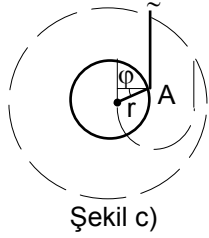
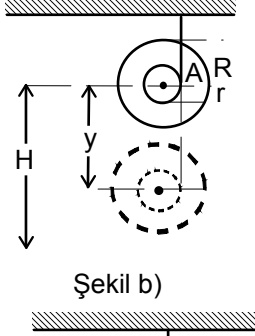
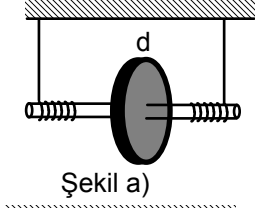
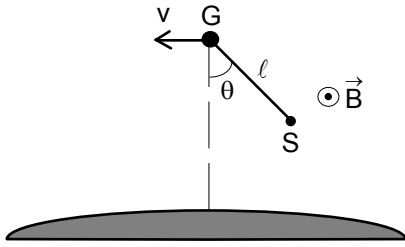


ŞUBAT KAMPI SINAVI-2001-II. Grup



1. Kütlesi $m=0,4$ kg, iç yarıçapı $r=0,003$ m, dış yarıçapı $R=0,06$ m ve kalınlığı $d=0,01$ m olan homojen, iki basamaklı bir makaranın dönme eksenini, r yarıçaplı ağırlıksız kabul edilebilen bir çubuktur. Makara uzunlukları eşit ve ağırlıkları ihmal edilebilen iki ipe asılıdır. (Şekil a) İpler çubuğun etrafına sarılarak diskin kütle merkezi $H=1$ m yüksekliğe çıkarılıyor ve yuvarlanması için serbest bırakılıyor. A ani dönme noktasının daima makaranın asılma noktasıyla aynı düşey doğrultuda kaldığı kabul edilebilir. (Şekil b)

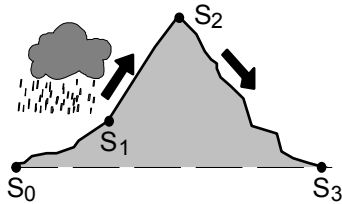
- Kütle merkezi h kadar aşağı indikten sonra diskin açısal hızı ω 'yı bulunuz.
- $h=0,5$ m'lik bir alçalma için diskin öteleme kinetik enerjisinin dönme enerjisine oranı nedir?
- Disk aşağı doğru inmesi sırasında iplerdeki gerilme kuvvetini bulunuz.
- Disk en alt noktaya geldiğinde A noktası etrafında dönmeye başlamaktadır. Bu dönüş ϕ açısı ile ifade edilmektedir. Diskin açısal hızını ϕ açısının fonksiyonu olarak bulunuz. (Şekil c)
- İpin dayanabileceği maksimum gerilme kuvvetinin $T_{\max}=10$ N olduğu bilinmektedir. Disk en alt noktaya indiğinde ipin kopmaması için ipin maksimum uzunluğu ne kadar olmalıdır?



2. Kütlesi $m=100$ ton olan bir uzay gemisi (G) Dünyanın etrafında araştırmalar yapmak amacı ile fırlatılıyor. Gemiye bağlı $l=20$ km uzunluktaki bükülmez ve yalıtkan madde ile kaplı metal bir çubuk ve buna bağlı S uydusu birlikte bir sistem oluşturmaktadır. Uydunun kütlesi geminin kütesinin yanında ihmal edilebilir. Ayrıca çubuğun uzunluğu yörünge yarıçapından çok çok küçüktür. Sistem ekvator düzleminde hareket etmektedir. Sistemin yörünge üzerinde hareket periyodu $T=5,4 \cdot 10^3$ s dir. Sistem dünya yüzeyine

paralel ve değeri $B=5 \cdot 10^{-5}$ T olan manyetik alanda bulunmaktadır. Sistemin bulunduğu bölgede iyonize edilmiş ve elektriksel iletkenliği çok yüksek olan gaz bulunmaktadır. Gemide ve uyduda bulunan elektrotlar sayesinde bu gaz ile temas sağlanmaktadır. Çubuk gemiye bağlı olduğu nokta etrafında serbestçe dönebilmekte ve dikeyle belirli θ açısı yapabilmektedir. İndüklenen e.m.k.'nin yaratacağı akım ihmal edilebilir.

- Hangi θ açısı için, uzay gemisi ile uydunun dünyaya göre konumları değişmeyecektir? Her denge durumunun kararlılığını tartışınız.
- Bu sistemin denge konumlarını ve bu konumlar etrafında yapacakları küçük titreşimlerin periyodunu bulunuz.
- Sistemin yörüngesel hızından dolayı çubuğun uçları arasında oluşan e.m.k.'nin yönünü $\theta=0^\circ$ için bulunuz.
- $\theta=0^\circ$ durumunda gemideki bir akım kaynağı sayesinde $I=0,1$ A lik bir akım ne kadar süre ile akmalıdır ki geminin yörüngesinin yarıçapı 10 m değişsin?



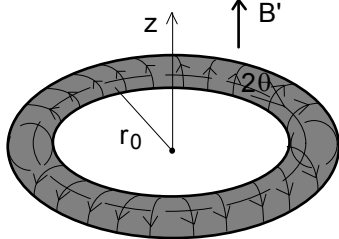
3. Bir dağ tepesi boyunca adyabatik olarak nemli hava akmaktadır. Meteoroloji S_0 , S_1 , S_2 ve S_3 istasyonlarında havanın parametrelerini ölçmektedir. S_0 istasyonunda ölçülen basınç $P_0=100$ kPa, sıcaklık $t^\circ=20$ °C, S_2 istasyonunda ölçülen basınç $P_2=70$ kPa olarak veriliyor. S_1 istasyonunda basınç $P_1=84,5$ kPa iken bulutların oluşması, yani su buharının yoğunlaşması gerçekleşmekte ve yağış başlamaktadır. Bundan $\tau=1500$ s sonra bulutlar dağ tepesinde bulunan S_2

istasyonuna varmaktadır. Yükseliş sırasında her metrekare yüzey üzerinde yaklaşık olarak 2000 kg hava bulunduğunu ve her kilogram havadan $m_s=2,45$ gr su buharının yoğunlaşarak yağış olarak düştüğünü kabul edebiliriz.

- S_1 istasyonunda, yani bulutların oluştuğu noktadaki havanın sıcaklığı nedir?
- S_0 istasyonundan ne kadar yükseklikte bulutların alt sınırı bulunmaktadır. Havanın özkütlesinin yükseklikle doğru orantılı azaldığını varsayabilirsiniz.

- c) S_2 istasyonundaki sıcaklık nedir?
d) 3 saat içinde birim alana (1 m^2) düşen yağış miktarı nedir? S_1 istasyonundan S_2 istasyonuna kadar yoğunlaşma şartlarının eşit olduğunu kabul edebilirsiniz.
e) S_3 istasyonundaki sıcaklık nedir?
f) S_3 istasyonunun civarındaki havanın özelliklerini S_0 istasyonu civarındaki havanın özellikleri ile kıyaslayınız.

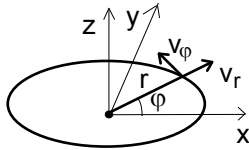
Not: Suyun buharlaşma öz ısısı $L=2,5 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$, su buharının öz ısısı kapasitesi $c_p=2090 \text{ J/kg.K}$, S_0 istasyonunda havanın özkütlesi $\rho_0=1,189 \text{ kg/m}^3$, havanın adyabatik katsayısı $\gamma=1,4$, havanın molar kütlesi $\mu=28,8 \text{ gr/mol}$, yerçekimi ivmesi $g=9,8 \text{ m/s}^2$, gaz sabiti $R=8,314 \text{ J/mol.K}$, suyun özkütlesi $\rho_s=1 \text{ gr/cm}^3$ olarak veriliyor. Yoğunlaşma düzeyini 1 mm hassasiyetle, bulutların sınırını 10 m hassasiyetle bulmanız yeterlidir. Hava ideal gaz gibi kabul edilebilir.



Şekil a)

oluşturulmaktadır. (Bak şekil a) B ve B' manyetik alanların etkisi ile elektron heliks şeklinde olan bir yörünge üzerinde hareket etmektedir. Elektron demetinin her 90° 'de bir odaklanması gerekir.

- a) B ve B' manyetik alanlarının değerlerini bulunuz.
b) Elektronlar toroidin eksenini boyunca sürüklenme hareketi yaparlar. Bu sürüklenme hızı nedir? Elektronların toroidi terk etme koşulu nedir?
c) Elektronların radyal yönde sapmalarının sonlu olduğunu gösteriniz.



Şekil b)

Not: Şekil b) deki koordinat sistemini kullanabilirsiniz. Elektronun kütlesi m, yükü q olarak veriliyor.

5. a) Yeteri kadar sıcak bir gaz deşarj tüpünde değişik iyon türleri vardır. Bu türlerden biri $A^{(z-1)+}$ şeklini alacak biçimde biri hariç bütün elektronlarını kaybetmiştir. Bu bilinmeyen atomun çekirdek yük numarası Z dir. Böyle bir $A^{(z-1)+}$ atomunun kalan tek elektronu en alt seviyede olsun. Bu durumda Δx^2 , Δy^2 ve Δz^2 şeklinde ifade edilen konumundaki belirsizliklerin toplamı olarak tanımlanan r_0^2 , aynı zamanda çekirdeğe olan uzaklığın karesidir. Δp_x^2 , Δp_y^2 ve Δp_z^2 şeklinde ifade edilen momentumdaki belirsizliklerin toplamı olarak tanımlanan p_0^2 , aynı zamanda momentumun ortalamasının karesidir. $p_0^2 r_0^2$ çarpımının sağladığı eşitsizlik nedir?

b) Bir $A^{(z-1)+}$ iyonu bir elektron yakalayıp bir foton yayınlamaktadır. Bu fotonun frekansının belirlenebileceği denklemleri yazın ama çözmeyin. En alt seviyenin enerjisinin minimum olduğu gerçeğini kullanarak $A^{(z-1)+}$ iyonunun enerjisini belirleyiniz.

Not: Bunu yaparken aşağıdaki yaklaşımlardan faydalanınız. Potansiyel enerji için olan ifade

$$\frac{1}{r} \text{ nin ortalama değerini problemdeki } r_0 \text{ 'ı kullanarak } \frac{1}{r_0} \text{ ile değiştirip, kinetik enerji ifadesindeki}$$

momentumun karesinin ortalama değerini p_0^2 ile değiştirdikten sonra $p_0^2 r_0^2 = \hbar^2$ ifadesi ile basitleştirilmiş problemin sonucundan faydalanınız.

c) Yine en alt seviyede olduğunu düşündüğümüz $A^{(z-2)+}$ iyonunun enerjisini benzer bir metotla belirleyiniz. Problemdeki r_0 'a karşılık gelen, iki elektronun çekirdeğe olan ortalama uzaklıklarını r_{01} ve r_{02} ile gösteriniz. Karşılıklı ortalama uzaklıklarının $(r_{01}+r_{02})$ şeklinde alınmasını kabul eden basitleştirmeden yararlanın. Momentumun karesinin ortalama değerinin $p_1^2 r_1^2 = \hbar^2$ ve $p_2^2 r_2^2 = \hbar^2$ şeklindeki belirsizlik ilişkilerini gerektirdiğini düşünün.

Not: En alt seviyede $r_1=r_2$ gerçeğini kullanın. Bu durumda durgun ve en alt seviye bir $A^{(z-1)+}$ iyonunun durgun bir elektronu yakaladığını düşündüğümüz özel işleme kendimizi sınırlandırmış oluyoruz.

d) Rekombinasyon foton frekansı $\omega_0=2,507 \cdot 10^7 \text{ rad/sn}$ değerinden Z nin değerini bulunuz. Ne tür bir iyonla uğraşmaktayız?

Elektronun yükü $e=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, elektronun kütlesi $m_e=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, protonun kütlesi $m_p=167 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; Plank sabiti $\hbar=1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$; vakumun dielektrik geçirgenliği $\epsilon_0=8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, Bor yarıçapı $r_B=5,293 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, Reidberg sabiti $R_y=2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, ışık hızı $c=300 \text{ 000 km/s}$ olarak veriliyor.

ŞUBAT KAMPI SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2001-II. Grup

1. a) Disk h kadar indiğinde enerji korunumu yasasından

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}; v = \omega r; J = \frac{mR^2}{2}$$

yazabiliriz. Buradan makaranın kazandığı açısal hız

$$\omega = \sqrt{\frac{4gh}{2r^2 + R^2}} \approx \frac{2\sqrt{gh}}{R}$$

olarak bulunur.

b) Disk h=0,5 m kadar inerse öteleme kinetik enerjisi

$$K_{tr} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{2mghr^2}{R^2} = 9,8 \cdot 10^3 \text{ J}$$

olarak bulunur. Öteleme ve dönme kinetik enerjileri arasındaki oran

$$\frac{K_{tr}}{K_{rot}} = \frac{2r^2}{R^2} = 0,005$$

olarak bulunur.

c) İne sırasında ipteki gerilme kuvveti T olsun. Öteleme denkleminde

$$2T - mg = -ma; a = \frac{v^2}{2h} = \frac{\omega^2 r^2}{2h} = \frac{2gr^2}{R^2}$$

$$T = \frac{mg}{2} \left(1 - \frac{2r^2}{R^2} \right) \approx \frac{mg}{2} = 195 \text{ N}$$

olarak bulunur.

d) Disk A noktasına göre dönmeye başlarsa kütle merkezinin koordinatları

$$x = r \cos \varphi; \dot{x} = -r \sin \varphi \dot{\varphi} = -r \Omega \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi; \dot{y} = r \cos \varphi \dot{\varphi} = r \Omega \cos \varphi$$

olarak yazılabilir. Burada Ω A noktasının etrafındaki açısal hızdır. Disk A noktasının etrafında sadece dönme hareketi yapmaktadır. Diskin A noktasına göre eylemsizlik momenti

$$J = J_0 + mr^2 = \frac{mR^2}{2} + mr^2$$

olur. Enerji korunumu yasasından

$$\frac{J\Omega^2}{2} = mgH + mgy$$

yazabiliriz. Buradan

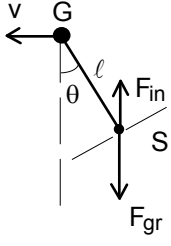
$$\Omega = \sqrt{\frac{8g(H + r \sin \varphi)}{2r^2 + R^2}} \approx \frac{\sqrt{4g(H + r \sin \varphi)}}{R}$$

olarak bulunur. İpteki gerilme kuvvetinin maksimum olduğu açı $\varphi = 90^\circ$ dir. İpteki maksimum gerilme kuvveti

$$2T_{\text{mak}} - mg = m\Omega^2 r; \Omega = \frac{\sqrt{4g(H + r)}}{R}; T_{\text{mak}} = \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{4r(H + r)}{R^2} \right)$$

$$T \approx \frac{mg}{2} \left(1 + \frac{4rH}{R^2} \right); H_{\text{mak}} = \frac{R^2}{4r} \left(\frac{2T_{\text{mak}}}{mg} - 1 \right) = 1,23 \text{ m}$$

olarak bulunur.



2. a) Geminin, Dünyanın etrafında hareket ederken, açısal hızı

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

olsun. Bu durumda

$$m\omega^2 r = \frac{\gamma m m_D}{r^2} = F_{gr}$$

uydu için

$$J'\alpha = m' l^2 \ddot{\theta} = - \left(\frac{\gamma m' m_D}{(r - l \cos \theta)^2} - m' \omega^2 (r - l \cos \theta) \right) \sin \theta \cdot l$$

$$l \ddot{\theta} = - \left[\omega^2 r \left(1 + \frac{2l \cos \theta}{r} \right) - \omega^2 r \left(1 - \frac{l \cos \theta}{r} \right) \right] \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + 3\omega^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

yazabiliriz. θ açısı sabit ise $\ddot{\theta} = 0$ olur. Bu durumda

$$\sin \theta = 0; \theta = 0 \text{ ya da } \theta = \pi$$

$$\cos \theta = 0; \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ya da } \theta = \frac{3\pi}{2}$$

olmalıdır. Bu açılardan sapma açısı $\Delta\theta = \theta - \theta'$ nin işareti ile momentin işareti farklı ise denge kararlıdır.

Aşağıda verilen tablodan

$\Delta\theta$ 'nin işareti	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	
M'nin işareti	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-

0 ve π açılarındaki dengenin kararlı olduğu anlaşılmaktadır.

b) Küçük titreşimler için

$$\ddot{\theta} + 3\omega^2 \cos \theta \sin \theta = 0$$

denkleminde

$$\cos \theta = 1; \sin \theta = \theta$$

olarak alınabilir. Buradan titreşim denklemi

$$\ddot{\theta} + 3\omega^2 \theta = 0$$

olur. Titreşim açısal frekansı

$$\Omega = \sqrt{3} \omega$$

olarak bulunur.

c) Lenz yasasına göre geminin pozitif, uydunun ise negatif yüklü olduğu anlaşılmaktadır.

d) $\theta = 0^\circ$ durumda telde akan $I = 0,1$ A akım sayesinde

$$A = Fvt = IB\ell\omega t$$

işi yapılmaktadır. Tüm enerjideki değişim

$$\Delta W = \frac{d}{dr} \left(- \frac{\gamma m m_D}{2r} \right) dr = \frac{\gamma m m_D}{2r^2} \delta r = \frac{m\omega^2 r \delta r}{2}$$

olur. İki ifade birbirine eşittir. Buradan

$$t = \frac{m\omega \delta r}{2IB\ell} = 5,8 \cdot 10^3 \text{ s}$$

olarak bulunur.

3. a) Adyabatik atmosfer için

$$P T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{sabit}$$

yazabiliriz. S_0 ve S_1 istasyonları için bu ifadelerden

$$P_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_1 T_1^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 279 \text{ K} = 6 \text{ } ^\circ\text{C}$$

olarak bulunur.

b) Basınç için

$$P(H) = P_0 - \rho_{\text{ort}} g H$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\rho_{\text{ort}} = \frac{\rho_0 + \rho(H)}{2} = \frac{\rho_0 + \rho_1}{2}$$

havanın ortalama özkütlesidir. S_0 ve S_1 istasyonunda havanın özkütlesi

$$\rho_0 = \frac{\mu P_0}{R T_0}; \rho_1 = \frac{\mu P_1}{R T_1}$$

olarak yazılabilir. Buradan S_1 istasyonunun bulunduğu yükseklik

$$H = \frac{2R(P_0 - P_1)}{\mu g \left(\frac{P_0}{T_0} + \frac{P_1}{T_1} \right)} = 1410 \text{ m}$$

olarak bulunur.

c) S_1 istasyonundan S_2 istasyonuna kadar yoğunlaşma ard arda gerçekleşen adyabatik genişleme ve sonra da yoğunlaşma olarak kabul edilebilir. S_0 ve S_2 istasyonları için

$$P_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_2 T_2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; T_2 = T_0 \left(\frac{P_2}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 265 \text{ K}$$

olarak bulunur. Yoğunlaşma sırasında bu havanın sıcaklığı ΔT kadar artmaktadır.

$$1 \text{ kg} \cdot c_p \Delta T = m_s L; \Delta T = \frac{m_s L}{c_p} = 6 \text{ K}$$

S_2 istasyonundaki son sıcaklık

$$T_{2s} = T_2 + \Delta T = 265 + 6 = 271 \text{ K} = -2 \text{ } ^\circ\text{C}$$

olarak bulunur.

d) $\tau = 1500 \text{ s}$ içinde

$$M_s = 2000 \cdot m_s$$

kadar yağış düşmektedir. $t = 3$ saat içinde

$$M = \frac{t}{\tau} M_s$$

yağış düşmektedir. 1 m^2 alana düşen yağışın yüksekliği

$$h = \frac{M}{\rho_s} = \frac{2000 t m_s}{\rho_s \tau} = 35 \text{ mm}$$

olarak bulunur.

e) S_3 istasyonundaki sıcaklık

$$P_2 T_{2s}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_3 T_3^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}; T_3 = T_{2s} \left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300 \text{ K} = 27 \text{ } ^\circ\text{C}$$

olarak bulunur.

f) Hava dağı geçtikten sonra kuru ve sıcaktır.

4. a) Lorentz kuvvetinden B' alanı

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = qv_0B'; B' = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}$$

olarak bulunur. Toroid içinde elektronlar sürekli ana yörünge üzerinde teğet geçerek odaklanmaktadır. Elektronun çizdiği yörüngeyi δ ise elektronun periyodu

$$v_{0\parallel} = v_0 \cos\theta \approx v_0; v_{0\perp} = v_0 \sin\theta$$

$$\frac{mv_{0\perp}^2}{\delta} = qv_{0\perp}B; v_{0\perp} = \frac{qB\delta}{rm}$$

$$T = \frac{2\pi\delta}{v_{0\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$$

olarak bulunur. Toroid içinde elektronların aldığı yol ifadesinden manyetik alan

$$\frac{\pi r}{2} = \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{2mU_0}{q}}, B = \frac{4}{r_0} \sqrt{\frac{2mU_0}{q}}$$

olarak bulunur.

b) Toroidteki silindirik simetri sonucu r , ϕ ve z koordinat sisteminde hız

$$v_0 = \sqrt{v_r^2 + v_\phi^2 + v_z^2}$$

toroidinin ekseninden maksimum ve minimum uzaklaşma noktalarında hızlar

$$v_r = 0; v_0 = \sqrt{v_\phi^2 + v_z^2}$$

şekilde yazılabilir. Momentum korunumu yasasından

$$mv_\phi r = mv_0 r_0; v_\phi = \frac{v_0 r_0}{r}$$

ve z eksenini boyunca etki eden kuvvet ve hız

$$ma_z = m \frac{dv_z}{dt} = -qv_r B$$

$$v_z = \int_{r_0}^r qB \frac{dr}{dt} dt = \frac{qB(r - r_0)}{m}$$

olarak bulunur. Bu demektir ki $r > r_0$ durumu için elektronlar toroid eksenini boyunca hareket ederek v_z sürüklenme hızı ile toroidi terk etmektedirler. Böyle bir sürüklenme, füzyon reaksiyonlarının gerçekleşmesini engelleyen temel sorunlardan birisidir ve hala bunun için çözüm bulunamamıştır.

c) Hız için

$$v_0 = v_0 \sqrt{\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{q^2 B^2 r_0^2}{m^2 v_0^2} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2}$$

yazdığımızda

$$f(r) = \sqrt{\frac{r_0^2}{r^2} + \frac{q^2 B^2 r_0^2}{m^2 v_0^2} \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right)^2} = 1$$

fonksiyonunun eksenden en uzak ve en yakın noktalar içinde geçerli olması gerekir. $r < r_0$ $f(r) > 1$ ve elektronun eksene yaklaştığı en küçük mesafe r_0 , $r \gg r_0$ ise

$$\frac{r_0^2}{r^2} \rightarrow 0; \frac{dr}{dt} = 0$$

olan diğer nokta eksenden büyük ama sonlu mesafede bulunmaktadır ve bununla beraber elektronun radyal sapması da sonludur.

5. a) Belirsizlik prensibi

$$(\Delta p_x)^2(\Delta x)^2 \geq \hbar^2; (\Delta p_y)^2(\Delta y)^2 \geq \hbar^2; (\Delta p_z)^2(\Delta z)^2 \geq \hbar^2$$

olarak yazılabilir. Küresel simetri sonucu

$$(\Delta p_x)^2 = (\Delta p_y)^2 = (\Delta p_z)^2; (\Delta x)^2 = (\Delta y)^2 = (\Delta z)^2$$

olur. Değişimler

$$p_0^2 = (\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2 + (\Delta p_z)^2 = 3(\Delta p_x)^2; r_0^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 3(\Delta x)^2$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$p_0^2 r_0^2 \geq 9\hbar^2$$

olarak bulunur.

b) Işınlanan fotonun enerjisi enerji ve momentum korunumu yasalarından bulunabilir.

$$\frac{m_e v_e^2}{2} + \frac{(m_\zeta + m_e) v_\zeta^2}{2} + U_1 = \frac{(m_\zeta + 2m_e) u_\zeta^2}{2} + U_2 + W_\gamma$$

$$m_e \vec{v}_e + (m_\zeta + m_e) \vec{v}_\zeta = (m_\zeta + 2m_e) \vec{u}_\zeta + \vec{p}_\gamma; W_\gamma = \hbar\omega; p_\gamma = \frac{\hbar\omega}{c}$$

Burada U_1 ve U_2 sistemin iç enerjileridir.

c) Çekirdek-elektron sisteminin kuantizasyonunu kullanabiliriz. Sistemin enerjisi

$$W = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Mikroalamdaki fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p \approx p; \Delta r \approx r; pr = \hbar$$

yazılabilir. Buradan enerji için

$$W = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

Bu şarttan yarıçap

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2 Z}$$

olarak bulunur. Bu durumdaki minimum enerji

$$W_1 = -\frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} = -R_y Z^2 = -13,6.Z \text{ eV}$$

olarak bulunur.

d) Rekombinasyon sonucu iki elektronlu sistem için

$$W = 2 \frac{mv^2}{2} - 2 \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 2r} = \frac{p^2}{m} - \frac{(4Z-1)e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Belirsizlik prensibine göre

$$p.r = \hbar$$

olarak yazılabilir. Buradan enerji için

$$W = \frac{\hbar^2}{mr^2} - \frac{(4Z-1)e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olma şartından yarıçap

$$\frac{dW}{dr} = -\frac{2\hbar^2}{mr^3} + \frac{(4Z-1)e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} = 0; r = \frac{16\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2(4Z-1)} = \frac{4r_0}{4Z-1}$$

enerji

$$W_1 = -\frac{(4Z-1)^2 R_y}{8}$$

olarak bulunur. iki enerji seviyesi arasındaki fark

$$\hbar\omega = \frac{(4Z-1)^2 R_y}{8} - R_y Z^2$$

olarak yazılabilir. Sayısal olarak en yakın çözüm $Z=4$ olarak bulunur.