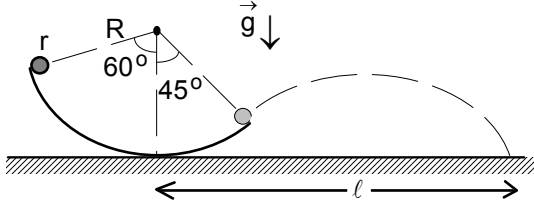


EYLÜL KAMPI SINAVI-2002

1. Bir araba, şoför dört tekerleği de kullanarak fren yaptığında L kadar yol alarak durmaktadır. Frene basıldığında araba ile yol arasındaki sürtünme katsayısı f, ön ve arka tekerlekler arasındaki mesafe ℓ , arabanın kütle merkezi iki tekerin tam ortasında ve h yüksekliğindedir. Şoför sadece ön tekerlekleri kullanarak fren yaptığında ne kadar yol alarak duracaktır? Şoför sadece arka tekerlekleri kullanarak fren yaptığında ne kadar yol alarak duracaktır?

Not: Arabanın kütle merkezinin tekerleklerin tam ortasında olduğunu kabul edebilirsiniz.



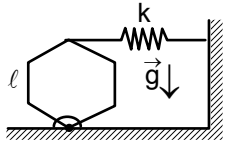
2. Yarıçapı r olan bir top yarıçapı R olan dairesel ray üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Top rayın, düşey-le 60° lik bir açı yapan bir noktasından yuvarlanmaya başlayarak 105° lik bir açıyı taradıktan sonra rayı terk etmektedir. Kürenin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti $J = \frac{2mr^2}{5}$ 'dir. Topun raydan

çıkış hızı nedir?

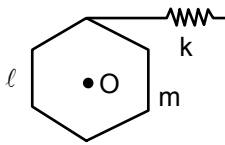
Topun yere çarptığı ℓ mesafesi nedir?

3. Su barajlarında biriken su belli yükseklikten bir su türbini üzerine düşerek türbinin dönmesini sağlamaktadır. Bu su türbinin maksimum verimi ne kadardır?

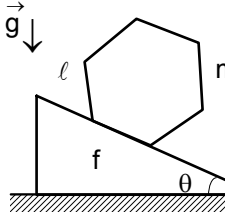
4. a) Bir kenar uzunluğu ℓ olan düzgün altıgenin kütlesi m ise, merkezine göre olan eylemsizlik momenti nedir?



b) Önceki şıkta verilen özelliklere sahip, şekildeki altıgen alt köşesinden geçen eksen etrafında dönme hareketi yapabilmektedir. Altıgenin küçük yer değiştirmelerde kararlı dengede olabilmesi için yayın yay sabiti k ne kadar olmalıdır?



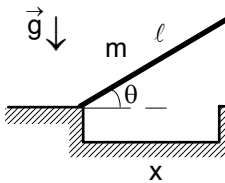
c) Kütle merkezine göre serbestçe dönebilen, kenar uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan altıgen yay sabiti k olan bir yay sayesinde şekildeki gibi tuturulmuştur. Sistemin küçük titreşimlerinin periyodu nedir?



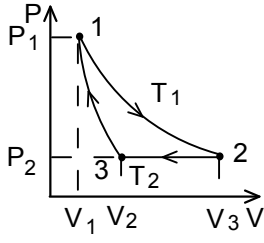
d) Aynı altıgen eğim açısı θ olan bir eğik düzlem üzerine yerleştirildiğinde yuvarlanmadan kayabilmesi için yüzey ile arasındaki maksimum sürtünme katsayısı f ne kadar olmalıdır?

5. a) Eylemsizlik momentleri J_1 ve J_2 olan iki fiziksel sarkaç burkulma katsayısı χ olan burkuluş ipin uçlarında bulunmaktadır. Bu sistemin titreşim periyodu nedir?

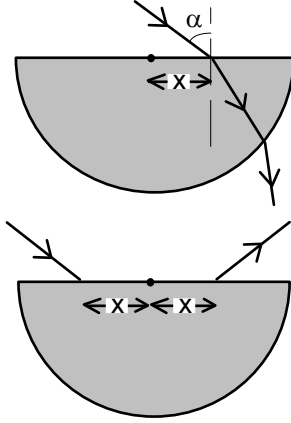
b) İki fiziksel sarkaç aynı yatay eksen etrafında titreşimler yapmaktadırlar. Sarkaçlarından birisinin titreşim frekansı ω_1 , diğerinin ise ω_2 dir. Tayin edilen eksene göre sarkaçlarından birisinin eylemsizlik momenti J_1 , diğerinin ise J_2 dir. İki sarkaç durgun haldeyken birbirlerine sıkı sıkı bağlanıyor (yani birlikte tek cisim gibi hareket ediyorlar). Yeni oluşan fiziksel sarkacın titreşim frekansı ne olurdu?



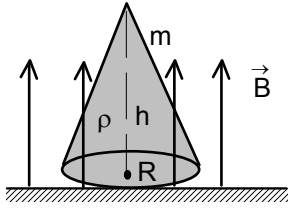
6. Yatay ve sürtüneli bir masa üzerinde uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan bir çubuk yatayla $\theta=30^\circ$ yapacak şekilde tutularak masanın ucunda durmaktadır. Çubuk ile düzlem arasındaki sürtünme çok büyük olduğu için çubuk yatay yönde kaymamaktadır. Çubuk serbest bırakıldığında masa ile aynı hizada bulunan dik bir engele çarpılmaktadır. Çubuk çarpıncaya kadar çubuğa yatayla yaptığı açısına bağlı olan tepki kuvveti nedir? etki Çarpışmadan sonra çubuk dönmeden geri zıplaması için masa ile engel arasındaki uzaklık x kaç ℓ olmalıdır? Yerçekimi ivmesi g veriliyor.



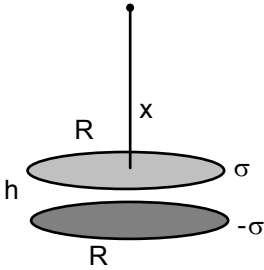
7. İdeal gazla çalışan ısı makinesi 1-2 izotermal, 2-3 izobarik, 3-1 adyabatik proseslerinden oluşan kapalı proses gerçekleşmektedir. Isı makinesinin verimi çevrimdeki maddenin sahip olduğu maksimum T_1 ve minimum T_2 sıcaklığı cinsinden nedir?



8. Yarıçapı R , kırıcılık indisi n olan yarım silindirik bir cam düşününüz. Bir ışık ışını silindirin eksenine dik düzlem üzerinde yarım silindirin düzlemsel yüzeyi ile α açısı yapacak şekilde ve düzlemsel yüzeyin orta çizgisinden x kadar uzağa gelmektedir. Işığın camın eğri yüzeyine ilk değdiği noktadan dışarı çıkması istenmektedir. Bu durumu sağlayan maksimum x uzaklığının ifadesini R , n ve α cinsinden bulunuz. x 'in her değeri için $(-R < x < +R)$ yukarıdaki şartın sağlanması nasıl mümkün olabilir. $n = \sqrt{2}$, $\alpha = 30^\circ$ olursa ışığın cam merkezinden x kadar uzaklıkta bir noktadan girip, merkezin diğer tarafından gene x uzaklıktan dışarı çıkmasının mümkün olup olmadığını inceleyiniz.

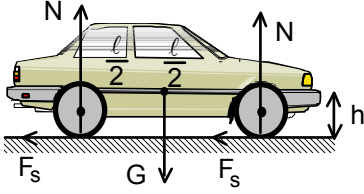


9. Taban yarıçapı R , yüksekliği h ve kütlesi m olan içi dolu bir koninin hacimsel yük yoğunluğu ρ 'dur ve tabanına dik B manyetik alanı içerisinde bulunmaktadır. Uygulanan manyetik alan kaldırılırsa koninin kazanacağı açısal hız ω ne olur? Koninin taban merkezinden geçen ve tabana dik eksene göre eylemsizlik momenti $J = \frac{3mR^2}{10}$ olarak veriliyor.



10. Yarıçapı R ve aralarındaki uzaklık h olan iki dairesel plakaya yüzeysel yük yoğunluğu σ ve $-\sigma$ olan yükler veriliyor. Pozitif yüklü plakadan x kadar uzakta bulunan bir noktadaki elektrik alanını bulunuz. ℓ , $R \gg h$ ve boşluğun dielektrik geçirgenlik katsayısı ϵ_0 olarak veriliyor.

EYLÜL KAMPI SINAVI-2002 SORULARIN ÇÖZÜMLERİ



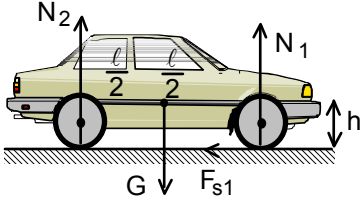
1. Birinci durumda simetriden dolayı tepki kuvvetleri ve dolayısıyla her tekerleğe etki eden sürtünme kuvvetleri de eşittir. Arabanın fren ivmesi

$$a = \frac{F_s}{m} = \frac{fmg}{m} = fg$$

fren mesafesi

$$L = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2fg}$$

olarak yazılabilir.



Şoför sadece ön tekerleklerini kullanarak fren yaptığında sürtünme kuvveti sadece ön tekerleklerde etkili olmaktadır. Simetri bozulduğu için tekerleklerle etki eden tepki kuvvetleri farklıdır. Kuvvetlerin dengesinden

$$mg = N_1 + N_2$$

momentlerin dengesinden

$$N_2 \cdot \frac{l}{2} + F_{s1} \cdot h = N_1 \cdot \frac{l}{2}; F_{s1} = fN_1$$

yazabiliriz. Buradan tepki kuvveti

$$N_2 = N_1 \left(1 - \frac{2fh}{l}\right); mg = N_1 + N_1 \left(1 - \frac{2fh}{l}\right); N_1 = \frac{mg}{2 \left(1 - \frac{fh}{l}\right)}$$

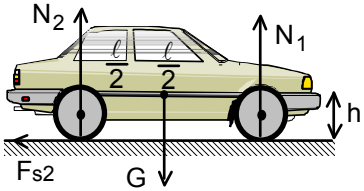
sürtünme kuvveti ve ivme

$$F_{s1} = \frac{fmg}{2 \left(1 - \frac{fh}{l}\right)}; a_1 = \frac{F_{s1}}{m} = \frac{fg}{2 \left(1 - \frac{fh}{l}\right)}$$

fren mesafesi

$$L_1 = \frac{v^2}{2a_1} = 2 \frac{v^2}{2fg} \left(1 - \frac{fh}{l}\right) = 2L \left(1 - \frac{fh}{l}\right)$$

olarak bulunur.



Şoför sadece arka tekerleklerini kullanarak fren yaptığında sürtünme kuvveti sadece arka tekerleklerde etkili olmaktadır. Simetri bozulduğu için tekerleklerle etki eden tepki kuvvetleri farklıdır. Kuvvetlerin dengesinden

$$mg = N_1 + N_2$$

momentlerin dengesinden

$$N_2 \cdot \frac{l}{2} + F_{s2} \cdot h = N_1 \cdot \frac{l}{2}; F_{s2} = fN_2$$

yazabiliriz. Buradan tepki kuvveti

$$N_1 = N_2 \left(1 + \frac{2fh}{l}\right); mg = N_2 \left(1 + \frac{2fh}{l}\right) + N_2; N_2 = \frac{mg}{2 \left(1 + \frac{fh}{l}\right)}$$

sürtünme kuvveti ve ivme

$$F_{s2} = \frac{fmg}{2 \left(1 + \frac{fh}{l}\right)}; a_2 = \frac{F_{s2}}{m} = \frac{fg}{2 \left(1 + \frac{fh}{l}\right)}$$

fren mesafesi

$$L_2 = \frac{v^2}{2a_2} = 2 \frac{v^2}{2fg} \left(1 + \frac{fh}{l}\right) = 2L \left(1 + \frac{fh}{l}\right)$$

olarak bulunur.

2. Enerji korunumu yasasından

$$mgr(\cos 45^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{J_0\omega_0^2}{2}; J_0 = \frac{2mr^2}{5}; v_0 = \omega_0 r$$

kürenin rayı terk ettiğindeki hız

$$v_0 = \sqrt{\frac{5(\sqrt{2} - 1)gr}{7}} \approx 1,72 \sqrt{r}$$

olarak bulunur. Kürenin ilk hızın bileşenleri için

$$v_{0x} = v_{0y} = v_0 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} 1,72 \sqrt{r} = 1,2 \sqrt{r}$$

yazabiliriz. Kürenin rayı terk ettiği ilk yükseklik

$$h = r - r \cos 45^\circ = 0,3r$$

kürenin hareket denklemi

$$y = h + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

olur. $y=0$ şartından kürenin hareket süresini bulabiliriz.

$$5t^2 - 1,2 \sqrt{r} t - 0,3r = 0; t = 0,4 \sqrt{r}$$

Aranan uzaklık

$$l = r \sin 45^\circ + v_{0x}t = 0,7r + 1,2 \sqrt{r} \cdot 0,4 \sqrt{r} = 1,2r$$

olarak bulunur.

3. Su türbinin verimi

$$\eta = \frac{P_f}{P}$$

şeklinde verilir. Burada P_f faydalı olan güç, P ise tüm güçtür. Faydalı güç

$$P_f = F u$$

olarak yazılabilir. Burada

$$F = \frac{dp}{dt} = \mu_b v_b = \rho S v_b^2$$

su türbinine etki eden kuvvet

$$\mu = \rho S v_b$$

su türbinine birim zamanda düşen su kütlesi

$$v_b = v - u$$

ise düşen suyun v hızının ile pervanenin çizgisel $u = \omega r$ arasındaki bağıl hız, ρ suyun özkütlesi, S suyun pervanenin düştüğü üzerindeki alanıdır. Buradan faydalı güç

$$P_f = \rho S (v - u)^2 u$$

olur. Bu ifadenin maksimum değeri u 'ya göre türev alıp sıfıra eşitleyerek bulunulabilir. Buradan en verimli bir şekilde pervanenin çalıştığı hız

$$3u^2 - 4uv + v^2 = 0; u = \frac{v}{3}$$

ve maksimum faydalı güç

$$P_{f \text{ mak}} = \frac{4\rho S v^3}{27}$$

olarak bulunur. Suyun tüm gücü suyun birim zamanda aktardığı kinetik enerjisidir.

$$P = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\rho S v^3}{2}$$

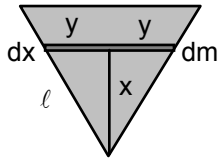
Burada

$$\mu = \rho S v$$

birim zamanda çıkan su kütlesidir. Buradan maksimum verim

$$\eta = \frac{8}{27}$$

olarak bulunur.



4. a) İlk olarak bir eşkenar üçgenin, üçgenin köşesinden geçen eksene göre eylemsizlik momentini bulalım. Şeklin geometrisine göre

$$dJ = \frac{dm(2y)^2}{12} + dmx^2; dm = \frac{m_{\bar{u}}}{\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}} 2y dx$$

$$y = x \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} x; h = \ell \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \ell$$

yazabiliriz. Buradan

$$J = \int_0^h \frac{80m_{\bar{u}} x^3 dx}{27\ell^2} = \frac{5m_{\bar{u}} \ell^2}{12}$$

olarak bulunur. Eşkenar üçgenin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti

$$J = J_0 + m_{\bar{u}} \left(\frac{2h}{3} \right)^2; J_0 = \frac{m_{\bar{u}} \ell^2}{12}$$

olarak bulunur. Altıgenin kütle merkezine göre eylemsizlik momenti

$$J_{00} = 6J = \frac{5m\ell^2}{12}; m = 6m_{\bar{u}}$$

altıgenin köşesine göre eylemsizlik momenti

$$J_t = J_{00} + m\ell^2 = \frac{17m\ell^2}{12}$$

olarak bulunur.

b) Altıgen küçük θ açısına saptırılırsa

$$kx \cdot 2\ell = mg \cdot \ell \sin \theta; x = 2\ell \sin \theta$$

yazabiliriz. Buradan yay sabiti

$$k = \frac{mg}{4\ell}$$

olarak bulunur.

c) Titreşim denklemi

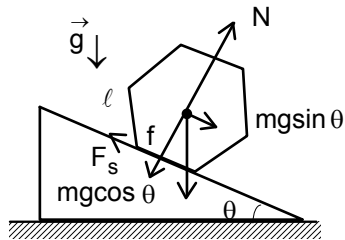
$$J_{00} \alpha = -kx \cdot \ell; x = \ell \sin \theta \approx \ell \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{12k}{5m} \theta = 0$$

olarak yazılabilir. Buradan titreşim frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega^2 = \frac{12k}{5m}; T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{5m}{12k}}$$

olarak bulunur.



d) Altıgenin kuvvet dengesinden

$$mg \sin \theta = F_s = fN$$

moment dengesinden

$$N \cdot \frac{\ell}{2} + mg \sin \theta \cdot h = mg \cos \theta \cdot \frac{\ell}{2}$$

yazabiliriz. Buradan

$$N = mg(\cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta)$$

$$f = \frac{\tan \theta}{1 - \sqrt{3} \tan \theta}$$

olarak bulunur.

5. a) Sistemin enerjisi için

$$W=K+\Pi=\frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} + \frac{\chi\theta^2}{2}; \theta=\theta_1+\theta_2$$

Açısal momentumun korunumu yasasından

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2$$

$$J_1\theta_1=J_2\theta_2$$

yazılabilir. Buradan

$$W=K+\Pi=\frac{J_1\omega_1^2}{2} + \frac{J_1^2\omega_1^2}{2J_2} + \frac{\chi\left(\theta_1 + \frac{J_1\theta_1}{J_2}\right)^2}{2} = \frac{J_1(J_1+J_2)}{J_2} \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\chi(J_1+J_2)^2}{J_2^2} \frac{\theta_1^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Titreşimin açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega = \sqrt{\frac{\chi(J_1+J_2)}{J_1J_2}}, T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_1J_2}{\chi(J_1+J_2)}}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca dinamik yöntemi ile varabiliriz. Disklerden birisinin hareketi için

$$J_2\alpha_2 = -\chi\theta; \theta=\theta_1+\theta_2$$

Açısal momentumun korunumu yasasından

$$J_1\omega_1=J_2\omega_2$$

$$J_1\theta_1=J_2\theta_2$$

yazılabilir. Buradan

$$J_2\alpha_2 = -\frac{\chi(J_1+J_2)\theta_2}{J_1}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\chi(J_1+J_2)\theta_2}{J_1J_2} = 0$$

yazabiliriz. Yani aynı sonuç çıkar.

b) Her bir diskin hareketi için

$$J_1\alpha_1 = -\chi_1\theta$$

$$J_2\alpha_2 = -\chi_2\theta$$

yazabiliriz. Buradan her sistemin titreşim açısal frekansı için

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\chi_1}{J_1}}; \Omega_2 = \sqrt{\frac{\chi_2}{J_2}}$$

bulunur. Buradan burkulma katsayıları

$$\chi_1 = J_1\Omega_1^2; \chi_2 = J_2\Omega_2^2$$

olarak bulunur. İki sarkaç bir cisim gibi hareket ederse sistemin eylemsizlik momenti

$$J = J_1 + J_2$$

burkulma katsayısı

$$\chi = \chi_1 + \chi_2$$

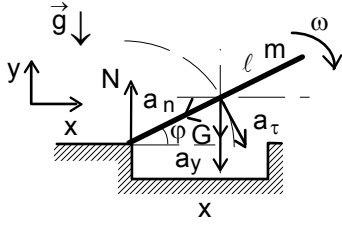
olur. Buradan sistemin hareket denklemini

$$J\alpha = -\chi\theta$$

olur. Buradan sistemin titreşim açısal frekansı

$$\Omega = \sqrt{\frac{\chi}{J}} = \sqrt{\frac{J_1\Omega_1^2 + J_2\Omega_2^2}{J_1 + J_2}}$$

olarak bulunur.



6. Hareket süresince çubuk için düşey yönde öteleme ve dönme hareketi denklemlerinin yazabiliriz.

$$mg - N = ma_y; \quad mg \frac{l}{2} \cos \varphi = J\alpha; \quad J = \frac{ml^2}{3}$$

Buradan açısal ivme ve teğetsel ivme

$$\alpha = \frac{3g \cos \varphi}{2l}; \quad a_\tau = \alpha \frac{l}{2} = \frac{3g \cos \varphi}{4}$$

olarak bulunur. Enerji korunumu yasasından çubuğun açısal hızı

$$mg l \sin \theta = mg l \sin \varphi + \frac{J\omega^2}{2}; \quad \omega^2 = \frac{3g(\sin \theta - \sin \varphi)}{2l}$$

olarak bulunur. Kütle merkezinin merkezci ivmesi

$$a_n = \omega^2 \frac{l}{2} = \frac{3g(\sin \theta - \sin \varphi)}{4}$$

olur. Dikey yöndeki ivme

$$a_y = a_n \sin \varphi + a_\tau \cos \varphi = \frac{3g(\sin \theta - \sin \varphi) \sin \varphi}{4} + \frac{3g \cos^2 \varphi}{4}$$

olarak yazılabilir. Dikey yöndeki denklemden

$$N = mg - ma_y = mg - \frac{3mg(\sin \theta - \sin \varphi) \sin \varphi}{4} + \frac{3mg \cos^2 \varphi}{4}$$

olur. $\varphi = 0^\circ$ için $N = \frac{mg}{4}$ olur. Enerji korunumu yasasından çubuğun yare çarparken ki açısal hızı

$$mg l \sin \theta = \frac{J\omega^2}{2}; \quad \omega^2 = \frac{3g \sin \theta}{2l}$$

bu andaki momentum için

$$p = mv = \frac{m\omega l}{2}$$

bu andaki açısal momentum için

$$L = J\omega = px$$

yazabiliriz. Buradan aranan uzaklık

$$\frac{m\omega l}{2} x = \frac{m l^2}{3} \omega; \quad x = \frac{2l}{3}$$

olarak bulunur.

7. 1-2 proses için ideal gaz hal denklemini yazalım.

$$P_1 V_1 = RT_1 = PV; \quad P = \frac{RT_1}{V}$$

Bu durumda sisteme verilen ısı yapılan işe eşittir.

$$Q_1 = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1 dV}{V} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

olarak bulunur. Sistemin verdiği ısı ve yapılan iş

$$Q_2 = c_p(T_1 - T_2) = \frac{\gamma R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}; \quad A = Q_1 - Q_2 = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{\gamma R(T_1 - T_2)}{\gamma - 1}$$

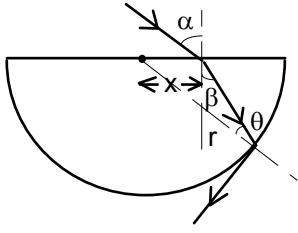
olarak bulunur. 2-3 proses için ve 3-1 proses için

$$\frac{V_2}{T_1} = \frac{V_3}{T_2}; \quad V_3 T_2^{\gamma-1} = V_1 T_1^{\gamma-1}; \quad \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

olarak bulunur. Prosesin verimi

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1 \ln \frac{T_1}{T_2}}$$

olarak bulunur.



8. Düzlemsel yüzeyden kırılma yasasından

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n; \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

küresel yüzeyden kırılma yasasından

$$\frac{\sin \theta}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{n}$$

olarak bulunur. Sinüs teoreminden

$$\frac{x}{\sin \theta} = \frac{r}{\sin(90^\circ + \beta)}$$

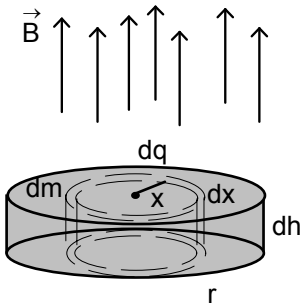
$$x = \frac{r}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

olarak bulunur. $x < r$ olmalıdır. Buradan ışının dışarı çıkmasının mümkün olduğu şart

$$1 < n^2 - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha < \sqrt{n^2 - 1}$$

olarak bulunur.



9. Belirli yükseklikte r yarıçapında ve dh yüksekliğinde bir disk ve bu diskte yarıçapı $x < r$ ve genişliği dx olan bir halka seçtiğimizde bu halkanın alanı

$$dS = 2\pi x dx$$

yükü

$$dq = \rho dS dh = 2\rho \pi x dx dh$$

kütlesi

$$dm = \frac{m}{\pi R^2 H} dS dh = \frac{6m x dx dh}{R^2 H}$$

olur. Yarıçapı x olan daire içinde manyetik alanın değişimi sonucu bir e.m.k. indükte ediliyor. Bu indükte edilmiş e.m.k. rotasyonel elektrik alan yaratmaktadır. Rotasyonel elektrik alan diskin dönmesini sağlamaktadır. İndükte edilmiş e.m.k.

$$\mathcal{E}_{in} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(\pi x^2 B)}{dt} = -\pi x^2 \frac{dB}{dt}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$\mathcal{E}_{in} = E \cdot 2\pi r$$

olur. Buradan rotasyonel elektrik alan

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

bu alanın yarattığı moment

$$dM = dF \cdot x = dq \cdot E \cdot x = \rho \pi x^3 dx dh \frac{dB}{dt}$$

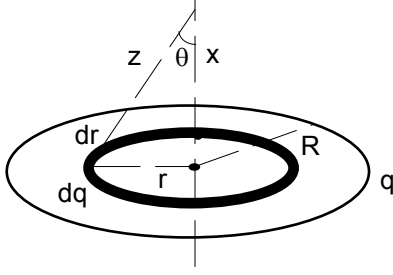
olur. Bu momentin etkisi ile halka dönmektedir. Bu durumda

$$dM = dJ \alpha = dm x^2 \alpha = \frac{6m x^3 dx dh}{R^2 H} \frac{d\omega}{dt}$$

olur. Buradan kazanılan açısal

$$\omega = \frac{\rho \pi R^2 H B}{6m}$$

olarak bulunur.



10. Plaka üzerinde yarıçapı r, kalınlığı dr olan ince kabuklu bir silindir seçelim. Bu silindirin tabanının alanı

$$dS=2\pi r dr$$

yükü de

$$dq = \frac{q dS}{\pi R^2} = \sigma 2\pi r dr$$

olur. Bu seçilen yüzey plakanın merkezinden x uzaklıkta elektrik alan

$$dE_x = dE \cos\theta = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{x}{z} = \frac{\sigma x r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{(x^2 + r^2)^3}}$$

olur. Tüm plakanın bu noktada oluşturduğu elektrik alan

$$E_x = \int_0^R \frac{\sigma x r dr}{2\epsilon_0 \sqrt{(x^2 + r^2)^3}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right)$$

olarak bulunur. İki plakanın oluşturduğu bileşke elektrik alan

$$\begin{aligned} E &= E_{x+} - E_{x-} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{x+h}{\sqrt{(x+h)^2 + R^2}} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x+h}{\sqrt{(x+h)^2 + R^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x+h}{\sqrt{x^2 + R^2} \sqrt{1 + \frac{2xh}{x^2 + R^2}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\frac{x+h}{\sqrt{x^2 + R^2} \left(1 + \frac{xh}{x^2 + R^2} \right)} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{x+h}{\sqrt{x^2 + R^2}} \left(1 - \frac{xh}{x^2 + R^2} \right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right] = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{h(x^2 + R^2 - x^2)}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{hR^2}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.