ŞUBAT KAMPI SINAVI-1999
II. Grup

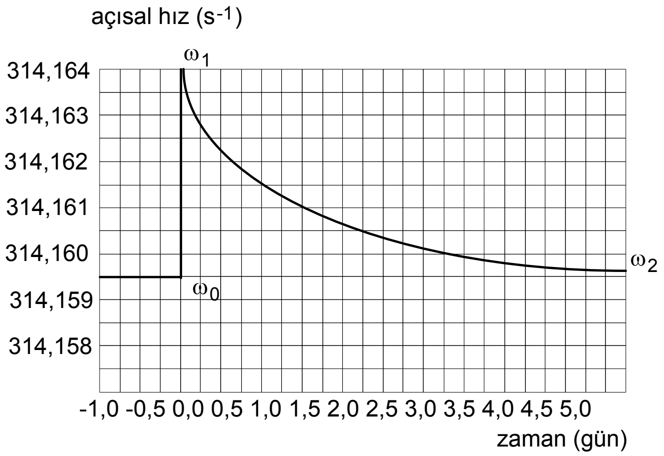
1. Milisaniye pulsarları olarak bilinen yıldızlar birkaç milisaniye arasındaki periyotlarla çok kısa puls şeklinde radyasyon yayan kaynaklardır. Bu radyasyon, radyo dalgaları bandında olup, uygun bir radyo alıcısı ile izlenebilir ve böylece pulsların periyotları büyük bir doğrulukla ölçülebilir. Pulsarlar aslında kendi etrafında dönen ve elektromanyetik ışıma yapan nötron yıldızlarıdır. Pulsarların her bir dönüşü için bir sinyal (puls) kaydedilmektedir. Tipik bir pulsarın kütlesi güneşin kütlesine yakın, yoğunluğu nükleer yoğunlukta ve yarıçapı 10-30 km dir. Nötron yıldızları bazı yıldızların değişerek ulaştıkları durumdur.

Nötron yıldızları büyük bir ölçüde kütlelerini koruduğu ve boyutları da olağanüstü küçük olduğu için, açısal momentumun korunumu yasası sonucu bu yıldızların dönme hızları çok yüksek değerlere ulaşır. İç bölgelerdeki nötron bir akışkan gibi davranır ve kristal katı üst katman bu akışkanın şeklini almaya çalışır. Böylece, nötron yıldızı hızlı dönme sonucu hafif yassılmaya başlar, ve elipsoid şeklini alır. Nötron yıldızının kutup yarıçapı R_p, ekvator yarıçapı R_e ise

$$\xi=\frac{R_e - R_p}{R_e}$$

yassılma faktörü olarak veriliyor.

a) Bu şekilde tanımlanan nötron yıldızının yassılma faktörünü bulunuz.

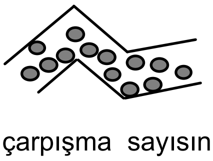


Nötron yıldızının sürekli enerji kaybı nedeni ile açısal hızı azalmaya başlar ve yassılma faktörü de küçülür. Yassılaşma sonucu, katı olan dış kabuk iç akışkanın şeklini almak ister, fakat şekil değişikliğini sürekli gerçekleş-tirememektedir. Bu katmanda biriken mekanik gerilim belli değere ulaştıktan sonra ani sıçra-malar ve deprem şeklinde değişiklikler ger-çekleşmektedirler. Bir yıldız depremi süresin-ce, ve sonrasında yıldızın açısal hızının ani-den değiştiğini deneysel olarak gösteren gra-fik yukarıda verilmiştir.

b) Bu verilerden sıvı iç kısmının yarıçapını bulunuz. Kabuğun dış ve iç kısmının yoğunluğunun eşit olduğunu kabul ediniz.

Not. Evrensel çekim sabiti γ=6,67.10^{-11} N.m/kg^2, nötron yıldızının kütlesi m=2.10^{30} kg, nötron yıldızının ortalama yarıçapı R=1.10^4 m, nötron yıldızının dönme periyodu T=2.10^{-2} s olarak veriliyor.

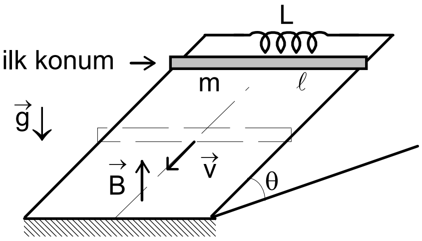
2. Uzunluğu ℓ, kesit alanı S, yoğunluğu ρ ve sabit basınçta ısı kapasitesi c_P olan iletken çubuğun bir ucu T_1 diğer ucu T_2 sıcaklığındaki ısı kaynaklarıyla temas etmektedir. Böylece, bir sıcaklık dağılımı elde edildikten sonra çubuk ısı kaynaklarından ayrılıp sabit basınçta yalıtılmaktadır. Çubuğun, ısı kaynaklarından ayrıldıktan sonra entropisinde meydana gelen değişimini bulunuz.



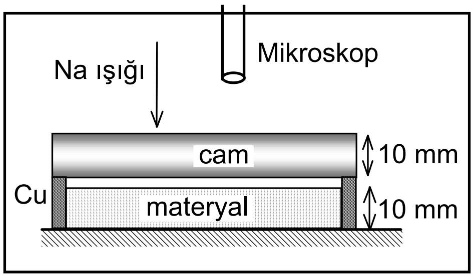
3. a) Çapı d olan moleküllerin gaz halinde iken konsantrasyonu n_0 dır. Bu gazın içinde her iki çarpışma arasında moleküllerin kat ettiği ortalama serbest yolu bulunuz. Bunun için moleküllerin tamamen rasgele hareket ettiklerini kabul ediniz.

b) Konsantrasyonu n_0 olan bir gaz için birim zamanda, birim hacimde gerçekleşen çarpışma sayısını bulunuz. Bu gazın konsantrasyonu iki katına çıkarılır ve sıcaklık dörtte birine indirilirse çarpışma sayısı nasıl değişir?

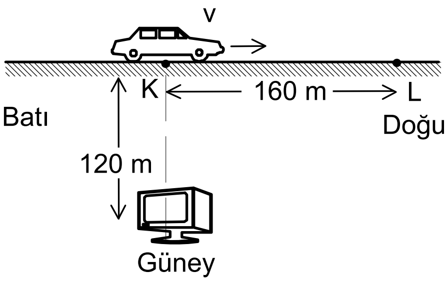
c) Difüzyon yolu ile yayılan bir koku t_1 sürede x_1 kadar mesafeye yayılmaktadır. Kokunun x_2 mesafesine ulaşması için gereken süre ne kadardır?



4. Eğim açısı θ olan sürtünmesiz ve yalıtkan düzlem üzerinde, birbirine paralel dirençsiz iki telin uçları arasına L indüktansı bağlanmıştır. Dirençleri ihmal edilebilen teller üzerinde uzunluğu ℓ, kütlesi m olan ve direnci ihmal edilebilen iletken çubuk en üst noktadan harekete başlamaktadır. Bütün sistem düşey yönde uygulanan sabit ve homojen B manyetik alanında bulunmaktadır. Çubuktan geçen akım, çubuğun konum-zaman ve hız-zaman denklemlerini bulunuz. Çubuğun ulaşabileceği maksimum hız nedir?



5. 10 mm kalınlığındaki paralel yüzlü bir cam plaka çok kısa iki bakır blok yardımı ile 10 mm kalınlığındaki bir materyalin üzerine, camın alt yüzü ile materyalin üst yüzü arasında ince bir hava filmi bırakacak şekilde yerleştirilmiştir. λ=589 nm lik Na ışığı kullanılarak elde edilen girişim deseni sisteme cam tarafından bakan bir mikroskopla incelenmektedir. Tüm sistemin sıcaklığı 100 K artırılmakta ve buna karşılık bir karanlık halkanın üzerine odaklanan mikroskopta bu nokta-dan 20 aydınlık halkanın geçtiği gözlenmektedir. Bakırın boyca genleşme katsayısı $1{,}4.10^{-5}$ K^{-1} olduğuna göre materyalin boyca genleşme katsayısı ne olabilir?

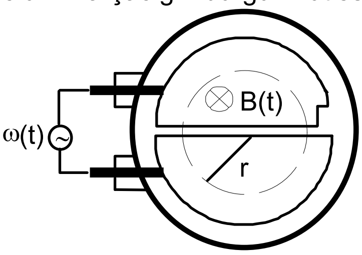


6. Batı Doğu yönündeki bir yoldan Güneye doğru 120 m uzaklıkta bulunan bir evdeki televizyon, gene yolun Güney taraflarında bulunan 60 MHz frekansla yayın yapan bir TV vericisinden yayın almaktadır. Yoldan doğu yönüne doğru v sabit hızı ile giden bir araba evin tam karşısındaki K noktasında geçerken televizyon ekranındaki görüntü titreşmeye başlamakta ve bu titreşimlerin frekansı 2 Hz olmaktadır. Televizyondaki titreşimlerin frekansı bundan sonra azalmakta ve K noktasından 160 m uzakta bulunan L noktasında tamamen durmaktadır. Arabanın hızını ve TV vericisinin açısal konumunu bulunuz.

Not: Ekrandaki görüntünün titreşim frekansı $-\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{dt}$ olarak tanımlanmakta olup burada Δ, TV alıcısına ulaşan dalgaların optik yol farkıdır. Verici arabadan çok uzaktadır.

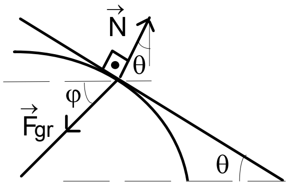
7. a) Elektron bugünkü bilgiler ışığında noktasal gibi kabul edilse de elektronun boyutları değerlendiri-lebilir. Rölativite teorisine göre elektronun durgun bir enerjisi vardır. Bu enerjinin elektronun elektrostatik enerjisine eşit olduğu düşünülürse elektronun yarıçapını hesaplayınız.

b) x yönünde yüksek bir p_0 momentumuyla ilerleyen q yüklü bir parçacık E elektrik alanı yönünde giriş yaparsa bu bölgede t zamanına bağlı olarak kazanılan kinetik enerjiyi bulunuz. p_0=0 ise alınan x yolu zamana bağlı olarak bulunuz. Tanecik elektrik alana p_0 momentum ile alana dik girerse çözüm nasıl olur? Parçacığın durgun kütlesi m_0 olarak veriliyor.



c) Synchrophasotron bir yüksek enerjili parçacık hızlandırıcısıdır. Bu sistemde yüklü parçacıklar üzerinde zaman bağımlı B(t) manyetik alanı ile birlikte bir hızlandırıcı voltaj uygulanmaktadır. Bu voltajın açısal frekansı olan $\omega(t)$, B(t) ile aynı anda değişmektedir. Hızlandırılan yüklü taneciklerin sabit r yarıçaplı bir yörünge üzerinde hareket etmesi için $\omega(t)$'nin B(t)'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini bulunuz.

ŞUBAT KAMPI SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1999-II. Grup



1. a) Yassılma faktörünü bulmak için kuvvetlerin analizini yapmak yeterlidir. Elipsoid üzerinde herhangi bir nokta için o noktaya ait yatay ve dikey koordinat sistemi ele alalım. Yerel noktadan dönme eksenine dik geçirilen doğru ile yarıçapla φ açısı, teğet olarak geçirilen yerel yatay ise dönme eksenine dik geçirilen doğrultu ile θ açısı yapmaktadır. Yatay x ve dikey y eksenine göre kuvvet bileşenlerini yazabiliriz.

$$F_{gr}\cos\varphi - N\sin\theta = m\omega^2 x;\ F_{gr} = \frac{\gamma\, mM}{R^2}$$

$$F_{gr}\sin\varphi - N\cos\theta = 0;\ \cos\varphi = \frac{x}{R};\ \sin\varphi = \frac{y}{R};\ tg\theta = -\frac{dy}{dx}$$

Buradan

$$\frac{\gamma\, mMx}{R^3} - \left(\frac{\gamma\, mMy}{R^3}\right)\frac{dy}{dx} = m\omega^2 x;\ ydy + \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma\, M}\right)xdx = 0$$

denklemi elde edilir. Elipsin denklemi ve elips denkleminin türevi

$$\frac{x^2}{R_e^2} + \frac{y^2}{R_p^2} = 1;\ \frac{xdx}{R_e^2} + \frac{ydy}{R_p^2} = 0$$

olarak yazılabilir. Karşılaşmadan sonra

$$\frac{R_p^2}{R_e^2} = 1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma\, M}$$

olduğunu bulabiliriz. Buradan yarıçapların oranı ve yassılma faktörü

$$\frac{R_p}{R_e} = \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{\gamma\, M}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{\omega^2 R^3}{2\gamma\, M}\right);\ \xi = \frac{R_e - R_p}{R_e} = \frac{\omega^2 R^3}{2\gamma\, M} = 3{,}7.10^{-4}$$

olarak bulunur.

b) Katı katman ve orta bölgenin dış kısmı iç bölge arasındaki sürtünme sonucu iki kısım aynı hız ile dönmektedirler. Dönmenin yavaşlaması sonucu biriken gerilim, deprem sayesinde azalır ve sonra katman ile iç bölge arasında bir dönme farkı meydana gelir. Bir müddet sonra ikisi de aynı açısal hız ile dönmeye başlar. Katmanın eylemsizlik momenti J_K, iç kısmın eylemsizlik momenti $J_{iç}$, eylemsizlik değişimi ΔJ ise

$$J_K\omega_0 = (J_K - \Delta J)\omega_1$$
$$(J_K + J_{iç})\omega_0 = (J_K + J_{iç} - \Delta J)\omega_2$$

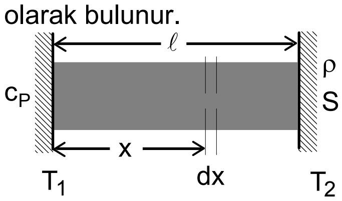
yazabiliriz. Buradan ΔJ bulunduktan sonra

$$\frac{J_k}{J_k + J_{iç}} = \frac{\omega_1(\omega_2 - \omega_0)}{\omega_2(\omega_1 - \omega_0)}$$

olarak bulunur. Nötron yıldızınının eylemsizlik momenti R^2 ile doğru orantılıdır. Buradan

$$\frac{R_{iç}}{R} = \sqrt{1 - \frac{J_k}{J_k + J_{iç}}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_1(\omega_2 - \omega_0)}{\omega_2(\omega_1 - \omega_0)}} = 0{,}95$$

olarak bulunur.



2. Sıcaklığı T_1 olan uçtan x uzaklıkta bulunan ve dx kalınlığındaki parçanın sıcaklığı

$$T_x = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{\ell}$$

olarak yazılabilir. Çubuğun son sıcaklığı

$$T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

olur. Seçilen parçanın ısı alışverişi

$$dQ = dmc_P dT = c_P\rho S dT dx;\ dT = \frac{(T_2 - T_1)dx}{\ell}$$

çubuğun entropisinde meydana gelen değişim

$$\Delta\Sigma = \int\frac{dQ}{T} = \int_0^{\ell}\left(c_P\rho S\int_{T_x}^{T_0}\frac{dT}{T}\right)dx = \int_0^{\ell} c_P\rho S\left(\ln T_0 - \ln T_x\right)dx$$

olarak yazılabilir. Birinci integral

$$\int_0^{\ell} c_P \rho S \ln T_0 dx = c_P \rho S \ell \ln \frac{T_1 + T_2}{2}$$

olarak bulunur. İkinci integral için

$$\int_0^{\ell} c_P \rho S \ln T_x dx = \int_0^{\ell} c_P \rho S \ln\left(T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{\ell} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\ell} c_P \rho S \ln\left(T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{\ell} \right) d\left(T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{\ell} \right) \frac{\ell}{T_2 - T_1}$$

yazabiliriz.

$$T_1 + \frac{(T_2 - T_1)x}{\ell} = z$$

dönüşümü kullanarak, integralin sınırlarını değiştirebiliriz.

$x=0$ ise $z=T_1$

$x=\ell$ ise $z=T_2$

Buradan

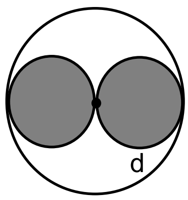
$$\frac{c_P \rho S \ell}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \ln z dz = \frac{c_P \rho S \ell}{T_2 - T_1} (z.\ln z - z)\Big|_{T_1}^{T_2} = \frac{c_P \rho S \ell}{T_2 - T_1} (T_2 \ln T_2 - T_2 - T_1 \ln T_1 + T_1) =$$

$$= c_P \rho S \ell \left(\frac{T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1}{T_2 - T_1} - 1 \right)$$

olarak hesaplanır. Entropideki toplam değişim

$$\Delta\Sigma = c_P \rho S \ell \left(1 + \ln \frac{T_2 + T_1}{2} - \frac{T_2 \ln T_2 - T_1 \ln T_1}{T_2 - T_1} \right)$$

olarak bulunur.



3. a) Bir etkileşmeyi veya çarpışmayı bazı durumlarda tesir kesiti karakterize edilebilir. Tesir kesiti, iki taneciğin merkezleri arasındaki uzaklık 2r olduğunda, taneciklerin değme noktasından geçirilen dairenin kesit alanı olarak tanımlanılabilir. Bu durumda tesit kesiti

$$\sigma = \pi (2r)^2 = \pi d^2$$

olarak yazılabilir. Bir saniyede taneciğin kat ettiği yol v.1, bu zaman içinde kaotik hareketlerde taranan hacim σv, bu hacimde bulunan tanecik sayısı $n_0 \sigma v$ olduğunu kabul edebiliriz. Burada aslında taneciklerin birbirlerine göre olan hareketlerini hesaba katmalıyız. Bağıl hız

$$\vec{v}_b = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \ ; \ v_b^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2 v_1 v_2 \cos\theta$$

olarak yazılabilir. Burada $v_1=v_2=v$ ve bir saniyede $<\cos\theta>$'nın ortalama değeri çarpışma sayısı çok büyük olduğundan dolayı sıfır olacağını hesaba katarsak

$$<v_b^2> = 2v^2 \ ; \ v_b = \sqrt{2}\, v$$

yazabiliriz. Bununla bir saniyede gerçekleşen çarpışma sayısı

$$\nu = n_0 \sigma v_b = \sqrt{2}\, n_0 \sigma v$$

her iki çarpışma arasındaki ortalama serbest yol

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n_0 \pi d^2} = \frac{kT}{\sqrt{2}\, P \pi d^2}$$

olarak bulunur. Burada $P=n_0 kT$ gazın basıncıdır.

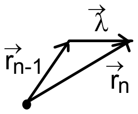
b) Birim zamandaki ve birim hacimdeki çarpışma sayısı

$$N_1 = \frac{n_0 \nu}{2} = \frac{\sqrt{2}\, n_0^2 \pi d^2 v}{2}$$

olarak yazılabilir. Burada çarpışmada iki tanecik yer aldığını hesaba katmalıyız. Yeni şartlar altında çarpışma sayısı

$$N_1' = \frac{\sqrt{2}\, (2n_0)^2 \pi d^2}{2} \frac{v}{2} = 2N_1$$

olarak bulunur.



c) Difüzyon yolu ile yayılan bir koku kaotik difüzyonla yayılmaktadır. Koku molekülü başlangıç bir noktaya göre hava molekülleri ile n-1 çarpışmadan sonra $\vec{r}_{n-1}$ uzakta bulunduğunu kabul edelim. Her çarpışmada molekül $\vec{\lambda}$ kadar yol almaktadır. Başlangıç noktasına göre

$$\vec{r}_n = \vec{r}_{n-1} + \vec{\lambda}\,;\ r_n^2=r_{n-1}^2+\lambda^2-2r_{n-1}\lambda\cos\theta=r_{n-1}^2+\lambda^2$$

yazabiliriz. Burada yine bir saniyede $<\cos\theta>$'nın ortalama değeri çarpışma sayısı çok büyük olduğundan dolayı sıfır olduğunu göz önünde bulundurmuşuz. Artarda çarpışmalar için

$$r_1^2=\lambda^2$$
$$r_2^2=r_1^2+\lambda^2=2\lambda^2$$
$$r_3^2=r_2^2+\lambda^2=3\lambda^2$$
....
$$r_n^2=r_{n-1}^2+\lambda^2=n\lambda^2$$

yazabiliriz. Çarpışma sayısı $n=\frac{t}{T}$ ve kat edilen yol

$$r_n^2=n\lambda^2=\frac{\lambda^2 t}{T}=\lambda vt;\ x_1^2=\lambda vt_1;\ x_2^2=\lambda vt_2;\ t_2=\frac{x_2^2 t_1}{x_1^2}$$

olarak bulunur.

4. Çubuk, ağırlığının eğik düzleme paralel olan bileşeni ve Amper kuvvetinin etkisi ile hareket eder.

$$ma=m\frac{dv}{dt}=mg\sin\theta-IB\cos\theta.\ell$$

İndükte edilmiş e.m.k.

$$\varepsilon_{in}=-\frac{d\Phi}{dt}=-B\frac{dS}{dt}=-B.\cos\theta.\ell.\frac{dx}{dt}==-L\frac{dI}{dt}$$

olarak yazılabilir. Buradan integrasyon sonucu

$$LI=B\ell x\cos\theta;\ I=\frac{B\ell\cos\theta}{L}x$$

olarak yazılabilir. Buradan çubuğun hareket denklemi ya da akımın zamana bağlı denklemi

$$\ddot{x}+\frac{B^2\ell^2\cos^2\theta}{mL}x=g\sin\theta;\ \ddot{I}+\frac{B^2\ell^2\cos^2\theta}{mL}I=\frac{B\ell g\sin\theta\cos\theta}{L}$$

şeklinde yazılır. Bu harmonik osilatörün denklemidir. Titreşimin frekansı

$$\Omega=\frac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{mL}}$$

olur. Diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü

$$x_1(t)=C_1\sin\Omega t+C_2\cos\Omega t$$

Kısmi çözüm ise

$$x_2(t)=C_3=\frac{mgL\sin\theta}{B^2\ell^2\cos^2\theta}$$

olur. Toplam çözüm

$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)=C_1\sin\Omega t+C_2\cos\Omega t+C_3$$

İlk şartlardan sabitleri bulabiliriz.

$$x(0)=0=C_2+C_3;\ C_2=-C_3$$

Hız denklemi

$$v(t)=\Omega C_1\cos\Omega t-\Omega C_2\sin\Omega t$$

olarak yazılabilir. İlk şartlardan

$$v(0)=0=\Omega C_1;\ C_1=0$$

ve tüm çözüm

$$x(t)=\frac{mgL\sin\theta}{B^2\ell^2\cos^2\theta}\left(1-\cos\frac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{mL}}t\right)$$

olarak yazılabilir. Çubuğun hızı

$$v(t)=\frac{g\sqrt{mL}\,tg\theta}{B\ell}\sin\frac{B\ell\cos\theta}{\sqrt{mL}}t$$

olur. Maksimum hız

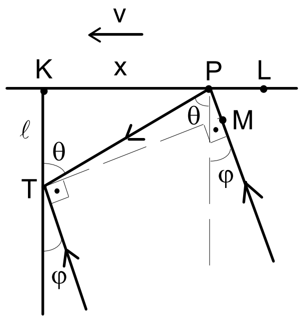
$$v_{mak}=\frac{g\sqrt{mL}\,tg\theta}{B\ell}$$

olarak bulunur. Enerji kaybı olmadığı için çubuk ilk konumuna dönmektedir.

5. Sıcaklıkta ΔT kadar artış cam ile materyal arasındaki hava kalınlığını Δh kadar değiştirmektedir. Bunun sonucu girişim mertebesinde Δm kadar bir değişme olacaktır.

$$2h=m\lambda$$
$$2\Delta h=\Delta m\lambda$$
$$\Delta h=\frac{20.589}{2}=5890\ \text{nm}$$
$$\Delta h=h_{0m}\alpha_c\Delta T\pm h_{0m}\alpha_m\Delta T$$
$$\Delta T=100\ \text{K};\ h_{0c}=h_{0m}=10\ \text{mm}$$
$$\alpha_m=1{,}4.10^{-5}\ \text{K}^{-1}\ \text{ya da}\ \alpha_m=8{,}1.10^{-5}\ \text{K}^{-1}$$

olarak bulunur.



6. Vericiden TV'ye doğrudan gelen ve arabadan yansıyan iki sinyal arasındaki optik yol farkı

$$\Delta=MP+PT=\sqrt{\ell^2+x^2}\cos(\theta+\varphi)+\sqrt{\ell^2+x^2}=$$
$$=\sqrt{\ell^2+x^2}\,(1+\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)=$$
$$=\sqrt{\ell^2+x^2}\left(1+\frac{\ell\cos\varphi}{\sqrt{\ell^2+x^2}}-\frac{x\sin\varphi}{\sqrt{\ell^2+x^2}}\right)=\sqrt{\ell^2+x^2}+\ell\cos\varphi-x\sin\varphi$$

olarak yazılabilir.
Bu ifadenin zamana göre türevi

$$\frac{d\Delta}{dt}=\frac{x\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\ell^2+x^2}}-\frac{dx}{dt}\sin\varphi=-v(\sin\varphi-\sin\theta)$$

olur. Gelen dalganın dalga boyu

$$\lambda=\frac{c}{\nu_d}=5\ \text{m}$$

olarak bulunur. Burada ν_d=60 MHz elektromanyetik dalganın frekansıdır. Ekrandaki görüntünün titreşim frekansı $-\frac{1}{\lambda}\frac{d\Delta}{dt}$ olarak tanımlandığından

$$\nu=\frac{v}{\lambda}(\sin\varphi-\sin\theta)$$

şeklinde yazılabilir. (-) işareti televizyondaki titreşimlerin frekansı azıldığını göstermektedir. Bu formülü L ve K noktaları için uygularsak

$$0=\frac{v}{5}\left(\sin\varphi-\frac{4}{5}\right);\ \sin\varphi=\frac{4}{5};\ \varphi=53°$$

$$2=\frac{v}{5}\sin\varphi;\ v=12{,}5\ \text{m/s}$$

olarak bulunur. Anten güney-doğu yönünde güney-kuzey doğrusu ile 53° açı yapmaktadır.

7. a) Yükü Q olan bir kürenin Culuomb potansiyel enerjisini bulmak için kürenin içinde r<R yarıçaplı bir küre alıp kalınlılığı dr olan ince küresel bir kabukla etkileşme enerjisini bulup integre edebiliriz. Buradan bu enerji

$$d\Pi=\frac{qdq}{4\pi\varepsilon_0 r},\ q=\frac{4\rho\pi\ r^3}{3};\ dq=4\rho\pi r^2dr;\ \rho=\frac{Q}{\frac{4\pi r^3}{3}}$$

$$d\Pi=\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\rho\pi\ r^3}{3}4\rho\pi\ r^2dr}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\rho\pi)^2\ r^4dr}{3}$$

$$\Pi_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\rho\pi)^2}{3}\int_0^R r^4dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(4\rho\pi)^2}{3}\frac{r^5}{5}\Big|_0^R=\frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca elektrik alanın enerjisinin yoğunluğu kullanarak da varabiliriz.

$$w_{E1}=\frac{\varepsilon_0 E_1^2}{2};\ E_1=\frac{er}{4\pi\varepsilon_0 R^3};\ w_{E2}=\frac{\varepsilon_0 E_2^2}{2};\ E_2=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

elektronun dışındaki elektrik alanın enerjisi

$$\Pi=\int_0^R w_{E1}dV+\int_R^\infty w_{E2}dV=\int_0^R \frac{\varepsilon_0 E_1^{\,2}}{2}4\pi r^2dr+\int_R^\infty \frac{\varepsilon_0 E_2^{\,2}}{2}4\pi r^2 dr=$$

$$=\frac{1}{10}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

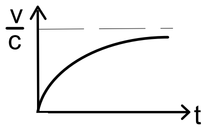
olur. Bu enerjiyi elektronun durgun enerjisine

$$m_0c^2=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

eşitlersek elektronun yarıçapı

$$R_e=\frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_0c^2}\approx 10^{-15}\ \text{m}=10^{17}\ \text{cm}$$

olarak bulunur.



7. Bir parçacık sabit elektrik alan ile rölativistik hızlara kadar hızlandırılabilir. Yüklü parçacığının hızı elektik alan yönünde ise integrasyondan sonra zamana bağlı olarak momentum

$$F=\frac{dp}{dt}=qE;\ p-p_0=\int_0^t qEdt=qEt=;\ p=p_0+qEt$$

enerji

$$W=K+m_0c^2=\sqrt{p^2c^2+m_0^{\,2}c^4}=\sqrt{(p_0+qEt)^2c^2+m_0^{\,2}c^4}$$

$$K=m_0c^2\left(\sqrt{1+\frac{(p_0+qEt)^2}{m_0^{\,2}c^2}}-1\right)$$

olarak bulunur. $p_0=0$ ise momentum, hız ve yol

$$p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\ v=\frac{qEct}{\sqrt{m_0^{\,2}c^2+q^2E^2t^2}}$$

$$x=\int_0^t vdt=\frac{m_0c^2}{qE}\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m_0^{\,2}c^2}}-1\right)$$

kazanılan kinetik enerji

$$K=W-W_0=\frac{pc^2}{v}-m_0c^2=m_0c^2\left(\sqrt{1+\frac{q^2E^2t^2}{m_0^{\,2}c^2}}-1\right)$$

olarak bulunur. Zaman (t) çok büyük ve $\frac{v}{c}\to 1$ ise hız artmaya bilir, ama momentum artar. Bu durumda

$$x\approx ct;\ K\approx qEct$$

olarak yazılabilir. Parçacık elektrik alana dik olarak girsin. Bu durumda

$$F_x=p'_x=qE$$
$$F_y=p'_y=0$$
$$p_x=qEt$$
$$p'_y=p_0=\text{sabit}$$

olarak bulunur. Parçacığın toplam enerjisi

$$W=K+m_0c^2=\sqrt{m_0^{\,2}c^4+p^2c^2}=\sqrt{(p_0^{\,2}+q^2E^2t^2)c^2+m_0^{\,2}c^4}$$

kazanılan kinetik enerji

$$K=m_0c^2\left(\sqrt{1+\frac{p_0^{\,2}+q^2E^2t^2}{m_0^{\,2}c^2}}-1\right)$$

hızlar için

$$v_x = \frac{p_x c^2}{W} = \frac{qEc^2 t}{\sqrt{m_0{}^2 c^4 + (p_0{}^2 + q^2E^2t^2)c^2}}$$

$$v_y = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{m_0{}^2 c^4 + (p_0{}^2 + q^2E^2t^2)c^2}}$$

y yönündeki ivme

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{p_0 q^2E^2c^2 t}{\sqrt{[m_0{}^2 c^4 + (p_0{}^2 + q^2E^2t^2)c^2]^3}}$$

olarak bulunur. Parçacığın sapma açısı zamana göre değişmektedir ve

$$\tan\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{qEt}{p_0}$$

olur. İntegrasyondan sonra koordinatlar

$$x = \frac{\sqrt{m_0{}^2 c^4 + (p_0{}^2 + q^2E^2t^2)c^2}}{qE}$$

$$y = \frac{p_0 c}{qE} \operatorname{arcsh} \frac{qEt}{m_0 c}$$

olarak bulunur. Bu denklemleri zamandan bağımsız olarak birleştirirsek yörünge denklemi

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \operatorname{csh} \frac{qEy}{p_0 c}$$

olarak bulunur.

c) Bir yüklü parçacık manyetik alanda dairesel yörünge üzerinde hareket etmektedir. Bu durumda

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \; ; \; mv = p = qB(t)r$$

yazabiliriz. Parçacık için rölativistik hızda momentum ve enerji arasındaki bağıntı

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2 v}{c^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{W\,v}{c^2}$$

$$W = \sqrt{m_0{}^2 c^4 + p^2c^2}$$

olur. Dairesel yörünge için

$$v = \omega r$$

yazabiliriz. Buradan

$$\omega(t) = \frac{qB(t)c^2}{\sqrt{m_0{}^2 c^4 + p^2c^2}} = \frac{qB(t)c^2}{\sqrt{m_0{}^2 c^4 + q^2c^2B^2(t)r^2}}$$

olarak bulunur.