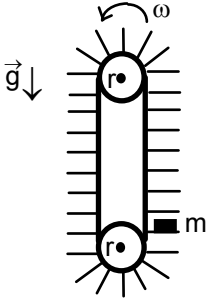
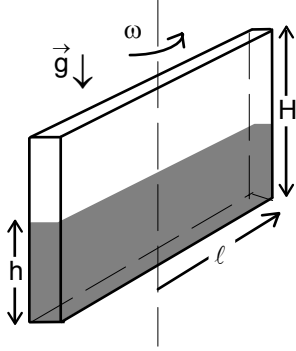


EYLÜL KAMPI SINAVI-1998 II. GRUP



1. Düşey yönde yük taşıyan bir taşıyıcı bant  $\omega$  açısal hızı ile dönen silindir üzerine geçirilmiştir. Bandın taşıyabileceği maksimum kütle  $m_0$  dır. Üstteki silindirin açısal hızı bandın taşıdığı yükün kütlesine bağlı olarak  $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{m}{m_0}\right)$  şeklinde değişmektedir. Eğer hiç kütle olmasaydı silindir  $\omega_0$  açısal hızı ile dönebileceğine göre, taşıyıcı bandı çalıştırabilmek için harcanan maksimum gücü bulunuz. Silindirin yarıçapı  $r$  olarak veriliyor. Bant, hareket sırasında silindirlere göre kaymamaktadır.



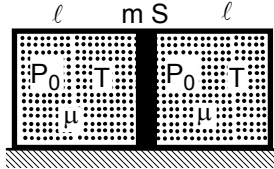
2. Sürtünmesiz yatay düzlem üzerinde bulunan dar, içi boş, uzunluğu  $2\ell$  ve yüksekliği  $H$  olan dikdörtgenler prizmasının içine,  $h$  ( $h < H$ ) yüksekliğinde bir miktar sıvı dolduruluyor. Kap, ortasından geçen düşey eksen etrafında belli bir  $\omega$  açısal hızı ile döndürülüyor.

- Kabın tabanında  $2\xi\ell$  ( $\xi < 1$ ) kadar boşluk oluşması için  $\omega$  açısal hızı ne olmalıdır? Sıvı kabın dışına çıkmamaktadır. Yerçekimi ivmesi  $g$  veriliyor.
- Kap döndürülürken yan yüzeyler üzerinde oluşan basınç kuvveti ilk basınç kuvvetinin kaç katıdır?



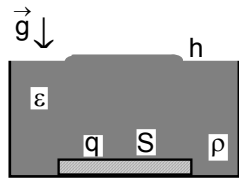
3. Kütleli  $2m$ , boyu  $2\ell$  olan homojen bir çubuk sürtünmesiz yatay bir masa üzerinde durmaktadır. Kütleli  $m$  olan noktasal bir parçacık yatay düzlemde çubuğun ucuna dik yönde  $v_0$  hızı ile çarpıp yapışmaktadır.

- Sistemin çarpışmadan sonraki açısal hızını bulunuz.
- Çarpışmadan ötürü sistemin kinetik enerjisindeki değişme miktarını bulunuz.



4.  $2\ell$  uzunluğunda yatay bir silindir  $S$  kesit alanlı  $m$  kütleli pistonla iki eşit hacimli bölmeye ayrılmıştır. Pistonun her iki tarafında basıncı  $P_0$ , molar kütle  $\mu$ , sıcaklığı  $T$  ve adyabatik katsayısı  $\gamma$  olan gaz bulunmaktadır. İzotermal ve adyabatik proseslerde pistonun yapacağı küçük titreşimlerin titreşim periyodunu bulunuz.

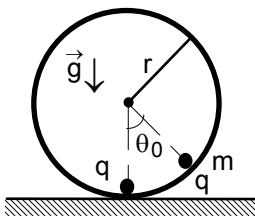
5. İki cismin ısı kapasiteleri  $C_1$  ve  $C_2$  olup birisi  $T_{01}$  diğeri de  $T_{02}$  sıcaklığındadır. Bu iki cisim birbirleriyle temas haline getirilip denge sağlanırsa, bu sistemden alınabilecek maksimum iş nedir? İki cismin ısı kapasiteleri eşit ve  $C$  ise sistemden alınabilecek maksimum iş nedir?



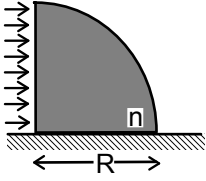
6. Bir kabın dibinde yükü  $q$  ve alanı  $S$  olan bir metal levha bulunmaktadır. Bu kap, özkütlesi  $\rho$  ve bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı  $\epsilon$  olan sıvı ile dolduruluyor. Bu durumda plakanın üzerinde bulunan sıvı normal seviyesinden  $h$  kadar yükseliyor. Bu  $h$  yüksekliğini bulunuz. Yerçekimi ivmesi  $g$  veriliyor.

Not: Kabın tabanının ve levhanın çok uzun olduğunu kabul ediniz.

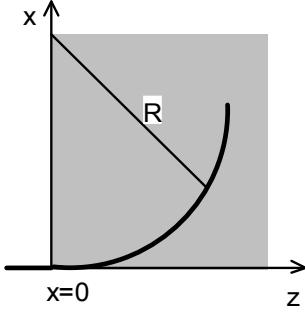
7. Yarıçapı  $R$  olan bir metal küreye yüzeysel yoğunluğu  $\sigma$  olacak şekilde yük veriliyor ve küre geometrik merkezinden geçen eksen etrafında sabit  $\omega$  açısal hızı ile döndürülüyor. Kürenin merkezinde oluşan manyetik alanı ve manyetik dipol momentini bulunuz. Boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısı  $\mu_0$  veriliyor.



8. Yarıçapı  $r$  olan dielektrik içi boş bir kürenin içinde yükleri  $q$  olan iki noktasal cisim bulunmaktadır. Yüklerden birisi kürenin en alt noktasında sabitleştirilmiştir. Kütleli  $m$  olan diğer yük ise kürenin içinde sürtünmesiz olarak hareket edebilmektedir. Bu yükün denge durumundaki açısı  $\theta_0$  olup, bu denge durumunun etrafında yapacağı küçük titreşimlerin titreşim periyodunu bulunuz.



9. Bir silindirin dörtte biri şeklindeki cam prizma yatay bir masa üzerinde bulunmaktadır. Silindirin yarıçapı  $R=5$  cm, camın kırıcılık indisi  $n=1,5$  olarak veriliyor. Bu prizmanın düşey yüzeyi paralel bir ışık demeti ile aydınlatılmaktadır. Prizmanın sağ tarafında masa üzerinde aydınlanan bölgenin uzunluğu kaç cm dir?



10. Bir saydam ortamın kırıcılık indisi  $n=n(x)$ , x eksenine boyunca değişmektedir. Böyle bir ortamda x eksenine dik olacak şekilde gelen bir ışın ortamda R yarıçaplı bir yay çizerek hareket etmektedir. Işığın bu ortama girdiği  $x=0$  noktasında kırıcılık indisi  $n_0$  dir.

- Bu ortamın kırıcılık indisi  $n(x)$ 'in ifadesini R ve  $n_0$  cinsinden bulunuz.
- $n_0=1$  ve  $n(x)$ 'in maksimum değerinin  $n_{\text{mak}}=2,5$  olduğunu varsayarsak, ışığın taradığı yay kaç derecedir?

## EYLÜL KAMPI SINAVI-1998 II. GRUBUN SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

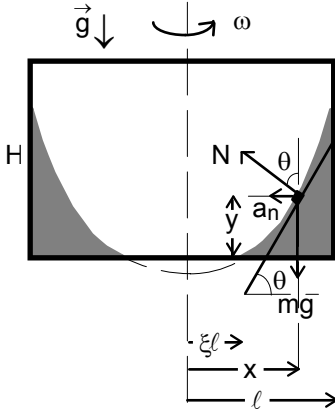
1.  $M=mgr$  momentinin etkisi ile dönen silindirin sarf ettiği gücü açısal hıza bağlı olarak bulabiliriz.

$$P=M\omega=mgr\omega_0\left(1-\frac{m}{m_0}\right)$$

Gücün maksimum değerini bulmak için  $m$  ye göre türev alıp türevi sıfıra eşitleriz.

$$\frac{dP}{dm}=1-\frac{2m}{m_0}=0; m=\frac{m_0}{2}, P_{\text{mak}}=\frac{m_0\omega_0 gr}{4}$$

olarak bulunur.



2. a) Eksenden  $x$  uzaklıkta bulunan küçük bir su kütlesi alıp ikinci Newton yasasını yazabiliriz.

$$N\sin\theta=m\omega^2x; N\cos\theta=mg$$

Burada  $N$  alttaki su tabakasından seçilen su kütlesine etki eden tepki kuvvetidir. Seçilen su kütlesinin bulunduğu yerden geçirilen teğetin eğim açısı için

$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2x}{g}$$

yazabiliriz. Buradan eksenden  $x$  uzaklıkta bulunan su kütlesinin kabın dibinden olan yüksekliği ve sıvının ulaştığı maksimum yükseklik  $x=l$  değeri için

$$\int_0^y dy=y=\int_{\xi\ell}^x \frac{\omega^2x dx}{g}=\frac{\omega^2(x^2-\xi^2\ell^2)}{2g}; y_{\text{mak}}=\frac{\omega^2\ell^2(1-\xi^2)}{2g}$$

bulabiliriz. Sıvının hacmi ve kabın  $b$  genişliği sabit olduğundan dolayı açısal hız

$$V=2\ell hb=2\int_{\xi\ell}^{\ell} by dx=2\int_{\xi\ell}^{\ell} \frac{b\omega^2(x^2-\xi^2\ell^2) dx}{2g}=\frac{b\omega^2\ell^3(1-3\xi^2+2\xi^3)}{6g}; \omega=\frac{1}{\ell}\sqrt{\frac{6gh}{1-3\xi^2+2\xi^3}}$$

olarak bulunur.

b) Sıvı dökülmediği için sıvının ulaştığı maksimum yükseklik

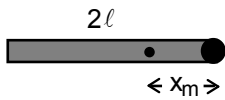
$$y_{\text{mak}}=\frac{\omega^2\ell^2(1-\xi^2)}{2g}=\frac{6gh\ell^2(1-\xi^2)}{(1-3\xi^2+2\xi^3)2g\ell^2}=\frac{3(1-\xi^2)h}{1-3\xi^2+2\xi^3}$$

olur. İlk ve son durumda yan yüzeylere etki eden kuvvetler

$$F_0=P_{\text{ort}}hb=\frac{\rho gh}{2}hb=\frac{\rho gh^2b}{2}; F=\frac{\rho gy_{\text{mak}}^2b}{2}$$

$$\frac{F}{F_0}=\frac{y_{\text{mak}}^2}{h^2}=\frac{\omega^2\ell^2(1-\xi^2)}{2gh^2}=\left(\frac{3(1-\xi^2)}{1-3\xi^2+2\xi^3}\right)^2$$

olarak bulunur.



3. a) Sistemin kütle merkezinin çubuğun sağ ucundan olan uzaklığı

$$x_m=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=\frac{2m\ell+m\cdot 0}{2m+m}=\frac{2\ell}{3}$$

olarak yazılabilir. Sistemin toplam eylemsizlik momenti

$$J=\frac{2m(2\ell)^2}{12}+2m(\ell-x_m)^2+mx_m^2=\frac{4m\ell^2}{3}$$

olarak bulunur. Çarpışma sırasında net dış kuvvet sıfır olduğu için momentumun ve açısal momentumun korunumu yasalarını kullanarak sistemin kütle merkezinin çarpışmadan sonraki  $v$  hızını ve kütle merkezi etrafındaki  $\omega$  açısal hızını bulabiliriz.

$$mv_0=3mv; v=\frac{v_0}{3}; mv_0x_m=J\omega; \omega=\frac{v_0}{2\ell}$$

b) Çarpışma esnek olmadığı için sistemin ilk ve son kinetik enerjileri arasındaki fark açığa çıkan ısıya eşittir. Buradan

$$Q=\frac{mv_0^2}{2}-\frac{3mv^2}{2}-\frac{J\omega^2}{2}=\frac{mv_0^2}{6}$$

olarak bulunur.

#### 4. İzotermal proseste

$$PV=P_0V_0=P_0S\ell=RT=\text{sabit}$$

olur. Her bölmedeki yeni basınçlar

$$P_0V_0=P_0S\ell=P_{1,2}(V_0\pm Sx)=P_{1,2}(S\ell\pm Sx); P_{1,2}=\frac{P_0}{1\pm\frac{x}{\ell}}\approx P_0\left(1\mp\frac{x}{\ell}\right)$$

olarak bulunur. Pistona etki eden kuvvet için

$$F=ma=-(P_1-P_2)S=-\frac{2P_0Sx}{\ell}; \ddot{x}+\frac{2P_0Sx}{m\ell}=0$$

yazabiliriz. Pistonun titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega=\sqrt{\frac{2P_0S}{m\ell}}; T=2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2P_0S}}$$

olarak bulunur. Adyabatik proseste

$$PV^\gamma=P_0V_0^\gamma=P_0(\ell s)^\gamma=\text{sabit}$$

olur. Burada  $\gamma$  adyabatik katsayısıdır. Her bölmede yeni basınçlar

$$P_0V_0^\gamma=P_0(S\ell)^\gamma=P_{1,2}(V_0\pm Sx)^\gamma=P_{1,2}(S\ell\pm Sx)^\gamma; P_{1,2}=\frac{P_0}{\left(1\pm\frac{x}{\ell}\right)^\gamma}\approx P_0\left(1\mp\gamma\frac{x}{\ell}\right)$$

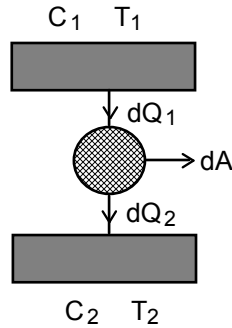
olarak bulunur. Pistona etki eden kuvvet için

$$F=ma=-(P_1-P_2)S=-\frac{2P_0S\gamma x}{\ell}; \ddot{x}+\frac{2P_0S\gamma x}{m\ell}=0$$

yazabiliriz. Pistonun titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega=\sqrt{\frac{2P_0S\gamma}{m\ell}}; T=2\pi\sqrt{\frac{m\ell}{2P_0S\gamma}}$$

olarak bulunur.



5. Isıtıcının ve soğutucunun ısı kapasiteleri sonlu olduklarından bunların sıcaklıkları sürekli olarak değişmektedir. Maksimum işi bulabilmek için ısıtıcıdan sonsuz küçük  $dQ_1$  ısıyı aldığımızda ısı makinesi ile sonsuz küçük  $dA$  işi yapıp soğutucuya sonsuz küçük miktarda  $dQ_2$  ısıyı verdiğimizde ısıtıcının ve soğutucunun sıcaklıkları  $T_1$  ve  $T_2$ 'nin sabit kaldığını kabul edebiliriz. Bu yapılan sonsuz küçük kapalı proseslerin Carnot prosesleri olduğunu kabul edebiliriz. Carnot prosesinin verimi  $\eta$

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

olarak veriliyor. Bu verimi ısıtıcıdan sisteme verilen ısı ve sistemden soğutucuya verilen ısılar cinsinden de yazabiliriz.

$$\eta=\frac{dA}{dQ_1}=\frac{dQ_1-dQ_2}{dQ_1}; \frac{dQ_1}{T_1}=\frac{dQ_2}{T_2}$$

Isıtıcının sıcaklığı sürekli azaldığı için  $dQ_1=-C_1dT_1$ , soğutucunun sıcaklığı sürekli arttığı için  $dQ_2=C_2dT_2$  olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{C_1dT_1}{T_1}+\frac{C_2dT_2}{T_2}=0; \int\frac{C_1dT_1}{T_1}+\int\frac{C_2dT_2}{T_2}=\text{sabit}; T_1^{C_1}T_2^{C_2}=T_{01}^{C_1}T_{02}^{C_2}$$

olarak bulunur. Limit durumda

$$T_1=T_2=T$$

olur. Buradan son sıcaklık

$$T=T_{01}\frac{C_1}{C_1+C_2}T_{02}\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

olarak yazılabilir. Yapılan maksimum iş

$$A_{\text{mak}}=|\Delta Q_1|-|\Delta Q_2|=C_1(T_{01}-T)-C_2(T-T_{02})=C_1T_{01}+C_2T_{02}-(C_1+C_2)T_{01}\frac{C_1}{C_1+C_2}T_{02}\frac{C_2}{C_1+C_2}$$

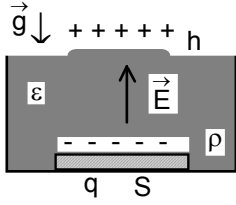
olarak bulunur. İki ısı kapasite eşit ise

$$C_1=C_2=C; T=\sqrt{T_{01}T_{02}}$$

olur. Buradan maksimum iş

$$A_{\text{mak}}=CT_{01}+CT_{02}-2C\sqrt{T_{01}T_{02}}=C(\sqrt{T_{01}}-\sqrt{T_{02}})^2$$

olarak bulunur.



6. Metal levhanın sıvıda yarattığı elektrik alan

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{q}{2\epsilon\epsilon_0 S}$$

olur. İndükte edilmiş dipol moment ve aynı zamanda yüzeysel yük yoğunluğu

$$p_e = \sigma' = \epsilon_0 \alpha E = \epsilon_0 (\epsilon - 1) E = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\epsilon S}$$

olur. İndükte edilmiş yük

$$q' = \sigma' S = \frac{(\epsilon - 1)q}{2\epsilon}$$

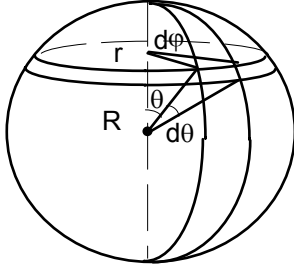
ve bu yüke levhadan etki eden kuvvet

$$q'E = \frac{(\epsilon - 1)q^2}{4\epsilon^2 \epsilon_0 S}$$

basınç kuvvetine eşittir. Buradan yükseklik

$$\rho g h S = q'E = \frac{(\epsilon - 1)q^2}{4\epsilon^2 \epsilon_0 S}; h = \frac{(\epsilon - 1)q^2}{4\epsilon^2 \epsilon_0 S^2 \rho g}$$

olarak bulunur.



7. Kürenin ince halkalara ayrıldığını düşünürsek böyle bir halkanın alanı ve yükü

$$dS = 2\pi r dr = 2\pi R \sin\theta R d\theta$$

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$$

olarak yazılabilir. Dönme sonucu bu halkanın oluşturduğu elektrik akım

$$dI = \frac{dq}{T} = \sigma \omega R^2 \sin\theta d\theta$$

bu akımın kürenin merkezinde oluşturduğu manyetik alan

$$dB = \frac{\mu_0 dI r^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 \sigma \omega R \sin^3\theta d\theta}{2}$$

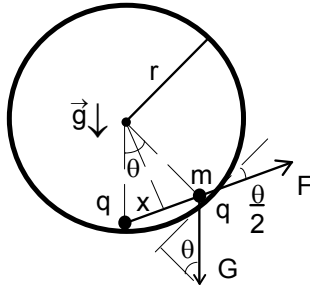
tüm halkaların oluşturduğu manyetik alan

$$B = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \sigma \omega R \sin^3\theta d\theta}{2} = \frac{2\mu_0 \sigma \omega R}{3}$$

olarak bulunur. Bir dipol momentin yarattığı manyetik alan ifadesinden oluşan manyetik dipol momentini

$$B = \frac{2\mu_0 p_m}{4\pi R^3}; p = \frac{4\pi R^4 \sigma \omega}{3}$$

olarak bulunur.



8. Yükün denge durumunu bulmak için teğetsel ve normal koordinatları kullanabiliriz. Teğet eksene göre kuvvetler eşit ve zıt yönlü olmalıdır.

$$mg \sin\theta_0 = F \cos \frac{\theta_0}{2}; F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2}$$

$$x = r \sin \frac{\theta_0}{2}; 2mg \sin \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{q^2 \cos \frac{\theta_0}{2}}{4\pi\epsilon_0 \left(2r \sin \frac{\theta_0}{2}\right)^2}$$

Bu denklemin iki tane çözümü vardır, yani iki tane denge durumu mevcuttur.

$$\cos \frac{\theta_0}{2} = 0; \theta_0 = 180^\circ; \sin \frac{\theta_0}{2} = 1; \sin \frac{\theta_0}{2} = 3 \sqrt{\frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg}}$$

Cisim denge durumundan saparsa titreşimler başlar.

$$\theta = \theta_0 + d\theta = \theta_0 + \varphi; \ddot{\theta} = \ddot{\varphi}; a_\tau = r \ddot{\varphi}$$

$$m a_\tau = mg \sin\theta - \frac{q^2 \cos \frac{\theta}{2}}{16\pi\epsilon_0 r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = - \left( \frac{dF}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0} d\theta = - \left[ mg \cos \theta_0 + \frac{q^2 \left( 2 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}{32\pi\epsilon_0 r^2 \sin^3 \frac{\theta_0}{2}} \right] \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{q^2 \left( 2 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg \sin^3 \frac{\theta_0}{2}} \right] \varphi = 0$$

olarak yazılabilir. İlk çözümde,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r} \left( 1 - \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right) \varphi = 0$$

titreşim açısal frekans ve titreşim periyodu

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r} \left( 1 - \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right)}; T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{r} \left( 1 - \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right)}}$$

olarak bulunur. İkinci çözümde,

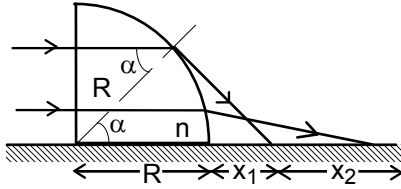
$$\ddot{\varphi} + \frac{mg}{r} \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{q^2 \left( 2 - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right)}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg}} \right] \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{r} \left( 1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \varphi = 0; \ddot{\varphi} + \frac{3g}{r} \left( 1 - 3 \sqrt{\left( \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right)^2} \right) \varphi = 0$$

titreşim açısal frekans ve titreşim periyodu

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{r} \left( 1 - 3 \sqrt{\left( \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right)^2} \right)}; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{r} \left( 1 - 3 \sqrt{\left( \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 r^2 mg} \right)^2} \right)}}$$

olarak bulunur. Aynı sonuç küçük açılarda yapıldığında da elde edilir.



9. Sınır açısı ile düşen bir ışın kırılma yasasını

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\cos \alpha = \frac{R}{R + x_1} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

yazılabilir. Buradan

$$x_1 = \frac{(3\sqrt{5} - 5)R}{5} = \frac{(3\sqrt{5} - 5)5}{5} = 1,7 \text{ cm}$$

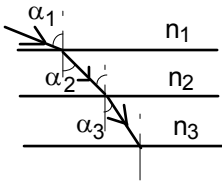
olarak bulunur.  $\alpha$  açısından daha büyük açı ile düşen ışınlar iç yansımaya sonucu masaya düşmeyeceklerdir. Masaya yakın olan ışınlar için prizma düzlem-dışbükey bir mercek gibi davranır.

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R}; f=2R=10 \text{ cm}$$

olarak bulunur. Aydınlik bölgesinin uzunluğu

$$x_2 = f - x_1 = 10 - 1,7 = 8,3 \text{ cm}$$

olarak bulunur.



10. a) Ortamdaki kırıcılık indisi sabit olmadığından dolayı, kırılma yasasını kullanmak için ortamda çok ince tabakalar alabiliriz. Her tabakadaki kırıcılık indisi yaklaşık olarak sabit olur. Kırılan her ışın için

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}; \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_3}{n_2} \dots \frac{\sin \alpha_{k-1}}{\sin \alpha_k} = \frac{n_k}{n_{k-1}}$$

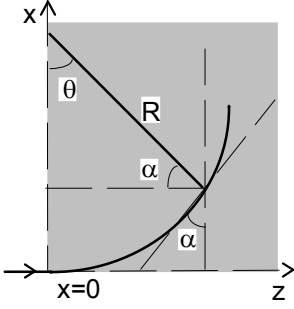
yazabiliriz. Buradan

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_k \sin \alpha_k$$

olarak yazılabilir. Soruda ışının çizdiği yörünge çember olduğu söyleniyor. Kırılma yasasından

$$n_0 \sin 90^\circ = n(x) \sin \alpha; \sin \alpha = \frac{R-x}{R}; n(x) = \frac{R n_0}{R-x}$$

olarak bulunur.



b) Bulduğumuz ifadeyi kullanarak

$$n(x) = \frac{R n_0}{R-x}; 2,5 = \frac{R \cdot 1}{R-x}$$

$$x = 0,6R$$

$$\cos \theta = \frac{R-x}{R} = 0,4; \theta \approx 66^\circ$$

olarak bulunur.