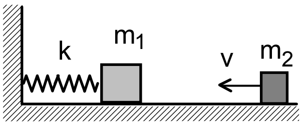
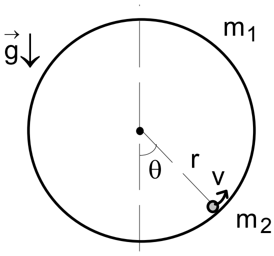
X. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-2002



1. Şekilde gösterilen m_1 kütlesi, sabit bir duvara bağlı, k yay sabitli bir yayın hemen ucunda durmaktadır. v hızıyla gelen m_2 kütlesi m_1 ile esnek bir çarpışma yapmaktadır. Tüm sürtünmeler ihmal ediliyor. a) İki cismin bir daha çarpışmaması için $\xi=\dfrac{m_1}{m_2}$ oranı en az ne kadar olmalıdır?

b) $m_1=\alpha m_2$ ($\xi > \alpha \geq 1$) iken ikinci çarpışma için geçecek zaman veren ifadeyi türetiniz.

Not: Bu zaman ifadesini veren denklem lineer olmayabilir.

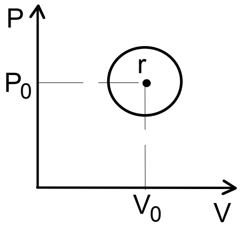


2. r yarıçaplı, kütlesi m_1=nm olan (n bir tam sayıdır) dairesel bir disk, merkezinden geçen bir eksen etrafında sürtünmesiz dönebilmektedir. Başlangıçta kütlesi m_2=m olan bir böcek diskin alt noktasında hareketsiz durmaktadır. Böcek disk çevresinde diske göre v hızı ile yürümeye başlamakta ve merkezden geçen doğruya göre θ açısı yapmaktadır.

a) $\dfrac{d\theta}{dt}$'nin ilk değeri nedir?

b) Böceğin v sabit hızı ile diske göre hareketine devam ederse diskin üst noktasına ulaşabilmesi için v hızı ne kadar olmalıdır?

3. Boyu H=152 cm olan bir deney tüpüne cıva doldurularak tüpün alt tarafında h=76 cm boyunda hava sütunu hapsedilmiştir. Atmosfer basıncı 10^5 Pa ve sıcaklık $T_0=17^oC$ dır. Tüpteki havanın sıcaklığı kaç dereceye çıkartılırsa tüpteki cıva tüpten dışarı atılabilir? Normal atmosfer basınç P_0=76 cm Hg olarak veriliyor.



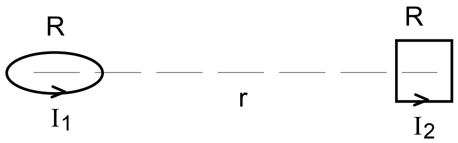
4. Şekilde bir mol adyabatik katsayısı γ olan gaz için verilen termodinamik faz diyagramında gösterilen (P_0,V_0) merkezli r yarıçaplı çembersel proses (işlem) için

a) $P_0=V_0$ da en yüksek yada en düşük sıcaklık nedir?

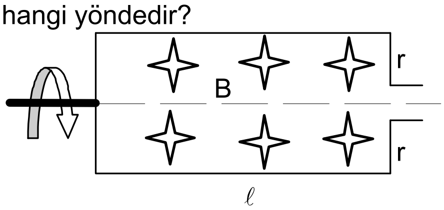
b) Bir çevrimde yapılan iş nedir?

c) $r<<P_0$ ve $r<<V_0$ olma durumunda verim nedir?

Not: Önce sistemin ısı almaya ve vermeye başlayacağı noktaları bulun ve gerekli ihmalleri yapın.



5. Şekilde görüldüğü gibi iki akım halkasından I_1 ve I_2 akımları geçmektedir. Bu akım halkalarından biri R yarıçaplı bir çember diğeri ise kenar uzunluğu R olan bir kare şeklindedir. Bu iki akım halkası arasındaki uzaklık r>>R ise kare şeklindeki akım halkasına etki eden dönme momentini (torku) bulunuz. Eğer kare şeklindeki akım halkası serbestçe dönerse bu halkanın en son konumu hangi yöndedir?



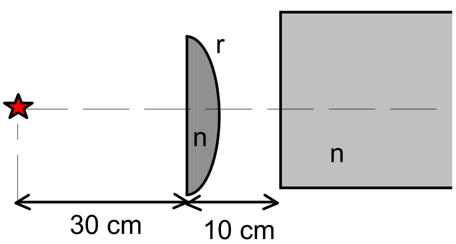
6. Rüzgardan enerji elde etmeye yarayan bir pervanenin sabit açısal hızla dönerken ürettiği güç, $P=k\omega(\omega_0-\omega)$ olarak ifade edilebilir. k ve ω_0 fiziksel sabitlerdir, ω ise pervanenin açısal hızıdır. Bu pervane bir çark sistemi kullanılarak bir dinamoya bağlanacaktır. Dinamo, B homojen sabit bir manyetik alanı içinde dönen dikdörtgen N tane sarım halkasından oluşmaktadır. Sarımlar uzunluğu ℓ ve genişliği 2r olan bir çerçeve üzerinde sarılıdır. Gücün R direncine aktarıldığını varsayarak;

a) ω'ya bağlı olarak dinamodan elde edilecek ortalama gücü bulunuz.

b) Pervaneden elde edilecek maksimum güç nedir?

c) Maksimum güç elde edilmesi için çark sisteminin ilk ve son çarklarının diş sayısı oranı ne olmalıdır?

Not: Pervanenin eylemsizliği açısal hızındaki ani değişimlere engel olabilecek kadar fazladır.



7. Şekildeki optik sistem eğrilik yarıçapı r=10 cm olan bir düzlem-konveks ince mercek ile çok uzun bir cam bloktan oluşmaktadır. Merceğin ve cam bloğun kırıcılık indisleri aynı n değerindedir. Merceğin solunda 30 cm uzakta bir cisim bulunmaktadır.

a) Cismin son görüntüsünün cam blok içinde oluşması için kırıcılık indisinin değeri ne olmalıdır?

b) n=3 olduğu durumda son görüntünün yerini bulunuz. Görüntünün özelliklerini belirtiniz.

c) Kırıcılık indisinin hangi değeri için bu sistemde son görüntünün yeri r'den bağımsız olur? Tartışınız.

X. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2002

1. a) Momentum korunumu yasası

$$m_2v=m_1v_1-m_2v_2$$

enerji korunumu yasasından

$$\frac{m_2v^2}{2}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}$$

cisimlerin çarpışmadan sonraki hızları

$$v_1=\frac{2v}{\xi+1};\ v_2=\frac{(\xi-1)v}{\xi+1}$$

olarak bulunur. Çarpışma olmaması için en az

$$v_1=v_2;\ \xi=3$$

olmalıdır.

b) Bu durumda çarpışmadan sonraki hızlar

$$v_{01}=\frac{2v}{\alpha+1};\ v_{02}=\frac{(\alpha-1)v}{\alpha+1}$$

olur. Yay denge konumunda iken x kadar sıkışmış olsun. Bu durumda m_1 kütlesinin hızı u olur. Çarpışmadan sonra bu ana kadar geçen süre t olsun. Enerji korunumu yasasından

$$\frac{m_1v_{01}^2}{2}=\frac{m_1u^2}{2}+\frac{kx^2}{2}$$

yazabiliriz. Buradan hız

$$u=\sqrt{v_{01}^2-\frac{kx^2}{m_1}}$$

olarak bulunur. Kuvvet denkleminden zaman değişimi

$$-\frac{kx}{m_1}=\frac{du}{dt};\ du=-\frac{kxdt}{m_1};\ \frac{-\frac{kx}{m_1}dx}{\sqrt{v_{01}^2-\frac{kx^2}{m_1}}}=-\frac{kxdt}{m_1};\ dt=\frac{dx}{\sqrt{v_{01}^2-\frac{kx^2}{m_1}}}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{v_{01}^2-\frac{kx^2}{m_1}}}=\int_0^x\frac{dx}{v_{01}\sqrt{1-\frac{kx^2}{m_1v_{01}^2}}}=-\sqrt{\frac{m_1}{k}}\arccos\sqrt{\frac{k}{m_1}}\frac{x}{v_{01}}\Bigg|_0^x=$$

$$=\sqrt{\frac{m_1}{k}}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{\frac{k}{m_1}}\frac{x}{v_{01}}\right)$$

olarak bulunur. Bulduğumuz t zamanı ile x arasında aynı zamanda

$$x=v_{02}t$$

bağıntısı bulunur. Buradan zaman denklemi

$$t=\sqrt{\frac{m_1}{k}}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{\frac{k}{m_1}}\frac{v_{02}t}{v_{01}}\right)=\sqrt{\frac{m_1}{k}}\arccos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{\frac{k}{m_1}}\frac{(\alpha-1)t}{2}\right)$$

olarak bulunur.

2. a) İlk anda sistemin açısal momentumu sıfırdır. Bu durumda

$$J_2\omega_2+J_1(\omega_2-\omega_1)=0$$

$$J_1=mr^2;\ J_2=\frac{nmr^2}{2};\ \omega_1=\frac{v}{r}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\omega_2=\frac{2v}{(n+2)r}$$

olarak bulunur. Aranan açısal hız

$$\frac{d\theta}{dt}=\omega_1-\omega_2=\frac{v}{r}-\frac{2v}{(n+2)r}=\frac{nv}{(n+2)r}$$

olarak bulunur.

b) Açısal momentum değişimi için

$$mg\sin\theta.r=(J_1+J_2)\alpha;\ \frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{2g\sin\theta}{(n+2)r}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=\frac{2g\sin\theta}{(n+2)r};\ \dot{\theta}d\dot{\theta}=\omega d\omega=\frac{2g\sin\theta d\theta}{(n+2)r};\ \int_0^{\dot{\theta}}\omega d\omega=\int_0^{\pi}\frac{2g\sin\theta d\theta}{(n+2)r}$$

$$\frac{\omega^2}{2}=-\frac{2g\cos\theta}{(n+2)r}\bigg|_0^{\pi};\ \omega=\sqrt{\frac{8g}{(n+2)r}};\ \omega r=\sqrt{\frac{8gr}{(n+2)}}$$

olarak bulunur. Aranan hız için şarttan aranan hız

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{nv}{(n+2)r}>\sqrt{\frac{8g}{(n+2)r}};\ v>\frac{2\sqrt{2gr(n+2)}}{n}$$

olarak bulunur.

3. Havanın ilk hacmi

$$S(H-h)=\frac{SH}{2};\ h=\frac{H}{2}$$

ilk basınç

$$P_1=P_0+\rho gh=2P_0;\ P_0=\frac{\rho gH}{2}$$

olarak yazılabilir. z tüpte bulunan cıvanın alt yüzeyi ile tüpün dibi arasındaki uzaklık olsun. Bu durumda gazın basıncı

$$P(z)=P_0+\rho g(H-z)=\rho g\left(\frac{3H}{2}-z\right)=P_0\left(3-\frac{2z}{H}\right)$$

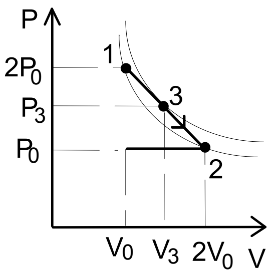
olur. İdeal gaz denkleminden z'ye bağlı olan sıcaklık

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_zV_z}{T_z};\ \frac{2P_0SH}{2T_0}=P_0\frac{P_0\left(3-\frac{2z}{H}\right)S.z}{T(z)};\ T(z)=T_0\left(3z-\frac{2z^2}{H}\right)$$

olarak bulunur. Bu ifadenin Z'ye göre türevi sıfır ise proseste ulaşılan maksimum sıcaklığı verir. Buradan

$$z=\frac{3H}{4};\ T_{mak}=\frac{9T_0}{8}=\frac{9(273+17)}{8}=326{,}25\text{ K}=53{,}25\ ^\circ$$

olarak bulunur.



P-V grafiği sayesinde ikinci bir yöntem kullanabiliriz. Her durum için ideal gaz hal denklemini yazalım

$$P_1V_1=2P_0V_0=nRT_1;T_1=T_0=\frac{2P_0V_0}{nR}$$

$$P_2V_2=P_0.2V_0=RT_2;\ T_2=\frac{2P_0V_0}{nR}=T_0$$

Buradan ilk ve son noktalar bir izoterm üzerinde bulunduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca havanın tüpten çıkmaması için tüpe ısı yavaş verilmelidir. Bunu anlamı ise basınç lineer bir şekilde azalmalıdır. Yani P-V diyagramında proses bir doğru ile temsil edilmektedir. Farklı izoterm eğrileri çizerek koordinat sistemin merkezinden uzaklaştığında sistem daha yüksek sıcaklıklara ulaştığı bilinmektedir. 1-2 prosesinde izotermlerden birisi teğet geçtiği görülmektedir. Yani 3. nokta ekstremum noktasıdır. Isı 1-4 noktalar arasında verilmektedir. 4. noktanın koordinatlarını bulmak için benzerlikten faydalanabiliriz.

$$\frac{2P_0-P_3}{P_3-P_0}=\frac{V_3-V_0}{2V_0-V_3};\ P_3=3P_0-\frac{P_0V_3}{V_0}$$

Aradığımız noktalar için gaz denklemi yazabiliriz.

$$P_3V_3=nRT_3=3P_0V_3-\frac{P_0V_4^{\ 2}}{V_0}$$

Sıcaklığın V_3 hacmine göre türev alıp sıfıra eşitleyip

$$0=3P_0-\frac{2P_0V_3}{V_0};\ V_3=\frac{3V_0}{2};\ P_3=\frac{3P_0}{2};\ T_3=\frac{9P_0V_0}{4R}=\frac{9T_2}{8}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuç aynıdır.

4. a) Dairesel kapalı proses üzerinde bulunan herhangi nokta için P-V diyagramında

$$P=P_0+r\sin\theta;\ V=V_0+r\cos\theta;\ r=|\Delta P|=|\Delta V|$$

yazabiliriz. Buradan $\frac{d(PV)}{d\theta}=0$ şartından $|P_0|=|V_0|$ için

$$r\cos\theta(V_0+r\cos\theta)-(P_0+r\sin\theta)r\sin\theta=0$$
$$V_0 r\sin\theta=V_0 r\cos\theta;\ r\cos^2\theta=r\sin^2\theta$$
$$\tan\theta=1;\ \theta=45°\ \text{ya da}\ \theta=225°$$

olarak bulunur. En yüksek ya da en düşük sıcaklık

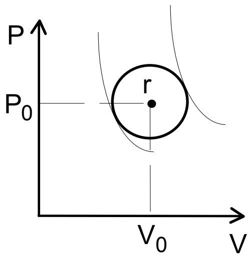
$$T_{\text{en az/en çok}}=\frac{\left(P_0\pm\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right)\left(V_0\pm\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right)}{R}$$

olarak bulunur. Burada R gaz sabitidir.

b) Kapalı proseste yapılan iş

$$A=\pi r^2$$

olur.



c) Adyabatik eğriler geçirilerek hangi noktalar arasında ısı veriliyor ya da alınıyor bulabiliriz. Adyabatik denklemini

$$PV^{\gamma}=\text{sabit};\ P=\frac{P_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma}}$$

olarak yazılabilir. Türevlersek

$$\frac{dP}{dV}=\tan\alpha=-\gamma\frac{P_0V_0^{\gamma}}{V^{\gamma+1}}$$

ve iki eğimin diklik şartından

$$\tan\alpha.\tan\theta=-1$$

yazabiliriz. Buradan $P_0=V_0$ için

$$\tan\theta=\frac{1}{\gamma};\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}};\ \cos\theta=\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

olarak bulunur. Verilen ısı için

$$Q_1=A_{12}+\Delta U_{12}$$

yazabiliriz. Burada ısı verilirken yapılan iş $r<<P_0$, V_0 yaklaşımında yüksekliği P_0 ve tabanı $2r\cos\theta$ olan bir dikdörtgen ile temsil edilebilir.

$$A_{12}=P_0.(2r\cos\theta)=\frac{2P_0r\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$$

İç enerji değişimi ise

$$\Delta U_{12}=\frac{c_V(P_0+r\sin\theta)(V_0+r\cos\theta)-(P_0-r\sin\theta)(V_0-r\cos\theta)}{R}$$
$$=\frac{2c_Vr(P_0\cos\theta+V_0\sin\theta)}{R}=\frac{2c_Vr}{R}\left(\frac{P_0\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}+\frac{V_0}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)$$

olarak yazılabilir. Buradan verim

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{\pi r}{2\left(\frac{c_PP_0}{R}\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}+\frac{c_VV_0}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)}$$

olarak bulunur. Burada $c_P=c_V+R$ olarak veriliyor.

5. Manyetik dipol momentinin yarattığı manyetik alan şiddeti

$$B=\frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta}$$

olarak yazılır. $\theta=90°$ için halkanın oluşturduğu manyetik

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1 \pi R^2}{4\pi r^3}$$

olur. Kare şeklindeki çerçevenin manyetik dipol momenti

$$p_{m2}=I_2\pi R^2$$

olur. Bu manyetik dipole etki eden moment

$$M=p_{m2}B_1\sin 90°=\frac{\mu_0 I_1 I_2 \pi R^4}{4\pi r^3}$$

olarak bulunur.

6. a) İndükte edilmiş e.m.k.

$$\varepsilon_{in}=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d(NB2\ell r\cos\omega t)}{dt}=-2NB\ell r\omega\sin\omega t$$

olarak bulunur. Direnç üzerinde açığa çıkan güç

$$P=\frac{\varepsilon^2}{R}=\frac{4N^2B^2\ell^2r^2\omega^2\sin^2\omega t}{R}$$

olur. Bu gücün ortalama değeri $\overline{\sin^2\omega t}=\frac{1}{2}$ eşitliğini kullanarak

$$P_{ort}=\frac{2N^2B^2\ell^2r^2\omega^2}{R}$$

olarak bulunur.

b) Pervaneden elde edilecek maksimum gücü bulmak için güç ifadesinin türevini alıp sıfıra eşitleyebiliriz. Buradan

$$\frac{dP}{d\omega}=0;\ \omega_0-2\omega=0;\ \omega=\frac{\omega_0}{2}$$

$$P_{mak}=k\frac{\omega_0}{2}\left(\omega_0-\frac{\omega_0}{2}\right)=\frac{k\omega_0^2}{4}$$

olarak bulunur.

c) Maksimum güç elde edilmesi için çark sisteminin ilk ve son çarklarının diş sayısı oranını bulmak için bulunan iki güç ifadesi birbirine eşit olmalıdır. Buradan

$$\frac{2N^2B^2\ell^2r^2\omega^2}{R}=\frac{k\omega_0^2}{4}$$

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\omega_0}{\omega}=\frac{2\sqrt{2}\,NB\ell r}{\sqrt{kR}}$$

olarak bulunur.

7. a) İnce kenarlı merceğin odak uzaklığı

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{\infty}+\frac{1}{r}\right)=\frac{n-1}{r}\ ;\ f=\frac{10}{n-1}$$

olur. Mercek formülünden görüntü ile mercek arasındaki uzaklık

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\ ,\ \frac{1}{30}+\frac{1}{b}=\frac{n-1}{10}\ ;\ b=\frac{30}{3n-4}$$

olarak bulunur. Bu b değeri 10 cm den büyük olmalıdır:

$$\frac{30}{3n-4}>10;\ n<\frac{7}{3}=2{,}33 \text{ olmalıdır.}$$

b) n=3 için merceğin odak uzaklığı

$$\frac{1}{f}=\frac{n-1}{r}=\frac{3-1}{10}\ ;\ f=5 \text{ cm}$$

olarak bulunur. Mercek formülünden birinci görüntü ile mercek arasındaki uzaklık

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f}\ ,\ \frac{1}{30}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{5}\ ;\ b_1=6 \text{ cm}$$

olarak bulunur. Bu görüntü cam bloğuna göre bir cisim gibi davranır. Bu cisim camdan

$a_2=10-6=4$ cm

olur. Cama göre görüntü

$$\frac{1}{a_2}+\frac{n}{b_2}=\frac{n-1}{\infty}\ ,\ \frac{1}{4}+\frac{3}{b_2}=0;\ b_2=-12 \text{ cm}$$

uzakta oluşur. Görüntü sanal ve camın solundadır. Büyütme oranı

$$k=k_1k_2=\frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2}=\frac{6}{30}\frac{12}{4}=\frac{3}{5}$$

olarak bulunur. Görüntü küçük, ters ve sanaldır.

c) Mercek formülünden birinci görüntü ile mercek arasındaki uzaklık

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f}\ ,\ \frac{1}{30}+\frac{1}{b_1}=\frac{n-1}{10}\ ;\ b_1=\frac{30r}{30(n-1)-r}$$

olarak bulunur. Bu görüntü cam bloğuna göre bir cisim gibi davranır. Bu cisim camdan

$$a_2=b_1-10=\frac{30r}{30(n-1)-r}-10=\frac{40r-300(n-1)}{30(n-1)-r}$$

olur. Cama göre görüntü

$$\frac{1}{a_2}+\frac{n}{b_2}=\frac{n-1}{\infty}\ ,\ \frac{30(n-1)-r}{40r-300(n-1)}+\frac{n}{b_2}=0;\ b_2=\frac{300n(n-1)+40r}{30(n-1)-r}$$

uzakta oluşur. Bu görüntünün r'den bağımsız olması için

$$\frac{db_2}{dr}=0$$

olmalıdır. Buradan

$$3n^2+n-4=0;\ n=\frac{-1\pm 7}{6}$$

olarak bulunur. n<0 olmayacağına göre n=1 tek çözümdür, yani hem mercek hem blok havadan yapılmış olmalıdır. Bu durum ise verilen problemi ortadan kaldırmaktadır. Yani bu sistemde son görüntünün yeri r'den bağımsız olamaz.