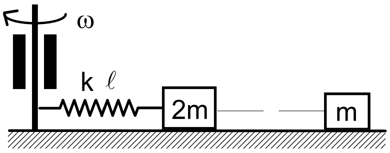
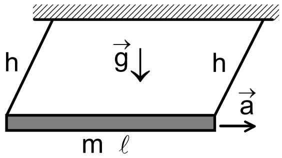
ŞUBAT KAMPI SINAVI-1990

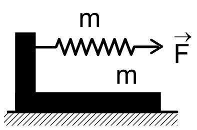


1. Yatay bir düzlemde açılan bir yuvada düşey durumda bulunan bir çubuk bilinmeyen bir ω açısal hızı ile döndürülmeye başlıyor. Çubukla beraber çubuğun alt ucunda bulunan yay sabiti k ve gerilmemiş haldeki uzunluğu ℓ olan bir yay da dönmektedir. Yayın öbür ucunda, yatay düzlem üzerinde kütlesi 2m olan bir cisim bulunuyor. Çubuğun ve yayın kütleleri ve tüm sürtünmeler ihmal ediliyor. Yayın dönme sonucu yavaşça ℓ kadar uzadığı gözlenmektedir.

a) Bu durumda cismin dönme yönündeki hızı nedir?
b) Sistemin bu duruma getirilmesi için yapılan iş nedir?
c) Bir anda yay çubuktan kopuyor ve 2m kütleli cisim çubuktan belli uzakta bulunan m kütleli cisim ile esnek olarak çarpışıyor. Bu çarpışmadan sonra her iki cismin hızı nedir?

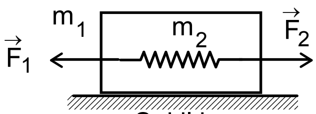


2. Yatay yolda a ivmesiyle gitmekte olan bir vagonun tavanına her biri h uzunlukta iplerle iki ucundan homojen, kütlesi m ve uzunluğu ℓ olan bir çubuk asılıdır. Belirli bir süre sonra soldaki ip kopuyor. O anda sağdaki ipteki gerilme kuvvetini bulunuz.



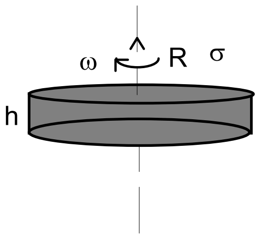
Şekil a

3. a) Sürtünmesiz bir düzlem üzerinde bulunan dinamometreye F değerinde yatay yönde bir kuvvet uygulanıyor. Yayın kütlesi, dinamometre kutusunun kütlesine eşittir. Dinamometrenin gösterdiği kuvvet değeri nedir?



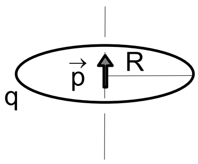
Şekil b

b) Dinamometre kutusunun kütlesi m_1, içindeki yayın kütlesi m_2 olsun. Dinamometrenin sol ve sağ tarafından F_1 ve F_2 kuvvetleri uygulanıyor ise dinamometrenin gösterdiği kuvvet değeri nedir?

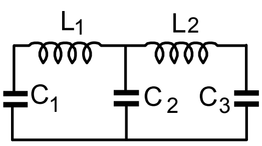


4. Yarıçapı R ve yüksekliği h<<R olan dielektrik bir diskin tabanları yüzeysel yük yoğunluğu σ olan yük ile yüklüdür. Disk merkezinden geçen dikey eksen etrafında sabit ω açısal hızı ile döndürülmektedir.

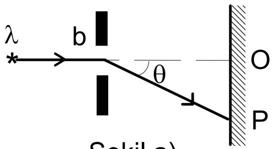
a) Diskin ekseni üzerinde oluşan elektrik alanı ve elektrik potansiyeli diske olan x uzaklığına bağı olarak bulunuz.
b) Diskin merkezindeki manyetik alanı bulunuz.
c) Oluşan manyetik dipol momentini bulunuz.



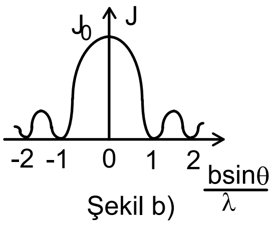
5. a) R yarıçaplı dielektrik bir halkaya homojen bir şekilde q yükü veriliyor ve merkezine halkanın ekseni boyunca p elektrik dipol momentine sahip m kütleli bir dipol yerleştiriliyor. Dipol serbest bırakıldığında ulaşacağı maksimum hızı bulunuz.
b) Dipolün yapacağı titreşimin periyodunu bulunuz.



6. Sığaları C_1, C_2, C_3 üç kondansatör ve özindüktans katsayıları L_1 ve L_2 olan iki özdeş bobin bir devre oluşturmaktadırlar. Başlangıçta C_1 kondansatör yüklüdür. Sistemin yapacağı titreşimlerin frekanslarını $C_1=C_2=C_3=C$ durumu için bulunuz.



Şekil a)



Şekil b)

7. Tek yarık kırınım olayında ekrandaki bir P noktanın aydınlaması $J=J_0\dfrac{\sin^2\beta}{\beta^2}$, $\beta=\dfrac{\pi b\sin\theta}{\lambda}$ olduğunu gösteriniz. Burada b yarık aralığı, λ ışık kaynağının dalga boyu, J_0 merkezi noktanın aydınlanması, θ ise merkezi doğru ile ekran üzerindeki istediğimiz nokta arasındaki açıdır. (Şekil a) Ekrandaki aydınlanma dağılımı ise şekil b) deki gibidir.

a) Yarık aralığı (b)'nin iki katına çıkarıldığı durumda aydınlanma dağılımı ifadesini bulunuz ve yukarıdaki grafiğin nasıl değişeceğini gösteriniz.

b) Yarık aralığı b ile yarıklar arası d uzaklığının eşit olduğu (b=d) çift yarıklı düzeneği ile oluşturulan kırınım olayındaki aydınlanma dağılımı ifadesini türetiniz ve ilk durumla karşılaştırınız.

8. Belirsizlik prensibi kullanarak aşağıda verilen problemleri sizin seçtiğiniz sabitler cinsinden çözünüz.

a) Hidrojen ve helyum atomlarındaki elektronların bağlanma enerjilerini bulunuz.

b) Molar kütlesi μ olan gümüş atomları T sıcaklığında buharlaştırılarak, bir yarıktan geçip ℓ uzaklıkta bulunan ekran üzerindeki ekrana düşmektedirler. Ekranda oluşacak gümüş kaplı bölgenin minimum çapı nedir? Bunu gerçekleştirmek için yarığın çapı ne olmalıdır?

c) Nötron yıldızların kütleleri Güneşin $M=2.10^{30}$ kütlesi ile mukayese edilecek kadar büyüklüktedir, ama yarıçapları r=10 km çok küçüktür. Yıldızı oluşturan nötronların kinetik enerjilerini bulunuz.

d) Beta ışıması yapan radyoaktif bir maddeden çıkan ışınların soygaz olan sıvı helyuma nüfüs etmeleri mümkün değildir. Ancak helyum atomlarının elektronları iterek o bölgede bir boşluk oluşturmaları mümkündür. Bu boşluğun yarıçapı nedir? Bu boşluktan dışlanan helyum atomların sayısı nedir? Helyumun özkütlesi ρ, molar kütlesi μ ve Avogadro sayısı veriliyor.

e) Metallerde valans elektronların oluşturan gazın, kuantum mekaniksel hareketinden dolayı meydana gelen basıncını bulunuz. Metalin özkütlesi ρ ve molar kütlesi μ veriliyor.

f) Kuantum mekaniksel osillatörün minimum enerjisini bulunuz.

ŞUBAT KAMPI SINAVI SORULARIN ÇÖZÜMLERİ-1990

1. a) 2m kütleli cisim sabit ω açısal hızı ile döndürülürse yarıçapı r=2ℓ olan dairesel yörüngeyi izlemektedir. Bu durumda

$$kx=k\ell=2m\omega^2 2\ell$$

yazabiliriz. Buradan cismin açısal hızı ve hız

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{4m}}\ ;\ v=2\omega\ell=\sqrt{\frac{k\ell^2}{m}}$$

olarak bulunur.
b) Sistemin bu duruma getirilmesi için yapılan iş

$$A=K+\Pi=\frac{2mv^2}{2}+\frac{k\ell^2}{2}=\frac{3k\ell^2}{2}$$

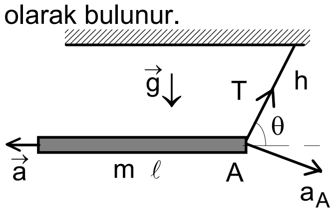
olarak bulunur.
c) 2m kütleli cisim çubuktan uzaklaşmaya v hızı ile başlar. m kütleli cisim ile esnek çarpıştığında momentum ve enerji korunumu yasaları geçerlidir.

$$2mv=mv_1+2mv_2\ ;\ \frac{2mv^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{2mv_2^2}{2}$$

Buradan hızlar

$$v_1=\frac{4v}{3}\ ;\ v_2=\frac{v}{3}$$

olarak bulunur.



2. a ivmesiyle gitmekte olan vagona göre çubuk için

$$mg-T\sin\theta=ma'_y;\ T\cos\theta-ma=ma'_x$$

yazabiliriz. Çubuğun kütle merkezine moment alabiliriz.

$$T\sin\theta\frac{\ell}{2}=J\alpha;\ J=\frac{m\ell^2}{12}$$

Buradan kütle merkezinin etrafında çubuğu dönme açısal ivmesi

$$\alpha=\frac{6T\sin\theta}{m\ell}$$

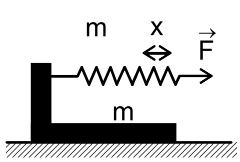
olarak bulunur. Çubuğun A ucunun ivmesi

$$a_{Ax}=a'_x=\frac{T\cos\theta}{m}-a;\ a_{Ay}=a'_y-\frac{\ell\alpha}{2}=g-\frac{T\sin\theta}{m}-\frac{3T\sin\theta}{m}=g-\frac{4T\sin\theta}{m}$$

olarak yazılabilir. Bu bileşke ivmenin ipe dik olması gerekir, çünkü bu uç dairesel yörünge takip etmektedir. Buradan

$$\frac{a_{Ax}}{a_{Ay}}=tg\theta=\frac{\frac{T\cos\theta}{m}-a}{g-\frac{4T\sin\theta}{m}}\ ;\ T=\frac{m(g\sin\theta+a\cos\theta)}{1+3\sin^2\theta}$$

olarak bulunur.



3. a) Sürtünmesiz düzlem üzerinde bulunan dinamometreye F değerinde yatay yönde kuvvet uygulandığında dinamometre

$$a=\frac{F}{2m}$$

ivme ile hareket eder. Yaydaki gerilme kuvveti uçtan x uzaklığına bağlı olarak

$$T(x)=F-m_x a=F-\frac{mx}{\ell}\frac{F}{2m}=F\left(1-\frac{x}{2\ell}\right)=\frac{ESd\ell}{dx}$$

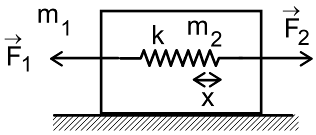
şeklinde yazılabilir. Burada dx x uzaklıkta seçilen küçük bir yay parçasının uzunluğu, dℓ ise bu parçanın uzama miktarıdır. Buradan yayın toplam uzaması

$$\Delta\ell=\int d\ell=\int_0^{\ell}\frac{F}{SE}\left(1-\frac{x}{2\ell}\right)dx=\frac{3F\ell}{4SE}$$

olarak bulunur. Dinamometrenin gösterdiği kuvvet

$$k\Delta\ell=\frac{SE3F\ell}{\ell 4SE}=\frac{3F}{4}\ ;\ k=\frac{ES}{\ell}$$

olarak bulunur.



b) Dinamometre kutusunun kütlesi m_1, içindeki yayın kütlesi m_2, dinamometrenin sol ve sağ tarafında uygulanan kuvvetler F_1 ve F_2 ise sürtünmesiz düzlem üzerinde bulunan dinamometre

$$a=\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}$$

ivme ile hareket eder. Yaydaki gerilme kuvveti uçtan x uzaklığına bağlı olarak

$$T(x)=F_2-(m_1+m_x)a=F_2-\left(m_1+\frac{m_2x}{\ell}\right)\left(\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}\right)=\frac{ESd\ell}{dx}$$

şeklinde yazılabilir. Burada dx x uzaklıkta seçilen küçük bir yay parçasının uzunluğu, $d\ell$ ise bu parçanın uzama miktarıdır. Buradan yayın toplam uzaması

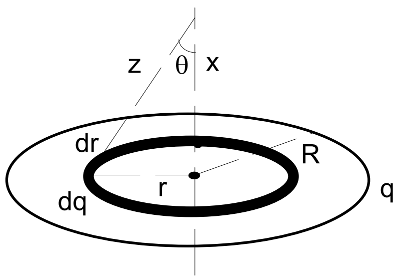
$$\Delta\ell=\int d\ell=\int_0^{\ell}\frac{1}{ES}\left[F_2-\left(m_1+\frac{m_2x}{\ell}\right)\left(\frac{F_2-F_1}{m_1+m_2}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{ES}\left(F_2\ell-\frac{m_1(F_2-F_1)\ell}{m_1+m_2}-\frac{m_2(F_2-F_1)\ell}{2(m_1+m_2)}\right)$$

olarak bulunur. Dinamometrenin gösterdiği kuvvet

$$k\Delta\ell=\frac{k}{ES}\left(F_2\ell-\frac{m_1(F_2-F_1)\ell}{m_1+m_2}-\frac{m_2(F_2-F_1)\ell}{2(m_1+m_2)}\right)=F_2-\frac{(2m_1+m_2)(F_2-F_1)}{2(m_1+m_2)}$$

olarak bulunur.



4. a) Disk üzerinde yarıçapı r, kalınlığı dr olan ince kabuklu bir silindir seçelim. Bu silindirin tabanın alanı

$$dS=2\pi rdr$$

yükü de

$$dq=\frac{qdS}{\pi R^2}=\sigma 2\pi rdr$$

olur. Bu seçilen yüzey diskin merkezinden x uzaklıkta elektrik alan için

$$dE_x=dE\cos\theta=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\frac{x}{z}=\frac{\sigma xrdr}{2\varepsilon_0\sqrt{(x^2+r^2)^3}}$$

yazabiliriz. Tüm diskin bu noktada oluşturduğu elektrik alan

$$E_x=\int_0^R\frac{\sigma xrdr}{2\varepsilon_0\sqrt{(x^2+r^2)^3}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

olarak bulunur. Potansiyel ise

$$\varphi=-\int E_x dx=-\int_0^x\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)dx=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(x-\sqrt{x^2+R^2}\right)$$

olarak bulunur.

b) Diskin merkezindeki manyetik alanı bulmak için seçilen yüzeyin üzerindeki yük aslında dairesel bir akım oluşturduğunu hesaba katmalıyız. Akan akım

$$dI=\frac{dq}{T}=\frac{\sigma 2\pi rdr}{\frac{2\pi}{\omega}}=\sigma\omega rdr$$

bu akımın diskin merkezinde oluşturduğu manyetik alan ve tüm manyetik alan

$$dB=\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0\sigma\omega dr}{2};\ B=\int_0^R\frac{\mu_0\sigma\omega dr}{2}=\frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$

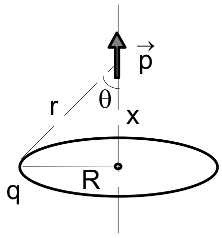
olarak bulunur.

c) Seçilen yüzeyin dairesel akımının çerçevelediği alandan oluşan manyetik dipol momenti ve oluşan tüm manyetik dipol manyetik moment

$$dp_m=dI\pi r^2=\sigma\omega\pi r^3dr$$

$$p_m=\int_0^R\sigma\omega\pi r^3dr=\frac{\sigma\pi\omega R^4}{4}$$

olarak bulunur.



5. a) Halkanın merkezinden x uzaklıkta elektrik alan

$$E_x=E\cos\theta=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{x}{r}=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+R^2)^3}}$$

olarak yazılabilir. Denge durumunda

$$\frac{dE_x}{dx}=0$$

olmalıdır. Buradan bu şartı gerçekleşen uzaklık için

$$x_0=\frac{\sqrt{2}R}{2}$$

olarak bulunur. Açı için

$$\operatorname{tg}\theta_0=\sqrt{2}\ ;\ \sin\theta_0=\frac{\operatorname{tg}\theta_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_0}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ ;\ \cos\theta_0=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta_0}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

yazabiliriz. x_0 uzaktaki elektrik alan

$$E_{x0}=\frac{\sqrt{3}q}{18\pi\varepsilon_0 R^2}$$

bu uzakta dipolün elektrik potansiyel enerjisi kazanılan kinetik enerjiye eşit olur.

$$\Pi_{x0}=pE_{x0}=\frac{\sqrt{3}qp}{18\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{mv^2}{2}$$

Buradan dipolün kazandığı hız

$$v_{mak}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}qp}{9\pi\varepsilon_0 mR^2}}$$

olarak bulunur.

b) x_0 uzaklıkta elektrik alanın gradienti işaret değiştirmektedir. Bu sebeple bu noktaya kadar dipol hızlanır, bu noktadan sonra yavaşlar, yani titreşim hareketi yapmaktadır. Dipol denge durumundan saparsa dipole etki eden kuvvet

$$F=p\left(\frac{dE_x}{dx}\right)=\frac{pq(R^2-2x^2)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x^2+R^2)^5}}$$

$$x=x_0+\Delta x$$

uzaklıkta

$$F=\frac{pq[R^2-2(x_0+\Delta x)^2]}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{[(x_0+\Delta x)^2+R^2]^5}}=$$

$$=\frac{pq(R^2-2x_0^{\,2})}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_0^{\,2}+R^2)^5}}-\frac{4pqx_0\Delta x}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_0^{\,2}+R^2)^5}}=-\frac{4pq\Delta x}{\sqrt{3^5}\,\pi\varepsilon_0 R^4}$$

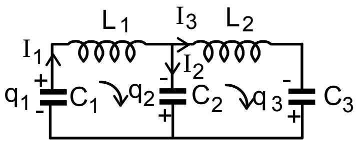
olarak bulunur. Bu kuvvetin etkisi ile dipol a ivme kazanır.

$$ma=-\frac{4pq\Delta x}{\sqrt{3^5}\,\pi\varepsilon_0 R^4}$$

Titreşimin hareketinin titreşim frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega=\sqrt{\frac{4pq}{\sqrt{3^5}\,\pi m\varepsilon_0 R^4}}\ ;\ T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi R^2\sqrt{\frac{\sqrt{3^5}\,\pi m\varepsilon_0}{pq}}$$

olarak bulunur.



6. C_1 kondansatörün boşalması ile akım akmaya başlar. Birinci Kirchhoff yasasından

$$I_1=I_2+I_3\ ;$$

yazabiliriz. Birinci ve ikinci hücre için ikinci Kirchhoff yasası

$$-L_1\frac{dI_1}{dt}=\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_2}{C_2}\ ;\ -L_2\frac{dI_3}{dt}=-\frac{q_2}{C_2}+\frac{q_3}{C_3}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemleri türevleyip

$$-L_1\frac{d^2I_1}{dt^2}=\frac{I_1}{C_1}+\frac{I_2}{C_2}\ ;\ -L_2\frac{d^2I_3}{dt^2}=-\frac{I_2}{C_2}+\frac{I_3}{C_3}$$

denklemleri elde ederiz. Birinci Kirchhoff yasasından

$$I_2=I_1-I_3$$

yazarsak

$$\ddot{I}_1-\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)I_1+\frac{1}{L_1C_2}I_3=0;$$

$$\ddot{I}_3+\frac{1}{L_2C_2}I_1-\frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)I_3=0$$

denklemleri elde ederiz. Akan akımların çözümleri

$$I_1=I_{01}\,e^{i\omega t}\ ;\ \ddot{I}_1=-\omega^2I_{01}\,e^{i\omega t}\ ;\ I_3=I_{03}\,e^{i\omega t}\ ;\ \ddot{I}_3=-\omega^2I_{03}\,e^{i\omega t}$$

şeklinde arayabiliriz.

$$-\left[\omega^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right]I_{01}+\frac{1}{L_1C_2}I_{03}=0$$

$$\frac{1}{L_2C_2}I_{01}-\left[\omega^2+\frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)\right]I_{03}=0$$

olur. Bu sistemin çözümü ya $I_{01}=I_{03}=0$ ya da terimlerden oluşan determinant sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} -\left[\omega^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right] & \frac{1}{L_1C_2} \\ \frac{1}{L_1C_2} & -\left[\omega^2+\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right] \end{vmatrix}=0$$

Buradan titreşim açısal frekansları

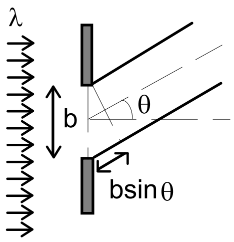
$$\omega^4+\left[\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)+\frac{1}{L_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)\right]\omega^2-\frac{4}{L_1L_2C_1C_2}=0$$

$$\omega^4+\frac{2}{C}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\omega^2-\frac{4}{L_1L_2C^2}=0$$

denklemin kökleri gibi bulunur.

$$\omega=\frac{1}{C}\sqrt{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)^2+\frac{4}{L_1L_2}}-\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right)\right]}$$

olarak bulunur.

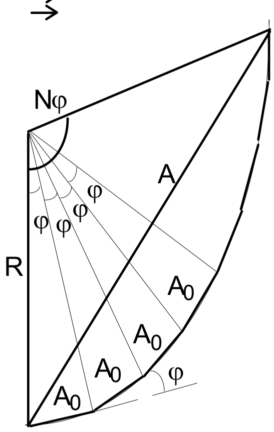


7. a) Tek yarığın uçlarından çıkan ışınların arasındaki faz farkı φ olsun. Faz farkı hem açı hem de mesafe ve dalga boyu cinsinden yazılabilir.

$$\frac{\varphi_b}{2\pi}=\frac{b\sin\theta}{\lambda};\ \varphi_b=kb\sin\theta;\ k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

Yarığın içinde N çok büyük sayı olmak koşulu ile N tane kaynak olduğunu varsayalım. Her artarda yerleştirilen iki kaynak arasında

$$\varphi=\frac{\varphi_b}{N}$$



faz farkı meydana gelmektedir. Bu kaynaklardan yayılan dalgaların genliklerinin vektörel toplamı

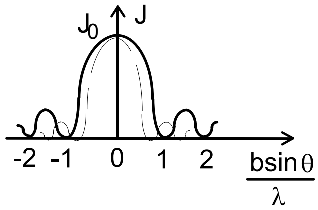
$$A=2R\sin\frac{N\varphi}{2};\ R=2A_0\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$A=A_0\frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}=A_0\frac{\sin\frac{\varphi_b}{2}}{\frac{\varphi_b}{2N}}=NA_0\frac{\sin\frac{\varphi_b}{2}}{\frac{\varphi_b}{2}}=NA_0\frac{\sin\beta}{\beta}$$

$\theta=0°$ ise N tane birbirine paralel olan titreşimi toplamalıyız. Bu durumda $A=NA_0$ olur. Işık şiddeti $J\sim A^2$ olduğu için merkezdeki ışık şiddeti $J_0\sim N^2A_0^2$ olarak yazılabilir. $\theta\neq 0°$ ise

$$J=J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2};\ \beta=\frac{\varphi_b}{2}$$

olarak bulunur.



Yarık genişliği iki katına çıkarsa yeni şiddet dağılımı

$$J'=J_0\frac{\sin^2(2\beta)}{(2\beta)^2}=\frac{J_0}{4}\frac{(2\sin\beta\cos\beta)^2}{\beta^2}=$$

$$=J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\beta=J\cos^2\beta$$

olur. Yeni şiddet dağlımı merkezde aynı değerde, merkezden uzaklaştıkça azalmaktadır.

b) Yarık aralığı b ile yarıklar arası d uzaklığının eşit olduğu (b=d) çift yarıklı düzenekte hem her yarıkta hem de iki yarık arasında

$$\varphi_d=kd\sin\theta=\varphi_b$$

faz farkı meydana gelir. Her yarıktan meydana gelen titreşimin toplam genliği

$$A_1=A_2=A_0\frac{\sin\beta}{\beta}$$

olarak yazalım. İki yarıktan meydana gelen titreşimin genliği

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi_d}=A_1\sqrt{2(1+\cos\varphi_d)}=$$

$$=2A_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\frac{\varphi_b}{2}=2A_0\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta$$

ışık şiddeti

$$J=4J_0\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\cos^2\beta$$

olarak bulunur.

8. a) Hidrojen atomdaki elektronun enerjisi için

$$W=K+\Pi=\frac{mv^2}{2}-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p.\Delta r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p\approx p;\ \Delta r\approx r;\ pr=\hbar$$

yazılabilir. Buradan enerji için

$$W=\frac{\hbar^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{dW}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=0$$

Bu şarttan yarıçap

$$r=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

ve enerji

$$W=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}=-R_y=-13{,}6\text{ eV}$$

olarak bulunur. Helyum atomlarındaki elektronların bağlanma enerjisi için

$$W=K+\Pi=2\frac{mv^2}{2}-2\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 2r}=\frac{p^2}{m}-\frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Belirsizlik prensibine göre

$$p.r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Buradan enerji için

$$W=\frac{\hbar^2}{mr^2}-\frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{dW}{dr}=-\frac{2\hbar^2}{mr^3}+\frac{7e^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}=0$$

Bu şarttan yarıçap ve enerji

$$r=\frac{16\pi\varepsilon_0\hbar^2}{7me^2};\ W=-\frac{49me^4}{256\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}=-\frac{49R_y}{8}=-84\text{ eV}$$

olarak bulunur. Gerçek değer –79 eV olduğuna göre bulunan sonuç oldukça iyi sayılabilir.

b) Gümüş atomları yarıktan geçerken belirsizlik ilkesi gereği hareketin dik yönünde Δv_y hız kazanmaktadır. ℓ uzaklıkta bulunan ekran üzerindeki oluşacak gümüş kaplı bölgenin çapı

$$D_E=D+2\Delta v_y t$$

olarak yazılabilir. Burada D yarığın çapıdır. Atomların ekrana kadar ulaşma süresi

$$t=\frac{\ell}{v}$$

atomların hızları

$$v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

olur. Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p_y\Delta y=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p_y=m\Delta v_y;\ \Delta y\approx D;\ \Delta v_y=\frac{\hbar}{mD}$$

yazılabilir. Buradan çap için

$$D_E=D+\frac{2\hbar\ell}{mDv}=D+\frac{2\hbar\ell}{D\sqrt{3kmT}}$$

yazılabilir. Çapın minimum olması için bu ifadenin D çapına göre türevi sıfır olmalıdır.

$$\frac{dD_E}{dD}=1-\frac{2\hbar\ell}{D^2\sqrt{3kmT}}=0$$

Bu şarttan minimum çapı gerçekleştirmek için yarığın çapı ve ekran üzerindeki minimum çap

$$D=\sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}};\ D_E=2D=2\sqrt{\frac{2\hbar\ell}{\sqrt{3kmT}}}$$

olarak bulunur.

c) Nötron yıldızın nötron sayısı ifadesinden bir nötrona düşen hacminin boyutu bulunulabilir.

$$N=\frac{M}{m}=\frac{V_{yıldız}}{V_{nötron}}=\frac{R^3}{r^3};\ r=R\sqrt[3]{\frac{m}{M}}$$

Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p\Delta r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p\approx p;\ \Delta r\approx r;\ p.r=\hbar$$

yazılabilir. Buradan momentum

$$p=\frac{\hbar}{r}$$

yıldızı oluşturan nötronların kinetik enerjileri

$$K=N\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2mR^2}\sqrt[3]{\frac{M^5}{m^5}}\sim 10^{46}\text{ J}$$

olarak bulunur.

d) Beta ışıması sonucu helyumun içine giren elektronların ve oluşturdukları boşluk bölgenin toplam enerjisi

$$W=K+\Pi=\frac{mv^2}{2}+4\pi\sigma r^2=\frac{p^2}{2m}+4\pi\sigma r^2$$

olur. Burada $4\pi\sigma r^2$ oluşturulan boşluğun yüzey geriliminden kaynaklanan yüzey gerilimi enerjisi. Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p.\Delta r=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p\approx p;\ \Delta r\approx r;\ pr=\hbar$$

yazılabilir. Buradan enerji için

$$W=\frac{\hbar^2}{2mr^2}+4\pi\sigma r^2$$

yazabiliriz. Bu ifadenin r yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan yarıçap

$$\frac{dW}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mr^3}+8\pi\sigma r=0;\ r=\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}}$$

olarak bulunur. Sıvı helyumun molar kütlesi μ, özkütlesi ρ ise bir atoma düşen hacmin boyutu ℓ bulunulabilir.

$$\rho=\frac{\mu}{V_\mu}=\frac{\mu}{N_A\ell^3};\ \ell=\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$$

Oluşturulan boşluktan dışlanan helyum atom sayısı

$$N=\frac{4\pi r^3}{3\ell^3}=\frac{4\pi\rho N_A}{3\mu}\sqrt[4]{\left(\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}\right)^3}$$

olarak bulunur. Soruyu basınçlardan yola giderek de çözebiliriz. Elektronun oluşturduğu basınç

$$P_e=\frac{2n_0K_1}{3};\ n_0=\frac{N}{V}=\frac{1}{\frac{4\pi r^3}{3}}=\frac{3}{4\pi r^3}$$

elektronun kinetik enerjisi

$$K_1=\frac{p^2}{2m}=\frac{\hbar^2}{2mr^2}$$

Laplace basıncı

$$P_L=\frac{2\sigma}{r}$$

olarak yazılabilir. İki basıncın eşit olması gerekir. Buradan

$$\frac{2\sigma}{r}=\frac{2}{3}\frac{3}{4\pi r^3}\frac{\hbar^2}{2mr^2}\ ;\ r=\sqrt[4]{\frac{\hbar^2}{8\pi\sigma m}}$$

olarak bulunur. Elektronun basıncı başka yoldan da bulunulabilir. Boşluğun hacminin dV kadar arttırmak için yapılan iş kinetik enerjinin değişimine eşittir.

$$P_e dV=P_e 4\pi r^2\,dr=-dK_1=\frac{\hbar^2 dr}{mr^3}\ ;\ P_e=\frac{\hbar^2}{4\pi mr^5}$$

olarak bulunur.

e) Metalin molar kütlesi μ, özkütlesi ρ ise bir elektrona düşen hacmin boyutu ℓ bulunulabilir.

$$\rho=\frac{\mu}{V_\mu}=\frac{\mu}{N_A\ell^3}\ ;\ \ell=\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}$$

Elektronun oluşturduğu basınç

$$P_e=\frac{2n_0K_1}{3}\ ;\ n_0=\frac{N_A}{V_\mu}=\frac{N_A}{\frac{\mu}{\rho}}=\frac{\rho N_A}{\mu}$$

elektronların metaldeki konsantrasyonudur. Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p_x.\Delta x=\hbar;\ \Delta p_y.\Delta y=\hbar;\ \Delta p_z.\Delta z=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p_x\approx p;\ \Delta x\approx\ell;\ p\ell=\hbar;\ p=\frac{\hbar}{\ell}$$

yazılabilir. Simetri sonucu ortalama değerler için

$$\langle\Delta p_x^2\rangle=\langle\Delta p_y^2\rangle=\langle\Delta p_z^2\rangle;\ \langle\Delta p^2\rangle=\langle\Delta p_x^2\rangle+\langle\Delta p_y^2\rangle+\langle\Delta p_z^2\rangle=3\langle\Delta p_x^2\rangle$$

$$\Delta p=\sqrt{3}\,\Delta p_x=\frac{\sqrt{3}\hbar}{\ell}$$

yazılabilir. Buradan elektronun kinetik enerjisi

$$K_1=\frac{\Delta p^2}{2m}=\frac{3\hbar^2}{2m\ell^2}$$

olarak yazılabilir. Elektronun oluşturduğu basınç

$$P_e=\frac{2}{3}\frac{\rho N_A}{\mu}\frac{3\hbar^2}{2mr^2}=\frac{\hbar^2}{m}\sqrt[3]{\left(\frac{\rho N_A}{\mu}\right)^5}$$

olarak bulunur.

f) Kuantum mekaniksel osilatörün enerjisi

$$W=K+\Pi=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}$$

olarak yazılabilir. Belirsizlik prensibine göre

$$\Delta p_x.\Delta x=\hbar$$

olarak yazılabilir. Fiziksel büyüklüklerin küçük değerlerin değişimi bu büyüklüklerin mertebesinden olduğu için

$$\Delta p_x\approx p;\ \Delta x\approx x;\ px=\hbar$$

yazabiliriz. Buradan enerji için

$$W=\frac{\hbar^2}{2mx^2}+\frac{kx^2}{2}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin x yarıçapına göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan x ve enerji

$$\frac{dW}{dr}=-\frac{\hbar^2}{mx^3}+kx=0;\ x=\sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{mk}}}\ ;\ W=\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}=\hbar\omega$$

olarak bulunur.