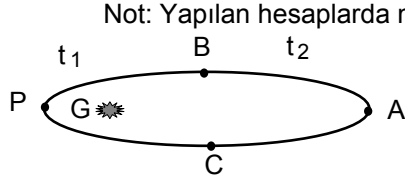


### ŞUBAT KAMPI SINAVI-2001-I. Grup

1. B şehri A şehrinin tam doğusundadır. A ve B arası uzaklık  $\ell$  kadardır. Rüzgar olmadığı zaman uçak A'dan B'ye  $t$  sürede uçmaktadır. Uçağın  $v_0 = \frac{\ell}{t}$  hızına uçağın havaya göre hız denir. Problemin bütün şıklarında bu hızın sabit olduğunu kabul ediniz. Rüzgarın yere göre hızı  $u$  olarak alınırsa, uçağın yere göre hızı  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$  olur.

- Uçağın hızı yere göre sıfır olabilir mi? Açıklayınız.
- Eğer batıdan doğuya doğru  $u$  hızı ile rüzgar esiyorsa, uçağın A dan B'ye gidip tekrar A'ya dönmesi için gereken süreyi bulunuz.
- Eğer rüzgar  $u$  hızı ile güneyden kuzeye esiyorsa, yolculuğun daima A-B'yi birleştiren doğru üzerinde yapılması şartı ile, uçağın A-B-A gidiş dönüş süresini bulunuz.
- Rüzgar  $u$  hızıyla ve AB doğrusuyla  $\theta$  açısı yaparak eserse A-B-A gidiş dönüş süresi ne kadar olur? Bu süreyi rüzgarın esmediği durum ile karşılaştırınız.

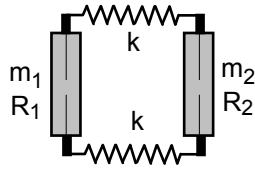
2. a) Halley kuyruklu yıldızının Güneşin etrafında dolanım periyodu  $T_H=76$  yıldır. Güneşe en yakın uzaklığı (perihelion uzaklığı)  $r_P=90.10^6$  km dir. Halley kuyruklu yıldızının Güneşe olan uzaklığının en büyük değeri  $r_A$  (aphelion uzaklığı) kaç km dir? Aphelion ve perihelion noktalarındaki hızları nedir? Dünyanın Güneşe olan uzaklığı  $r_D=150.10^6$  km, Dünyanın Güneşin etrafında dolanım periyodu  $T_D=1$  yıl olarak veriliyor.



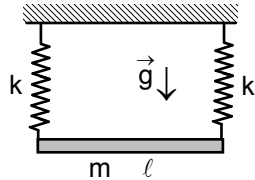
Not: Yapılan hesaplarda mesafeler için  $10^6$  km, hızlar için 1 m/s yeterli hassasiyettir.

- Halley kuyruklu yıldızının Güneşe yakın olan BPC yarı yolunu kat etme süresi  $t_1$ , Güneşe uzak olan CAB yolunu kat etme süresi  $t_2$  ise  $\frac{t_1}{t_2}$  oranı nedir?

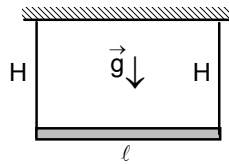
Not: Elipsin alanı  $S=\pi ab$  dir. Burada  $a$  elipsin büyük yarı eksen,  $b$  ise küçük yarı eksenidir.



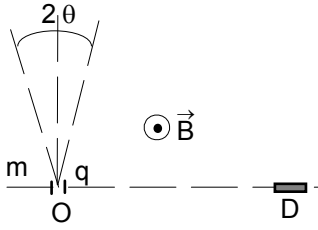
- Yatay ve sürtünmeli düzlem üzerinde kütleleri  $m_1$  ve  $m_2$  ve yarıçapları  $R_1$  ve  $R_2$  olan iki silindir yay sabiteleri  $k$  olan iki yayla birbirlerine bağlanmışlardır. Sistemin yapacağı harmonik hareketin titreşim periyodunu bulunuz. Titreşim süresince silindirler kaymadan yuvarlanmaktadır.



- Uzunluğu  $\ell$  ve kütlesi  $m$  olan homojen bir çubuk yay sabiti  $k$  olan iki yaya asılıdır. Muhtemel titreşimlerin periyotlarının oranını bulunuz.



- Uzunluğu  $\ell$  olan homojen bir çubuk uzunlukları  $H$  olan iki iple tavana asılmıştır. Çubuğun geometrik eksenini etrafında burkulması sonucu, yapacağı titreşimin periyodu nedir?

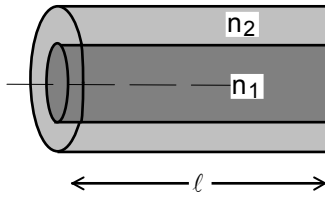


4. Kütle spektrometresinde yüksek hızlara ivmelendirilen iyonlar, hızlarına dik yöndeki düzgün bir manyetik alan bölgesine O noktasından enjekte edilirler. İyonlar doğrusal olmayan bir yörüngede hareket ederek uzaktaki bir D fotoğraf filmine çarparlar. OD uzaklığı ölçülerek iyon kütlesi bulunabilir.  ${}^{39}_{19}\text{K}$  ve  ${}^{41}_{19}\text{K}$  iyonları 500 eV ile hızlandırılıp,  $B=0,7$  T olan bir alana girmektedirler. İyonlar bu alana girerken hızları OD doğrultusuna diktir.
- a) İyonların filme, D noktasına çarptıkları andaki hızlarını bulunuz.  
b) OD uzaklığını her iki tip iyon için bulunuz.

c) Gerçekte problem bu kadar basit değildir. İyonların hızlarındaki değişiklikler cihazın ayırım gücünü etkilemektedir. Eğer iyonların ilk enerjileri  $500\pm 5$  eV ise, OD uzaklığında ufak sapmalar olacaktır. Bu durumda iyonlar filme çarptığı zaman birbirlerinden ayırt edilebilirler mi?

d) İyonların manyetik alan bölgesine girdiklerinde hızlarının OD'ye tam olarak dik tutulamadıklarını göz önüne alalım. Eğer dik konumdan  $\pm\theta$ 'lık bir sapma var ise, OD boyundaki farklılaşma ne kadar olur?  $\theta=3^\circ$  için  ${}^{39}_{19}\text{K}$  ve  ${}^{41}_{19}\text{K}$  iyonları birbirinden ayırt edilebilir mi?

Not: Elektronun yükü  $e=1,6\cdot 10^{-19}$  C, protonun kütlesi  $m_p=1,673\cdot 10^{-27}$  kg, nötronun kütlesi  $m_n=1,675\cdot 10^{-27}$  kg olarak veriliyor.



5. Bir fiber optik kablo, aynı eksenli iç içe iki silindirden meydana gelmiştir. İç bölge kırıcılık indisi  $n_1$  olan bir dielektrik ve dış kısım ise kırıcılık indisi  $n_2 < n_1$  olan başka bir dielektrik maddeden yapılmıştır. Fiber kablo içinde ışık art arda iç yansımalar sonucu ilerlemektedir. Bir fiber kablonun verilmiş bir  $\ell$  uzunluğunca destekleyebileceği frekans bandı aralığı :

$$\Delta f \ell = \frac{\ell}{2\Delta t}$$

olarak tanımlanır. Burada  $\Delta t$  optik eksen boyunca hareket eden ışık ile, fiber optik eksen ile (hala fiber içinde kalarak uca kadar iletilebilmek şartıyla) maksimum açıyı yaparak fibere giren ışığın kablodan çıkış süreleri arasındaki farktır.  $(\Delta f \ell)$ 'i  $n_1$ ,  $n_2$  ve  $c$  cinsinden ifade ediniz.

6. a) Frekansı  $\omega$  olan bir foton, kütlesi  $M$  ve yarıçapı  $R$  olan bir yıldızdan ışınlanırsa yıldızdan çok uzakta iken frekansı ne kadar olur?  
b) Kara delikler bir yıldızın kendi çekim kuvveti altında çökerek (collapse) çok yoğun bir oluşum haline gelmesiyle oluşur. Oluşumun yoğunluğu o kadar büyüktür ki ışığı oluşturan foton tanecikleri dahi cismin çekim alanından kurtulamaz. Kütlesi  $M$  olan bir yıldızın kara delik haline gelmesi için yarıçapı ne kadar olmalıdır? Güneş kara deliğe dönüşürse yarıçapı ne kadar olur?  
c) Özel rölativite teorisinde kütlesi  $M$  ve yarıçapı  $R$  olan bir yıldızın civarında fotonun ne kadar bir açıyla sapacağını bulunuz. Güneş için bu açı ne kadardır?

Not. Işık hızı  $c=300\ 000$  km/s, evrensel çekim sabiti  $\gamma=6,67\cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>.kg<sup>-2</sup>, Planck sabiti  $\hbar=1,05\cdot 10^{-34}$  J.s Güneşin kütlesi  $M_G=2\cdot 10^{30}$  kg, Güneşin yarıçapı  $R_G=7\cdot 10^5$  km olarak veriliyor.

**ŞUBAT KAMPI SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2001-I. Grup**

1. a) Yere göre hızın sıfır olması için

$$v=0, v_0 = -u$$

şartı sağlanmalıdır. Uçak rüzgarın estiği yönün tersine u hızı ile uçmalıdır.

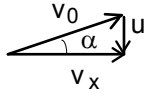
b) A→B gidiş süresi ve B→A geri dönüş süresi

$$t_1 = \frac{\ell}{v_0 + u}, t_2 = \frac{\ell}{v_0 - u}$$

olur.  $v_0 > u$  kabul edilmelidir yoksa uçak geri dönemez. Buradan

$$t = t_1 + t_2 = \frac{2\ell}{v_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}$$

olarak bulunur.



c) Rüzgar AB doğrusuna dik eserse uçak AB doğrusuyla  $\alpha$  açısı yapacak şekilde uçmalıdır.

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$u = v_0 \sin \alpha$$

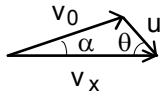
Buradan AB doğrusu boyunca hız

$$v_x = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}$$

olarak bulunur. Hareket süresi

$$t = \frac{2\ell}{v_x} = \frac{2\ell}{v_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2}}$$

olarak bulunur.



d) Rüzgar AB doğrusuyla  $\theta$  açısı yapacak şekilde esiyorsa A→B durumu için AB doğrusu boyunca hız

$$v_x = u \cos \theta + v_0 \cos \alpha$$

$$0 = -u \sin \theta + v_0 \sin \alpha$$

$$v_{x1} = u \cos \theta + v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2 \sin^2 \theta}$$

olarak bulunur. B→A durumu için AB doğrusu boyunca hız

$$v_x = v_0 \cos \alpha - u \cos \theta$$

$$0 = -u \sin \theta + v_0 \sin \alpha$$

$$v_{x2} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2 \sin^2 \theta} - u \cos \theta$$

olarak bulunur. Hareket süresi

$$t = \frac{\ell}{v_{x1}} + \frac{\ell}{v_{x2}} = \frac{2\ell}{v_0} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2 \sin^2 \theta}}{1 - \left(\frac{u}{v_0}\right)^2} > \frac{2\ell}{v_0}$$

olarak bulunur.

2. a) Dünyanın Güneşin etrafındaki hareketi için

$$\frac{m_D v_D^2}{r_D} = \frac{\gamma M_G m_D}{r_D^2}$$

$$v_D = \sqrt{\frac{\gamma M_G}{r_D}}$$

$$T_D = \frac{2\pi r_D}{v_D} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_D^3}{\gamma M_G}}$$

$$\frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M_G}$$

$$\gamma M_G = \frac{4\pi^2 r_D^3}{T_D^2}$$

yazabiliriz. Keplerin üçüncü yasasından

$$\frac{T_D^2}{r_D^3} = \frac{T_H^2}{a^3}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{r_D^3 T_H^2}{T_D^2}} = r_D \cdot \sqrt[3]{\frac{T_H^2}{T_D^2}} = 2691 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$2a = r_p + r_A; r_A = 2a - r_p = 5292 \cdot 10^6 \text{ km}$$

olarak bulunur. Halley kuyruklu yıldızının hareketi için enerji ve açısal momentum korunumu yasaları kullanılabilir.

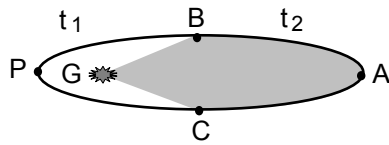
$$-\frac{\gamma M_G m_H}{r_p} + \frac{m_H v_p^2}{2} = -\frac{\gamma M_G m_H}{r_A} + \frac{m_H v_A^2}{2}$$

$$m v_p r_p = m v_A r_A, v_p = \frac{v_A r_A}{r_p}$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2\gamma M_G r_p}{(r_a + r_p) r_A}} = \sqrt{\frac{2\gamma M_G r_p}{a r_A}} = \frac{2\sqrt{2} \pi r_D}{\sqrt[6]{T_D^4 T_H^2}} \sqrt{\frac{r_p}{r_A}} = 916 \text{ m/s}$$

$$v_p = \frac{2\sqrt{2} \pi r_D}{\sqrt[6]{T_D^4 T_H^2}} \sqrt{\frac{r_A}{r_p}} = 53978 \text{ m/s}$$

olarak bulunur.



b) Hareket sabit alan hızı ile gerçekleşmektedir. Hareket süresi taranan alanlarla doğru orantılıdır. BPC ve CAB yolunda taranan alanlar yarım elipsin alanından GBC üçgeninin alanını çıkarılarak ya da ilave edilerek bulunur.

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2} - \frac{(a - r_p)2b}{2}; S_2 = \frac{\pi ab}{2} + \frac{(a - r_p)2b}{2}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{(\pi - 2)a + r_p}{(\pi + 2)a - r_p} = 0,2303 \approx \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

3. a) Sistemin enerjisi için

$$W=K+\Pi=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{J_{01}\omega_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{J_{02}\omega_2^2}{2}+2\frac{kx^2}{2}$$

$$J_{01}=\frac{m_1R_1^2}{2}; \omega_1=\frac{v_1}{R_1}, J_{02}=\frac{m_2R_2^2}{2}; \omega_2=\frac{v_2}{R_2}$$

yazabiliriz. Kütle merkezinin korunumu ve momentumun korunumu yasasından

$$m_1x_1=m_2x_2, x=x_1+x_2$$

$$m_1v_1=m_2v_2,$$

yazılabilir. Buradan

$$W=K+\Pi=\frac{3m_1v_1^2}{4}+\frac{3m_2v_2^2}{4}+\frac{2k(x_1+x_2)^2}{2} =$$

$$= \frac{3m_1(m_1+m_2)}{2m_2} \frac{v_1^2}{2} + \frac{2k(m_1+m_2)^2}{m_2^2} \frac{x_1^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Titreşimin açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega=\sqrt{\frac{4k(m_1+m_2)}{3m_1m_2}}, T=\frac{2\pi}{\Omega}=2\pi\sqrt{\frac{3m_1m_2}{4k(m_1+m_2)}}$$

olarak bulunur.

b) Birinci titreşimde çubuk öteleme hareketi yapmaktadır. Titreşim için

$$ma=-2kx;$$

$$\Omega_1=\sqrt{\frac{2k}{m}}, T_1=\frac{2\pi}{\Omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

yazabiliriz. İkinci titreşim kütle merkezinin etrafındaki titreşimdir.

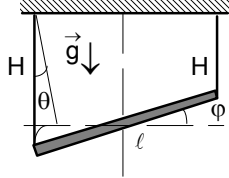
$$J\alpha=-2F\cdot\frac{\ell}{2}=-kx\ell=-\frac{k\ell^2\theta}{2}; x=\frac{\ell\theta}{2}, J=\frac{m\ell^2}{12}$$

$$\Omega_2=\sqrt{\frac{6k}{m}}, T_2=\frac{2\pi}{\Omega_2}=2\pi\sqrt{\frac{m}{6k}}$$

Buradan aranan oran

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{3}$$

olarak bulunur.



c) Çubuk kütle merkezi etrafında  $\varphi$  açısı kadar dönerse, ipler dikey doğrudan  $\theta$  açısı kadar sarmaktadır. İki açı arasındaki bağıntı küçük açılar için

$$H\theta\approx\frac{\ell\varphi}{2}$$

olarak yazılabilir. Hareket denkleminde

$$J\alpha=-2T\sin\theta\cdot\frac{\ell}{2}\approx-T\ell\theta, \alpha=\ddot{\varphi}, J=\frac{m\ell^2}{12}$$

$$mg=2T\cos\theta\approx 2T$$

$$\frac{m\ell^2}{12}\ddot{\varphi}+\frac{mg\ell^2}{4H}\varphi=0$$

titreşimin açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega=\sqrt{\frac{3g}{H}}, T=\frac{2\pi}{\Omega}=2\pi\sqrt{\frac{H}{3g}}$$

olarak bulunur.

4. a) Taneciklerin hızları

$$K = \frac{mv^2}{2}, v = \sqrt{\frac{2K}{Zm_p + Nm_n}}; v_{39} = 4,96 \cdot 10^4 \text{ m/s}, v_{41} = 4,83 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

olarak bulunur.

b) Manyetik alan iyonlar üzerinde iş yapmaz. Taneciklerin izledikleri yörüngeler yarı çember olur. Çemberin yarıçapı

$$r = \frac{(Zm_p + Nm_n)v}{eB} = \frac{\sqrt{2K(Zm_p + Nm_n)}}{eB}$$

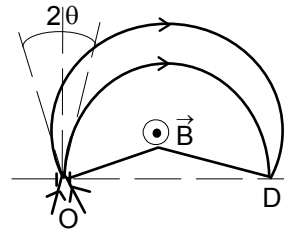
ve aranan OD uzaklığı  $OD = 2r$ ;  $OD_{39} = 5,76 \text{ cm}$ ,  $OD_{41} = 5,91 \text{ cm}$  olarak bulunur. Aralarındaki fark  $\Delta(OD) = 0,15 \text{ cm}$  olur.

c) Yarıçapın kinetik enerjiye göre türevi

$$dr = \frac{\sqrt{2(Zm_p + Nm_n)}}{eB} \frac{dK}{2\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{2K(Zm_p + Nm_n)}}{eB} \frac{dK}{2K} = \frac{rdK}{2K}$$

$$dr \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ cm}, \Delta OD_{39} \approx \Delta OD_{41} \approx 0,03 \text{ cm}$$

olur. Sapma  $0,15 \text{ cm}$ 'den küçük olduğu için iyonlar da ayırt edilebilir.

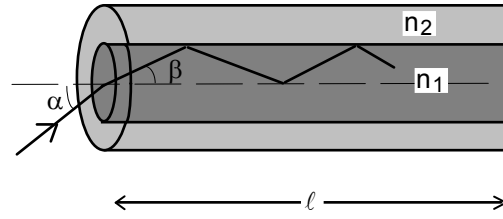


d) Her iki yörüngenin de dairesel olup aynı yarıçaplıdır. İyonların son konumları  $2r$  ve  $2r \cos \theta$ 'dir.

$$\Delta OD = 2r(1 - \cos \theta) = 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \approx r \theta^2; \theta = \frac{\pi}{60}$$

$$\Delta OP_{39} = \Delta OP_{41} \approx 0,02 \text{ cm}$$

olarak bulunur. İyonlar hala ayırt edilebilir.



5. Kırıcılık indisi  $n_1$  olan madde için kırılma yasasını

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_1$$

yan yüzeyden kırılan ışın için kırılma yasasını

$$\frac{\sin \gamma}{\sin 90^\circ} = \frac{n_2}{n_1}; \gamma = 90^\circ - \beta$$

olarak yazabiliriz. Buradan limit durumunda, yani sınır açısı

ile giderse

$$\cos \beta = \frac{n_2}{n_1}; \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}}, \sin \alpha = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

olarak bulunur. Bu durumda hareket süresi

$$t_1 = \frac{l}{v_1} = \frac{n_1 l}{c}$$

olur. Eğer iç yansıma yaparsa ışın hipotenüs boyunca hareket eder. Kat ettiği yol ve hareket süresi

$$x_2 = \frac{l}{\cos \beta}; t_2 = \frac{x_2}{v_1} = \frac{n_1 l}{c \cos \beta} = \frac{n_1^2 l}{n_2 c}$$

olur. Bu sürelerin farkı ve aradığımız frekans bandı aralığı

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{n_1^2 l}{n_2 c} - \frac{n_1 l}{c} = \frac{n_1(n_1 - n_2)l}{n_2 c}, \Delta f l = \frac{l}{2\Delta t} = \frac{n_2 c}{2n_1(n_1 - n_2)}$$

olarak bulunur.

6. a) Bir yıldızın yüzeyinden çıkan (yayınlanan) foton, yıldızdan dr kadar uzaklaştığında

$$dW = \hbar d\omega = F dr = -\frac{\gamma M m}{r^2} dr = -\frac{\gamma M}{r^2} \frac{\hbar \omega}{c^2} dr$$

kadar enerji kaybeder. Buradan

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\gamma M dr}{c^2 r^2}; \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_R^{\infty} \frac{\gamma M dr}{c^2 r^2}$$

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\gamma M}{c^2 R}; \omega = \omega_0 e^{-\frac{\gamma M}{c^2 R}}$$

olarak bulunur. Frekansta meydana gelen kaymaya (farka)  $\Delta\omega$  dersek, son frekans

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = \ln \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \approx \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\gamma M}{c^2 R}$$

olarak bulunur.

b) Fotonun durgun kütlesi olduğunu, ama ışık hızı ile hareket edebildiğini ve kinetik enerjisinin

$$\frac{m_f c^2}{2}$$

ile ifade edildiğini kabul edelim. Fotonun kütle çekim merkezinden sonsuza uzaklaşabilmesi için

$$\frac{\gamma M m_f}{R} = \frac{m_f c^2}{2}$$

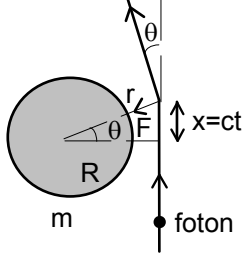
olmalıdır. Kütle çekim merkezinin yarıçapı ki buna gravitasyonel ya da Schwarzschild yarıçapı da denir.

$$R_{gr} = \frac{2\gamma M}{c^2} = \frac{2\gamma M_G}{c^2} \frac{M}{M_G} \approx 3 \cdot 10^3 \frac{M}{M_G} \text{ m}$$

olarak bulunur. Bu ifade tam olarak genel rölativite teorisinin verdiği ifade ile aynıdır. Güneş için bu değer

$$R_{Ggr} = \frac{2\gamma M_G}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^8)^2} = 2964 \text{ m} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m} = 3 \text{ km}$$

olarak bulunur.



c) Fotonun denk durgun kütlesi

$$m_f = \frac{\hbar \omega}{c^2}$$

ve kütlesi M olan bir yıldız arasında ve yıldızın civarında etki eden kuvvet

$$F = \frac{\gamma M m_f}{r^2}$$

olarak yazılabilir. Burada r çekim merkezi ile foton arasındaki

uzaklıktır. Foton ile çekim merkezi arasındaki etkileşme kuvveti çok çok küçük olduğu için fotonun sapması da çok küçük olacaktır. İlk yaklaşımda fotonun x eksenini boyunca hareket ettiğini, y eksenini boyunca ise fotonun çekim merkezinden R uzaktan geçtiğini kabul edelim. Yani en büyük sapma çekim merkezine teğet geçen fotonlar için gerçekleşmektedir. Şekilde verilen koordinat sistemi kullanarak bu mesafe

$$r = \sqrt{R^2 + x^2} = \sqrt{R^2 + c^2 t^2}$$

olarak yazılabilir. Fotonun sapması sadece çekim merkezinin civarında etkilidir. Sapma açısı  $\theta$  ise saptırıcı kuvvet

$$F_y = F \cos \theta$$

ve x eksenini boyunca hareket süresince kazanılan momentum

$$\Delta p_y = \int_{-\infty}^{+\infty} F_y dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma M m_f \cos \theta dt}{(R^2 + c^2 t^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma M m_f R dt}{(R^2 + c^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2\gamma M m_f}{Rc}$$

olarak bulunur.

Çözümde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(R^2 + c^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integrali çözümü gereklidir. Bunun için  $ct=Rtgz$  dönüşümünü kullanabiliriz. Türevlersek

$$dt = \frac{R}{c} \frac{dz}{\cos^2 z}$$

bulabiliriz.

İntegralin sınırları artık  $-\frac{\pi}{2}$  ve  $+\frac{\pi}{2}$  olur. Buradan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(R^2 + c^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{Rdt}{\frac{\pi}{2}c(R^2 + R^2 \text{tg}^2 z)^{\frac{3}{2}} \cos^2 z} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z dz}{cR^2} = \frac{\sin z}{cR^2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{cR^2}$$

olarak bulunur. Fotonun toplam sapması için

$$\text{tg}\theta \approx \theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} = \frac{\frac{2\gamma M m_f}{Rc}}{\frac{\hbar\omega}{c}} = \frac{2\gamma M}{Rc^2}$$

olarak bulunur. Güneş için bu sapma  $\theta \approx 4.10^{-6}$  rad  $\approx 0,88''$  olarak hesaplanır. Maalesef özel rölativite teorisi gerçek sapmayı iki kat daha küçük olarak vermekte, çünkü bu teori uzayın kütlelerden dolayı büküldüğünü hesaba katmamaktadır. Gerçek sapma  $1,76''$  dir.