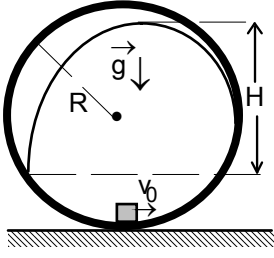


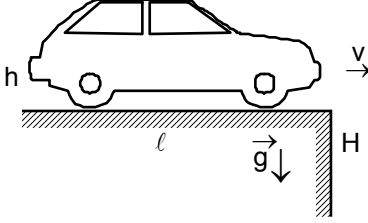
ŞUBAT KAMPI SINAVI-1997



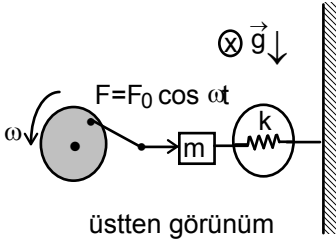
1. Noktasal bir cisim yarıçapı R olan içi boş kürenin iç tarafında hareket edebilmektedir. Cisim başlangıçta kürenin en alt noktasında bulunmaktadır. Cisime verilen hıza bağlı olarak cisim ile küresel yüzey arasındaki temas kesilebilir. Bu problemde cisime verilen hız küresel yüzey ile teması kesilebilecek değerdedir. (Havanın direnci ve tüm yüzeylerdeki sürtünmeler yok sayılmaktadır.) Yerçekimi ivmesi g veriliyor.

a) Kürenin en alt noktasından cisime yatay yönde verilen v_0 ilk hızının değeri ne olmalıdır ki, cismin ulaştığı en yüksek nokta ile kürenin iç yüzü üzerine düştüğü nokta arasındaki yükseklik H maksimum olsun?

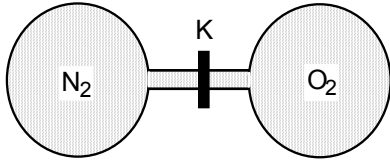
b) $\frac{H}{R}$ oranı nedir?



2. Yatay yol üzerinde v hızı ile giden bir araba, derinliği H olan bir uçuruma yaklaşmaktadır. Arabanın ön ve arka tekerlekleri arasındaki uzunluk ℓ , kütle merkezinin yerden yüksekliği h, kütlesi m, kütle merkezine göre eylemsizlik momenti J ve yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor. Araba uçurumun dibine düşene kadar havada kaç takla atar?



3. Yatay ve sürtünmesiz düzlem üzerinde kütlesi m olan bir takoz bulunmaktadır. Takoz bir tarafın-dan, içinde yay sabiti k olan yaylı bir dinamometre ile dikey bir duvara tutturulmuştur. Takozun diğer tarafına ise sabit ω açısal hızı ile dönen bir motor ile $F=F_0 \cos \omega t$ kuvveti uygulanmaktadır. Dinamometre ile ölçülen kuvvetin maksimum değeri, uygulanan kuvvetin maksimum değerinden üç kere büyük ise yay sabiti k nedir?



4. Birbirine dar bir boru ile bağlanmış ve kapalı K musluğu ile birbirinden ayrılan iki kaptan birisinde oksijen, diğerinde ise azot gazı bulunmaktadır. Musluğun kesit alanı S dir. Her iki gaz da aynı T_0 sıcaklığında, V_0 hacimde ve P_0 basıncında bulunmaktadır.

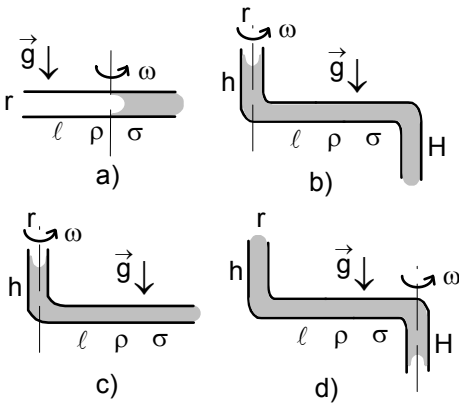
a) Musluğun açılmasından sonra kaplardaki basıncı zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

b) Ne kadar zaman sonra ve hangi kapta basınç maksimum olur?

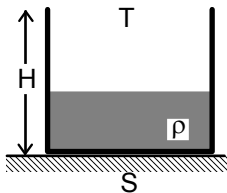
c) Maksimum ile minimum basınçlar arasındaki fark nedir?

d) Çok uzun bir zaman sonra kaptaki basınçlar nedir?

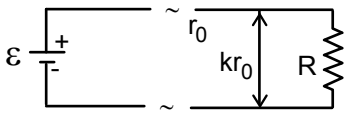
Not: Oksijeninin molar kütlesi 32gr/mol, azotun molar kütlesi 28 gr/mol olarak veriliyor.



5. Her birinin uzunluğu ℓ ve yarıçapı r olan dört kılcal boru içinde özkütlesi ρ , yüzey gerilim katsayısı σ olan bir sıvı bulunmaktadır. Birinci boru sadece yatay, ikinci boru yatay ve dikey, diğer iki boru ise yatay ve iki dikey bölümden oluşmuştur. Birinci boru, ortasından geçen eksen etrafında, diğer üç boru uçlarından geçen eksenler etrafında sabit ω açısal hızı ile döndürülmektedir. Her dört durumda kılcal borudan sıvının akabilmesi için ω açısal hızını bulunuz.

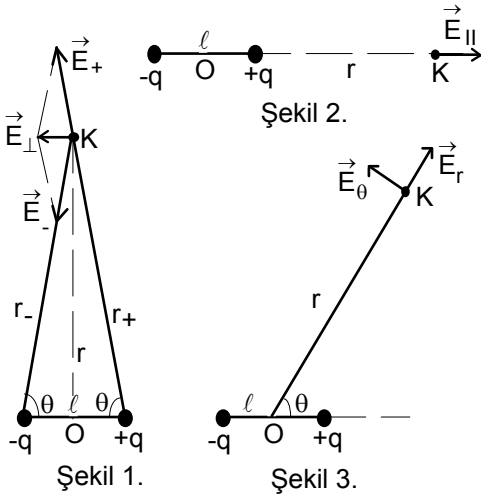


6. Düşey konumda bulunan, $H=10$ cm yüksekliğinde, ağzı açık bir kabın yarısı su ile doludur. Ortamın sıcaklığı $T=27$ °C, havanın bağıl nem oranı $\phi=60\%$, bu sıcaklıkta doymuş buhar basıncı $P_b=27$ mm Hg, suyun molar kütlesi $\mu=18$ gr/mol, gaz sabiti $R=8,314$ J/mol.K, suyun özkütlesi $\rho=1000$ kg/m³ ve kabın kesit alanı $S=1$ dm² olarak veriliyor. Hava-su buharı sisteminde ortalama serbest yolu $\lambda \approx 10^{-7}$ m ve su yüzeyi civarında buharın doymuş olduğunu kabul ederek, kaptaki suyun ne kadar zaman sonra tamamen buharlaşacağını bulunuz.



7. Yarıçapı r_0 olan çok uzun, direnci ihmal edilebilir iki tel paralel olarak yerleştiriliyor. Bu iki tel arasındaki uzaklık kr_0 olup k bir sabittir. Tellere etki eden net kuvvetin sıfır olması için tellerin ucundaki R direncin değeri ne olmalıdır?

Not: Gerekli olan sabitleri kullanabilirsiniz.



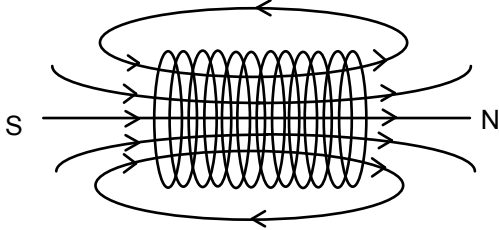
8. Manyetik dipolün yarattığı manyetik alanı hesaplamak için elektrik dipolün oluşturulduğu elektrik alanı benzerliğinden faydalanabiliriz. Elektrik dipol birbirinden ℓ uzaklıkta bulunan $+q$ ve $-q$ noktasal yüklerden ibarettir. Elektrik dipolün merkezinin başlangıç noktası O olan bir koordinat sisteminde bulunduğunu farz edelim. Bu dipolden çok uzak bir K noktasında ($r \gg \ell$) meydana gelen elektrik alanı kolayca bulunabilir. (r uzaklığı O noktası ile K noktası arasındaki uzaklıktır. Bu hesaplarda x küçük ise

$$(1+x)^n \approx 1+nx \text{ ve } \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x$$

yaklaşımı kullanılabilir.) İlk olarak, elektrik dipolün alanını bulmak için Şekil 1. ve Şekil 2. durumları incelenebilir ve sonra bu iki durumun süperpozisyonu yapılabilir.

a) Şekil 1. deki ve Şekil 2. deki durumlar için E_{\parallel} ve E_{\perp}

elektrik alanlarını bulunuz. Şekil 3. teki gösterilen elektrik dipolünden r uzaklıkta, eksenle θ açısı yapan K noktasında yaratılan elektrik alanı için genel bir ifade bulunuz.



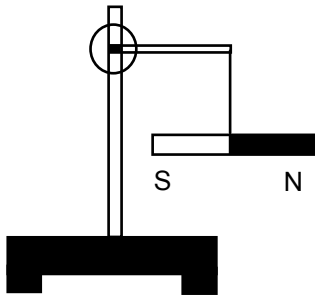
Şekil 4.

Doğada birbirinden ayrı, izole edilmiş manyetik kutuplar (monopol) yoktur. Bu sebeple manyetik alan çizgileri kapalı çizgilerdir. Çubuk şeklindeki bir mıknatıs kırılırsa iki mıknatıs oluşur. Çubukta kutupların sadece çubuğun uçlarında yoğunlaştığını kabul edebiliriz. Bu sebeple çubuk şeklindeki bir mıknatıs bir manyetik dipol momentini kabul edilebilir. Suni olarak manyetik dipol momentini selenoid ile yaratılmaktadır. Manyetik dipol momentini $p_m = IS_a$ olarak veriliyor. Burada I akan akım, S_a ise bu akımın çevrelediği kesit alanıdır. Özellikle

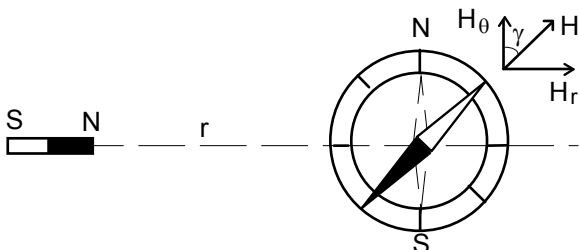
selenoid için $p_m = NIS_a$ yazılabilir. Burada N sarım sayısıdır. Selenoidin kuzey mıknatıs N kutbu selenoidten alan çizgilerinin çıktığı taraftır. Selenoidin güney mıknatıs S kutbu alan çizgilerin selenoide girdiği taraftır. (Şekil 4.)

b) Bir manyetik dipolden r uzaklıkta ve eksenle θ açısı yapan bir noktadaki manyetik alan vektörünü bulunuz.

Not: Boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısı μ_0 olarak verilmektedir.



Manyetik alan içinde bulunan bir manyetik dipole etki eden dönme momenti $\vec{\tau} = \vec{p}_M \times \vec{H}_0$ olarak yazılabilir. Manyetik dipol rolünü çubuk şeklinde kütlesi m ve uzunluğu ℓ olan bir sabit mıknatıs oynayabilir. Burada H_0 yerin manyetik alan şiddetinin yatay bileşenidir. Çubuk, uzun bir ipe ortasından asılarak küçük titreşimlerinin periyodu T olarak ölçülmektedir. (Sürtünme, direniş kuvvetleri ve ipin burkulması ihmal ediliyor)



Sonra çubuk N - S yönünde yönlendirilen ve çubuktan r uzaklıkta bulunan manyetik pusulaya yaklaştırılıyor. Yaklaştırılan çubuğun manyetik dipol etkisi ile pusula belli γ açısıyla sapmaktadır. Bu sapma manyetik dipol momentinin yarattığı manyetik alan ve yerin yatay manyetik alanından kaynaklanmaktadır. (Sapma açısını çok duyarlı bir şekilde ölçeriz)

c) Yerin H_0 manyetik alanının şiddetinin yatay bileşenini bulunuz.

9. Tek yarıkla yapılan kırınım deneyinde tek renkli ışık kaynağının dalga boyu $\lambda=0,5 \mu\text{m}$ dir. Yarığın önüne kırıcılık indisi $n=2$ olan camdan yapılmış bir yüzü düzlem, diğer yüzü ise yarıçapı $R=2 \text{ m}$ olan küresel yakınsak mercek konulmuş-tur ve kırınım deseni bir ekran üzerinde gözlenmektedir.

a) Yarık aralığı 5 cm iken ekrandaki aydınlanma desenini tarif ediniz.

b) Yarık aralığı $0,1 \text{ mm}$ olduğu durumda $6 \times 6 \text{ cm}$ boyutlarında bir ekran üzerindeki aydınlanma dağılımını grafiksel olarak çiziniz.

c) Eğer kaynak $\lambda=0,75 \mu\text{m}$ lik ikinci bir dalga boyunu da içerirse, ekrandaki desende ne gibi değişiklikler gözlenir?

10. Özel rölativite teorisinin temelinde iki farklı referans sisteminde uzay ve zaman açısından incelenen olaylar arasındaki ilişkiler bulunur. Bütün sonuçlar iki postula üzerinde kuruludur. Birinci postulaya göre çevreyle hiç bir ilişkisi olmayan bir cismin sabit hızla gittiği hiç bir deneyle kanıtlanamaz. İkinci postulaya göre ise, evrende var olan en yüksek hız, ışığın boşluktaki hızı olup tüm referans sistemlerinde bu hız sabittir. Bu postulalardan yola çıkarak, aynı olayı x eksenleri birbirine çakışık olan hareketsiz K ve bu sisteme göre, $+x$ yönünde sabit bir v hızı ile hareket eden K' referans sistemlerinde inceleyelim.

a) K sisteminde $x=y=z=0$ koordinatlarında ve $t=0$ anında bir işaret fişeği ateşlenerek etrafında küresel aydınlanma oluşturmaktadır. $t=0$ anında her iki koordinat sisteminin orijinleri üst üste bulunmaktadır. Işığın küresel dağılımını her iki koordinat sisteminde de ifade ediniz.

b) İki koordinat sistemi arasındaki Galileo dönüşümleri $x=x'+vt$, $y=y'$, $z=z'$ ve $t=t'$ olarak verilmektedir. Düşük hızlarda bu dönüşümler geçerli olmasına rağmen yüksek hızlarda özel rölativite teorisindeki ikinci postulaya uymamaktadırlar. Bu durumda zaman koordinatlarında değişikliğe uğrayacağını göz önüne alarak ve a) şıkkındaki denklemlerden yola çıkarak, özel rölativite teorisinde geçerli olan, Lorentz dönüşümleri adı verilen dönüşümleri türetiniz.

c) Bu yeni bakış açısı ile, her olaya ait x,y,z gibi üç uzay koordinatı ile birlikte birde t zaman koordinatı tanımlanmaktadır. Bu dört boyutlu uzayda Lorentz dönüşümlerinin

$$x'=x \cdot \cosh\theta - ct \cdot \sinh\theta$$

$$ct'=ct \cdot \cosh\theta - x \cdot \sinh\theta$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

Not: Hiperbolik fonksiyonlar sinüs hiperbolik $\sinh x$, kosinüs hiperbolik $\cosh x$, tanjant hiperbolik $\tanh x$, ve kotanjant hiperbolik $\text{ctgh} x$ olarak aşağıda verildiği gibi tanımlanırlar ;

$$\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} ; \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} ; \text{ctgh}\theta = \frac{\cosh\theta}{\sinh\theta}$$

Hiperbolik fonksiyonlar için geçerli olan temel denklem

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

olarak verilir.

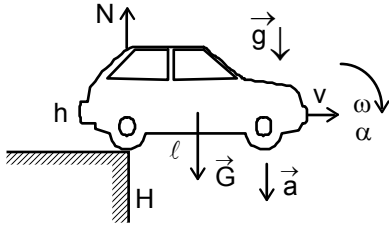
d) K sisteminde $+x$ yönünde, v sabit hızı ile hareket etmekte olan bir cismin K' sistemindeki bir gözlemci tarafından ölçülen hız bileşenleri nelerdir?

e) Kendi referans sisteminde a_0 ivmesi ile $+x$ yönünde harekete geçen cismin ivmesi K koordinat sisteminde nasıl transforme olur?

f) Işık hızının sabit olmasından dolayı bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçişinde ışığın yönü değişmektedir. K koordinat sisteminde x eksene göre θ açı ile gelen ışın K' koordinat sistemine göre hangi açı ile hareket etmektedir?

g) Işık hızının sabit olmasından dolayı bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçişinde ışığın frekansı değişmektedir. K koordinat sisteminde küresel olarak yayılmakta olan ışığın frekansı ν ise K' sistemindeki gözlemcinin algıladığı frekans nedir?

h) K sistemindeki kütlesi m , momentum bileşenleri p_x , p_y , p_z ve enerjisi W olan bir parçacık için momentum ve enerji için, Lorentz dönüşümlerine ait denklemleri türetiniz.



2. Arabanın arka tekerlekleri uçurumun ucuna geldiklerine arabaya etki eden kuvvetler ağırlık kuvveti G ve tepki kuvveti N dir. Newtonun ikinci yasasından

$$mg - N = ma$$

yazabiliriz. Aynı zamanda tepki kuvvetinin etkisi ile araba kütle merkezinin etrafında dönmeye başlar. Arabaya etki eden moment

$$M = J\alpha = N \frac{\ell}{2}; J = \frac{m\ell^2}{12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada α açısal ivme, $r = \frac{\ell}{2}$ yarıçap olup

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2a}{\ell}$$

olarak verilir. Arabanın kazandığı açısal ivme

$$\alpha = \frac{2g}{\ell \left(1 + \frac{4J}{m\ell^2} \right)}$$

olarak bulunur. Araba $t_1 = \frac{\ell}{v}$ zaman içinde

$$\omega = \alpha t_1$$

açısal hızını kazanmaktadır. Araba düşünceye kadar geçen zaman

$$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

araba düşene kadar döndüğü açı

$$\varphi = \omega t_2$$

ve arabanın dönerken attığı takla sayısı

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\sqrt{2gH}}{\pi v \left(1 + \frac{4J}{m\ell^2} \right)} = \frac{3\sqrt{2gH}}{4\pi v} \approx \frac{\sqrt{2gH}}{4v}$$

olarak bulunur.

3. Sistemin hareket denklemi

$$ma = m \ddot{x} = -kx + F_0 \cos \omega t; \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0 \cos \omega t}{m}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sönümsüz zorlanmış titreşimlerin denklemdir. Sistemin serbest halde iken açısal titreşim frekansı

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

dır. Sistemin hareket denkleminin çözümü

$$x = A \cos \omega t$$

şeklinde yazılabilir. İki kere türev alınırsa

$$\ddot{x} = -\omega^2 A \cos \omega t$$

bulabiliriz. Diferansiyel denkleme koyduğumuzda ve $\cos \omega t$ sadeleştirdikten sonra genlik için

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = 3F_0$$

yazabiliriz. Buradan yay sabiti

$$k = \frac{3m\omega^2}{2}$$

olarak bulunur.

4. a) Sıcaklığı sabit olan sistemlerde Maxwell dağılımı gerçekleşmektedir. dt zamanda S alandan geçen molekül sayısı dN

$$dN = -\frac{n_0 S \bar{v} dt}{4} = -\frac{NS \bar{v} dt}{4V}$$

ile verilir. Burada $n_0 = \frac{N}{V}$ moleküllerin konsantrasyonu, $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ moleküllerin aritmetik ortalama hızıdır. Birinci kapta moleküllerin sayısı N_{A1} ve N_{O1} , ikinci kaptaki moleküllerin sayısı N_{A2} ve N_{O2} olsun. Her an için

$$N_{A1} + N_{A2} = N_{O1} + N_{O2} = N$$

yazabiliriz. Her kapta bulunan gazların diğer kaba geçmeleri iki kapta bulunan gazlarının konsantrasyonun farkı ile orantılı olur.

$$dN_{A1} = -\frac{(N_{A1} - N_{A2})S \bar{v}_A dt}{4V} = -\frac{(2N_{A1} - N)S \bar{v}_A dt}{4V}$$

$$dN_{A2} = \frac{(N_{A1} - N_{A2})S \bar{v}_A dt}{4V} = \frac{(N - 2N_{A2})S \bar{v}_A dt}{4V}$$

$$dN_{O1} = -\frac{(N_{O1} - N_{O2})S \bar{v}_O dt}{4V} = -\frac{(2N_{O1} - N)S \bar{v}_O dt}{4V}$$

$$dN_{O2} = \frac{(N_{O1} - N_{O2})S \bar{v}_O dt}{4V} = \frac{(N - 2N_{O2})S \bar{v}_O dt}{4V}$$

İntegrasyon sonucu

$$N_{A1} = \frac{N}{2} \left(1 + e^{-\frac{S \bar{v}_A t}{4V}} \right); N_{A2} = \frac{N}{2} \left(1 - e^{-\frac{S \bar{v}_A t}{4V}} \right); N_{O1} = \frac{N}{2} \left(1 - e^{-\frac{S \bar{v}_O t}{4V}} \right); N_{O2} = \frac{N}{2} \left(1 + e^{-\frac{S \bar{v}_O t}{4V}} \right)$$

olarak bulunur. Birinci kaptaki ve ikinci kaptaki basınç

$$P_1 = \frac{(N_{A1} + N_{O1})kT}{V} = \frac{P}{2} \left(2 + e^{-\frac{S \bar{v}_A t}{4V}} - e^{-\frac{S \bar{v}_O t}{4V}} \right)$$

$$P_2 = \frac{(N_{A2} + N_{O2})kT}{V} = \frac{P}{2} \left(2 - e^{-\frac{S \bar{v}_A t}{4V}} + e^{-\frac{S \bar{v}_O t}{4V}} \right)$$

olarak bulunur.

b) Kaplardan birisinde maksimum diğerinde ise minimum basınç gerçekleşiyor. Türev aldığımızda

$$\frac{dP_1}{dt} = 0; t = \frac{4V}{S(\bar{v}_A - \bar{v}_O)} \ln \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_O}$$

olarak bulunur.

c) Her kaptaki basınç için

$$P_1 = \frac{P}{2} \left\{ 2 + \left(\frac{\bar{v}_O}{\bar{v}_A} \right)^{\frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_A - \bar{v}_O}} \left[1 - \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_O} \right] \right\}; P_2 = \frac{P}{2} \left\{ 2 + \left(\frac{\bar{v}_O}{\bar{v}_A} \right)^{\frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_A - \bar{v}_O}} \left[1 + \frac{\bar{v}_A}{\bar{v}_O} \right] \right\}$$

yazabiliriz. Aralarındaki fark

$$\Delta P = P_2 - P_1 = P \left(\frac{\bar{v}_O}{\bar{v}_A} \right)^{\frac{\bar{v}_O}{\bar{v}_A - \bar{v}_O}} = P \left(\frac{7}{8} \right)^{\frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{8} - \sqrt{7})}}$$

olarak bulunur.

d) $t \rightarrow \infty$ $P_1 = P_2 = P$ olur.

5. Dönme sonucu sıvı borunun uçlarında yarımküre şeklini almaktadır. Böyle eğrisel yüzeylerde Laplas basıncı etki etmektedir. Laplas basıncı

$$P_L = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Sıvının akmasını incelemek için dönme sonucu oluşan dinamik ile Laplas basıncının denge durumunun incelenmesi gerekir.

a) x uzaklıkta dx kalınlıkta seçilen parçaya etki eden kuvvet

$$dF = dP \cdot S = dm \cdot \omega^2 x = \rho S \omega^2 x dx$$

olur. Buradan dinamik basınç

$$P_d = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \rho \omega^2 x dx = \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{8}$$

olarak bulunur. Sıvının akması için dinamik basınç Laplas basıncından büyük olması gerekir ve buradan

$$\frac{\rho \omega^2 \ell^2}{8} > 2 \cdot \frac{2\sigma}{r}; \omega > \frac{4}{\ell} \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho r}}$$

olarak bulunur.

b) Borunun sol ve sağ uçlardaki basınçlar

$$P_{\text{sol}} = P_0 + \rho gh - \frac{2\sigma}{r}; P_{\text{sağ}} = P_0 - \rho gH - \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{2} + \frac{2\sigma}{r}$$

denge durumunda birbirine eşittir. Buradan

$$\omega > \sqrt{\frac{8\sigma - 2\rho gr(h+H)}{\rho r \ell^2}}$$

olarak bulunur.

d) Borunun sol ve sağ uçlarındaki basınçlar

$$P_{\text{sol}} = P_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{r} - \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{2}; P_{\text{sağ}} = P_0 - \rho gH - \frac{2\sigma}{r}$$

denge durumunda birbirine eşittir. Buradan

$$\omega > \sqrt{\frac{8\sigma + 2\rho gr(h+H)}{\rho r \ell^2}}$$

olarak bulunur.

c) İkinci, üçüncü ve dördüncü durumda dinamik basınç aynıdır.

$$P_d = \int_0^{\frac{\ell}{2}} \rho \omega^2 x dx = \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{2}$$

borunun sol ve sağ uçlardaki basınçlar

$$P_{\text{sol}} = P_0 + \rho gh - \frac{2\sigma}{r}; P_{\text{sağ}} = P_0 - \frac{\rho \omega^2 \ell^2}{2} + \frac{2\sigma}{r}$$

denge durumunda birbirine eşittir. Buradan

$$\omega > \sqrt{\frac{8\sigma - 2\rho ghr}{\rho r \ell^2}}$$

olarak bulunur. Bu soruda boruların kesit alanı S=sabit ve h=sabit olduğundan Bernuli denklemini kullanılamaz.

6. Buharlaşan sıvının miktarı

$$d(\Delta M) = -D \frac{\Delta \rho_b}{\Delta x} S dt$$

$$\Delta \rho_b = \rho_b - \rho_{b\varphi} = \frac{\mu P_b}{RT} - \frac{\mu \varphi P_b}{RT} = \frac{\mu(1-\varphi)P_b}{RT}; \Delta x = H-h$$

ifadesi ile verilir. Burada $D = \frac{\lambda v}{3}$, difüzyon katsayısıdır. $\left(v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \right)$ Buharlaşan tüm su miktarı için

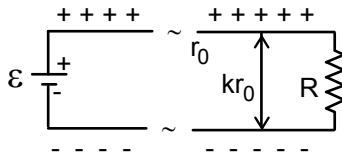
$$d(\Delta M) = \rho S dh = - \frac{\mu(1-\varphi)P_b S dt}{RT(H-h)}$$

yazabiliriz. Burada zaman için

$$\int_{\frac{H}{2}}^H (H-h) dh = - \int_0^t \frac{\lambda v \mu (1-\varphi) P_b dt}{3 \rho RT}$$

$$t = \frac{3 \rho R H^2}{8 \lambda v \mu (1-\varphi) P_b} = \frac{3 \cdot 1000 \cdot 8,314 \cdot 3000 \cdot 0,1^2 \cdot 76}{8 \cdot 10^{-7} \cdot 645 \cdot 18 \cdot 10^{-3} (1-0,6) \cdot 2,7 \cdot 10^5} \approx 66 \text{ gün}$$

olarak bulunur.



7. Durgun durumda üst tel (+) yüklü, alt tel (-) yüklüdür. Her telin yarattığı elektrik alan silindirik simetriye sahip olup Gauss teoreminden bulunur.

$$\oint_{\ell} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{\epsilon_0}; E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

Burada λ birim uzunluktaki yük olup sabittir. Teller arasında birim uzunluğa etki eden elektriksel kuvvet

$$F_e = \lambda \cdot 1 \cdot E = \frac{\lambda^2}{2\pi r \epsilon_0}$$

olur. Teller arasındaki potansiyel fark

$$\epsilon = 2 \int_{r_0}^{kr_0} E dr = 2 \int_{r_0}^{kr_0} \frac{\lambda dr}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \ln k$$

akan akım

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{\lambda}{R \pi \epsilon_0} \ln k$$

olarak yazılabilir. Teller arasında birim uzunluğa etki eden manyetik kuvvet

$$F_m = IB \cdot 1 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r}$$

olur. Teller üzerine etki eden toplam kuvvet sıfır olduğunda elektrik ve manyetik kuvvetler birbirine eşittir.

$$\frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} = \frac{\lambda^2}{2\pi r \epsilon_0}$$

Buradan direnç

$$R = \frac{\ln k}{\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

olarak bulunur.

8. a) Elektrik alan çizgilerinin +q yükten çıktığını ve -q yüke girdiğini kabul edilmiştir. K noktasındaki elektrik alan bu iki yükün yarattığı elektrik alanın vektörel toplamı olacaktır. Bu elektrik alanın büyüklüğü

$$E_{\perp} = 2 \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_{\pm}^2} \cos\theta = \frac{q\ell}{4\pi \epsilon_0 r^3} = \frac{p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

olarak yazılabilir. Burada $r_+ = r_- \approx r$, $\cos\theta = \frac{\ell}{2r}$ olarak yazılabilir. (Burada $p_E = q\ell$ dipolün elektrik dipol momentidir) K noktası dipolün eksenin üzerinde geçen bir doğru üzerinde ise toplam elektrik alan

$$E_{\parallel} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_+^2} - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r_-^2} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\right) - \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{\ell}{r}\right) = \frac{2p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

olarak yazılabilir. Burada $r_+ = r - \frac{\ell}{2}$ ve $r_- = r + \frac{\ell}{2}$ olarak veriliyor. Dipol merkezinden geçen doğrultu dipolün eksenine ile rasgele bir θ açısı yapmakta ise K noktadaki elektrik alan birisi $E_{\parallel} = E_r$ diğeri de $E_{\perp} = E_{\theta}$ olan alanların vektörel toplamı olarak bulunulabilir. Bu alanları yaratmak için bir noktaya +q ve -q yükleri koyalım. Bu durumda E_r elektrik alanı aralarındaki mesafe $\ell_{\parallel} = \ell \cos\theta$ iki noktasal yükten oluşturulan dipolden yaratılmaktadır. Dipolün diğer E_{θ} alanı ise $\ell_{\perp} = \ell \sin\theta$ iki noktasal yükten oluşturulan dipolden yaratılmaktadır. Bu durumda elektrik alanların bileşenleri

$$E_r = \frac{2p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3} \cos\theta ; E_{\theta} = \frac{p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sin\theta$$

olarak bulunur. Elektrik alanın büyüklüğü

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_{\theta}^2} = \frac{p_E}{4\pi \epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

olarak bulunur.

b) Manyetik dipol momentinin yarattığı manyetik alan şiddeti

$$B = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

olarak yazılır.

c) Çubuk şeklindeki bir sabit mıknatıs alındığında ve uzun bir ipe asıldığında çubuğa etki eden moment $M = p_M H_{\theta} \sin\beta$ şeklinde yazılabilir. Burada H_{θ} yerine manyetik alanın şiddetinin yatay bileşenidir. Sürtünme, direniş kuvvetleri ve ipin burkulmasını ihmal ederek çubuğun küçük titreşimlerin denklemini (Bu hesaplarda β açısı küçük ise $\sin\beta \approx \beta$ ve $\cos\beta \approx 1$ yaklaşımı kullanılabilir)

$$J\alpha = J\beta'' = -p_M B_{\theta} \sin\beta = -p_M B_{\theta} \beta$$

şeklinde yazılabilir. Burada $J = \frac{m\ell^2}{12}$ çubuğun eylemsizlik momentidir. Çubuğun titreşim periyodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{p_M B_{\theta}}}$$

olarak yazılır. Burada B_{θ} ve p_M bilinmeyen fizik büyüklüklerdir. Sapma açısı için

$$\text{tg}\gamma = \frac{B_r}{B_{\theta}}$$

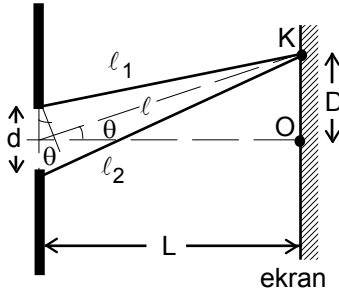
yazabiliriz. Manyetik dipol için

$$B_r = \frac{2\mu_0 p_M}{4\pi r^3}$$

Buradan p_M bulup yerin yatay bileşeni

$$B_{\theta} = \frac{2\pi}{Tr} \sqrt{\frac{m\mu_0}{24\pi \ell^2 \text{rtg}\gamma}}$$

olarak bulunur.



9. Ekran üzerindeki bir K noktası ile yarığın merkezinden ekrana doğru geçirilen dik doğru arasındaki açı θ olsun. Kırınımına uğrayan ışınlar arasındaki yol ve faz farkı

$$\Delta = d \sin \theta = l_2 - l_1 = \frac{dx}{\ell}; \quad \varphi = \omega t = \frac{\omega \Delta}{c} = \frac{2\pi \Delta}{Tc} = \frac{2\pi \Delta}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

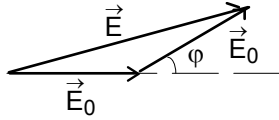
olarak yazılabilir. Karanlık çizgi saçakların oluşma şartı

$$\Delta = k\lambda$$

aydınlık çizgi saçakların oluşma şartı ise

$$\Delta = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda$$

şeklinde yazılabilir.



Yarığın iki ucundan gelen elektromanyetik dalganın elektrik alan vektörü

$$E_1 = E_0 \sin \omega t; \quad E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

İki vektörün süperpozisyonunu yaparak elektrik alan vektörü K noktasında

$$E = 2E_0 \cos \frac{\varphi}{2}$$

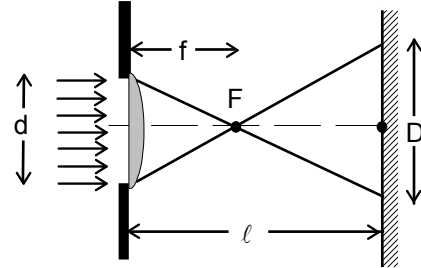
olarak yazılabilir. Işık şiddeti

$$J \sim E^2; \quad J \sim 4E_0^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = J_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}; \quad J_0 \sim 4E_0^2$$

şeklinde yazılabilir. Bu merkezdeki ışık şiddetidir. Genelde φ açısı küçük bir açı olduğundan ışık şiddeti için daha kullanışlı bir ifade bulabiliriz.

$$J = J_0 \frac{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = J_0 \frac{\sin^2 \varphi}{4 \frac{\varphi^2}{4}} = J_0 \frac{\sin^2 \varphi}{\varphi^2} = J_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right)^2}$$

Bu ifade tek yarık için geçerli olan ışık şiddetinin dağılımını vermektedir.



a) $d=5$ cm ise kırınım olayı yoktur. Merceğin odak uzaklığı

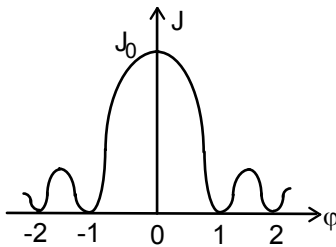
$$f = \frac{R}{n-1} = 1 \text{ m}$$

Yarığa düşen ışık demeti mercekten f uzaklıkta odaklanıyor.

Mercek ile ekran arasındaki uzaklık ℓ ise ekran üzerindeki ışık demetinin çapı

$$D = \frac{(\ell - f)d}{f}$$

olur. ℓ ye bağlı olarak ekran üzerindeki ışıklı bölgenin aydınlanması mercek üzerinde aydınlanmasından büyük ($f < \ell < 2f$) ya da küçük ($\ell > 2f$) olabilir.



b) Aydınlanma ekran üzerinde çok belirli merkezi bir maksimum ve şiddetleri gittikçe azalan maksimumlardan ibarettir. Kırınım olayında neredeyse tüm enerjinin merkezi bölgede yoğunlaştığını kabul edebiliriz. Aydınlanma deseni faz farkına bağlı olarak şekilde verilmiştir. Bu şekilden faz farkı azaldıkça merkezi maksimum daha dar, diğer maksimumların birbirine daha yakın olacağı anlaşılmaktadır. Kırılma yasasını kullanarak $n = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'}$, aydınlanma şiddetinde $\sin \theta$ gördüğümüz

yerine $\frac{\sin \theta}{n}$ koymalıyız. Küçük açılar için

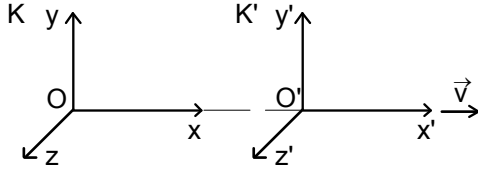
$$\sin \theta \approx \tan \theta = \frac{y}{f}$$

yaklaşımını kullanarak 6×6 cm ekran üzerindeki minimum noktalar

$$y = \frac{k\lambda f}{d}; \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$$

şartından bulunur. Ekran üzerinde optik eksenin alt ve üst tarafında altışar minimum görülür. Merkezi aydınlık saçak $\pm 0,5$ cm lik bölgede oluşur.

c) Her iki dalga boyu kendine özgü kırınım deseni oluşturur. $\lambda_2 = 0,75 \mu\text{m}$ için $\pm 0,75$ cm, $\pm 1,5$ cm, $\pm 2,25$ cm ve ± 3 cm'lerde minimum vardır. Bunlardan $\pm 1,5$ cm ve ± 3 cm de oluşanlar $\lambda_1 = 0,5 \mu\text{m}$ 'ye ait minimumlar oluşur. Ayrıca λ_1 'e ait 0,5 cm, 1 cm, 2 cm ve 2,5 cm deki minimumlar üzerine λ_2 'nin $3 \neq 0$ dan farklı sayıları bindiği için bu noktalar artık karanlık çizgidir.



10. a) K koordinat sistemi hareketsiz, K' ise hareketli koordinat sistemi olsun. İki koordinat sistemin x ve x' eksenleri çakışmış, K' koordinat sistemi ise v sabit hızı ile K koordinat sisteme göre hareket etsin. Küresel aydınlanma K koordinat sisteminde

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

şeklinde yazılabilir. Bizi ilgilendiren x yönündeki dönüşümlerdir. Bu sebeple iki koordinat sistemde küresel aydınlanma

$$x^2 - c^2 t^2 = 0; x'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

şeklinde ifade edilebilir.

b) İki koordinat sistemin koordinatlarının arasındaki dönüşüm

$$x = \gamma(x' + vt'); t = \alpha(t' + \delta x')$$

şeklinde aranabilir. Burada γ , α ve δ hıza bağlı bir takım katsayılarıdır. Bu dönüşümü kullanarak küresel aydınlanma için

$$[\gamma(x' + vt')]^2 - c^2 [\alpha(t' + \delta x')]^2 = x'^2 - c^2 t'^2$$

yazabiliriz. Buradan katsayıları eşitleyerek üç denklem elde edebiliriz.

$$\gamma^2 - c^2 \alpha^2 \delta^2 - 1 = 0; 2\gamma^2 v - 2c^2 \alpha^2 \delta = 0; \gamma^2 v^2 - c^2 \alpha^2 + c^2 = 0$$

Bu denklemlerin çözümü

$$\gamma = \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \beta = \frac{v}{c}; \delta = \frac{v}{c^2}$$

olarak bulunur. Lorentz dönüşümleri ve ters dönüşümleri

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x' + vt'); x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma(x - vt); y = y'; z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{\beta x'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right); t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan sadece uzunluğun transformasyonu için, uzunluğun aynı anda ölçülmesi gereğinden

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$l = x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1) \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

olarak bulunur. Burada l_0 cisimle ilgili koordinat sisteme göre, l ise hareketsiz koordinat sisteme göre olan uzunluktur. Zamanın ölçülmesi aynı yerde yapılması gereğinden

$$t_1 = \gamma \left(t_1' + \frac{\beta x_1'}{c} \right); t_2 = \gamma \left(t_2' + \frac{\beta x_2'}{c} \right); \Delta t = \gamma \Delta t'; t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

olarak bulunur. Burada t hareketsiz koordinat sisteme göre zaman, t_0 ise cisimle ilgili koordinat sisteme göre zamandır.

c) $\text{tgh}\theta = \frac{v}{c} = \beta$ olarak yazalım.

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1; \cosh^2 \theta = 1 + \sinh^2 \theta; \text{tgh}\theta = \frac{\sinh \theta}{\sqrt{1 + \sinh^2 \theta}}$$

$$\sinh \theta = \frac{\text{tgh}\theta}{\sqrt{1 - \text{tgh}^2 \theta}} = \frac{v}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\sin^2 \theta = \cosh^2 \theta - 1 \text{ tgh}\theta = \frac{\sqrt{\cosh^2 \theta - 1}}{\cosh \theta}$$

$$\cosh \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tgh}^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{c \cdot \beta \cdot t}{\sqrt{1 - \beta^2}} = x \cdot \cosh\theta - ct \cdot \sinh\theta$$

$$ct' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{\beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = ct \cdot \cosh\theta - x \cdot \sinh\theta$$

olarak bulunur.

d) Hız transformasyonu bulmak için

$$x = \gamma(x' + vt'); \quad dx = \gamma(dx' + vdt')$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right); \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{\beta dx'}{c}\right)$$

yazabiliriz. K koordinat sisteminde hız u_x, u_y, u_z , K' koordinat sisteminde u'_x, u'_y, u'_z olsun. Bu hızlar için

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v dx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \left(\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma \left(dt' + \frac{v dx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dy'}{dt'}}{\gamma \left[1 + \frac{v}{c^2} \left(\frac{dx'}{dt'}\right)\right]} = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\gamma \left(dt' + \frac{v dx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dz'}{dt'}}{\gamma \left[1 + \frac{v}{c^2} \left(\frac{dx'}{dt'}\right)\right]} = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}$$

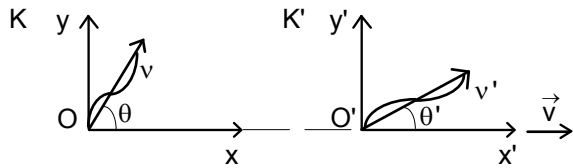
yazabiliriz.

e) İvmenin transformasyonu

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt'} \left(\frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \right) = \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{du'_x}{dt'}}{\gamma \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)^2}$$

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{a'_x}{\gamma^3} = a'_x \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = a'_x \sqrt{(1 - \beta^2)^3}$$

olarak verilir.



f) Işın xy düzleminde hareket ettiğini kabul edelim.

Hızın bileşenleri

$$u_x = u \cos\theta$$

$$u'_x = u \cos\theta'$$

$$u_y = u \sin\theta$$

$$u'_y = u' \sin\theta'$$

$$u_z = u'_z$$

$$\text{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{u' \sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{u' \cos\theta' + v}$$

$u' = c$ ve $u = c$ ise

$$\text{tg}\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{c \sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{c \cos\theta' + v} = \frac{\sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos\theta' + \beta} = \frac{\sin\theta'}{\gamma (\cos\theta' + \beta)}$$

olarak bulunur. Başka bağıntı da elde edebiliriz.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}; \quad c \cos\theta = \frac{c \cos\theta' + v}{1 + \frac{v \cdot c \cos\theta'}{c^2}}; \quad \cos\theta = \frac{\beta + \cos\theta'}{1 + \beta \cos\theta'}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}; \quad c \sin\theta = \frac{c \sin\theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v \cdot c \cos\theta'}{c^2}}; \quad \sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma (1 + \beta \cos\theta')}$$

g) Bir elektromanyetik dalganın denklemi $\Psi = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ ile verilmektedir. Burada $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dalga sayısı olarak verilmektedir. Dalganın fazı

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{sabit}$$

tüm referans sistemlerde sabittir. Bileşenlere göre yazabiliriz. Buradan

$$\omega t - k_x x = \omega' t' - k'_x x'; \quad \omega t - k_x x = \omega \cdot \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} - k'_x \cdot \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$k_x = \frac{k'_x + \frac{\beta \omega'}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(k'_x + \frac{\beta \omega'}{c} \right); \quad \omega = \frac{\omega' + v k'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (\omega' + k'_x v)$$

olarak bulunur. $\omega = 2\pi\nu$ bağıntısını kullanarak ve \vec{n} birim vektörü kullanarak

$$n_x = \cos\theta; \quad n'_x = \cos\theta'; \quad n_y = \sin\theta; \quad n'_y = \sin\theta'$$

$$v = \frac{v'(1 + \beta \cos\theta')}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak yazabiliriz. Bu formül Doppler olayı formülü olarak bilinmektedir. Kendi referans sisteme göre frekans $\nu' = \nu_0$ olsun. Işık yayan cisim ve bu ışığı algılayan aygıt aynı doğru üzerinde ise

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}$$

boyuna Doppler olayı olarak bilinmektedir. Işık yayan cisim ve bu ışığı algılayan aygıt dik doğrular üzerinde ise

$$\nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

boyuna Doppler olayı olarak bilinmektedir.

h) Einstein tarafından ifade edilen iki postula tüm klasik fiziğin temelinde varolan uzay, zaman, eş zamanlılık, kütle, momentum ve enerji gibi temel kavramlarının değişmesine sebep olmuştur. Momentum ve enerji korunum yasalarının geçerli olması için izafiyet teorisinde geçerli olan hız toplama yasası göz önünde tutulmalıdır. K koordinat sisteminde enerji

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{W'_x + p'_x \cdot v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma (W'_x + p'_x \cdot v)$$

momentum ise

$$p_x = mu_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u'_x}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2}{c^2}}} \cdot \frac{v}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}} =$$

$$= \frac{p'_x + \frac{v}{c^2} \cdot W'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \left(p'_x + \frac{v}{c^2} \cdot W'_x \right)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$1 - \frac{u_x^2}{c^2} = 1 - \left[\frac{u'_x + v}{c \left(1 + \frac{v u'_x}{c^2} \right)} \right]^2 = \frac{c^2 \left(1 + \frac{\beta u'_x}{c} \right)^2 - (u'_x + v)^2}{c^2 \left(1 + \frac{\beta u'_x}{c} \right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{u_x'^2}{c^2} \right)^2 \cdot (1 - \beta^2)}{\left(1 + \frac{\beta u'_x}{c} \right)^2}$$

açılımı kullanabiliriz.