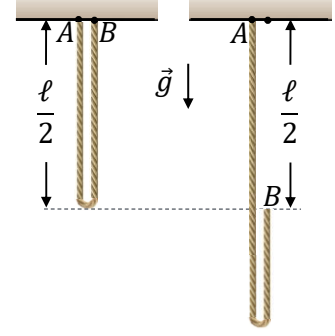


Kütlesi M , uzunluğu ℓ olan homojen ve yumuşak bir ip iki ucundan tavana asılmıştır. İpin B ucu serbest bırakılıyor.

a) İpin B ucu $\ell/2$ kadar düştüğü anda ipin A ucunun tavana uyguladığı kuvveti bulunuz.

b) İpin B ucu $\ell/2$ kadar düştüğü anda ipin A ucu serbest bırakılıyor. İpin A ucu serbest bırakıldıktan ne kadar süre sonra ip tamamen doğrusal olacaktır?



a)

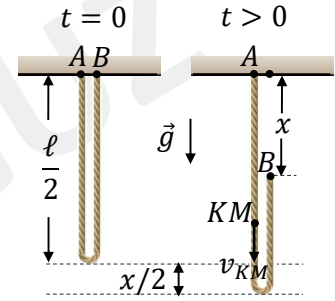
I. ÇÖZÜM

İpin birim uzunluğunun kütlesi λ olsun.

$$\lambda = \frac{M}{\ell}$$

İpin B ucunun serbest düşme hareketi yaptığı varsayılırsa bu ucun t süresi sonunda yer değiştirmesi ve hızı için

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{ve} \quad v_B = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_B = \dot{x} = \sqrt{2gx}$$



İpin kütle merkezinin hızını bulalım. İpin B ucu x kadar düştüğü an ipin kütle merkezinin yer değiştirmesi x_{KM} olsun. İpin kütle merkezinin tavana olan mesafesi, B ucu serbest bırakılmadan önce x_0 , B ucu serbest bırakılıp x kadar düştüğünde ise x_1 olsun.

$$x_{KM} = x_1 - x_0$$

İpin B ucunun x kadar düştüğü ana kadar ipin sağ kısmından sol kısmına $x/2$ uzunluğunda bir ip parçası geçiş yapmış olacaktır.

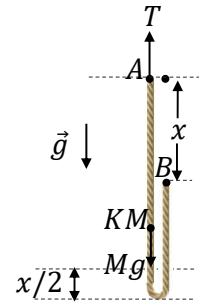
$$x_{KM} = \frac{\left(\frac{\ell}{2} + \frac{x}{2}\right)\lambda \left(\frac{\ell}{2} + \frac{x}{2}\right) + \left(\frac{\ell}{2} - x + \frac{x}{2}\right)\lambda \left(x + \frac{\ell}{2} - x + \frac{x}{2}\right)}{M} - \frac{\ell}{4}$$

$$x_{KM} = [(\ell + x)^2 + (\ell - x)(\ell + 3x)] \frac{\lambda}{8M} - \frac{\ell}{4}$$

İpin kütle merkezinin hızı v_{KM} ise

$$v_{KM} = \frac{dx_{KM}}{dt} \Rightarrow v_{KM} = \frac{\lambda}{M} \cdot \frac{[2(\ell + x)\dot{x} - (\ell + 3x)\dot{x} + (\ell - x)3\dot{x}]}{8} \Rightarrow v_{KM} = \frac{(4\ell - 4x)\dot{x}}{8\ell}$$

$$v_{KM} = \frac{(\ell - x)\dot{x}}{2\ell}$$



İpin kütle merkezinin P momentumu için

$$P = Mv_{KM} \Rightarrow P = M \frac{(\ell - x)\dot{x}}{2\ell} \Rightarrow P = \frac{\lambda(\ell - x)\dot{x}}{2}$$

$$v_{KM} = \frac{(\ell - x)\dot{x}}{2\ell} \Rightarrow \frac{dv_{KM}}{dt} = \frac{-\dot{x}\dot{x} + (\ell - x)\ddot{x}}{2\ell} \Rightarrow \frac{dv_{KM}}{dt} = \frac{(\ell - x)\ddot{x} - \dot{x}^2}{2\ell}$$

$$F = \frac{dP}{dt} \Rightarrow Mg - T = \frac{d(Mv_{KM})}{dt} \Rightarrow Mg - T = M \frac{dv_{KM}}{dt}$$

$$Mg - T = M \frac{(\ell - x)\ddot{x} - \dot{x}^2}{2\ell} \Rightarrow T = Mg - M \frac{(\ell - x)\ddot{x} - \dot{x}^2}{2\ell}$$

$x = \frac{\ell}{2}$ olduğunda $\dot{x} = \sqrt{2gx}$ $\Rightarrow \dot{x} = \sqrt{g\ell}$ ve $\ddot{x} = g$ olacaktır.

$$T = Mg - M \frac{\left(\ell - \frac{\ell}{2}\right)g - g\ell}{2\ell} \Rightarrow T = Mg - M \left(-\frac{g}{4}\right) \Rightarrow \boxed{T = \frac{5Mg}{4}}$$

II. ÇÖZÜM

İpin sağ kısmı serbest düşüş halindedir. İpin B ucu, t sürede x kadar düşmüş ise bu sürede $x/2$ kadarlık ip uzunluğu sol tarafa geçerek hareketsiz duruma gelecektir.

$$x = \frac{1}{2}gt^2$$

İpin sağ kısmının t anındaki hızı (yukarı yön pozitif alınarak)

$$v_{sağ} = -gt$$

t anında ipin sağ kısmının kütlesi ise

$$m_{sağ} = \left(\frac{\ell}{2} - x + \frac{x}{2}\right)\lambda \Rightarrow m_{sağ} = \frac{(\ell - x)\lambda}{2} \Rightarrow m_{sağ} = \frac{\left(\ell - \frac{1}{2}gt^2\right)\lambda}{2}$$

İpin momentumu, ipin sadece sağ tarafı hareket ettiği için sağ kısmının momentumu kadar olacaktır.

$$P = m_{sağ}v_{sağ} \Rightarrow P = \frac{1}{2}\left(\ell - \frac{1}{2}gt^2\right)\lambda(-gt) \Rightarrow P = -\frac{\lambda g}{2}\left(\ell t - \frac{1}{2}gt^3\right)$$

$$F_{net} = \frac{dP}{dt} \Rightarrow T - Mg = -\frac{\lambda g}{2}\left(\ell - \frac{3}{2}gt^2\right)$$

$$x = \frac{\ell}{2} \text{ için } \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow gt^2 = \ell$$

$$T - Mg = -\frac{\lambda g}{2}\left(\ell - \frac{3}{2}\ell\right) \Rightarrow T - Mg = \frac{\ell\lambda g}{4} \Rightarrow T - Mg = \frac{Mg}{4} \Rightarrow \boxed{T = \frac{5Mg}{4}}$$

b)

İpin A ucu serbest bırakıldığı andan ($t = 0$ anından) bir t süre sonra ipin sol kısmının boyu ℓ_{sol} , sağ kısmının boyu $\ell_{sağ}$ olsun. t anına kadar ipin sağ kısmından sol kısma y uzunluğunda ip geçişi olmuş ise

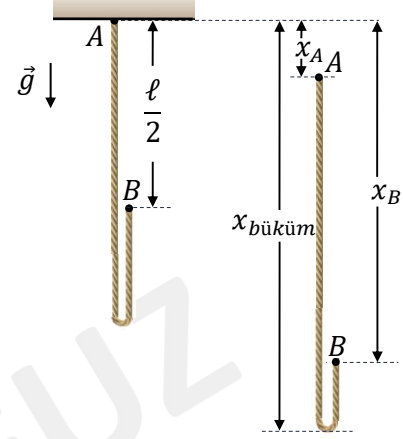
$$\ell_{sol} = \frac{3\ell}{4} + y \quad \text{ve} \quad \ell_{sağ} = \frac{\ell}{4} - y$$

t anında ipin sol ve sağ kısımlarının kütleleri

$$m_{sol} = \ell_{sol}\lambda \Rightarrow m_{sol} = \left(\frac{3\ell}{4} + y\right)\lambda$$

$$m_{sağ} = \ell_{sağ}\lambda \Rightarrow m_{sağ} = \left(\frac{\ell}{4} - y\right)\lambda$$

İpin A ucu serbest kaldıktan t süre sonra ipin A ucunun tavana olan uzaklığı x_A , B ucunun tavana olan uzaklığı x_B ve ipin bükülme noktasının tavana olan uzaklığı $x_{bük}$ olsun.



$$\ell_{sol} + \ell_{sağ} = \ell \Rightarrow x_{bük} - x_A + x_{bük} - x_B = \ell \Rightarrow 2x_{bük} - x_A - x_B = \ell$$

$$2 \frac{dx_{bük}}{dt} - \frac{dx_A}{dt} - \frac{dx_B}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \Rightarrow 2v_{bük} - v_A - v_B = 0 \Rightarrow v_{bük} = \frac{v_A + v_B}{2}$$

t anında ipin sol kısmının boyu ℓ_{sol} için

$$\ell_{sol} = \frac{3\ell}{4} + y = x_{bük} - x_A$$

$$\frac{3\ell}{4} + y = x_{bük} - x_A \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dx_{bük}}{dt} - \frac{dx_A}{dt} \Rightarrow v_{tr} = v_{bük} - v_A$$

$v_{tr} = \frac{dy}{dt}$, ip parçacıklarının sağ kısımdan sol kısma transfer olma hızıdır.

$$v_{tr} = v_{bük} - v_A \Rightarrow v_{tr} = \frac{v_A + v_B}{2} - v_A \Rightarrow v_{tr} = \frac{v_B - v_A}{2}$$

İpin kütle merkezinin hızı:

$$v_{KM} = \frac{m_{sol}v_A + m_{sağ}v_B}{m} \Rightarrow v_{KM} = \frac{\left(\frac{3\ell}{4} + y\right)\lambda v_A + \left(\frac{\ell}{4} - y\right)\lambda v_B}{m}$$

$$v_{KM} = \frac{\lambda}{m} \left[\left(\frac{3\ell}{4} + y\right)v_A + \left(\frac{\ell}{4} - y\right)v_B \right] \Rightarrow v_{KM} = \frac{\left(\frac{3\ell}{4} + y\right)v_A + \left(\frac{\ell}{4} - y\right)v_B}{\ell}$$

İpin A ucu serbest bırakıldığı anda ($t = 0$) B ucunun hızı:

$$v_B = \sqrt{2gx} \Rightarrow v_{B_0} = \sqrt{2g \frac{\ell}{2}} \Rightarrow v_{B_0} = \sqrt{g\ell}$$

İpin A ucu serbest bırakıldığı anda ($t = 0$) ipin kütle merkezinin hızı

$$v_{KM_0} = \frac{\left(\frac{3\ell}{4} + 0\right)0 + \left(\frac{\ell}{4} - 0\right)v_{B_0}}{\ell} \Rightarrow v_{KM_0} = \frac{v_{B_0}}{4}$$

İpin A ucu serbest bırakıldığı andan itibaren ip g ivmesi ile hızlanacağı için A ucu serbest bırakıldıktan t süre sonra B ucunun hızı:

$$v_B = v_{B_0} + gt \Rightarrow v_B = \sqrt{g\ell} + gt$$

İpin A ucu serbest bırakıldığı andan itibaren ip g ivmesi ile hızlanacağı için A ucu serbest bırakıldıktan t süre sonra kütle merkezinin hızı:

$$v_{KM} = v_{KM_0} + gt \Rightarrow v_{KM} = \frac{v_{B_0}}{4} + gt$$

İpin A ucu serbest bırakıldıktan t süre sonra bu ucun hızı:

$$v_{tr} = \frac{v_B - v_A}{2} \Rightarrow v_A = v_B - 2v_{tr}$$

$$v_{KM} = \frac{\left(\frac{3\ell}{4} + y\right)v_A + \left(\frac{\ell}{4} - y\right)v_B}{\ell} \Rightarrow v_{KM} = \frac{\left(\frac{3\ell}{4} + y\right)(v_B - 2v_{tr}) + \left(\frac{\ell}{4} - y\right)v_B}{\ell}$$

$$v_{KM} = \frac{\frac{3\ell}{4}v_B - \frac{3\ell}{2}v_{tr} + y \cdot v_B - 2y \cdot v_{tr} + \frac{\ell}{4}v_B - y \cdot v_B}{\ell} \Rightarrow v_{KM} = \frac{\ell \cdot v_B - v_{tr} \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right)}{\ell}$$

$v_B = v_{B_0} + gt$ ve $v_{KM} = \frac{v_{B_0}}{4} + gt$ eşitliklerini yerine yazalım.

$$\frac{v_{B_0}}{4} + gt = \frac{\ell(v_{B_0} + gt) - v_{tr} \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right)}{\ell} \Rightarrow \frac{3\ell}{4}v_{B_0} = \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right)v_{tr}$$

$$\frac{3\ell}{4}v_{B_0} = \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right)\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{3\ell}{4}v_{B_0}dt = \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right)dy$$

$$\frac{3\ell}{4}v_{B_0} \int_0^T dt = \int_0^{\frac{\ell}{4}} \left(\frac{3\ell}{2} + 2y\right) dy \Rightarrow \frac{3\ell}{4}v_{B_0}t \Big|_0^T = \frac{3\ell}{2}y + y^2 \Big|_0^{\frac{\ell}{4}} \Rightarrow \frac{3\ell}{4}v_{B_0}T = \frac{3\ell^2}{8} + \frac{\ell^2}{16}$$

$$\frac{3\ell}{4}v_{B_0}T = \frac{7\ell^2}{16} \Rightarrow 3Tv_{B_0} = \frac{7\ell}{4} \Rightarrow T = \frac{7\ell}{12v_{B_0}} \Rightarrow T = \frac{7\ell}{12\sqrt{g\ell}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{7}{12}\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

Ahmet UĞUZ

Tubitak Fizik Olimpiyatları Eğitmeni