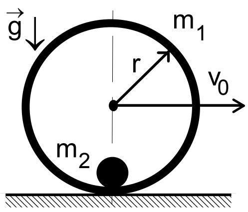
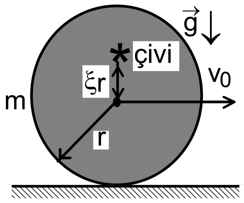
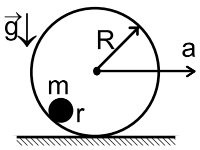
EYLÜL KAMPI SINAVI-1997



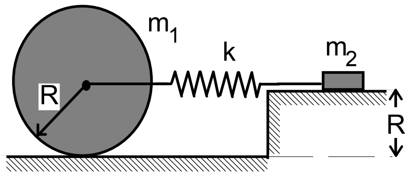
1. Kütlesi m_1 yarıçapı r olan bir halkanın iç tarafına kütlesi m_2 olan noktasal bir cisim sabitleştirilmiştir. Halka yatay düzlem üzerinde kaymadan, sadece yuvarlanarak hareket etmektedir. Noktasal cisim en alt noktada iken halkanın merkezinin öyle bir v_0 hızı vardır ki, m_2 cismi halkanın tepe noktasına geldiğinde halkanın yatay düzlemle teması kesilmektedir. Bu v_0 hızını bulunuz.



2. Yarıçapı r ve kütlesi m olan türdeş bir disk yatay düzlem üzerinde kaymadan yuvarlanarak hareket etmektedir. Diskin merkezinden ξr ($\xi<1$) kadar uzaklıkta bir çivi çakılıdır. Disk dönerek giderken çivi yatay düzlemden $r+\xi r$ kadar yukarıda iken yolu üzerinde bulunan bir engele takılıp orada sabit kalıyor. Bu durumda diskin, çivinin etrafında bir tam devirlik dönme hareketi yaptığı gözleniyor. Bu hareketin olması için minimum v_0 hızı nedir? $\xi=1$ durumu için çözümü irdeleyiniz.



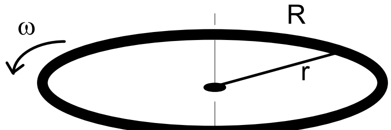
3. Yarıçapı R içi boş bir silindir yatay düzlem üzerinde dönmeden kayarak a ivmesi ile hareket etmektedir. Silindirin iç yüzeyinde yarıçapı r olan küçük bir ikinci silindir kaymadan dönme hareketi yapabilmektedir. Bu küçük silindirin yapacağı titreşim hareketinin periyodunu bulunuz.



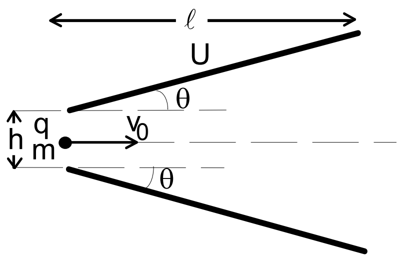
4. Kütlesi m_1, yarıçapı R olan türdeş bir disk, kütlesi m_2 olan bir cisme yay sabiti k olan bir yay ile bağlıdır. Disk bulunduğu yatay düzlem üzerinde kaymadan dönmektedir. m_2 kütleli cisim ise yatay düzlemden R kadar yukarıda ikinci sürtünmesiz bir yatay düzlem üzerinde bulunmaktadır. Bu sistemin yapacağı titreşim hareketinin periyodunu bulunuz.

5. Başlangıçta soğuk ve sıcaklığı T_0 olan bir küresel toz bulutu çekim kuvveti sonucu yoğunlaşmaya uğrayarak bir gezegen meydana gelmektedir. Sıcaklıktaki yükselmenin, gezegenin meydana geldiği maddenin erime T sıcaklığına kadar eriştiğini kabul ederek, oluşan gezegenin yarıçapını bulunuz. Bu durumda radyasyon kayıplarını ihmal edebilirsiniz. Evrensel çekim sabiti γ, maddenin özkütlesi ρ ve özısı kapasitesi c verilmektedir.

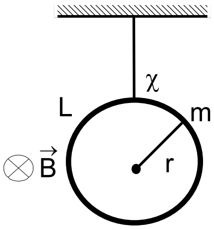
6. Sıcaklığı T olan bir bina, sıcaklığı T_0 olan atmosferi ısı kaynağı olarak kullanan ideal bir ısı pompası tarafından ısıtılmaktadır. Pompa toplam P kadar bir güç harcamakta, fakat bina da bu sırada $\xi(T-T_0)$ kadar ısı kaybetmektedir. Denge durumunda binanın sıcaklığı nedir?



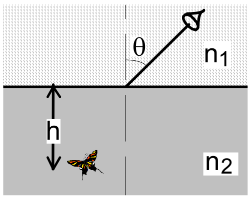
7. Rezistansı R, yarıçapı r olan iletken bir telden yapılmış halka ω açısal hızı ile geometrik ekseni etrafında dönmektedir. Bu halka birden bire durdurulup, üzerinden geçen yük galvanometre ile ölçüldüğünde q değeri bulunmaktadır. Bu verileri kullanarak elektronun yükü e' nin elektronun kütlesi m ye olan oranını bulunuz.



8. U_0 potansiyel farkında kadar hızlandırılan kütleleri m ve yükleri q olan yüklü tanecikler kazandıkları v_0 hızı ile U saptırıcı potansiyel farkı uygulanan bir kondansatörün plakalarının arasına tam geometrik ekseni doğrultusunda giriş yapmaktadırlar. Kondansatörün her bir plakası eksen ile θ açısı yapmakta olup yüklerin giriş yaptıkları yerde plakalar arasındaki uzaklık h tır. Plakalar eksen boyunca ℓ uzunluktadır. Yüklerin kondansatörün içinde uğradıkları sapmayı bulunuz.



9. Kütlesi m ve yarıçapı r olan çember şeklinde iletken bir tel homojen ve yatay yönde uygulanmış B manyetik alanında düşey çap etrafında bir ip sayesinde serbestçe dönebilmektedir. İpin burkulma katsayısı χ, çember telin indüktans katsayısı L olarak veriliyor. Denge konumunda çemberin birim alan vektörü uygulanan manyetik alana paraleldir. Çember telin denge durumu etrafında yaptığı küçük titreşimlerinin titreşim periyodunu bulunuz.



10. Kırıcılık indisi n_2 olan bir ortamda yüzeyden h derinlikte bir kelebek bulunmaktadır. Bu ortamın üzerinde kırıcılık indisi n_1 ($n_1<n_2$) olan ortamda bulunan ve yüzeyin normali ile θ açısı yapacak şekilde bakan bir gözlemci, kelebeği H derinliğinde görmektedir.

a) Kelebeğin gözüktüğü H derinliğinin ifadesini türetiniz.

b) $n_1>n_2$ ve $n_1<n_2$ durumu inceleyiniz.

c) $\frac{n_2}{n_1}=\sqrt{2}$ alarak, $\frac{H}{h}$ oranının θ açısının herhangi bir fonksiyonuna bağlı değişimini inceleyerek kabaca bir grafik çizip yorumlayınız.

EYLÜL KAMPI SINAVI-1997 SORULARIN ÇÖZÜMLERİ

1. Halkanın açısal hızı, cisim en alt noktada iken ω_0, cisim en üst noktada iken ω olsun. Bu iki durum için enerji korunumu yasasını yazabiliriz.

$$\frac{m_1v_0^2}{2}+\frac{J_{01}\omega_0^2}{2}=\frac{m_1v^2}{2}+\frac{J_{01}\omega^2}{2}+\frac{m_2(2v)^2}{2}+m_2g.2r;\ J_{01}=m_1r^2; \qquad v_0=\omega_0r;\ v=\omega r$$

Buradan

$$v^2=\frac{m_1v_0^2-2m_2gr}{m_1+2m_2}$$

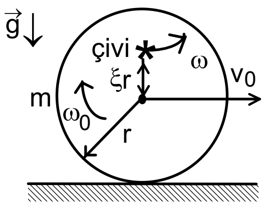
olarak bulunur. Noktasal cisim en üst noktada iken halkanın ve cismin ağırlık kuvveti cismin merkezcil kuvvetini dengelemektedir. Sınır şartını

$$\frac{m_2v^2}{r}=(m_1+m_2)g$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$v_0^2=\left(3+\frac{m_1}{m_2}+\frac{4m_2}{m_1}\right)gr$$

olarak bulunur.



2. Açısal momentumun korunumu yasasını çiviye göre yazabiliriz.

$$mv_0\xi r-J_0\omega_0=J\omega;\ J_0=\frac{mr^2}{2};\ J=J_0+m\xi^2r^{2c};\ v_0=\omega_0r$$

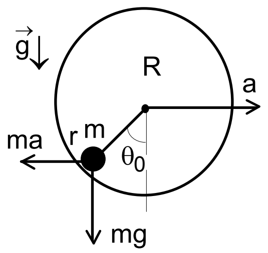
Buradan diskin çiviye göre başlangıçta hangi açısal hızla döndüğünü bulabiliriz.

$$\omega=\frac{2\xi-1}{1+2\xi^2}\frac{v_0}{r}$$

Diskin çiviye çarptıktan sonraki kinetik enerjisi tamamen en üst noktada potansiyel enerjiye dönüşmelidir. Buradan aranan hızı

$$\frac{J\omega^2}{2}=mg.2\xi r;\ v_0^2\geq\frac{1+2\xi^2}{(2\xi-1)^2}8g\xi r$$

olarak bulunur. $\xi=1$ ise $v_0^2\geq 24gr$ olur.



3. İvmeli hareket sonucu küçük silindir belirli bir açıya sapmaktadır. Denge durumu için

$$\tan\theta_0=\frac{ma}{mg}=\frac{a}{g}$$

olarak bulunur. Burada silindire efektif bir ivme etki ettiğini kabul edebiliriz. Bu efektif ivme

$$g_{ef}=\sqrt{g^2+a^2}$$

olur. Silindirin enerjisi

$$W=K+\Pi=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}+mg_{ef}h$$

olarak yazılabilir. Küçük silindirin kütle merkezi v hızı ile hareket etmekte, ve aynı zamanda kendi ekseni etrafında dönmektedir. Küçük silindirin öteleme hareketini θ, dönme hareketi ise φ açısı ile ifade edebiliriz.

$$v=(R-r)\dot{\theta};\ (R-r)\theta=r\varphi;\ \varphi=\frac{(R-r)\theta}{r};\ \dot{\varphi}=\omega=\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}$$

$$J_0=\frac{mr^2}{2};\ h=(R-r)(1-\cos\theta)=(R-r)2\sin^2\frac{\theta}{2}\approx(R-r)\frac{\theta^2}{2}$$

Enerji, titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$W=\frac{3m(R-r)^2}{2}\frac{\dot{\theta}^2}{2}+m\sqrt{g^2+a^2}\,(R-r)\frac{\theta^2}{2};\ \Omega=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\sqrt{a^2+g^2}}{R-r}};\ T=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2\sqrt{a^2+g^2}}}$$

olarak bulunur.

4. Sistemin enerjisi

$$W=K+\Pi=\frac{m_1 v_1^2}{2}+\frac{J_{01}\omega_1^2}{2}+\frac{m_2 v_2^2}{2}+\frac{kx^2}{2}\ ;\ J_{01}=\frac{m\ r^2}{2}\ ;\ \omega_1=\frac{v_1}{r}$$

açısal momentumun korunumu yasası

$$(J_{01}+m_1 r^2)\omega_1=m_2 v_2 r$$

Eylemsizlik momenti merkezi korunumu yasası

$$(J_{01}+m_1 r^2)x_1=m_2 r^2 x_2;\ x=x_1+x_2$$

olarak yazılabilir. Buradan enerji için

$$W=\frac{6m_1m_2+9m_1^2}{4m_2}\frac{v_1^2}{2}+\frac{k(3m_1+2m_2)^2}{4m_2^2}\frac{x_1^2}{2}$$

yazabiliriz. Titreşimin açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega=\sqrt{\frac{k(3m_1+2m_2)}{3m_1m_2}}\ ;\ T=2\pi\sqrt{\frac{3m_1m_2}{k(3m_1+2m_2)}}$$

olarak bulunur.

5. Bir kürenin kütle çekimi potansiyel enerjisini bulmak için kürenin içinde r<R yarıçaplı bir küre alıp kalınlığı dr olan ince küresel bir kabukla etkileşme enerjisini yazarak integre edebiliriz.

$$d\Pi=-\frac{\gamma\, m dm}{r}\ ;\ m=\frac{4\rho\pi\ r^3}{3}\ ;\ dm=4\rho\pi r^2 dr$$

$$d\Pi=-\frac{\gamma\frac{4\rho\pi\ r^3}{3}4\rho\pi\ r^2 dr}{r}=-\frac{\gamma(4\rho\pi)^2\ r^4 dr}{3}$$

$$\Pi=-\frac{\gamma(4\rho\pi)^2}{3}\int_{nR}^{R}r^4 dr=-\frac{\gamma(4\rho\pi)^2}{3}\left(\frac{r^5}{5}\right)_{nR}^{R}=-\left(\frac{3\gamma m^2}{5r}\right)_{nR}^{R}=-\frac{3\gamma m^2}{5}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{nR}\right)\approx\frac{3\gamma m^2}{5R}$$

Burada ilk yarıçap nR'nin çok büyük olduğunu kabul etmekteyiz. Bu enerji ısıya dönüşmektedir.

$$mc\Delta T=\frac{3\gamma m^2}{5R}\ ;\ c\Delta T=\frac{4\gamma\rho\pi R^3}{5}$$

Buradan yarıçap

$$R=\sqrt{\frac{5c\Delta T}{4\pi\gamma\rho}}$$

olarak bulunur.

6. Isı pompasının verimi

$$\eta=\frac{P_f}{P}=1-\frac{T_0}{T}$$

olarak yazılabilir. Burada P_f, pompanın faydalı gücü, P verilen tüm güç, T_0 atmosfer ısı kaynağının sıcaklığı, T ise binanın sıcaklığıdır. Faydalı güç

$$P_f=P\left(1-\frac{T_0}{T}\right)$$

olur. Dinamik denge durumunda verilen faydalı güç ısı kaybının gücüne eşittir.

$$P_f=P\left(1-\frac{T_0}{T}\right)=\xi(T-T_0)$$

Buradan

$$T=\frac{P}{\xi}$$

olarak bulunur.

7. Tel içindeki elektronun hareket denklemi

$$m\frac{dv_d}{dt}+\xi v_d=eE$$

olarak yazılabilir. Burada ξ elektrona eti eden direniş kuvvetini temsil eden bir katsayıdır. Elektron v_d hızı ile hareket ederse ivmesi sıfır olarak kabul edilebilir. Akım yoğunluğu ifadesinden

$$j=en_0v_d=en_0\mu E=\sigma E;\ \sigma=en_0\mu$$

maddenin iletkenliği bulunur. Telde elektrik alan yoksa elektronun hareket denklemi

$$m\frac{dv_d}{dt}+\xi v_d=0;\ \frac{dv_d}{v_d}=-\frac{\xi\,dt}{m};\ \int_{v_0}^{v_d}\frac{dv_d}{v_d}=-\int_0^t\frac{\xi\,dt}{m};\ v_d=v_0\,e^{-\frac{\xi t}{m}}=\omega r\,e^{-\frac{\xi t}{m}}$$

olarak bulunur. Telden geçen yük

$$q=S\int_0^\infty j(t)dt=Sen_0\omega r\int_0^\infty e^{-\frac{\xi t}{m}}dt=\frac{eSn_0\omega rm}{\xi}$$

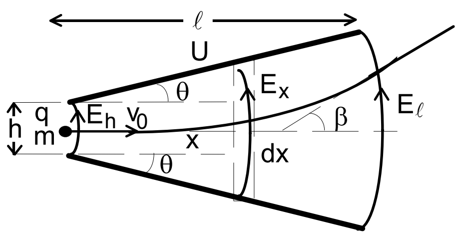
olur. Telin direnci

$$R=\frac{\rho\ell}{S}=\frac{\ell}{\sigma S};\ S=\frac{\ell}{\sigma R};\ \ell=2\pi r$$

ve yük-kütle oranını

$$\frac{e}{m}=\frac{2\pi\omega r^2}{Rq}$$

olarak bulunur.



8. Kondansatörün girişindeki elektrik alan

$$E_h=\frac{U}{h}$$

Kondansatörün çıkışındaki elektrik alan

$$E_\ell=\frac{U}{h+2\ell\tan\theta}$$

Kondansatörün girişinden x uzaklıktaki elektrik alan

$$E_x=\frac{U}{h_x}=\frac{U}{h+2x\tan\theta}=\frac{U}{h\left(1+\frac{2x\tan\theta}{h}\right)}$$

olarak yazılabilir. Yüklü taneciklere etki eden kuvvet

$$qE_x=ma_y$$

düşey yönde

$$a_y=\frac{qU}{mh\left(1+\frac{2x\tan\theta}{h}\right)}$$

ivme kazandırmaktadır. Taneciklerin dx yolu boyunca düşey yöndeki hız değişimi

$$dv_y=a_ydt;\ dt=\frac{dx}{v_0};\ v_0=\sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

olarak yazılabilir. Düşey yönde elektronların kondansatörün içinde kazandıkları hız

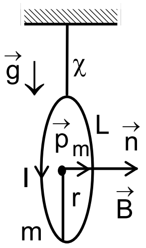
$$v_y=\int_0^\ell\frac{qUdx}{mhv_0\left(1+\frac{2x\tan\theta}{h}\right)}=\frac{qU}{2mv_0\tan\theta}\ln\left(1+\frac{2\ell\tan\theta}{h}\right)$$

olur. Taneciklerin sapması

$$\tan\beta=\frac{v_y}{v_0}=\frac{qU}{2mv_0^2\tan\theta}\ln\left(1+\frac{2\ell\tan\theta}{h}\right)=\frac{U}{4U_0\tan\theta}\ln\left(1+\frac{2\ell\tan\theta}{h}\right)$$

$$\beta=\arctan\left[\frac{U}{4U_0\tan\theta}\ln\left(1+\frac{2\ell\tan\theta}{h}\right)\right]$$

olarak bulunur.



9. Halkanın titreşimi burulmadan ve oluşan manyetik dipol momenti manyetik alanın etkileşmesinden kaynaklanmaktadır. Titreşim esnasında halkada indükte edilmiş akım akmaktadır. İndükte edilmiş e.m.k. ile manyetik akı arasındaki ilişki için

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}.S = -L\frac{dI}{dt};\ BS=LI;\ I=\frac{B\pi r^2}{L}$$

yazabiliriz. Bu ifadeye aslında doğrudan manyetik akı ifadesini kullanarak da ulaşabiliriz. Halkanın dipol momenti

$$\vec{p}_m = IS\vec{n};\ p_m = IS$$

Burada $\vec{n}$, I akımı tarafından çevrelenen kapalı geometrik alana dik olan birim vektördür. Bu dipol momentin yarattığı moment

$$\vec{M}_m = \vec{p}_m \times \vec{B};\ M = p_m B\sin\theta = ISB\sin\theta \approx \frac{B^2\pi^2 r^4\theta}{L}$$

olur. Burkulmadan kaynaklanan moment

$$M_b = \chi\theta$$

şeklinde yazılabilir. Halkanın hareket denklemi

$$J\alpha = -\chi\theta - \frac{B^2\pi^2 r^4\theta}{L}$$

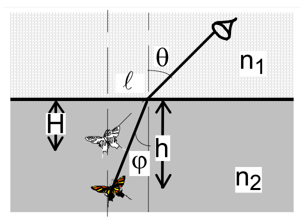
olarak yazılabilir. Halkayı, geometrik merkezinden geçen düşey eksene göre iki yarı halkaya ayırırsak her bir yarı halkanın eylemsizlik momenti $\frac{mr^2}{4}$, toplam halkanın eylemsizlik momenti $\frac{mr^2}{2}$ olur. Buradan

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\chi}{mr^2} + \frac{2B^2\pi^2 r^2}{mL}\right)\theta = 0$$

olarak yazılabilir. Halkanın titreşiminin açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\chi}{mr^2} + \frac{2B^2\pi^2 r^2}{mL}};\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2\chi}{mr^2} + \frac{2B^2\pi^2 r^2}{mL}}}$$

olarak bulunur.



10. a) Kırıcılık indisi n_2 olan ortamdan φ açısı ile gelen bir ışın kırıcılık indisi n_1 olan ortamda θ>φ açısı ile kırılmaktadır. Kırılma yasasından

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} = \frac{n_1}{n_2};\ \sin\varphi = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta$$

şeklin geometrisinden

$$\tan\varphi = \frac{\ell}{h};\ \tan\theta = \frac{\ell}{H}$$

yazabiliriz. Buradan

$$H = h\frac{\tan\varphi}{\tan\theta} = h\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi}} = h\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta}} = \frac{h\cos\theta}{\sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta}}$$

olarak bulunur.

b) $n_1 > n_2$ olduğu durumda

$$\frac{n_2^2}{n_1^2} - \sin^2\theta > o;\ \theta \le \arcsin\frac{n_2}{n_1}$$

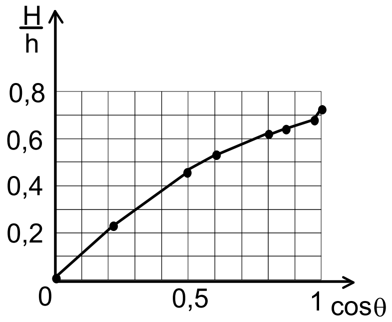
olmalıdır. Sadece bu şartı sağlayan açılar için kelebek görülebilir. $n_1 < n_2$ ise her durum için gözlemci kelebeği görebilir.

c) $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{2}$ ise

$$\frac{H}{h} = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}$$

şeklinde yazılıp, θ açısı için farklı değerler vererek aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

θ	0°	15°	30°	37°	45°	53°	60°	75°	90°
$\cos\theta$	1	0,97	0,87	0,8	0,71	0,60	0,5	0,22	0
$\frac{H}{h}$	0,71	0,69	0,65	0,62	0,58	0,51	0,45	0,22	0



Yandaki şekilde $\frac{H}{h}(\cos\theta)$ grafiği çizilmiştir. $\cos\theta$'ya göre $\frac{H}{h}$ oranının türevini alırsak bu türevin sıfır vermediğini görebiliriz, yani bu durumda ekstremum yoktur.