yasası için;

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r}$$

açısai momentum korunumu yasası için;

$$L = mvr$$

ile verilir. Buradan enerji için;

$$E = \frac{m^2 v^2 r^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$r^2 + \frac{\gamma Mmr}{E} - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

denklemleri elde edilir. İkinci derece denklemin köklerin özelliklerinden elips eksantrisitesi;

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{m^2 v^2 r^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r} \Rightarrow r^2 = \frac{L^2}{2mE} - \frac{\gamma Mmr}{E} \Rightarrow r^2 + \frac{\gamma Mmr}{E} - \frac{L^2}{2mE} = 0$$

$$r_A + r_P = -\frac{\gamma Mm}{E} \Rightarrow r_P r_A = -\frac{L^2}{2mE}$$

$$2a = -\frac{\gamma Mm}{E} \Rightarrow b^2 = a^2 (1-\varepsilon^2) = -\frac{L^2}{2mE} \Rightarrow 4a^2 = \frac{\gamma^2 M^2 m^2}{E^2}$$

$$\frac{a^2 (1-\varepsilon^2)}{4a^2} = -\frac{L^2}{2mE} \frac{E^2}{\gamma^2 M^2 m^2} \Rightarrow 1-\varepsilon^2 = -\frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}}$$

olarak bulunur. Çembersel yörünge için açısai momentum ve enerji;

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma Mm}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} \Rightarrow L = mvr = mr \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = m \sqrt{\gamma M r}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{m}{2} \frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma Mm}{r} = -\frac{\gamma Mm}{2r}$$

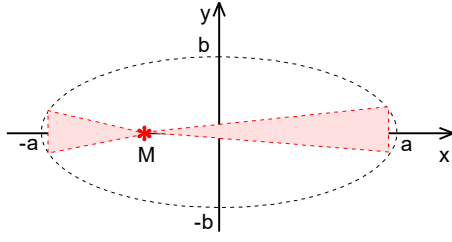
ile verilir. Elipsin elips eksantrisitesi;

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 - \frac{2L^2 |E|}{\gamma^2 M^2 m^3}}$$

olarak bulunur. Çembersel yörünge için elipsin elips eksantrisitesi;

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1 + \frac{2m^2 \cdot \gamma M r \cdot -\frac{\gamma Mm}{2r}}{\gamma^2 M^2 m^3}} = \sqrt{1-1} = 0$$

olarak bulunur.



M kütleli çekim merkezinin alanında hareket eden $m \ll M$ kütleli bir cisme etki eden genel çekim kuvveti vektörel olarak;

$$\vec{F} = \frac{\gamma M m \vec{r}}{r^3}$$

şeklinde yazılabilir. Çekim merkezinden cisme uyguladığı tork için;

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{\gamma M m \vec{r}}{r^3} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

yazabiliriz. Bu vektörel çarpım sıfır olduğu için açısal momentum L korunur. M kütleli çekim alanında hareket eden m kütleli cismin r_p ve r_A uzaklıklardan perihelion ve aphelion noktalarında bulunurken cismin hızları v_p ve v_A ise cismin açısal momentumu için;

$$L = m v_p r_p = m v_A r_A = \text{sabit}$$

Δt sürede taranan üçgenlerin alanları için;

$$\Delta S = \frac{r_p v_p \Delta t}{2} = \frac{m r_p v_p \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}; \Delta S = \frac{r_A v_A \Delta t}{2} = \frac{m r_A v_A \Delta t}{2m} = \frac{L \Delta t}{2m}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin yardımı ile alan hızı;

$$\sigma = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2m} = \frac{r_p v_p}{2} = \frac{r_A v_A}{2}$$

olarak tarif edilir. Merkezci alanlarda alan hızı sabittir. Alan hızı çekim merkezi kütlesi M, elipsin büyük yarı eksenini a ve küçük yarı eksenini b cinsinden ifade edilebilir. Enerji korunumu yasası için;

$$E = \frac{m v_p^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_p} = \frac{m v_A^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_A}$$

yazabiliriz. Buradan alan hızı;

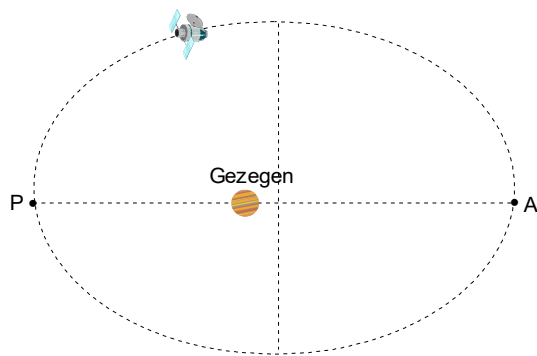
$$\frac{m v_p^2 r_p^2}{2 r_p^2} - \frac{\gamma M m}{r_p} = \frac{m v_A^2 r_A^2}{2 r_A^2} - \frac{\gamma M m}{r_A} \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_p} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\sigma}{r_A} \right)^2 - \frac{\gamma M}{r_A}$$

$$\frac{2\sigma^2}{r_p^2} - \frac{2\sigma^2}{r_A^2} = \frac{\gamma M}{r_p} - \frac{\gamma M}{r_A} \Rightarrow \frac{2\sigma^2 (r_A^2 - r_p^2)}{r_p^2 r_A^2} = \frac{\gamma M (r_A - r_p)}{r_p r_A}$$

$$\frac{2\sigma^2 (r_A - r_p) (r_A + r_p)}{r_p r_A} = \gamma M (r_A - r_p)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma M r_p r_A}{2(r_p + r_A)}} = \sqrt{\frac{\gamma M b^2}{2.2a}} = \sqrt{\frac{\gamma M a^2 (1 - \epsilon^2)}{4a}} = \sqrt{\frac{\gamma M a (1 - \epsilon^2)}{4}} = \sqrt{\frac{\gamma M a}{4} \left(1 - 1 - \frac{2L^2 E}{\gamma^2 M^2 m^3} \right)} = \sqrt{\frac{a L^2 |E|}{2 \gamma M m^3}}$$

olarak bulunur.



b) Perihelion ve aphelion noktalarına kadar uydunun gezegene olan uzaklardaki hızları bulmak için açısal momentum korunumu yasası ve enerji korunumu yasası kullanılabilir. Açısal momentum korunumu yasasından;

$$L = m v_p r_p = m v_A r_A; v_A = \frac{v_p r_p}{r_A}$$

enerji korunumu yasasından;

$$E = \frac{m v_p^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_p} = \frac{m v_A^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r_A}$$

yazabiliriz. Buradan uydunun perihelion noktasındaki hızı;

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{\gamma M}{a(1-\epsilon)} = \frac{1}{2} \left[\frac{v_p (1-\epsilon)}{1+\epsilon} \right]^2 - \frac{\gamma M}{a(1+\epsilon)} \Rightarrow \frac{v_p^2}{2} - \frac{v_p^2}{2} \left[\frac{(1-\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^2} \right] = \frac{\gamma M}{a(1-\epsilon)} - \frac{\gamma M}{a(1+\epsilon)}$$

$$\frac{v_p^2}{2} \left[1 - \frac{(1-\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^2} \right] = \frac{\gamma M [(1+\epsilon) - (1-\epsilon)]}{a(1-\epsilon)(1+\epsilon)} \Rightarrow \frac{v_p^2 (1+2\epsilon+\epsilon^2) - (1-2\epsilon+\epsilon^2)}{(1+\epsilon)^2} = \frac{2\epsilon \gamma M}{a(1-\epsilon)(1+\epsilon)}$$

$$\frac{v_P^2}{2} \frac{4\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{2\varepsilon\gamma M}{a(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)} \Rightarrow v_P^2 = \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} \Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}}$$

aphelion noktasındaki hız;

$$v_A = \frac{(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{\gamma M(1-\varepsilon)}{a(1+\varepsilon)}}$$

olur. Gezegenin herhangi r uzaklıktaki uydunun hızı;

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv_P^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_P} = \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} = \frac{m}{2} \frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)} - \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} = \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} \left[\frac{1+\varepsilon}{2} - 1 \right] = \frac{\gamma Mm}{a(1-\varepsilon)} \left[-\frac{1-\varepsilon}{2} \right] = -\frac{\gamma Mm}{2a} \\ -\frac{\gamma Mm}{2a} &= \frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{r} \Rightarrow \frac{\gamma M}{r} - \frac{\gamma M}{2a} = \frac{v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a} \right)} \end{aligned}$$

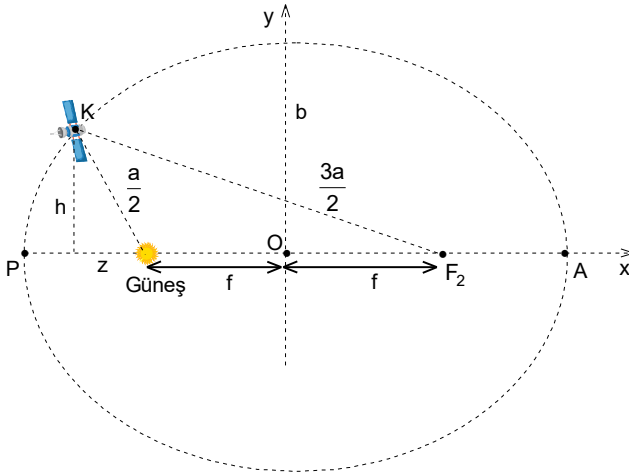
olur. Perihelion noktasından aphelion noktasına kadar uydunun hızı azalır, aphelion noktasından perihelion noktasına kadar uydunun hızı artar. Uydunun çekim merkezinden r=a uzaklıkta iken uydunun hızı;

$$v_a = \sqrt{\gamma M \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}}$$

r=a şartından elips eksantrisitesi;

$$v_a = \frac{v_P}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{\gamma M}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma M(1+\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)}}; 4 = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}; \varepsilon = 0,6$$

olarak bulunur.



$r = \frac{a}{2}$ için a K noktasında bulunsun. K noktasından elipsin diğer odak noktasına kadar olan uzaklık $\frac{3a}{2}$ dir.

Şeklin geometrisinden

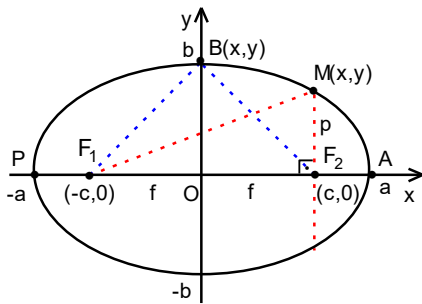
$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 - (2f+z)^2} \\ f &= \varepsilon a = \frac{3a}{5} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan;

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + z^2 &= \frac{9a^2}{4} - 4f^2 - 4fz - z^2 \\ z &= \frac{2a^2 - 4f^2}{4f} = \frac{2a^2 - 4\left(\frac{3a}{5}\right)^2}{4\frac{3a}{5}} = \frac{7a}{30} \end{aligned}$$

$$x_K = f + z = \frac{3a}{5} + \frac{7a}{30} = \frac{5a}{6}$$

olarak bulunur.



$$r_1 + r_2 = 2a$$

c) Elips x-y düzleminde kapalı bir eğri olarak tarif edilir. Elipsin merkezinden x eksenine boyunca en uzak noktaya kadar olan uzaklık büyük yarım eksen a, y eksenine boyunca en uzak noktaya kadar olan uzaklık küçük yarım eksen b olarak bilinir. Elipsin x ve y eksenine boyunca en uzak noktalara elipsin tepe noktaları denilir. Elipsin iki odak noktası bulunmaktadır. Odak noktaları elipsin merkezine göre simetrik olup koordinatları $F_1 (-c,0)$ ve $F_2 (c,0)$ olarak veriliyor. Burada $c=f$ odak uzaklığı olarak da bilinir. Elips, odakları noktaları $F_1 (-c,0)$ ve $F_2 (c,0)$ olan noktalara kadar herhangi bir $M(x,y)$ noktasının uzaklıkların toplamı sabit olan geometrik noktaların kümesi olarak tanımlanır.

Odak noktasına olan en yakın P noktası perihelion en yakın nokta, odak noktasına olan en yakın A noktası aphelion en uzak nokta olan uzaklıklar;

$$r_P = |F_1 P| = a - f; r_A = |F_2 A| = a + f$$

olur. Elips özelliğini kullanarak bu sistemin odak uzaklığı $M=B(x, y)$ noktasını y ekseninde seçersek simetrik durum gerçekleşir. Bu durumda;

$$F_1 B = B F_2 = a$$

olur. Buradan

$$2\sqrt{f^2 + b^2} = 2a; f = c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

olarak bulunur. Odak uzaklığının büyük yarı eksenine oranına elipsin elips eksantrisitesi denir.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \frac{r_P}{r_A} = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

Odak noktasına göre en yakın ve en uzak noktalara olan uzaklıkları kullanarak;

$$a = \frac{r_P + r_A}{2}; c = f = a - r_P = \frac{r_A - r_P}{2}; b = \sqrt{a^2 - f^2} = a \sqrt{1 - \frac{f^2}{a^2}} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{\left(\frac{r_P + r_A}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_A - r_P}{2}\right)^2} = \sqrt{r_A r_P}$$

yazabiliriz. $M(x, y)$ noktası elips üzerinde özel olarak seçilirse x eksenine geçirilen dik doğru elipsin F_2 odağından geçmektedir. $M F_2 = p$ olsun. Bu durumda;

$$p + \sqrt{(2f)^2 + p^2} = 2a$$

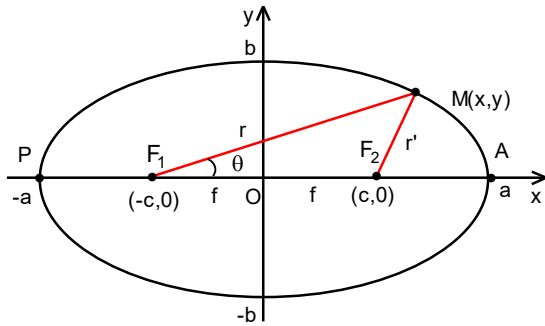
yazabiliriz. Buradan;

$$\sqrt{4f^2 + p^2} = 2a - p \Rightarrow 4f^2 + p^2 = 4a^2 - 4ap + p^2; p = \frac{a^2 - f^2}{a} = \frac{a^2 - \varepsilon^2 a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2)$$

olarak bulunur. Bu temsil ile perihelion ve aphelion uzaklıkları;

$$r_P = a - f = a - \varepsilon a = \frac{p(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{1 + \varepsilon}; r_A = a + f = a + \varepsilon a = \frac{p(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{1 - \varepsilon}$$

ile temsil edilebilir.



Elipsin odaklardan birisinde bir koordinat sistem yerleştirirsek elipsin kutupsal koordinat sistemindeki denklemi elde edilir. Şeklin geometrisinden kosinüs teoremi kullanarak;

$$r' = \sqrt{r^2 + (2f)^2 - 2 \cdot r \cdot 2f \cos \theta} = \sqrt{r^2 + 4f^2 - 4rf \cos \theta}$$

elips için tanımından;

$$r + r' = 2a; r + \sqrt{r^2 + 4f^2 - 4rf \cos \theta} = 2a$$

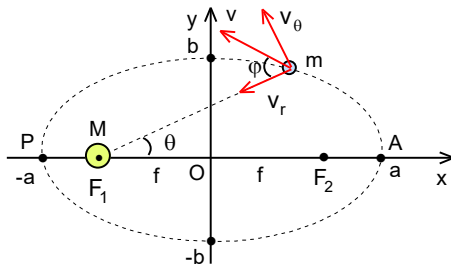
yazabiliriz. Buradan elipsin kutupsal denklemi;

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4f^2 - 4rf \cos \theta$$

$$4a^2 + r^2 - 4ar = r^2 + 4f^2 - 4rf \cos \theta$$

$$a^2 - f^2 = r(a - f \cos \theta) \Rightarrow r = \frac{a^2 - f^2}{a - f \cos \theta} = \frac{\frac{a^2 - f^2}{a}}{1 - \frac{f \cos \theta}{a}} = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

olarak bulunur.



Gezegenin bulunduğu konum x eksenine ile yaptığı açı θ , gezegenin v hızının bileşenleri v_r ve v_θ olsun. Bu durumda alan hızı;

$$\sigma = \frac{r v_\theta}{2}$$

olarak yazılabilir. Buradan hızın teğetsel bileşeni;

$$v_\theta = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\sigma(1 - \varepsilon \cos \theta)}{p}$$

bu andaki açısal hız;

$$\omega = \frac{v_\theta}{r} = \frac{2\sigma}{r^2} = \frac{2\sigma(1 - \varepsilon \cos \theta)^2}{p^2}$$

olur. Gezegenin radyal hızı;

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d}{d\theta} \left(\frac{p}{1-\varepsilon \cos \theta} \right) = \omega \cdot \frac{p\varepsilon \sin \theta}{(1-\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{2\sigma(1-\varepsilon \cos \theta)^2}{p^2} \cdot \frac{p\varepsilon \sin \theta}{(1-\varepsilon \cos \theta)^2} = \frac{2\sigma\varepsilon \sin \theta}{p}$$

hızın büyüklüğü;

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\left[\frac{2\sigma(1-\varepsilon \cos \theta)}{p} \right]^2 + \left(\frac{2\sigma\varepsilon \sin \theta}{p} \right)^2} = \frac{2\sigma}{p} \sqrt{[(1-\varepsilon \cos \theta)]^2 + (\varepsilon \sin \theta)^2} = \\ &= \frac{2\sigma}{p} \sqrt{1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \cos^2 \theta + \varepsilon^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\sigma}{p} \sqrt{1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2} = \frac{2\sigma}{p} \sqrt{1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2} = \\ &= \frac{2}{a(1-\varepsilon^2)} \sqrt{\frac{\gamma M a (1-\varepsilon^2)}{2}} \sqrt{1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2} = \sqrt{\frac{\gamma M (1-2\varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2)}{a(1-\varepsilon^2)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma M \left(1-2\sqrt{1-\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3}} \cos \theta + 1-\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \right)}{a \left(1-1+\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \right)}} = \sqrt{\frac{\gamma^3 M^3 m^3 \left(2-2\sqrt{1-\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3}} \cos \theta - \frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3} \right)}{2aL^2|E|}} \end{aligned}$$

hızın konum vektörü ile yaptığı açı;

$$\tan \varphi = \frac{v_\theta}{v_r} = \frac{\frac{2\sigma(1-\varepsilon \cos \theta)}{p}}{\frac{2\sigma\varepsilon \sin \theta}{p}} = \frac{1-\varepsilon \cos \theta}{\varepsilon \sin \theta} = \frac{1-\sqrt{1-\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3}} \cos \theta}{\sqrt{1-\frac{2L^2|E|}{\gamma^2 M^2 m^3}} \sin \theta}$$

olarak bulunur.

7. a) Teleskobun büyütmesi;

$$m = \frac{f_{ob}}{f_{ok}} = \frac{2000}{25} = 80$$

aynının çapı;

$$10 = \frac{f_{ob}}{D}; D = \frac{f_{ob}}{10} = \frac{2000}{10} = 200 \text{ mm} = 0,2 \text{ m}$$

teleskopun çözme gücü;

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{0,2} = 3355 \cdot 10^{-9} \text{ rad} = 3355 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{180}{\pi} = 192227,34 \cdot 10^{-9} \text{ }^\circ = 192227,34 \cdot 10^{-9} \cdot 3600'' = 0,69''$$

olarak bulunur.

b) A ve B yıldızları arasındaki açısal açıklığı 2,3'' en küçüktür. Teleskobun ayırma gücü 0,69'' olduğu için verilen teleskop ile tüm bileşenler ayrı ayrı gözlenebilir. A ve B bileşenleri ayrı ayrı gözlemlemek için teleskobun objektifin maksimum çapı;

$$\theta_{A-B} = \frac{1,22\lambda}{D_{min}}; 2,3 = \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{D_{min}}; D_{min} = \frac{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{2,3 \cdot \frac{1^\circ}{3600''} \cdot \frac{\pi}{180^\circ}} = 0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$$

olmalıdır. Çap 6 cm büyük ise yıldızlar ayrı ayrı görünür.

c) Görünen görüş alanı (aFOV-Apparent Field of View) gözle bakıldığında ne kadar geniş görüldüğü ifade eder ve genellikle derece cinsinden ifade edilir. Gerçek görüş alan (FOV-Field of View) bir teleskop ile bakıldığında görülebilen fiziksel alanın genişliğidir. Gerçek görüş alanı, görünen görüş alanının, büyütme oranına bölünmesiyle elde edilir.

$$FOV = \frac{aFOV}{m}$$

Verilen teleskop için;

$$FOV = \frac{60^\circ}{80} = 0,75^\circ = 0,75^\circ \cdot 3600'' = 2700''$$

olur. A-B ve C-D iki ikili sistemi gözlemlemek için objektifin odak uzaklığı;

$$FOV' = \frac{aFOV}{m'} ; 208,2'' = \frac{208,2''}{3600''} = 0,057833^\circ = \frac{60^\circ}{m'} ; m' = \frac{60^\circ}{0,057833^\circ} = 1037,46$$

$$m' = \frac{f'_{ob}}{f_{ok}} ; f'_{ob} = m' f_{ok} = 1027,46 \cdot 25 = 25686,5 \text{ mm} \approx 26 \text{ m}$$

olmalıdır.

d) Bir yıldızın görünen parlaklık ile aydınlanma arasındaki ilişki;

$$m = -2,5 \cdot \log E; E = 10^{-0,4m}$$

ile verilir. Her dört yıldızın aydınlanmaları için;

$$E_A = 10^{-0,4 \cdot 5,15} = 0,0087096; E_B = 10^{-0,4 \cdot 6,1} = 0,00363078$$

$$E_C = 10^{-0,4 \cdot 5,25} = 0,00794328; E_D = 10^{-0,4 \cdot 5,38} = 0,00704693$$

toplam aydınlanma;

$$E = E_A + E_B + E_C + E_D = 0,0087096 + 0,00363078 + 0,00794328 + 0,00704693 = 0,02733059$$

sistemin görünür parlaklığı;

$$m = -2,5 \cdot \log 0,02733059 = 3,9 \text{ kadir}$$

olarak bulunur.