

XXX. BİLİM OLİMPİYATLARI-2022 İKİNCİ AŞAMA 1. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI

1. Samanyolu diskindeki ince ve kalın disk yıldız popülasyonlarının yoğunluklarının dikey doğrultuda Gökada düzlemin-den itibaren uzaklaştıkça nasıl azaldığını aşağıdaki yoğunluk modeliyle ifade edebiliriz:

$$\rho_i = n_i e^{-\frac{|z|}{H_i}}$$

Burada $i=1$ ince diski, $i=2$ kalın diski, z yıldızların Samanyolu düzlemine olan dik uzaklığını, $\rho_i(z)$ ince ya da kalın disk popülasyonlarının dik z uzaklığına bağlı yoğunluğunu, n_i ince ya da kalın disk popülasyonunun Güneş civarındaki yoğunluğunu H_i ince ya da kalın disk popülasyonunun Samanyolu düzleminde dik doğrultuda eksponansiyel azalmayı ifade eden yükseklik ölçeğini ifade eder. İnce diskin yükseklik ölçeğinin $H_1 = 275$ pc, kalın disk yükseklik ölçeğinin $H_2 = 850$ pc ve kalın diskin Güneş civarındaki yoğunluğunun ince diskin Güneş civarındaki yoğunluğuna oranının 0,08 olduğunu varsayalım. Güneşin Samanyolu merkezine uzaklığı yaklaşık $r=8,5$ kpc ve Samanyolu merkezi etrafındaki dönme hızı $v=220$ km/s dir.

a) İnce ve kalın disk yıldızlarının eş yoğunlukta olduğu dik uzaklık kaç parsek ve bu uzaklık değeri için ince disk popülasyonunun yoğunluğu nedir?

b) Samanyolu kütlelerinin önemli bölümünün 8,5 kpc lik yarıçap içinde olduğunu varsayarak Samanyolunun kütlesi nedir?

Tully-Fisher ilişkisi (TFR) sarmal galaksilerin mutlak parlaklıkları ile maksimum dönme hızları arasında doğrusal ilişki olduğunu söyler. NGC 3627 galaksisinde (tür: SBb) zonklama periyodu 41 gün olan bir sefeid yıldızın görünür parlaklığı $m_{\text{sef}} = 22$ kadir, Galaksinin toplam görünen parlaklığı $m_{\text{gal}} = 8,92$ kadir olarak gözleniyor. Ayrıca;

$$\text{Periyot-Parlaklık Bağlantısı (PLR): } \mathcal{M}_{\text{sef}} = -2,43 \cdot \log T - 4,05$$

$$\text{Tully-Fisher ilişkisi (TFR): } \mathcal{M}_{\text{gal}} = -10,2 \cdot \log v_{\text{mak}} + 2,71$$

bağlantılar veriliyor.

c) Sönümlemeyi ihmal ederek NGC3627 nin maksimum dönme hızı v_{mak} kaç km/s dir?

Samanyolu Galaksisinin merkezinde, Sgr A* adı verilen ve Schwarzschild yarıçapı $R_s = 0,08$ AB olduğu bilinen süper-kütleli bir karadeli bulunmaktadır. Galaksi merkezinde, Sgr A*a en yakın yörüngede S2 adlı yıldız dolanmaktadır.

d) S2 yörüngesinin yarı büyük eksen uzunluğu a olarak alındığında, S2 nin yaklaşık 16 yıllık yörünge periyoduna sahip olabilmesi için $\frac{a}{R_s}$ oranı ne kadar olmalıdır? (Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Güneşin kütlesi

$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $1 \text{ AB} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$, $\pi = 3,14$ olarak veriliyor.)

2. Bir gezegenin etrafında $r=100 \ 000 \text{ km}$ yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir uzay aracından gönderilen radyo sinyalinin dalga boyu periyodik olarak $2,99964 \text{ m}$ ile $3,00036 \text{ m}$ arasında değişmektedir. Gezegen ise bir yıldızın etrafında hareket etmektedir. Yıldızın yarıçapı Güneş yarıçapının 0,7 kadarı olup yaydığı ışımada maksimum $579,6 \text{ nm}$ değeri için alır.

a) Buna göre gezegenin kütlesi Dünyanın kütlesinin kaç katıdır?

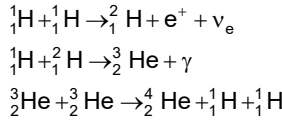
b) Yıldızın toplam ışımada gücü nedir?

(Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$, Dünyanın kütlesi $m_D = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Güneşin yarıçapı $R_{\odot} = 700000 \text{ km}$, Wien sabiti $b = 2,897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$, Stefan-Boltzmann sabiti $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$ olarak veriliyor.)

3. Bir teleskobun odak/çap oranı teleskobun aynasının odak uzunluğunun (f) teleskobun ayna çapına (D) oranı olarak verilir. Ayrıca bir teleskobun büyütme gücü teleskobun odak uzunluğunun (f_{ob}) teleskopta kullanılan göz merceğinin odak uzunluğuna (f_{ok}) oran olarak tanımlanır. Odak/çap oranı 10 olan bir aynalı teleskopa odak uzaklığı 25 mm lik bir göz merceği takıldığında teleskobun büyütmesi 960 kat oluyor. Bu teleskopla 550 nm dalga boyunda 559 km uzaklıkta çembersel yörünge üzerinde hareket eden çok küçük cisimlerden oluşan bir demet gözlemleniyor.

Buna göre demetteki cisimlerini ayrı ayrı görülebilecek iki cisim arasındaki en küçük olan uzaklık kaç santimetredir?

4. Güneş, merkezindeki nükleer tepkimelerle enerjisini üretmektedir. Bu tepkimeler aşağıdaki denklemlerle kısaca tanımlanabilir;



Burada üst simgeler çekirdekteki toplam proton ve nötron sayısını, e^+ pozitronu, ν_e elektron nötrinosunu ve γ yayılan gama ışınlarını göstermektedir. Denklemden de görüleceği gibi üçüncü adımın başlaması için iki ${}^3_2\text{He}$ çekirdeği gerekmektedir. Bunun için ilk iki adım iki kez olmalıdır. Güneşin ana kol evresinde ömrü yaklaşık 10 milyar yıldır.

a) Buna göre Güneşin ışımasını sağlamak için ana kol ömründe yaklaşık olarak kaç tepkime dizisi gerçekleşir? Bu süre içinde Güneşteki kütle kaybı kaç Güneş kütlesidir?

Güneşin ana kol evresi boyunca ısıma gücünün sabit kalmıyor. Hidrojen yakıtı tükendikçe daha büyük kütleli çekirdekler tepkimeye girmeye başlıyor. İlk olarak ağırlıklı olarak ${}^3_2\text{He}$, ${}^4_2\text{He}$, ${}^7_3\text{Li}$ gibi çekirdekleri birleşmeye başlar. Bu tepkimelerin başlamasıyla sıcaklık ve fotonların basıncı artması ile enerji üretimin yapıldığı nükleer füzyonun bölgenin yarıçapı azalmaya, sıcaklığın artması sonucu ısıma gücü zamanla artmaya başlar. Artan foton basıncı ile yıldızın dış katmanları genişlemeye başlar ve Güneş tipi yıldızlar kırmızı dev evresine girer. Bu süreç içinde ısıma gücü zamanla göre;

$$L(t) = L_{\odot} \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)$$

şeklinde doğrusal olarak değiştiğini kabul edelim. Burada $\tau=1$ milyar yıl olsun.

b) Buna göre Güneşin kırmızı dev sürecinde kütle kaybı kaç Güneş kütlesidir?

c) Güneş merkezindeki nükleer tepkimelerle üretilen enerjinin Güneş yüzeyine iletimi nasıl gerçekleşmektedir? Güneş atmosferindeki tabakaları, sıcaklık değişimlerini de belirterek açıklayınız.

(Protonun (${}^1_1\text{H}$) kütlesi $m_{{}^1_1\text{H}} = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, Helyum (${}^4_2\text{He}$) çekirdeğinin kütlesi $m_{{}^4_2\text{He}} = 6,6447 \cdot 10^{-27}$ kg, Güneşin ısıma gücü $L_{\odot} = 3,846 \cdot 10^{26}$ W, Güneşin kütlesi $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, ışık hızı $c = 300000$ km/s olarak veriliyor.

5. Delta Scuti yıldızları, astronomide zonklayan ya da sefeid yıldızlar olarak bilinir. Bu zonklayan yıldızlar kısa periyotlu parlaklık değişimleri Delta Scuti yıldızların kütleleri $1,5M_{\odot}$ - $2,5M_{\odot}$ arası, ısıma güçleri $10L_{\odot}$ - $50L_{\odot}$ arası, yüzey sıcaklıkları 6300 K, görünür parlaklıktaki periyot değişimi 0,02 gün - 0,3 gün arası, görünür parlaktaki değişim 0,003 kadir - 0,9 kadir arası değişimler göstermektedir. α Lyr (Vega) yıldızı Delta Scuti türü bir sefeid yıldızı olan bir yıldızdır. α Lyr (Vega) yıldızının paralaksı $\pi'' = 0,13''$ ve öz hareketi $\dot{\theta} = 0,24''/\text{yıl}$, Veganın ortalama dikine (radyal) hızı $v_r = -20,6$ km/s olarak veriliyor.

a) Buna göre Veganın uzay hızı nedir?

b) Hidrojen-alfa (Balmer) soğurma çizgisinin laboratuvar dalga boyu $6563 \text{ \AA}$ ise Veganın spektrumunda bu çizgi Angström biriminde hangi dalga boyunda gözlenir?

c) Yıldızın parlaklık değişim türünden dolayı ölçülen dikine hızlarında nasıl bir değişim beklendiğini model çizerek açıklayınız.

6. “Dünya-İç Gezegen-Güneş” dizilimine iç kavuşum, “Dış Gezegen-Dünya-Güneş” dizilimine karşı konum, “Dünya-Güneş-Gezegen” dizilimine ise dış kavuşum adı verilir. Kavuşum dönemi (sinodik dönem), bu üç konfigürasyondan herhangi birinin artarda iki kez gerçekleştiği zaman aralığına denir. Yörünge dönemi ise sabit bir arka plan yıldızına göre bir gezegenin yörüngesi üzerinde bir tam turunu atarak yörüngenin aynı noktasına ardışık iki gelişi arasındaki süreye verilen isimdir. Dünya ile Merkür arasındaki kavuşum süresi yaklaşık $\tau_1 = 115,88$ gün, Dünya ile Mars arasındaki kavuşum süresi yaklaşık $\tau_2 = 780$ gün, Dünyanın dolanım periyodu $T_D = 365,25$ gün olarak veriliyor.

a) Bu üç yörünge konfigürasyonunu, Güneş merkezli ve çembersel olarak kabul edeceğiniz bir iç, bir dış gezegen ve Dünyanın yörüngelerini tek bir şekil üzerine çizerek gösteriniz.

b) Merkür gezegenin Doğu uzanımdan Batı uzanıma gezegenin hareket yönünde kaç günde geçer?

c) Dünya ile Mars karşı konumda bulundukları konumdan kaç gün sonra Mars gezegeni Batı çeyrek konumunda gözlenir?

d) Bir dış gezegeni gözlemek için en uygun zaman ise karşı konumdur. Nedenini açıklayınız.

(Tüm gezegenler çembersel yörüngeler üzerinde hareket ettikleri kabul ediliyor.)

Galaksi No	Kırmızıya Kayma
1	0,07667
2	0,07833
3	0,08292
4	0,08458
5	0,07875
6	0,08417
7	0,07958
8	0,08375
9	0,07792
10	0,08125
11	0,07750
12	0,07625
13	0,07542
14	0,08208
15	0,08083

7. Yakın evrendeki bir galaksi kümesine ait 15 üye galaksinin kırmızıya kaymaları şekildeki tabloda verilmiştir.

a) Bu ölçümlerden yararlanarak kümenin hız dispersiyonunu (σ_v) ve kümenin kütlesini (M_{GK}) nedir?

İpucu: Kümeyi 1,5 Mpc lik yarıçap içinde dinamik dengede varsayabilirsiniz. Kümenin hız dispersiyonu için galaksilerin hızlarının bir standart sapma değeri kullanılırsa kümenin kütlesi Virial teoreminin uygulanmasıyla bulunabilir.

$$M_{GK} = \frac{3R_{GK}\sigma_v^2}{\gamma}$$

standart sapma;

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{ort})^2}{n-1}}$$

olarak veriliyor.

Bu galaktik kümede galaksilerin toplam ışıma gücü $L_{GK} = 2,55 \cdot 10 L_{\odot}$, kümede bulunan tüm galaksilerdeki yıldızların kütlesi $M_{GK,yıldız} = \%1,5 M_{GK}$, X ışını gözlemlerinden kümedeki galaksilerde arası uzaydaki gaz ve toz bulutların toplam kütlesi $M_{GK,gaz} = \%14 M_{GK}$ tahmin edilmektedir. Galaktik kümedeki yıldızlar Güneş benzeri olduklarını ve bu yıldızlarda kütle çok basit bir yaklaşımla hidrojen ve helyumdan oluştuğunu, Güneş benzeri bir yıldızın kütlesi %70 kadar hidrojen, %30 kadar helyum olduğunu, uzaydaki gaz ve toz bulutlar hidrojenen oluştuğunu kabul edelim.

b) Galaktik kümenin kütlelen ışıma gücüne oranı nedir? Galaktik kümede bulunan baryonların sayısı yaklaşık olarak nedir? (Protonun kütlesi $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$ kg, helyumun kütlesi $m_{He} = 6,646477 \cdot 10^{-27}$ kg olarak veriliyor.)

8. Mars gezegenin iki tane neredeyse çembersel yörünge üzerinde hareket eden Fobos ve Deymos uyduları bulunmaktadır. Fobos uydunun kütlesi $m_{Fob} = 1,066 \cdot 10^{16}$ kg, dolanım periyodu $T_{M-Fob} = 7$ h 39 dk, Mars gezegeninden olan yüksekliği $h_{M-F} = 5985$ km, Mars gezegenin yarıçapı 3390 km, Deymos uydunun kütlesi $m_{Dey} = 1,48 \cdot 10^{15}$ kg, dolanım periyodu $T_{M-Dey} = 30$ h 18 dk, Mars gezegeninden olan yüksekliği $h_{M-F} = 20073$ km olarak veriliyor.

Buna göre Mars gezegeni ile Fobos uydusu arasındaki kütle çekim potansiyel enerjisi ve Fobos uydusunun kinetik enerjisi nedir? (Evrensel çekim sabiti $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg.s}^2$ olarak veriliyor.)

XXX. BİLİM OLİMPİYATLARI-2022 İKİNCİ AŞAMA 1. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI CEVAPLARI

1. a) 2,39; b) $9,5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$; c) 213,5 km/s; d) 12630

2. a) 323; b) $10,675 \cdot 10^{25} W$

3. 15,6 cm

4. a) $3 \cdot 10^{55}$; $0,068 M_{\odot}$; b) $\%0,09 M_{\odot}$

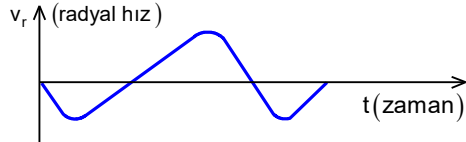
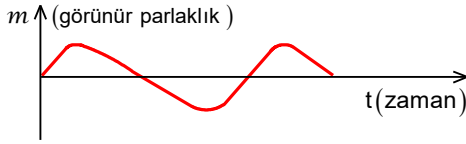
5. Delta Scuti yıldızları, astronomide zonklayan ya da sefeid yıldızlar olarak bilinir. Bu zonklayan yıldızlar kısa periyotlu parlaklık değişimleri Delta Scuti yıldızların kütleleri $1,5 M_{\odot}$ - $2,5 M_{\odot}$ arası, ışıma güçleri $10 L_{\odot}$ - $50 L_{\odot}$ arası, yüzey sıcaklıkları 6300 K, görünür parlaklıktaki periyot değişimi 0,02 gün-0,3 gün arası, görünür parlaktaki değişim 0,003 kadir-0,9 kadir arası değişimler göstermektedir. α Lyr (Vega) yıldızı Delta Scuti türü bir sefeid yıldızı olan bir yıldızdır. α Lyr (Vega) yıldızının paralaksı $\pi''=0,13''$ ve öz hareketi $\dot{\theta}=0,24''/\text{yıl}$, Veganın ortalama dikine (radyal) hızı $v_r = -20,6$ km/s olarak veriliyor.

a) Buna göre Veganın uzay hızı nedir?

b) Hidrojen-alfa (Balmer) soğurma çizgisinin laboratuvar dalga boyu $6563 \text{ \AA}$ ise Veganın spektrumunda bu çizgi Angström biriminde hangi dalga boyunda gözlenir?

c) Yıldızın parlaklık değişim türünden dolayı ölçülen dikine hızlarında nasıl bir değişim beklendiğini model çizerek açıklayınız.

5. a) 22,38 km/s; b) $6562,55 \text{ \AA}$



c) Spektrum çizgilerinde Doppler olayından dolayı periyodik değişimler gözlenir. Ölçülen radyal hız zamana göre pozitif ve negatif değerler arasında değerler alır. Grafik olarak temsil edilirse radyal hızının maksimum olduğu durumlarda görünür parlaklık minimum ve tersi olmalıdır. Temsili grafik şekildeki gibidir.

6. b) 32,84 gün; c) 310°

7. a) $7,66 \cdot 10^{14} M_{\odot}$; b) 300; $3,3 \cdot 10^{71}$

8. $-4,87 \cdot 10^{22} J$; $24,36 \cdot 10^{22} J$

XXX. BİLİM OLİMPİYATLARI-2022 İKİNCİ AŞAMA 1. ASTRONOMİ ve ASTROFİZİK SINAVI ÇÖZÜMLERİ

1. a) Galaksinin ince ve kalın disk popülasyonlarının birbirine eşitliğinden galaksinin düzleminden olan uzaklık;

$$\rho_1 = \rho_2; n_1 e^{-\frac{|z|}{H_1}} = n_2 e^{-\frac{|z|}{H_2}} = 0,08 n_1 e^{-\frac{|z|}{H_2}}; 0,08 = e^{-|z| \left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} \right)}; \ln 0,08 = -|z| \left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1} \right)$$

$$-2,5257286443 = -|z| \left(\frac{1}{850} - \frac{1}{275} \right) = -|z| \left(\frac{275 - 850}{850 \cdot 275} \right); |z| = 1026,76 \text{ pc} \approx 1027 \text{ pc}$$

bu uzaklıktaki yoğunluk;

$$\rho_1(z) = n_1 e^{-\frac{|z|}{H_1}} = 100 e^{-\frac{1027}{275}} = 2,3884 \approx 2,39$$

olarak bulunur.

b) Galaksinin kütlesi M olsun. v hızı ile r yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir gök cismi için;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r}$$

yazabiliriz. Buradan galaksinin kütlesi;

$$M = \frac{r v^2}{\gamma} = \frac{8,5 \cdot 10^3 \cdot 3,26 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 \cdot 10^3 \cdot (220 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,9 \cdot 10^{41} \text{ kg} = \frac{1,9 \cdot 10^{41}}{2 \cdot 10^{30}} \approx 9,5 \cdot 10^{10} M_{\odot}$$

olarak bulunur.

c) Tully-Fisher ilişkisi sadece sarmal (spiral) galaksiler için verilen deneysel verilere ve gözleme dayalı olup galaksinin mutlak parlaklığı ile maksimum dönme hızı arasındaki doğrusal bağlantıyı vermektedir. Bu ilişkiye göre bir spiral galaksi ne kadar hızlı dönüyorsa o kadar parlaktır ve dolaylı olarak kütlesi o kadar büyüktür. Spiral galaksinin dönme hızı galaksinin toplam kütlesi (gaz ve karanlık madde dahil) ile ilgilidir. Galaksinin parlaklığı ise yıldız miktarı ve galaksideki baryonik madde miktarına bağlıdır. Yapılan incelemelerde ışıma gücü-hız arasındaki ilişki;

$$L \sim v_{\text{mak}}^n$$

ile verilir. Burada n=3÷4 arasında değişmektedir. Mutlak parlaklık için bu ilişki;

$$M = a \log v_{\text{mak}} + b$$

ile verilir. Zonklayan sefeid yıldızın mutlak parlaklığı;

$$M_{\text{sef}} = -2,43 \cdot \log 41 - 4,05 = -2,43 \cdot 1,61278 - 4,05 = -7,97 \text{ kadir}$$

bu sefeid yıldız olan uzaklık;

$$m_{\text{sef}} - M_{\text{sef}} = -5 + 5 \cdot \log r; 22 - (-7,97) = -5 + 5 \cdot \log r; 34,97 = 5 \cdot \log r; 6,994 = \log r; r = 10^{6,994} = 9,86 \cdot 10^6 \text{ pc}$$

galaksinin mutlak parlaklığı;

$$m_{\text{gal}} - M_{\text{gal}} = -5 + 5 \cdot \log r; 8,92 - M_{\text{gal}} = -5 + 5 \cdot \log (9,86 \cdot 10^6) = -5 + 5 \cdot 6,994 = -5 + 34,97 = 29,97; M_{\text{gal}} = -21,05 \text{ kadir}$$

bu galaksinin hızı;

$$-21,05 = -10,2 \cdot \log v_{\text{mak}} + 2,71; 23,76 = 10,2 \cdot \log v_{\text{mak}}; 2,3294 = \log v_{\text{mak}}; v_{\text{mak}} = 10^{2,3294} = 213,5 \text{ km/s}$$

olarak bulunur.

d) Bir cismin parabolik yörünge üzerinde ışık hızı ile uzaklaşabilme koşulu;

$$\frac{\gamma M m}{R} = \frac{m c^2}{2}$$

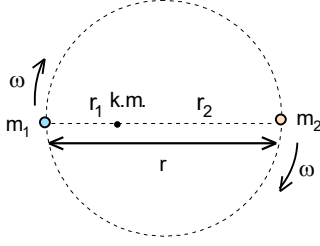
ile verilir. Buradan kara yıldızın yarıçapı ki buna gravitasyonel ya da Schwarzschild yarıçapı;

$$R_{\text{Sch}} = \frac{2 \gamma M}{c^2}$$

olarak bulunur. Kara deliğin kütlesi;

$$M_{\text{Sch}} = \frac{R_{\text{Sch}} c^2}{2 \gamma} = \frac{0,08 \cdot 150 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \cdot (300000 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} = 8,096 \cdot 10^{36} \text{ kg} = \frac{8,096 \cdot 10^{36}}{2 \cdot 10^{30}} = 4,048 \cdot 10^6 M_{\odot}$$

olarak bulunur.



Birbirlerinden r uzaklıkta bulunan m_1 ve m_2 kütleli iki yıldız birbirlerine uyguladıkları kütle çekim kuvvetinin etkisiyle uzay boşluğunda ortak kütle merkezi etrafında çembersel yörüngeler üzerinde hareket ettiklerini ele alalım. Çekim merkezlerin kütle merkezine olan uzaklıklar;

$$m_1 r_1 = m_2 r_2; r = r_1 + r_2; r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2}; r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2}$$

ile verilir. Yıldızların kütle merkezi etrafındaki açısal hız ve dolanım periyodu;

$$m_1 \omega^2 r_1 = \frac{m_1 m_2 \omega^2 r}{m_1 + m_2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\gamma (m_1 + m_2)}{r^3}}; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma (m_1 + m_2)}}$$

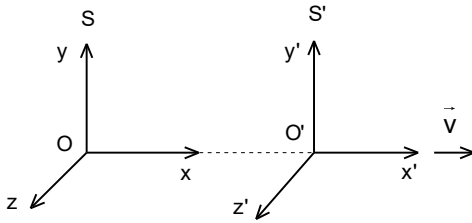
olarak bulunur. Verilen sistem kara delik ve normal yıldız söz konusu olduğu için $m_1 = M \gg m_2$ olduğu için dolanım periyodu;

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}$$

ile verilir. Buradan yıldızın kara deliğe olan uzaklık;

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_{Sch} T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 8,096 \cdot 10^{36} \cdot (16.365.24.3600)^2}{4,3,14^2}} = 1,515758 \cdot 10^{14} \text{ km} = \frac{1,515758 \cdot 10^{14}}{0,08.150.10^6.10^3} \approx 12630 \text{ AB}$$

olarak bulunur.



2. Özel rölativite teorisinin temelinde, iki farklı referans sisteminde uzay ve zaman açısından incelenen olayla arasındaki ilişkiler bulunur. Bütün sonuçlar iki postulat üzerinde kuruludur. Birinci postulata göre çevreyle hiçbir ilişkisi olmayan bir cismin sabit hızla gittiği hiçbir deneyle kanıtlanamaz. İkinci postulata göre ise, evrende var olan en yüksek hız, ışığın boşluktaki hızı olup tüm referans sistemlerinde bu hız sabittir. Bu postulatlardan yola çıkarak, aynı olayı x eksenleri birbirine çakışık olan hareketsiz S ve bu sisteme göre +x yönünde sabit bir v hızı ile hareket

eden S' referans sistemlerinde inceleyelim. S sisteminde $x=y=z=0$ koordinatlarında ve $t=0$ anında bir işaret fişegi ateşlenerek etrafında küresel aydınlanma oluşturduğunu kabul edelim. $t=0$ anında her iki koordinat sisteminin orijinleri üst üste bulunsun. Işığın küresel dağılımını her iki koordinat sisteminde de ifade edebiliriz. Küresel aydınlanma S koordinat sisteminde;

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

şeklinde yazılabilir. Bizi ilgilendiren x yönündeki dönüşümlerdir. Bu sebeple iki koordinat sistemde küresel aydınlanma;

$$x^2 - c^2 t^2 = 0; x'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

olur. Klasik fizikte iki koordinat sistemi arasındaki Galilei dönüşümleri düşük hızlarda geçerli olmasına rağmen yüksek hızlarda özel rölativite teorisindeki ikinci postulata uymamaktadırlar. Bu durumda zaman koordinatlarında değişikliğe uğrayacağını göz önüne alarak iki koordinat sistemin koordinatları arasındaki dönüşüm;

$$x = \gamma(x' + vt'); t = \alpha(\delta x' + t')$$

şeklinde aranılabilir. Burada γ , α ve δ hızla bağlı birtakım katsayılarıdır.

Bu dönüşüm kullanarak küresel aydınlanma için;

$$[\gamma(x' + vt')]^2 - c^2 [\alpha(\delta x' + t')]^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

yazabiliriz. Buradan katsayıları eşitleyerek üç denklem elde edebiliriz.

$$\gamma^2 x'^2 + 2\gamma^2 v x' t' + \gamma^2 v^2 t'^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 x'^2 - 2c^2 \alpha^2 \delta x' t' - c^2 \alpha^2 t'^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

$$(\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2) x'^2 + 2(\gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta) x' t' + (\gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2) t'^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

$$\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 = 1; \gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta = 0; \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 = -c^2$$

Bu denklemlerin çözümü;

$$\alpha^2 = \frac{\gamma^2 v^2 + c^2}{c^2} = 1 + \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow \delta = \frac{\gamma^2 v}{c^2 \alpha^2} = \frac{\gamma^2 v}{c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2)} = \frac{\gamma^2 \beta}{c (1 + \gamma^2 \beta^2)}$$

$$\gamma^2 - c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2) \frac{\gamma^4 \beta^2}{c^2 (1 + \gamma^2 \beta^2)^2} = \gamma^2 - \frac{\gamma^4 \beta^2}{1 + \gamma^2 \beta^2} = \frac{\gamma^2}{1 + \gamma^2 \beta^2} = 1 \Rightarrow \gamma^2 = 1 + \gamma^2 \beta^2 \Rightarrow \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\alpha^2 = 1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{1}{1 - \beta^2} \Rightarrow \alpha = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \delta = \frac{\beta}{c \left(1 + \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} \right)} = \frac{\beta}{c}$$

$$\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 = 1 \Rightarrow \gamma^2 v - c^2 \alpha^2 \delta = 0 \Rightarrow v = \frac{c^2 \alpha^2 \delta}{\gamma^2} \Rightarrow \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 = -c^2 \Rightarrow \gamma^2 \frac{c^4 \alpha^4 \delta^2}{\gamma^4} - c^2 \alpha^2 = -c^2$$

$$\frac{c^2 \alpha^4 \delta^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \frac{c^2 \alpha^4}{\gamma^2} \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \alpha^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \frac{\alpha^2 (\gamma^2 - 1)}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = -1 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

$$\delta = \frac{v}{c^2} = \frac{\beta}{c} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \alpha^2}; \frac{\beta^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{c^2 \gamma^2} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2 \gamma^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1 - \beta^2 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak bulunur. Fizikte yüksek hızlarda konum ve zaman arasındaki ilişki Lorentz dönüşümleri olarak bilinmektedir. Bu dönüşümleri ve ters dönüşümleri;

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x' + vt'); \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (x - vt); \quad y = y'; \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right); \quad t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right)$$

şeklinde yazılabilir. $\beta \ll 1$ yani $v \ll c$ durumunda Lorentz dönüşümleri Galilei dönüşümlere geçmektedirler. Lorentz dönüşümlerinde rölativistik faktöründe β^2 ifadesi yer almaktadır. Bu ifade hızın yönünden bağımsızdır. Rölativistik faktörü β ile orantılı olsaydı dönüşüm hareket eden koordinat sistemin yönüne bağlı olurdu. Deneysel olarak özel rölativite dönüşümleri hareketin yönünden bağımsız olduğunu göstermektedir. Rölativite teorisinde eş zaman kavramı öne çıkmaktadır. Olayları eş zamanlılık açısından incelemek için senkronize edilmiş saatlere ve zaman ölçümü yapmak için kurallara ihtiyaç vardır. Saatler senkronizasyonu prensip olarak fotonlarla yapılabilir. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli koordinat sisteminde geçen zamanı ölçmek için hareketli koordinat sistemindeki saat bu koordinat sistemine göre hareketsiz olmalıdır. İki farklı an için zaman dönüşümü için;

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\beta x'_1}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\beta x'_2}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

yazabiliriz. Buradan iki koordinat sistemi arasındaki zaman ilişkisi;

$$t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

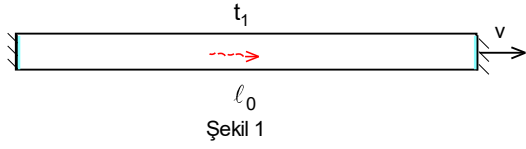
olarak yazılabilir. Burada t_0 hareketli koordinat sisteminde geçen süre, t ise hareketsiz koordinat sisteminde geçen süredir. Bu bağıntı zaman genişlemesi olarak da adlandırılır. Hareketsiz koordinat sistemindeki saatine göre geçen süre, hareketli koordinat sistemindeki saatine geçen süreden büyüktür. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli koordinat sistemin boyunu ölçmek için ölçüm bu koordinat sistemindeki saatine göre eş zamanlı yapılmalıdır. Bu durumda;

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

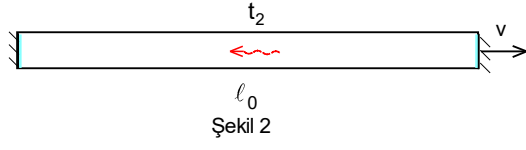
yazabiliriz. Hareketsiz koordinat sisteminde hareketli cismin ölçülen boyu;

$$\ell_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow \ell = \ell_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

olarak bulunur. Burada ℓ_0 bir cismin hareketsiz iken boyudur. Hareketli bir cisimde bu uzunluk değişmez çünkü ölçüm yapılacağı metrenin de boyu kısalmaktadır. Bundan dolayı hareketli koordinat sistemindeki gözlemci boyun azaldığını tespit edemez. Hareketsiz bir gözlemciye göre hareketli bir cismin boyu sadece hareket yönünde azalır ve buna uzunluk büzülmesi denir.



Şekil 1



Şekil 2

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

olur. Hareketsiz gözlemci borunun sol tabanında bulunduğunu kabul edelim. Foton borunun hareket yönünde hareket ederse boruyu geçtiği süre içinde boru da bu süre içinde hareket ettiği için;

$$vt_1 + l = ct_1; vt_1 + l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = ct_1$$

yazabiliriz. Buradan fotonun hareket süresi;

$$t_1 = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{c - v} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{c \left(1 - \frac{v}{c}\right)} = \frac{t_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} = t_0 \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta)^2}} = t_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

olarak bulunur. Foton her zaman borunun hareket yönünde hareket ettiği için olayın periyodik olarak gerçekleştiği kabul edilebilir. Periyot ile frekans ters orantılı oldukları için olayın frekans değişimi ve dalga boyu değişimi;

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}; \lambda_1 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$$

olarak bulunur. Foton borunun hareket yönüne ters yönde hareket ederse boruyu geçtiği süre içinde boru da bu süre içinde fotonu karşı hareket ettiği için;

$$vt_2 + ct_2 = l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

yazabiliriz. Buradan fotonun hareket süresi;

$$t_2 = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{c + v} = \frac{l_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{c \left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{t_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta} = t_0 \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2}} = t_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

olarak bulunur. Periyot ile frekans ters orantılı oldukları için olayın frekans değişimi ve dalga boyu değişimi;

$$v_2 = v_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}; \lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

olarak bulunur. Bu model ile Doppler olayı açıklanır. Burada yayınlanan fotonun v_0 kendi referans sistemindeki frekansı, λ_0 ise kendi referans sistemindeki dalga boyudur. Fizikte;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1 \text{ ya da } \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

z Doppler spektrum kayması parametresi olarak bilinir. Genelde galaksiler bizim galakside uzaklaştıkları için dalga boyları kırmızıya doğru kaymaktadır. Galaksilerin uzaklaşma hızları ışık hızından çok küçük ise;

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \approx 1 - \sqrt{(1 - \beta)^2} \approx 1 - 1 + \beta = \beta = \frac{v}{c}; v = cz$$

ile verilir. Rölativistik olmayan Doppler olayı için;

$$\lambda = \lambda_0 (1 \pm \beta); \beta = \frac{v}{c}$$

yazabiliriz. Yayının sabit dalga boyu;

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{2,99964 + 3,00036}{2} = 3 \text{ m}$$

uzay aracının yörünge hızı;

$$\beta = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} = \frac{3 - 2,99964}{3} = 0,00012; v = \beta c = 0,0012 \cdot 300000 = 36 \text{ km/s}$$

uzay aracın dolanım periyodu;

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2.3,14.100000.10^3}{36.10^3} = 17453,3 \text{ s} = 4 \text{ h } 50 \text{ dk } 53 \text{ s}$$

olur. Çembersel yörünge üzerinde hareket eden bir uydunun dolanım periyodu ile yörüngenin yarıçapı arasındaki ilişki;

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\gamma Mm}{r^2}; v^2 = \frac{\gamma M}{r}; T = \frac{2\pi r}{v}; T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M}$$

ile verilir. Buradan gezegenin kütlesi;

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \frac{4.3,14^2 \cdot (100000.10^3)^3}{6,67.10^{-11} \cdot (17453)^2} = 19,43.10^{27} \text{ kg} = \frac{19,43.10^{27}}{6.10^{24}} = 323 M_D$$

olarak bulunur.

b) Yıldızın yüzey sıcaklığı;

$$\lambda = \frac{b}{T}; T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2,9.10^{-3}}{579,6.10^{-9}} = 4998 \text{ K}$$

yıldızın yaydığı ışıma gücü;

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 = 4.3,14 \cdot (0,7.700000.10^3)^2 \cdot 5,67.10^{-8} \cdot (4998)^4 = 10,675.10^{25} \text{ W}$$

olarak bulunur.

3. Verilen büyütme oranından teleskopun aynanın odak uzaklığı;

$$m = \frac{f_{ob}}{f_{göz}}; f_{ob} = mf_{ok} = 960.25 = 24000 \text{ mm}$$

aynının çapı;

$$10 = \frac{f_{ob}}{D}; D = \frac{f_{ob}}{10} = \frac{24000}{10} = 2400 \text{ mm} = 2,4 \text{ M}$$

olur. Teleskopun çözme gücü;

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{D} = \frac{1,22.550.10^{-9}}{2,4} = 279,583.10^{-9} \text{ rad}$$

iki küçük cisim arasındaki en küçük uzaklık;

$$\ell = H\theta = 559.10^3 \cdot 279,583.10^{-9} = 0,156 \text{ m} = 15,6 \text{ cm}$$

olarak bulunur.

4. a) Güneşin her saniye kaybettiği kütle;

$$L = \dot{M} c^2; \dot{M} = \frac{L}{c^2} = \frac{3,846 \cdot 10^{26}}{(300000 \cdot 10^3)^2} = 4,273 \cdot 10^9 \text{ kg/s}$$

enerji çıkışı sağlayan her tepkimede kaybolan kütle;

$$\Delta m = 4,1,6726 \cdot 10^{-27} - 6,6447 \cdot 10^{-27} = 0,0457 \cdot 10^{-27} = 4,57 \cdot 10^{-29}$$

Güneşin bu ışımayı sağlamak için saniyede gereken tepkime sayısı;

$$\dot{N} = \frac{\dot{M}}{\Delta m} = \frac{4,273 \cdot 10^9}{4,57 \cdot 10^{-29}} = 0,935 \cdot 10^{38} \approx 10^{38}$$

Güneşin ana koldaki ömründe gerçekleşecek tepkime sayısı;

$$N = \dot{N} t = 0,935 \cdot 10^{38} \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 2,94865 \cdot 10^{55} \approx 3 \cdot 10^{55}$$

Güneşteki kütle kaybı;

$$\Delta M = N \Delta m = 2,94865 \cdot 10^{55} \cdot 4,57 \cdot 10^{-29} = 13,475 \cdot 10^{26} = \frac{13,475 \cdot 10^{26}}{2 \cdot 10^{30}} = 0,0006737 M_{\odot} \approx 0,068 M_{\odot}$$

olarak bulunur.

b) Kırmızı dev sürecinde kütle kaybı;

$$\Delta M_{\text{kr}} = \int_0^{\tau} \frac{L(t) dt}{c^2} = \int_0^{\tau} \frac{L_{\odot}}{c^2} \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{L_{\odot}}{c^2} \left(t + \frac{t^2}{2\tau}\right) \Big|_0^{\tau} = \frac{3 L_{\odot} \tau}{2 c^2} = \frac{3 \cdot 3,846 \cdot 10^{26} \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600}{2 \cdot (300000 \cdot 10^3)^2} =$$
$$= 1,82 \cdot 10^{27} \text{ kg} = \frac{1,82 \cdot 10^{27}}{2 \cdot 10^{30}} = 0,0009 M_{\odot} = 0,09 M_{\odot}$$

olarak bulunur.

c) Güneşteki enerji üretimi açıklamak için Güneşte dört bölge incelenir. Birinci bölge nükleer füzyon bölgesi olarak bilinir. Nükleer füzyon bölgesinin yarıçapı yaklaşık olarak $0,25 R_{\odot}$ dir. Bu bölgede proton-proton zinciriyle hidrojen helyuma dönüşür ve çok yüksek enerjili γ fotonları ve parçacıklar üretilir. İkinci bölge ışıınım (radyatif-radyasyon yoluyla) bölgesi olarak bilinir. Bu bölge yaklaşık olarak $0,25 R_{\odot}$ ve $0,7 R_{\odot}$ yarıçapları arasında yer alır. Nükleer füzyon bölgesindeki sıcaklık o kadar yüksektir ki atomların oluşması mümkün değildir. Bundan dolayı nükleer füzyon bölgesinde üretilen fotonlar elektronlarla ve atom çekirdeklerinden oluşan yoğun plazmada çarpışarak saçılır. Işıınım bölgesinde fotonların ilerlemesi çok yavaş ve nükleer füzyon bölgesinden çıkıp ışıınım bölgesini terk etmeleri milyonlarca yıl sürmektedir. Üçüncü bölge konvektif (madde taşınımı) olarak bilinir. Bu bölge yaklaşık olarak $0,7 R_{\odot}$ den Güneşin en dış katmanlara kadar uzanır. Işıınım bölgenin en dışında sıcaklık azaldığı için karbon, nitrojen, oksijen, kalsiyum ve demir gibi atomlar da oluşur. Madde hala plazma halinde olup maddede atomlar da mevcuttur. Bu durumda enerji iletimi konveksiyon yoluyla iletilir. Konveksiyon sıcaklık farkı basınç farkından büyük olduğu durumlarda gerçekleşmektedir. Konvektif bölgede sıcak plazma yükselir, soğuduktan sonra aşağı iner. Dördüncü bölge Güneş atmosferi olarak bilinir. Bu atmosfer ise fotosfer, kromosfer, geçiş bölgesi ve korona gibi farklı alt bölgelerden oluşur. Her alt bölgede sıcaklık, yoğunluk, basınç, maddenin kimyasal yapısı oldukça kısa mesafede hızlı bir şekilde değişmektedir. Fotosfer alt tabakası Güneşin görünen yüzeyi, atmosferin en alt tabakası olup yüksekliği kalınlığı 100 km dir. Fotosferdeki sıcaklık değişimi $4100 \div 6300$ °C dir. Fotosfer Güneşin görünen yüzeyi oluşturur ve yüzeyde sıcaklık farkından dolayı Güneş lekeleri gözlenir. Kromosferin kalınlığı yaklaşık 2000 km olup sıcaklık fotosferdeki sıcaklıktan daha yüksektir. Kromosferdeki sıcaklık değişimi $10000 \div 20000$ °C dir. Güneşteki geçiş bölgesi Güneşin yarıçapı ile kıyasla çok ince bir tabakadır. Geçiş bölgenin kalınlığı yalnızca birkaç yüz kilometre ile birkaç bin kilometre arasında değişir. Bu bölge, kromosfer ile korona arasında yer alır ve sıcaklığın birkaç bin dereceden yüz binlerce dereceye çok kısa mesafede yükseldiği kritik bir katmandır. Geçiş bölgedeki sıcaklık değişimi $20000 \div 100000$ °C dir. Güneş atmosferin son katmanı milyonlarca kilometre uzaya yayılır ve sıcaklığı $1 \div 3$ milyon °C arasında değişmektedir. Burada çok beklenmeyen bir durumla karşılaşırız. Güneş yüzeyinden uzaklaştıkça sıcaklık artar. Fotosferin sıcaklığı birkaç bin derece iken koronadaki sıcaklık milyon dereceye kadar çıkar. Bu olay hala tam olarak bilimsel olarak çözülememiş bir olaydır ve korona ısınma problemi olarak bilinir. Koronadaki sıcaklık çok yüksek olduğu için korondaki değişimler patlamalar ve güneş rüzgarı, Dünyanın manyetik alanını ve teknolojik sistemleri üzerinde etki eder.

5. a) α Lyr (Vega) yıldızına kadar olan uzaklık;

$$r = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0,13''} = 7,692 \text{ pc} = 7,692 \cdot 3,26 = 25,076 \text{ ışık yılı} = 25,076 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 = 2,3723 \cdot 10^{14} \text{ km}$$

Veganın teğetsel hızı;

$$v_{\tau} = r \dot{\theta} = 2,3723 \cdot 10^{14} \cdot 0,24'' \cdot \frac{1}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,3723 \cdot 10^{14} \cdot \frac{\pi}{180 \cdot 3600} \cdot 3,17 \cdot 10^{-8} = 8,75 \text{ km/s}$$

Veganın uzay hızı;

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_{\tau}^2} = \sqrt{(8,75)^2 + (-20,6)^2} = 22,3789 \text{ km/s} \approx 22,38 \text{ km/s}$$

olarak bulunur.

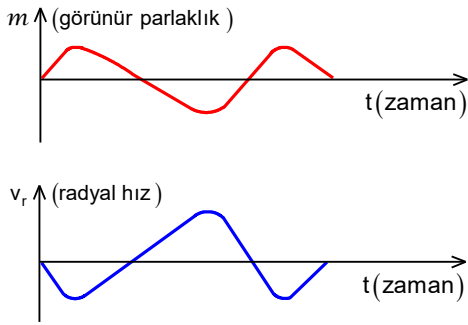
b) Radyal hızın negatif olması dalga boyun azalacağını anlamına gelir. Bu durumda;

$$\lambda = \lambda_0 (1 - \beta); \beta = \frac{v_r}{c}$$

yazabiliriz. Buradan Vega yıldızın yaydığı ışımının dalga boyu;

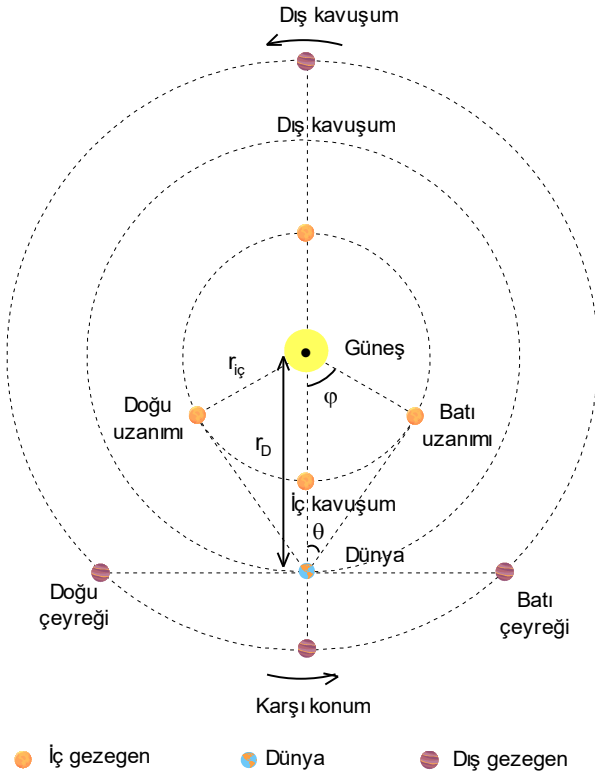
$$6563 \text{ Å} = \lambda_0 \left(1 - \frac{20,38}{300000} \right); \lambda_0 = 6562,55 \text{ Å}$$

olarak bulunur.



c) Delta Scuti yıldızlarının parlaklık değişimleri, yıldızın iç katmanlarındaki opaklık (opacity-saydam olmama, ışığı geçirmeme) değişimlerinden kaynaklanır. Bu mekanizmaya κ mekanizması denir. κ mekanizması yıldızın içindeki belirli bir katmanda opaklığın artmasıyla ışığın geçişinin engellenmesi ve bu durumun yıldızın dış katmanlarında genişleme ve büzülme hareketlerine yol açmasıdır. Yıldızın iç katmanlarında sıcaklık artması ile bazı iyonların ve en çok He^+ iyonların He^{++} iyonlara dönüşmesiyle daha fazla ışığı soğurulur. Bundan dolayı opaklık artar ve ışığın dışarı çıkması engellendiği için enerji yıldızın içinde birikmeye başlar. Artan foton sayısından dolayı basınç artar. Artan basıncı etkisi ile yıldızın dış katmanları genişler ve yıldızın yarıçapı

artar. Yıldızın şişmesi ile sıcaklık düşer, opaklık azalır, biriken fotonlar dışarı çıkar ve bundan dolayı yıldızın görünür parlaklığı artar. Yıldızın enerji kaybetmesinden sonra katmanlar tekrar büzülür, sıcaklık ve görünür parlaklık azalır. κ mekanizması yıldızın parlaklığında periyodik değişimlere neden olur. Sefid yıldızların görünür parlaklığındaki zamana göre değişimleri radyal ve radyal olmayan olarak sınıflandırılır. Radyal değişimlerde sefid yıldızın küresel şekli korunmaktadır. Radyal olmayan değişimlerde sefid yıldızın yüzeyinin farklı bölgelerinin aynı anda farklı yönlerde (içe/dışa) hareket eder. Sefid yıldızın radyal değişimlerde yıldız genişlerken yıldızın atmosferi bize doğru hareket eder. Sefid yıldız büzülürken yıldızın atmosferi bizden uzaklaşır. Bundan dolayı radyal hızı zamanla periyodik olarak değişir. Bununla birlikte yıldızın görünür parlaklığı ya da ışıması da değişir. Bu durumda spektrum çizgilerinde Doppler olayından dolayı periyodik değişimler gözlenir. Ölçülen radyal hız zamana göre pozitif ve negatif değerler arasında değerler alır. Grafik olarak temsil edilirse radyal hızının maksimum olduğu durumlarda görünür parlaklık minimum ve tersi olmalıdır. Temsili grafik şekildedir.



6. a) Güneş merkezde olmak üzere ve çembersel yörüngeler üzerinde hareket eden bir iç, bir dış gezegen ve Dünya'nın konumları şekildeki gibidir. Dış gezegen Doğu çeyrek ya da Batı çeyrek konumunda ise Dünya-Dış gezegen-Güneş sistemi bir dik üçgen oluşturur ve uzanım açısı 90° olur. Doğu uzanımı ya da batı uzanımı iç gezegen için geçerli kavramlardır. İç gezegen bu konumlarında iken iç gezegen Dünyadan gözlenirken Dünya ile iç gezegen arasındaki vektör iç gezegenin yörüngesine teğet olmalı ya da iç gezegenin Güneşten açısal sapması maksimum olur.

b) Dünya ile Merkür arasındaki bağıl açısal hız için;

$$\omega_{b1} = \omega_M - \omega_D \Rightarrow \frac{2\pi}{\tau_1} = \frac{2\pi}{T_{M1}} - \frac{2\pi}{T_D}$$

yazabiliriz. Buradan Merkür gezegenin dolanım periyodu;

$$\frac{1}{T_{M1}} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{T_D} = \frac{T_D + \tau_1}{\tau_1 T_D}$$

$$T_{M1} = \frac{\tau_1 T_D}{T_D + \tau_1} = \frac{115,88 \cdot 365,25}{365,25 + 115,88} = 87,97 \text{ gün} = 0,24085 \text{ yıl}$$

Merkür gezegenin açısal hızı;

$$\omega_{M1} = \frac{2\pi}{T_{M1}} = \frac{2 \cdot 3,14}{87,97 \cdot 24 \cdot 3600} = 82,666 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

olur. Güneş sisteminde bulunan tüm gök cisimleri için Kepler yasaları geçerlidir. Merkür gezegenin dolanım periyodu için;

$$\frac{T_{M1}^2}{a_{M1}^3} = \frac{T_D^2}{a_D^3}; a_{M1} = r_{İç}; a_D = r_D$$

yazabiliriz. Buradan Merkür gezegenin Güneşe olan uzaklık;

$$a_{M1} = a_D \sqrt[3]{\left(\frac{T_{M1}}{T_D}\right)^2} = \sqrt[3]{(0,24085)^2} = 0,3871 a_D$$

olur. Merkür gezegenin Güneşten maksimum açısal sapma durumunda açı şeklin geometrisinden;

$$\sin \theta = \frac{r_{M1}}{r_D} = 0,387; \theta = \arcsin 0,3871 = 22,8^\circ; \varphi = 90^\circ - 22,8^\circ = 67,2^\circ = 67,2^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = 1,17286 \text{ rad}$$

aranan süre;

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_{M1}} = \frac{2 \cdot 1,17286}{82,666 \cdot 10^{-8}} = 28,376 \cdot 10^5 \text{ s} = 788,22 \text{ h} = 32,84 \text{ gün}$$

olarak bulunur.

c) Dünya ile Mars arasındaki bağıl açısal hız için;

$$\omega_{b2} = \omega_D - \omega_{M2} \Rightarrow \frac{2\pi}{\tau_2} = \frac{2\pi}{T_D} - \frac{2\pi}{T_{M2}}$$

yazabiliriz. Buradan Mars gezegenin dolanım periyodu;

$$\frac{1}{T_{M2}} = \frac{1}{T_D} - \frac{1}{\tau_2} = \frac{\tau_2 - T_D}{\tau_2 T_D}; T_{M2} = \frac{\tau_2 T_D}{\tau_2 - T_D} = \frac{780 \cdot 365,25}{780 - 365,25} = 686,9 \text{ gün} = 1,88 \text{ yıl}$$

olarak bulunur. Mars gezegenin yörüngesi çembersel olarak kabul edilirse Marsın açısal hızı;

$$\omega_M = \frac{2\pi}{T_M} = \frac{2 \cdot 3,14}{686,9 \cdot 24 \cdot 3600} = 105,87 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s}$$

Dünya ile Mars arasındaki bağıl açısal hız;

$$\omega_b = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2 \cdot 3,14}{780 \cdot 24 \cdot 3600} = 93,2334 \cdot 10^{-9} \text{ rad/s}$$

Mars gezegenin doğu çeyrek konuma geçmesi için taranan açı;

$$\theta = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$$

olmalıdır. Bunun için gereken süre;

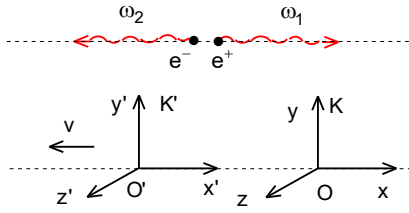
$$t = \frac{\theta}{\omega_b} = \frac{2}{\omega_b} = \frac{1,5,3,14}{92,2334 \cdot 10^{-9}} = 51,092 \cdot 10^6 \text{ s} = 14192,222546 \text{ h} = 591,34 \text{ gün}$$

bu süre içinde Mars gezegenin taradığı açı;

$$\theta_M = \omega_M t = 105,87 \cdot 10^{-9} \cdot 51,092 \cdot 10^6 = 5,4 \text{ rad} = 5,4 \cdot \frac{360}{2\pi} = 309,919^\circ \approx 310^\circ$$

olarak bulunur.

d) Bir karşı konum dizilimde Güneş ve dış gezegen, Dünyaya göre ters yöndedirler. Karşı konum diziliminde Güneş batarken gezegen doğu ufkundan yükselir, gezegen ancak batı ufkunun altına inerken Güneş doğar. Bu durumda gezegen tüm gece boyunca gözlenir. Dış gezegen, karşı konumda Dünyaya en yakın mesafededir. Bu, gezegenin daha parlak ve büyük görünmesini sağlar. Gözlenen gezegen en parlaklık olup teleskopla en detaylı gözlem yapılır. Bu dönemde gezegenin yüzey detayları, atmosferi ve uyduları daha net incelenebilir.



7. a) Işık hızının sabit olmasından dolayı bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçişinde ışığın frekansı değişmektedir. Bu olay fizikte Doppler olayı olarak bilinmektedir. Boyuna Doppler olayında frekans değişimini bulmak için hareketsiz halde bulunan ve kütleleri m olan, birisi elektron diğeri pozitron iki parçacık tamamen yok olma olayını inceleyelim. Bu parçacıkların yok olması sonucu zıt yönde yayılan iki foton oluşmaktadır. Bu çift foton oluşumu olayını hareketsiz K koordinat referans sisteminden ve x eksenini boyunca K koordinat referans sisteme sabit v hızı ile uzaklaşan K' koordinat sisteme göre inceleyebiliriz. Oluşan fotonların frekansları ya da dalga boyları;

$$2mc^2 = 2\hbar\omega_0 = 2 \cdot \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0} ; \omega_0 = \frac{mc^2}{\hbar} ; \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

olur. Aynı olayı v hızı ile hareket eden K' koordinat sistemine göre elektron ve pozitron sabit v hızı ile hareket etmektedir. Bu iki parçacığın enerji ve momentumları için;

$$2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} + \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2}$$

$$2p = 2\gamma mv = \frac{2mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_1} - \frac{2\pi\hbar}{\lambda_2} ; \beta = \frac{v}{c}$$

yazabiliriz. Bu denklemlerden;

$$\frac{2mc^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2}$$

$$2\sqrt{\left(\frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 c^2 + m^2c^4} + \frac{2mc^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2 \cdot \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} ; mc \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$mc \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_1} ; \lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{mc} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \lambda_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} ; \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} ; \lambda_2 = \lambda_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} ; \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

olarak bulunur. Fizikte;

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \text{ ya da } \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

z Doppler spektrum kayması parametresi olarak bilinir. Genelde galaksiler bizim galakside uzaklaştıkları için dalga boyları kırmızıya doğru kaymaktadır. Galaksilerin uzaklaşma hızları ışık hızından çok küçük ise;

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 1 - \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \approx 1 - \sqrt{(1-\beta)^2} \approx 1 - (1-\beta) = \beta = \frac{v}{c} ; v = cz$$

ile verilir. Verilen rölativistik olmayan kırmızıya kaymalar için hızlar;

$$v_1 = 300000.0,07667 = 23001 \text{ km/s} ; v_2 = 300000.0,07833 = 23499 \text{ km/s} ; v_3 = 300000.0,08292 = 24876 \text{ km/s}$$

$$v_4 = 300000.0,08458 = 25374 \text{ km/s} ; v_5 = 300000.0,07875 = 23625 \text{ km/s} ; v_6 = 300000.0,08417 = 24510 \text{ km/s}$$

$$v_7 = 300000.0,07958 = 23874 \text{ km/s}; v_8 = 300000.0,08375 = 25125 \text{ km/s}; v_9 = 300000.0,07792 = 23376 \text{ km/s}$$

$$v_{10} = 300000.0,08125 = 24375 \text{ km/s}; v_{11} = 300000.0,0775 = 23250 \text{ km/s}; v_{12} = 300000.0,07625 = 22875 \text{ km/s}$$

$$v_{13} = 300000.0,07542 = 22626 \text{ km/s}; v_{14} = 300000.0,08208 = 24624 \text{ km/s}; v_{15} = 300000.0,08083 = 24249 \text{ km/s}$$

bu hızların ortalama değeri;

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^{15} v_i}{15} = 24000 \text{ km/s}$$

$$\frac{23001 + 23499 + 24876 + 25374 + 23625 + 24510 + 23874 + 25125 + 23376 + 24375 + 23250 + 22875 + 22626 + 24624 + 24249}{15} = \frac{359259}{15} = 23950,6 \text{ km/s}$$

bu hızların dispersiyonu;

Galaksi No	Hız (v_i) km/s	$v_i - \bar{v}$ (km/s)	$(v_i - \bar{v})^2$
1	23001	23001-23950,6= -949,6	901740
2	23499	23499-23950,6= -451,6	203943
3	24876	24876-23950,6=925,4	856365
4	25374	25374-23950,6=1423,4	2026068
5	23625	23625-23950,6= -325,6	106015
6	24510	24510-23950,6=559,4	312928
7	23874	23874-23950,6= -76,6	5868
8	25125	25125-23950,6=1174,4	1379215
9	23376	23376-23950,6= -574,6	330165
10	24375	24375-23950,6=424,4	180115
11	23250	23250-23950,6= -700,6	490840
12	22875	22875-23950,6= -1075,6	1156915
13	22626	22626 -23950,6= -1324,6	1754565
14	24624	24624-23950,6=673,4	453468

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{\text{ort}})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (v_i - v_{\text{ort}})^2}{14}} = \sqrt{\frac{10247253}{14}} = 85554$$

olarak bulunur. Bir $\vec{a}$ vektörün bileşenleri (a_x, a_y, a_z) olsun. Bu vektörün büyüklüğü;

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

ile verilir. Bu vektörün ortalaması bileşenlerin ortalaması cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = \langle a_x^2 \rangle + \langle a_y^2 \rangle + \langle a_z^2 \rangle$$

şeklinde yazılabilir. Üç boyutlu uzayda $\vec{a}$ vektörün rastgele bir konumda olacağı için bu vektörün bileşenleri küresel simetri sonucu birbirine eşit olur.

$$\langle a_x^2 \rangle = \langle a_y^2 \rangle = \langle a_z^2 \rangle$$

Bu durumda $\vec{a}$ vektörün büyüklüğü bileşenlerin büyüklükleri cinsinden;

$$\langle a^2 \rangle = 3 \langle a_x^2 \rangle$$

hız için bu ifade;

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 \sigma_v^2; \sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (v_i - v_{\text{ort}})^2}{n-1}}$$

olarak yazılabilir. Çembersel hareket için;

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{m v^2}{r} \quad E = E_k + E_p = \frac{m v^2}{2} - \frac{\gamma M m}{r} = \frac{\gamma M m}{2r} - \frac{\gamma M m}{r} = -\frac{\gamma M m}{2r}; \quad E_k = \frac{\gamma M m}{2r}$$

yazabiliriz. Çok sayıda cisim için kinetik ve potansiyel enerjilerin ortalama değerleri için;

$$2 \langle E_k \rangle = - \langle E_p \rangle$$

ifadesi virial teorimi olarak bilinir. Bir cismin çekim merkezin etrafında r yarıçaplı çembersel yörünge üzerinde hareket şartından kütle çekim merkezin kütlesi;

$$M = \frac{rv^2}{\gamma} = \frac{3r\sigma_v^2}{\gamma}; M_{GK} = \frac{3R_{GK}\sigma_v^2}{\gamma}$$

olarak ifade edilir. Buradan galaksi kümenin kütlesi;

$$M_{GK} = \frac{3R_{GK}\sigma_v^2}{\gamma} = \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \cdot 3,26 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 300000 \cdot 10^3 \cdot 85554^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} =$$
$$= 1,52 \cdot 10^{45} \text{ kg} = \frac{1,52 \cdot 10^{45}}{2 \cdot 10^{30}} = 7,66 \cdot 10^{14} M_{\odot}$$

olarak bulunur.

b) Galaktik kümenin kütleinin ışık gücüne oranı;

$$\frac{M_{GK}}{L_{GK}} = \frac{7,66 \cdot 10^{14}}{2,55 \cdot 10^{12}} \approx 300 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$$

olur. Bu galaktik kümede çok büyük oranda ışık yaymayan karanlık madde olduğunu gösterir. Yıldızlarda hidrojen den dolayı bulunan baryon sayısı;

$$N_{1,yıldız-baryon} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,7 \cdot 7,66 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,6726 \cdot 10^{-27}} = 9,617 \cdot 10^{69}$$

yıldızlarda helyumdan dolayı bulunan baryon sayısı;

$$N_{2,yıldız-baryon} = \frac{4 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,3 \cdot 7,66 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{6,646477 \cdot 10^{-27}} = 4,149 \cdot 10^{69}$$

yıldızlar arası gazlarda ve bulutlarda bulunan baryon sayısı;

$$N_{gaz-baryon} = \frac{0,14 \cdot 7,66 \cdot 10^{14} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{1,6726 \cdot 10^{-27}} = 318,882 \cdot 10^{69}$$

toplam baryon sayısı;

$$N_{baryon} = N_{1,yıldız-baryon} + N_{2,yıldız-baryon} + N_{gaz-baryon} = 9,617 \cdot 10^{69} + 4,149 \cdot 10^{69} + 318,882 \cdot 10^{69} = 3,3 \cdot 10^{71}$$

olarak bulunur.

8. Uyduların dolanım periyotları için;

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}; \frac{T_1^2}{(R_M + h_1)^3} = \frac{T_2^2}{(R_M + h_2)^3};$$

yazabiliriz. Buradan Marsın yarıçapı;

$$\frac{(R_M + h_1)^3}{(R_M + h_2)^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2}; \frac{R_M + h_1}{R_M + h_2} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}; \frac{R_M + 5985}{R_M + 20073} = \sqrt[3]{\left(\frac{7.3600 + 39.60}{30.3600 + 18.60}\right)^2} = 0,399465433$$

$$R_M + 5985 = 0,399465433 R_M + 0,399465433 \cdot 20073; 0,600534567 R_M = 2033,47 R_M = 3386 \text{ km}$$

Fobos uydunun hızı;

$$v_1 = \frac{2\pi(R_M + h_1)}{T_1} = \frac{2 \cdot 3,14(3386 + 5985) \cdot 10^3}{7.3600 + 39.60} = 2137,97 \text{ m/s}$$

Mars gezegenin kütlesi;

$$\frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{\gamma Mm}{r_1^2}; M = \frac{v_1^2 r_1}{\gamma} = \frac{2137,97^2 (3386 + 5985) \cdot 10^3}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 6,42 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

Mars gezegeni ve Fobos uydusu arasındaki potansiyel enerji;

$$E_{pM-Fob} = -\frac{\gamma Mm_{Fob}}{r_1} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 1,066 \cdot 10^{16}}{(3386 + 5985) \cdot 10^3} = -4,87 \cdot 10^{22} \text{ J}$$

Fobos uydusunun kinetik enerjisi;

$$E_{kFob} = \frac{m_{Fob} v_1^2}{2} = \frac{1,066 \cdot 10^{16} \cdot (2137,97)^2}{2} = 24,36 \cdot 10^{22} \text{ J}$$

olarak bulunur.