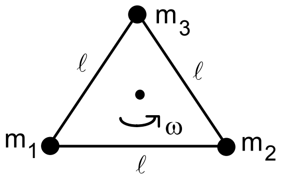
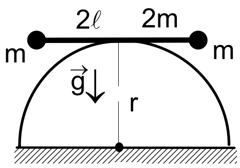
ŞUBAT KAMPI SINAVI-1999-I. Grup

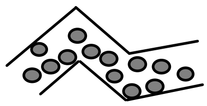


1. Sürtünmesiz yatay düzlem üzerinde bir eşkenar üçgenin köşelerinde bulunan cisimlerin kütleleri m_1, m_2 ve m_3 olarak veriliyor. Bu cisimler ℓ uzunluğundaki iplerle birbirlerine bağlı olup sistemin kütle merkezi etrafında ω açısal hızı ile dönmektedirler. İplerdeki gerilme kuvvetlerini bulunuz.

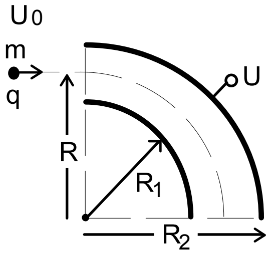
2. Bir dairesel yörünge üzerinde v_0 hızı ile hareket eden uydunun hızı yörüngeye teğet olarak Δv kadar arttırılmaktadır. Bu durumda uydu, büyük yarım ekseni a ve küçük yarım ekseni b olan bir eliptik yörünge üzerinde hareketine devam etmektedir. $\frac{a}{b}$ oranı nedir?



3. Yarıçapı $r=\ell$ olan sabitleştirilmiş yarım küre üzerinde uzunluğu 2ℓ ve kütlesi 2m olan bir çubuk ve çubuğun uçlarında kütleleri m olan iki küçük cisim bulunmaktadır. Çubuğun ortası yarım kürenin tepe noktasının üzerindedir. Çubuğun yapacağı küçük titreşimlerin periyodunu bulunuz. Yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.

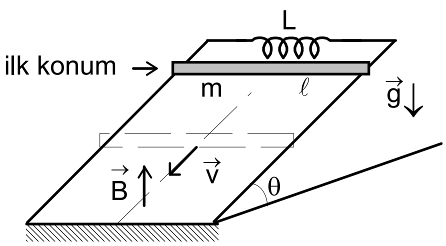


4. a) Çapı d olan moleküllerin gaz halinde iken konsantrasyonu n_0 dır. Bu gazın içinde her iki çarpışma arasında moleküllerin kat ettiği ortalama serbest yolu bulunuz. Bunun için moleküllerin tamamen rasgele hareket ettiklerini kabul ediniz.
b) Konsantrasyonu n_0 olan bir gaz için birim zamanda, birim hacimde gerçekleşen çarpışma sayısını bulunuz. Bu gazın konsantrasyonu iki katına çıkarılır ve sıcaklık dörtte birine indirilirse çarpışma sayısı nasıl değişir?
c) Difüzyon yolu ile yayılan bir koku t_1 sürede x_1 kadar mesafeye yayılmaktadır. Kokunun x_2 mesafesine ulaşması için gereken süre ne kadardır?

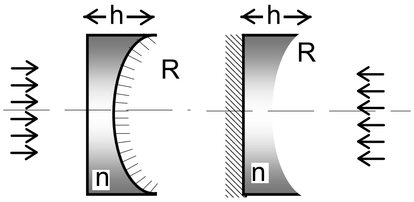


5. Yarıçapları R_1 ve R_2, eksenleri çakışık olan, çeyrek, uzun kondansatör sistemini oluşturan, iki silindirik kabuk arasına U potansiyeli uygulanmaktadır. Bu kondansatöre U_0 potansiyeli altında hızlandırılan m kütleli ve q yüklü tanecikler gönderilmektedir. Bu taneciklerin, kondansatörün içinde, yarıçapı $R=\frac{R_1+R_2}{2}$ olan bir yörünge izleyebilmeleri için U_0 potansiyeli ne olmalıdır?

6. Özindüksiyon katsayıları L_1 ve L_2 karşılıklı indüksiyon katsayısı M olan iki bobin seri veya paralel iki farklı şekilde bağlanılabilir. Ayrıca bobinlerin manyetik akıları birbirini güçlendirilir veya zayıflatabilir şekilde de olabilir. Her durum için sistemin toplam indüktansı bulunuz.



7. Eğim açısı θ olan sürtünmesiz ve yalıtkan düzlem üzerinde, birbirine paralel dirençsiz iki telin uçları arasına L indüktansı bağlanmıştır. Dirençleri ihmal edilebilen teller üzerinde uzunluğu ℓ, kütlesi m olan ve direnci ihmal edilebilen iletken çubuk en üst noktadan harekete başlamaktadır. Bütün sistem düşey yönde uygulanan sabit ve homojen B manyetik alanında bulunmaktadır. Çubuktan geçen akım, çubuğun konum-zaman ve hız-zaman denklemlerini bulunuz. Çubuğun ulaşabileceği maksimum hızı bulunuz.



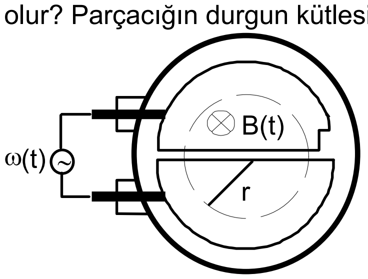
Şekil a) Şekil b)

8. a) Kırıcılık indisi n, kalınlığı h (h<R) ve küresel yüzünün eğrilik yarıçapı R olan bir içbükey-düzlem merceğin küresel yüzeyi yansıtıcı bir madde ile kaplanmıştır (Bakınız Şekil a). Bu tip optik sistemlere kalın ayna denir. Bu kalın aynanın düzlem yüzüne optik eksene paralel olarak gelen ışık demeti nerede görüntü verir?

b) Şekil a'daki sistemin küresel yüzü yerine, düzlem yüzü ayna olsa ve paralel ışık demeti küresel yüze gönderilse görüntü nerede oluşur? (Şekil b)

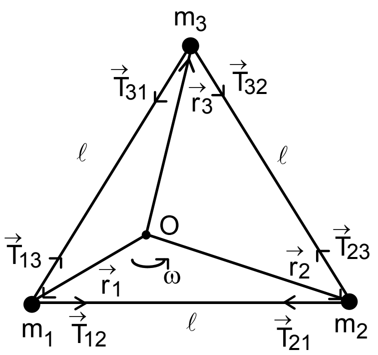
9. a) Elektron bugünkü bilgiler ışığında noktasal gibi kabul edilse de elektronun boyutları değerlendiri-lebilir. Rölativite teorisine göre elektronun durgun bir enerjisi vardır. Bu enerjinin elektronun elektrostatik enerjisine eşit olduğu düşünülürse elektronun yarıçapını hesaplayınız.

b) x yönünde yüksek bir p_0 momentumuyla ilerleyen q yüklü bir parçacık E elektrik alanı yönünde giriş yaparsa bu bölgede t zamanına bağlı olarak kazanılan kinetik enerjiyi bulunuz. $p_0=0$ ise alınan x yolu zamana bağlı olarak bulunuz. Tanecik elektrik alana p_0 momentum ile alana dik girerse çözüm nasıl olur? Parçacığın durgun kütlesi m_0 olarak veriliyor.



c) Synchrophasotron bir yüksek enerjili parçacık hızlandırıcısıdır. Bu sistemde yüklü parçacıklar üzerinde zaman bağımlı B(t) manyetik alanı ile birlikte bir hızlandırıcı voltaj uygulanmaktadır. Bu voltajın açısal frekansı olan $\omega(t)$, B(t) ile aynı anda değişmektedir. Hızlandırı-lan yüklü taneciklerin sabit r yarıçaplı bir yörünge üzerinde hareket etmesi için $\omega(t)$'nin B(t)'ye bağlı olarak nasıl değiştiğini bulunuz.

ŞUBAT KAMPI SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1999-I. Grup



1. Soruyu çözmek için vektörlerle çalışacağız. Kütle merkezine göre

$$m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+m_3\vec{r}_3=0$$

olur. Her hangi bir cismin hareketini inceleyebiliriz. Mesela m_1 kütleli cisim için

$$\vec{T}_{12}+\vec{T}_{13}=-m_1\omega^2\vec{r}_1;\quad \vec{T}_{12}=\frac{T_{12}\vec{\ell}_{12}}{\ell};\quad \vec{T}_{13}=\frac{T_{13}\vec{\ell}_{13}}{\ell}$$

$$\vec{\ell}_{12}=\vec{r}_2-\vec{r}_1;\quad \vec{\ell}_{13}=\vec{r}_3-\vec{r}_1$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{T_{12}\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)}{\ell}+\frac{T_{13}\left(\vec{r}_3-\vec{r}_1\right)}{\ell}=-m_1\omega^2\vec{r}_1$$

olarak yazılabilir. Kütle merkezinin korunmasından

$$\vec{r}_2=-\frac{m_1\vec{r}_1+m_3\vec{r}_3}{m_2}$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi kullanarak

$$\vec{r}_3\left(T_{13}-\frac{m_3}{m_2}T_{12}\right)+\vec{r}_1\left(m_1\omega^2\ell-T_{12}-T_{13}-\frac{m_1}{m_2}T_{12}\right)=0$$

yazabiliriz. Bu ifadenin sıfır verebilmesi için katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan

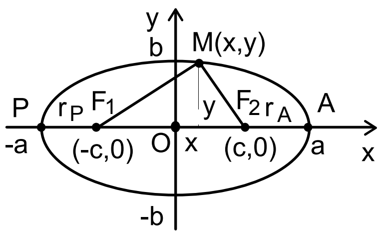
$$T_{13}=\frac{m_3}{m_2}T_{12}$$

$$m_1\omega^2\ell=T_{12}\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{m_3}{m_2}\right);\quad T_{12}=\frac{m_1m_2\omega^2\ell}{m_1+m_2+m_3}$$

olarak bulunur. Diğer cisimler için aynı işlem yapılırsa

$$T_{13}=\frac{m_1m_3\omega^2\ell}{m_1+m_2+m_3};\quad T_{23}=\frac{m_2m_3\omega^2\ell}{m_1+m_2+m_3}$$

elde edilir.



2. Elips, odakları F_1 ve F_2'ye herhangi bir M(x,y) noktasına kadar olan uzaklıkların toplamı sabit olan geometrik noktaların kümesi olarak tanıtılmaktadır.

$$F_1M+MF_2=2a$$

Burada a elipsin büyük yarım ekseni, b küçük yarım ekseni, P perihelion noktası F_1 odak noktasına olan en yakın nokta, A aphelion noktası bu odağa olan en uzak nokta, r_P ve r_A bu noktalara olan uzaklıklar, c ise odak noktalarının merkeze olan uzaklıklarıdır. M(x,y) noktası için

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-2a=-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin karesini alıp

$$xc+a^2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

denklemi elde ederiz. Bu ifadenin karesini alarak

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

denklemi elde ederiz. Burada

$$b^2=a^2-c^2$$

dersek

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

elde ederiz. a^2b^2 ifadesine bölerek

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

elipsin denklemi elde edilir. Elipste

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

eksentrite olarak bilinmektedir. $0<\varepsilon<1$ olmalıdır. Daire için $\varepsilon=0$ olur. En yakın ve en uzak noktalara olan uzaklıklar için

$$a=\frac{r_P+r_A}{2}\ ;\ c=a-r_P=\frac{r_A-r_P}{2}$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{r_P+r_A}{2}\right)^2-\left(\frac{r_A-r_P}{2}\right)^2}=\sqrt{r_A r_P}$$

yazabiliriz. Uydu için en uzak ve en yakın olan A aphelion ve P perihelion noktaları için açısal momentum korunumu yasasını yazabiliriz.

$$L=mv_P r_P=mv_A r_A=\text{sabit}$$

Burada $r_P=r_0$ dır. Enerji korunumu yasasını

$$\frac{mv_P^{\ 2}}{2}-\frac{\gamma m m_D}{r_P}=\frac{mv_A^{\ 2}}{2}-\frac{\gamma m m_D}{r_A}$$

$$v_P^{\ 2}-v_A^{\ 2}=2\gamma m_D\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right)$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$v_P^{\ 2}\left(1-\frac{r_P^{\ 2}}{r_A^{\ 2}}\right)=2\gamma m_D\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right)=2\left(\frac{\gamma m_D}{r_P}\right)\left(1-\frac{r_P}{r_A}\right)=2v_0^{\ 2}\left(1-\frac{r_P}{r_A}\right)$$

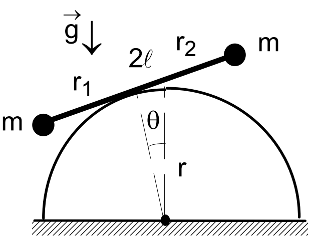
$$1+\frac{r_P}{r_A}=\frac{2v_0^{\ 2}}{v_P^{\ 2}}=\frac{2v_0^{\ 2}}{(v_0+\Delta v)^2}$$

$$r_A=\frac{r_0(v_0+\Delta v)^2}{2v_0^{\ 2}-(v_0+\Delta v)^2}$$

olarak bulunur. Elipsin büyük yarım ekseni a ve küçük yarım ekseni b arasındaki oran

$$\frac{a}{b}=\frac{r_A+r_P}{2\sqrt{r_A r_P}}=\frac{v_0^{\ 2}}{(v_0+\Delta v)\sqrt{2v_0^{\ 2}-(v_0+\Delta v)^2}}$$

olarak bulunur.



3. Yarım küre üzerinde bulunan çubuk kaymadan küçük θ açısı kadar döndüğünde, çubuğun değme noktası küre ile temas sonucu $x=\ell\theta$ kadar yer değişti riyor. Bu cisimlerin değme noktasına göre yeni yarıçapları

$$r_1=\ell-\ell\theta=\ell(1-\theta)$$

$$r_2=\ell+\ell\theta=\ell(1+\theta)$$

olur. Bu aynı zamanda değme noktasına göre iki tarafta bulunan çubukların uzunlukları olur. Değme noktasına göre moment alabiliriz.

$$J_s\alpha=-\left(mgr_2-mgr_1+\frac{2mr_2g}{2\ell}\frac{r_2}{2}-\frac{2mr_1g}{2\ell}\frac{r_1}{2}\right)\cos\theta=-4mg\ell\theta$$

Burada $\sin\theta\approx\theta$; $\cos\theta\approx1$ yaklaşımı yapılmıştır. Sistemin eylemsizlik momenti

$$J_s=\frac{2m(2\ell)^2}{12}+2m\ell^2+m_s x^2\approx\frac{8m\ell^2}{3}$$

Burada x^2'li terim ihmal edilmiştir. Buradan

$$\frac{8m\ell^2}{3}\ddot{\theta}+4mg\ell\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{3g}{2\ell}\theta=0$$

denklemi elde edilir. Titreşimin titreşim açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega=\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}\ ;\ T=\frac{2\pi}{\Omega}=2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

olarak bulunur.

Soruyu enerji yöntemi ile çözebiliriz. Çubuğun uçlarında bulunan m kütleli cisimlerin ve çubuğun çekim potansiyel enerjileri değişmektedir. Çubuğun değme noktası

$$\Delta h=\ell-\ell\cos\theta=\ell(1-\cos\theta)=\frac{\ell\,\theta^2}{2}$$

kadar aşağıya inmektedir. Cisimlerin potansiyel enerjileri

$$\Pi=mg(r_2\sin\theta-\Delta h)-mg(r_1\sin\theta+\Delta h)$$

$$-\frac{2mr_1g}{2\ell}\left(\frac{r_1\sin\theta}{2}+\Delta h\right)+\frac{2mr_2g}{2\ell}\left(\frac{r_2\sin\theta}{2}-\Delta h\right)=$$

$$=\frac{mg}{\ell}\left[\ell(1+\theta)\left(\frac{\ell(1+\theta)\theta}{2}-\frac{\ell\theta^2}{2}\right)-\ell(1-\theta)\left(\frac{\ell(1-\theta)\theta}{2}+\frac{\ell\theta^2}{2}\right)\right]=$$

$$=mg\left(\ell(1+\theta)\theta-\frac{\ell\theta^2}{2}-\ell(1-\theta)\theta-\frac{\ell\theta^2}{2}\right)=4mg\ell\frac{\theta^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Enerji korunumu yasasından titreşimin açısal frekansı

$$W=K+\Pi=\frac{8m\ell^2}{3}\frac{\omega^2}{2}+4mg\ell\frac{\theta^2}{2}\;;\;\Omega=\sqrt{\frac{3.4mg\ell}{8m\ell^2}}=\sqrt{\frac{3g}{2\ell}}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi çıkan sonuçlar aynıdır.

4. İkinci grubun 3. sorusunun çözümüne bakınız.

5. Kondansatör çok uzun olduğundan Gauss teoremi uygulanabilir.

$$\oint\vec{E}d\vec{\ell}=\frac{q}{\varepsilon_0}\;;2\pi\ell rE=\frac{\lambda\,\ell}{\varepsilon_0}\;;\;E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

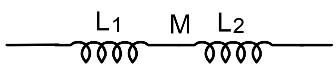
İki elektrot arasında uygulanan potansiyel farkı ifadesinden

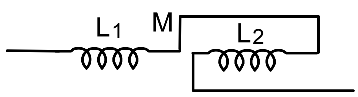
$$U=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}\,d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda\,dr}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}\;;\;\lambda=\frac{2\pi\,\varepsilon_0 U}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

olarak bulunur. Taneciklerin belirtilen yörüngeyi izleyebilmesi şartından ve taneciğin kinetik enerjisinden

$$\frac{mv^2}{r}=qE=\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\;;\;\frac{mv^2}{2}=qU_0;\;U_0=\frac{U}{2\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

olarak bulunur.





6. Birinci ve ikinci bobinde indükte edilmiş em.k.

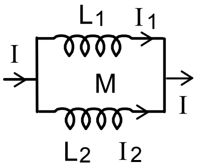
$$\varepsilon_{in1}=-L_1\frac{dI}{dt}\mp M\frac{dI}{dt}\;;\;\varepsilon_{in2}=-L_2\frac{dI}{dt}\mp M\frac{dI}{dt}$$

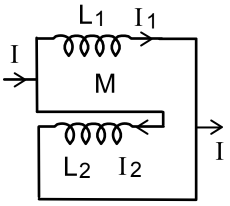
toplam edilmiş em.k.

$$\varepsilon_{in}=\varepsilon_{in1}+\varepsilon_{in2}=-L_1\frac{dI}{dt}\mp M\frac{dI}{dt}-L_2\frac{dI}{dt}\mp M\frac{dI}{dt}=$$

$$(L_1+L_2\mp 2M)\frac{dI}{dt}\;;\;L=-L_1+L_2\mp 2M$$

olarak bulunur.





Her bobinde indükte edilmiş em.k. için

$$\varepsilon_{in}=-L\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_{in}=-L_1\frac{dI_1}{dt}\mp M\frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{in}=\mp M\frac{dI_1}{dt}-L_2\frac{dI_2}{dt}$$

$$I=I_1+I_2$$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L & L_1 & M \\ L & M & L_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{dI}{dt} \\ \dfrac{dI_1}{dt} \\ \dfrac{dI_2}{dt} \end{vmatrix} = 0$$

matris denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L & L_1 & M \\ L & M & L_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$

olarak bulunur.

7. İkinci grubun 4. sorusunun çözümüne bakınız.

8. a) Gelen ışık demeti düz yüzeyden kırılmadan geçmektedir. Küresel ayna için $f= -\frac{R}{2}$ olduğundan bu ışınlar aynanın sağında $b_1=\frac{R}{2}$ uzaklıkta odaklanır. Bu nokta düzlemsel yüzeyden

$$a_2 = h + \frac{R}{2}$$

kadar uzakta olup (n) ortamı içindedir. Düzlemsel yüzey için R=∞ olduğundan,

$$\frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1-n}{\infty}$$

$$b_2 = -\frac{R+2h}{2n}$$

olarak bulunur. Son görüntü noktası düzlem yüzeyin sağındadır.

b) Küresel yüzeyde kırılma nedeni ile

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{-R}$$

yazılabilir. Buradan

$$b_1 = -\frac{nR}{n-1}$$

olarak bulunur. İçbükey yüzeyin verdiği görüntü bu yüzün sağında ve $\frac{nR}{n-1}$ kadar uzaktadır. Bu görüntü düzlem aynanın sağında ve aynadan

$$a_2 = h + \frac{nR}{n-1}$$

kadar uzakta bir cisim gibi davranır. Düzlem ayna sol tarafında kendine

$$b_3 = h + \frac{nR}{n-1}$$

kadar uzakta bir görüntü oluşturur. Bu görüntü küresel yüzey için

$$a_3 = h + b_2 = 2h + \frac{nR}{n-1}$$

kadar uzakta ve (n) ortamı içinde bir cisim gibi davranır. Işık küresel yüzeyi dışbükey olarak görmektedir

$$\frac{n}{a_3} + \frac{1}{b_3} = \frac{1-n}{R}$$

denkleminden,

$$b_3 = -\frac{[2h(n-1) + nR]R}{2(n-1)[(n-1)h + nR)]}$$

olarak bulunur. Son görüntü noktası küresel yüzün solunda ve bu yüzeyden b_3 kadar uzaktadır.

9. İkinci grubun 7. sorusunun çözümüne bakınız.