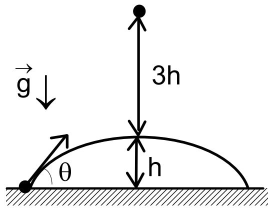
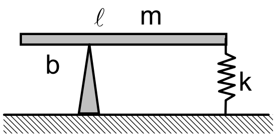
EYLÜL KAMPI SINAVI-2001 II. GRUP



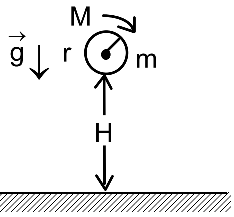
1. Noktasal bir cisim v hızıyla ve yerle θ açısı yapacak şekilde atılıyor. Aynı anda başka bir cisim de, yerden atılan cismin ulaşabileceği maksimum h yüksekliğinden 3h daha yüksekte bulunan bir noktadan serbest bırakılıyor. Bu iki cismin hareketi sırasında aralarındaki uzaklık ne kadar zaman sonra minimum olur? Yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.

2. Silindirik bir bardağın yarıçapı r=6 cm, yüksekliği H=20 cm, toplam kütlesi m=200 gr dır. Bardağın tabanının kütlesi toplam kütlesinin 1/4'ü kadardır. Bu bardağın içine su konulmakta ve hareket halindeki bir arabada servis masası üzerinde durmaktadır. Arabanın ivmelenmesi sırasında bardağın devrilmesi olasılığının en az olması için bardağa konulacak suyun yüksekliği ne kadar olmalıdır?

Not: Sıvının şekli bozulmamaktadır.



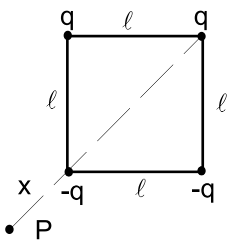
3. Uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan bir çubuğun bir ucuna yay sabitli k olan bir yay bağlanmakta ve çubuk bir destek üzerine konulmaktadır. Sistem dengede iken çubuk yatay konumundadır. Destekten çubuğun diğer ucuna olan b uzunluğu çubuğun toplum boyunun kaçta kaçı olmalı ki çubuğun titreşim periyodu maksimum olsun?



4. H yükseklikte bulunan, kütlesi m ve yarıçapı r<<H olan bir diske sabit M momenti uygulanmaya başladığında disk serbest bırakılıyor. Disk yolun çeyreği kadar düştüğünde M momenti sıfırlanıyor. Disk yere düşene kadar yaptığı devir sayısı nedir?

5. Aynı doğrultu üzerinde olmayan P_1, P_2 ve P_3 noktalarında kütleleri m_1, m_2 ve m_3 cisimleri bulunmaktadır. Bu kütleler birbiriyle sadece gravitasyonel olarak etkileşmekte olup, başka hiçbir cisimle etkileşmemektedirler. Bu sistem kütle merkezinden geçen ve $P_1P_2P_3$ üçgenine dik olan eksene göre dönebilmektedir. Kütleler arasındaki uzaklık $P_1P_2=a_{12}$, $P_2P_3=a_{23}$, $P_1P_3=a_{13}$ ve sistemin kütle merkezine göre açısal hızı ne kadar olmalıdırlar ki sistemin oluşturduğu üçgen şekli hareket sırasında değişmesin? Başka bir değişle hangi koşullar sağlanırsa sistem kütle merkezinden geçen eksen etrafında bir katı cisim gibi döner?

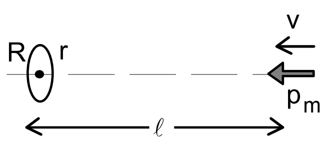
6. Kütleleri eşit iki tane aynı uzay aracı bir halatla birbirine bağlanmış olup T_0 periyoduyla Dünya etrafında dönmektedir. Bu sistemin denge konumlarını ve bu denge durumun etrafında yaptıkları titreşimin periyodu nedir?



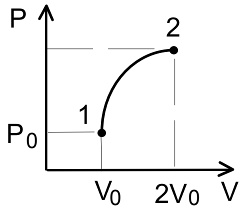
7. Kenarı ℓ olan karenin köşelerinde q, q, -q ve –q yükleri yerleştirilmiştir. Köşegen boyunca yüklerin P noktasında oluşturduğu elektrik alanın büyüklüğünü ve yönünü aşağıdaki durumlar için bulunuz.

a) P noktasının -q yüküne olan uzaklığı $x=0{,}5\ell$

b) P noktasının -q yüküne olan uzaklığı $x>>\ell$



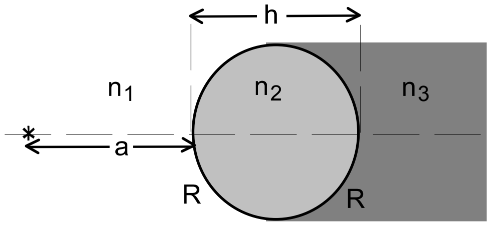
8. Yarıçapı r ve direnci R olan bir halkaya, halkanın ekseni boyunca manyetik dipol momenti p_m olan bir manyetik dipol v hızıyla yaklaşmaktadır. Dipol ile halka arasındaki uzaklık $\ell>>r$ olduğu bir anda halkaya etki eden kuvvet nedir?



9. Bir mol diatomik ideal gazın P-V diyagramı şekildeki gibi veriliyor. Gazın bu süreç boyunca yaptığı iş, aldığı ısı, ve entropisindeki değişimi hesaplayınız. Sürecin analitik ifadesi

$$\left(\frac{P-P_0}{P_0}\right)^2 - \frac{V-V_0}{V_0} = 0$$

olarak veriliyor.



10. Şekilde gösterilen h=2 cm kalınlığındaki merceğin iki yüzü de dışbükey ve eğrilik yarıçapı R=1 cm dir. Merceğin solundaki n_1=1 olan ortamda mercekten 10 cm uzaktaki O noktasına bir cisim konulmuştur. Merceğin kırıcılık indisi n_2=1,5, merceğin sağındaki ortamınki ise n_3=2 dir. Merceğin sağ tarafına nasıl bir ayna ve cisimden ne kadar uzağa konulursa bu optik sistemin verdiği son görüntü cisimle aynı noktada oluşur? Görüntünün özelliklerini araştırınız.

EYLÜL KAMPI SINAVI-2001 II. GRUBUN SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. Yerden fırlatılan cismin ilk hızın bileşenleri

$$v_{0x}=v_0\cos\theta;\ v_{0y}=v_0\sin\theta$$

cisimlerin hareket yasaları

$$x=v_{0x}t;\ y_1=v_{0y}t-\frac{gt^2}{2};\ y_2=4h-\frac{gt^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Eğik atılan cismin menzili

$$\ell=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$$

ise iki cisim arasındaki uzaklık

$$L=\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-x\right)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}-v_0t\cos\theta\right)^2+(4h-v_0t\sin\theta)^2}$$

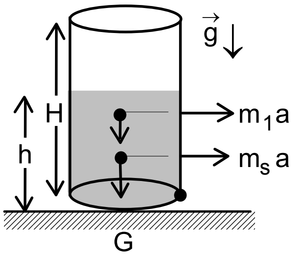
olur. Bu ifadenin türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{v_0^2\sin\theta\cos^2\theta}{g}-v_0t\cos^2\theta+4h\sin\theta-v_0t\sin^2\theta=0$$

Buradan

$$t=\frac{v_0\sin\theta\cos^2\theta}{g}+\frac{4h\sin\theta}{v_0}=\frac{v_0\sin\theta(1+\sin^2\theta)}{g};\ h=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

olarak bulunur.



2. Bardağın dikey kısmının kütlesi $m_1=\frac{3m}{4}$, tabanın kütlesi $m_2=\frac{m}{4}$ dökülen suyun kütlesi

$$m_s=\rho\pi r^2h$$

olsun. Araba a ivmesi ile hareket ederse devrilme şartı

$$(m+m_s)g.r=m_1a.\frac{H}{2}+m_sa.\frac{h}{2}$$

olarak yazabiliriz. Buradan ivme

$$a=\frac{(m+\rho\pi r^2h)gr}{\frac{3mH}{8}+\frac{\rho\pi r^2h^2}{2}}$$

olarak bulunur. Bu ivmenin h göre türevi sıfır ise bardağın devrilmesi olasılığı en küçük olur. Buradan h

$$\frac{da}{dh}=0;\ \frac{\rho\pi r^3h^2}{2}+mrh-\frac{3mHr}{8}=0;\ 32{,}4h^2+1{,}2h-0{,}09=0;\ h=0{,}037\ \text{m}$$

olarak bulunur.

3. Çubuğu yatay dengesi için

$$mg\left(\frac{\ell}{2}-b\right)=(kx_0).(\ell-b)$$

yazabiliriz. Hareketin başlaması ile çubuğa etki eden moment için

$$J\alpha=(mg\cos\theta).\left(\frac{\ell}{2}-b\right)-k(x_0+x).(\ell-b)$$

$$J=J_0+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2;\ J_0=\frac{m\ell^2}{12};\ x\approx(\ell-b)\theta;\ \cos\theta\approx1$$

yazabiliriz. Buradan titreşim denklemi

$$\ddot{\theta}+\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}\theta=0$$

titreşimin frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega=\sqrt{\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}}\ ; \qquad T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}{k(\ell-b)^2}}$$

olarak bulunur. Titreşim periyodun minimum olması için şart

$$\frac{d}{db}\frac{k(\ell-b)^2}{\frac{m\ell^2}{12}+m\left(\frac{\ell}{2}-b\right)^2}=0;\ b=\frac{\ell}{3}$$

olarak bulunur.

4. Sabit M momenti ile disk dönmeye başlıyor. Diskin döndüğü açısal ivme

$$M=J\alpha,\ J=\frac{mr^2}{2}\ ;\ \alpha=\frac{2M}{mr^2}$$

olarak bulunur. Disk yolun çeyreğini aldığı süre ve diskin döndüğü açı

$$\frac{H}{4}=\frac{gt_1^2}{2}\ ;\ t_1=\sqrt{\frac{H}{2g}}\ ;\ \varphi_1=\frac{\alpha t^2}{2}=\frac{MH}{2mgr^2}$$

kazandığı açısal hız $\omega=\alpha t$ olarak bulunur. Disk tüm yolu

$$H=\frac{gt^2}{2}\ ;\ t=\sqrt{\frac{2H}{g}}$$

sürede alır. Momentin sıfırlamasından sonra disk düşene kadar geçen süre

$$t_2=t-t_1=\sqrt{\frac{H}{2g}}$$

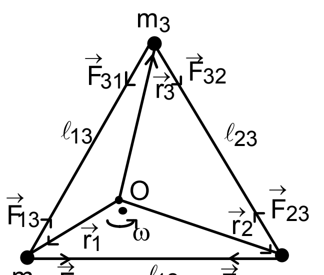
olur. Bu sürede diskin döndüğü açı

$$\varphi_2=\omega t_2=\alpha t_1 t_2=\frac{MH}{mgr^2}$$

olarak bulunur. Disk tüm yolu boyunca döndüğü devir sayısı

$$N=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2\pi}=\frac{3MH}{4\pi mgr^2}$$

olarak bulunur.



5. Soruyu çözmek için vektörlerle çalışmalıyız. Kütle merkezine göre

$$m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3=0$$

olur. Her hangi bir yıldızın hareketini inceleyebiliriz. Mesela m_1 kütleli cisim için

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}=-m_1\omega^2\vec{r}_1;\ \vec{F}_{12}=\frac{\gamma m_1 m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\ell_{12}^3}$$

$$\vec{F}_{13}=\frac{\gamma m_1 m_2(\vec{r}_3-\vec{r}_1)}{\ell_{13}^3}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{\gamma m_1 m_2(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\ell_{12}^3}+\frac{\gamma m_1 m_2(\vec{r}_3-\vec{r}_1)}{\ell_{13}^3}=-\,m_1\omega^2\vec{r}_1$$

olarak yazılabilir. Kütle merkezinin korunmasından

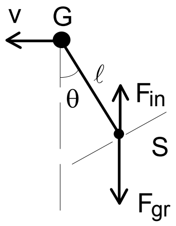
$$\vec{r}_2=-\frac{m_1\vec{r}_1+m_3\vec{r}_3}{m_2}$$

$$\vec{r}_1\left(m_1\omega^2-\frac{\gamma m_1 m_2}{\ell_{12}^3}-\frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{13}^3}T_{13}-\frac{\gamma m_1^2}{\ell_{12}^3}\right)+\vec{r}_3\left(\frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{12}^3}-\frac{\gamma m_1 m_3}{\ell_{23}^3}\right)=0$$

yazabiliriz. Bu ifadenin sıfır verebilmesi için katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan

$$\ell_{12}=\ell_{13};\ \omega^2=\frac{\gamma(m_1+m_2+m_3)}{\ell^3}$$

olarak bulunur.



6. İki uzay aracın kütle merkezi Dünyanın etrafında hareket ederken açısal hız ve kuvvet için

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0};\ m\omega_0^2 r=\frac{\gamma\ mm_D}{r^2}=F_{gr}$$

yazabiliriz. Burada m bir uzay aracın kütlesidir. İki uzay aracı birleştiren halatın uzunluğu 2ℓ olsun. Her araç ana yörüngeden $\ell\cos\theta$ kadar uzakta uydu için

$$J\alpha=m\ell^2\ddot{\theta}=-\left(\frac{\gamma\ mm_D}{(r-\ell\cos\theta)^2}-m\omega_0^2(r-\ell\cos\theta)\right)\sin\theta.\ell$$

$$\ell\ddot{\theta}=-\left[\omega_0^2 r\left(1+\frac{2\ell\cos\theta}{r}\right)-\omega_0^2 r\left(1-\frac{\ell\cos\theta}{r}\right)\right]\sin\theta$$

$$\ddot{\theta}+3\omega_0^2\cos\theta\sin\theta=0$$

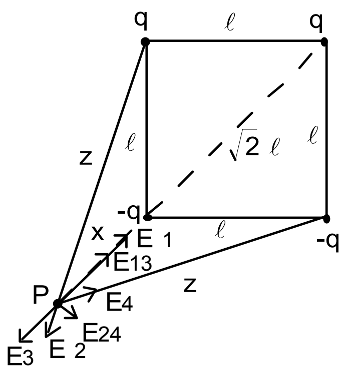
yazabiliriz. Küçük titreşimler için denkleminde $\cos\theta=1$; $\sin\theta=\theta$ olarak alınılabilir. Buradan titreşim denklemi

$$\ddot{\theta}+3\omega_0^2\theta=0$$

olur. Titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega=\sqrt{3}\ \omega_0;\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\sqrt{3}\ T_0}{3}$$

olarak bulunur.



7. a) P noktasındaki elektrik alan dört yükün elektrik alanların bileşkesidir.

$$z=\sqrt{\ell^2+(0,5\ell)^2+2\ell.0,5\ell\cos 45^o}=1,4\ell$$

dersek

$$E_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ (0,5\ell)^2}=4E;\ E_3=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ (\sqrt{2}\ell+0,5\ell)^2}=0,27E$$

$$E_2=E_4=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ z^2}=0,5E$$

olarak yazabiliriz. Köşegen boyunca bileşke elektrik alan

$$E_{13}=E_1-E_3=3,73E$$

köşegene dik olan bileşke elektrik alan

$$E_{24}=2E_2\cos\theta;\ \cos\theta=\frac{\frac{\sqrt{2}\ \ell}{2}}{z}=0,5;\ E_2=0,5E$$

ve toplam bileşke elektrik alanı

$$E_P=\sqrt{E_{13}^2+E_{24}^2}=3,76E=\frac{3,76q}{4\pi\ \varepsilon_0\ell^2}$$

olarak bulunur.

b) P noktasındaki elektrik alan iki dipolden meydana geldiğini kabul edebiliriz. Köşegen boyunca bileşke elektrik alan

$$E_{13}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\ (x+\sqrt{2}\ \ell)^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2\left(1+\frac{2\sqrt{2}\ \ell}{x}+\frac{2\ell^2}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}\ \ell}{x}\right)=\frac{2\sqrt{2}\ q\ell}{4\pi\varepsilon_0 x^3}$$

köşegene dik olan bileşke elektrik alan

$$E_{24}=2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}\ \ell}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}\ \ell}{2}\right)^2\right]}\cos\theta\approx\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}\,\ell}{2}\right)^2}} \approx \frac{\sqrt{2}\,\ell}{2x}\ ;\ E_{24}=\frac{\sqrt{2}\,q\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

toplam bileşke elektrik alan

$$E_P=\sqrt{E_{13}^{\,2}+E_{24}^{\,2}}=\frac{\sqrt{10}\,q\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

olarak bulunur. x>>ℓ olduğu durumda ikinci bir çözüm de yapabiliriz. Köşeleri birleştiren köşegenleri uzunlukları $\sqrt{2}\,\ell$ ve dipol momentleri

$$p_e=q\sqrt{2}\,\ell$$

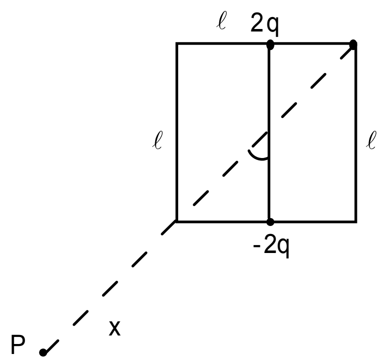
iki elektrik dipol ele alalım. Bu elektrik dipollerin elektrik alanları

$$E_1=\frac{2p}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}\ ;\ E_2=\frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

olup P noktasında birbirine diktir. Bileşke elektrik alan

$$E_P=\sqrt{E_1^{\,2}+E_2^{\,2}}=\frac{\sqrt{10}\,q\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

olarak bulunur.



Diğer taraftan P noktasındaki elektrik alan yükleri 2q ve -2q ve aralarındaki uzaklık ℓ olan bir Dipolden kaynaklandığını kabul edebiliriz. Bu durumda elektrik alan

$$E=\frac{(2q\ell)\sqrt{1+3\cos^2 45^o}}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

olarak yazılabilir. Buradan aynı

$$E=\frac{\sqrt{10}\,q\ell}{4\pi\,\varepsilon_0 x^3}$$

sonuç çıkar.

8. Manyetik dipol momentin oluşturduğu manyetik alan

$$B=\frac{2\mu_0 p_m}{4\pi\,\ell^3}$$

olur. Halkada oluşan indüksion e.m.k.

$$\varepsilon_{in}=-\frac{d\Phi_B}{dt}=-\frac{dB}{dt}S=-\frac{dB}{d\ell}\frac{d\ell}{dt}S=-\frac{6\mu_0 p_m \pi r^2 v}{4\pi\,\ell^4}$$

halkanın direnci R ise halkada akan akım

$$I=\frac{\varepsilon_{in}}{R}=\frac{6\mu_0 p_m \pi r^2 v}{4\pi\,\ell^4 R}$$

bir dipol manyetik momenti oluşturmaktadır.

$$p_{mh}=IS=\frac{6\mu_0 p_m \pi^2 r^4 v}{4\pi\,\ell^4 R}$$

Gradienti olan manyetik alanlarda dipole etki eden manyetik kuvvet

$$F_m=p_{mh}\frac{\partial B}{\partial \ell}=-\frac{6\mu_0 p_m \pi^2 r^4 v}{4\pi\,\ell^4 R}\frac{6\mu_0 p_m}{4\pi\,\ell^4}=-\frac{9\mu_0^{\,2} p_m^{\,2} r^4 v}{4\ell^8 R}$$

olarak bulunur.

9. Basıncın hacme göre ifadesi

$$P=P_0\left(1+\sqrt{\frac{V}{V_0}-1}\right)$$

olarak yazılabilir. Genleşme sürecinde yapılan iş

$$A=\int_{V_0}^{2V_{10}} PdV = P_0\int_{V_0}^{2V_0}\left(1+\sqrt{\frac{V}{V_0}-1}\right)dV = P_0\,V\Big|_{V_0}^{2V_0}+\frac{2P_0V_0}{3}\left(\frac{V}{V_0}-1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{V_0}^{2V_0}=\frac{5P_0V_0}{3}$$

olarak bulunur. Her durum için ideal gaz hal denkleminden

$$P_1V_1=P_0V_0=RT_0;\ P_2V_2=RT_2;\ P_0\left(1+\sqrt{\frac{2V_0}{V_0}-1}\right).2V_0=4P_0VP_0=4RT_0;\ T_2=4T_0$$

olarak bulunur. Gazın iç enerji değişimi

$$U_{12}=nc_V(T_2-T_1)=\frac{5R}{2}(4T_0-T_0)$$

gaza verilen ısı

$$Q=A+U=\frac{55P_0V_0}{6}$$

olarak bulunur. Proseste entropi değişimi

$$\Delta\Sigma=\int\frac{\delta Q}{T}=\int\frac{PdV+c_VdT}{T}=\int_{V_0}^{2V_0}\frac{RdV}{V}+\int_{T_0}^{4T_0}\frac{5RdT}{2T}=R\ln 2+\frac{5R}{2}\ln 4=6R\ln 2$$

olarak bulunur.

10. Birinci kırılma yüzeyi için

$$\frac{n_1}{a_1}+\frac{n_2}{b_1}=\frac{n_2\text{-}n_1}{R};\quad \frac{1}{10}+\frac{1{,}5}{b_1}=\frac{1{,}5\text{-}1}{1};\ b_1=3{,}75\ \text{cm}$$

yazabiliriz. (+) işareti görüntünün sol yüzeyin sağ tarafında olduğunu göstermektedir. Bu görüntü sağ yüzeye göre cisim gibi davranmaktadır. Sağ yüzeye kadar bu cismin uzaklığı

$$a_2=b_1\text{-}2R=3{,}75\text{-}2=1{,}75\ \text{cm}$$

olur. Bu cisim sağ yüzeyin sağ tarafında bulunduğundan dolayı ikinci kırılma yüzeyi için

$$\frac{n_2}{-a_2}+\frac{n_3}{b_2}=\frac{n_3\text{-}n_2}{-R};\quad \frac{1{,}5}{-1{,}75}+\frac{2}{b_2}=\frac{2\text{-}1{,}5}{-1};\ b_2=5{,}6\ \text{cm}$$

yazabiliriz. Bu noktada düz bir ayna, tepe noktası bir çukur ya da tümsek ayna veya merkezi olan bir çukur ayna yerleştirirsek son görüntü cisim ile aynı noktada oluşur.