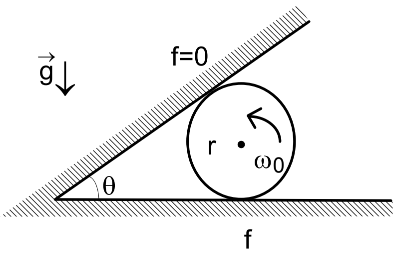
IX. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-2001

1. Kütlesi m_1 yarıçapı R olan oyuncak katı bir yer küresi düşey ekseni etrafında sabit ω_0 açısal hızı ile dönmektedir. Kuzey kutup üzerinden harekete geçen m_2 kütleli bir böcek t zamanında bir meridyen boyunca sabit v hızı ile hareket ederek güney kutba vardığında küre ne kadar bir açı ile dönecektir?

Not: Kürenin kütle merkezinden geçen düşey eksene göre eylemsizlik momenti $J_{01} = \dfrac{2m_1R^2}{5}$ dir. Aşağıdaki integral çözüm sırasında gerekli olabilir.

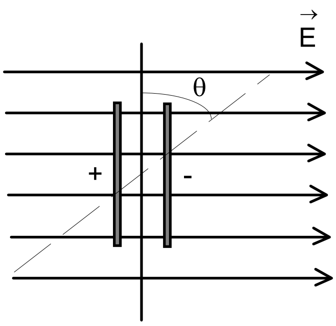
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - D\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-D^2}} \; ; \; (D^2<1)$$



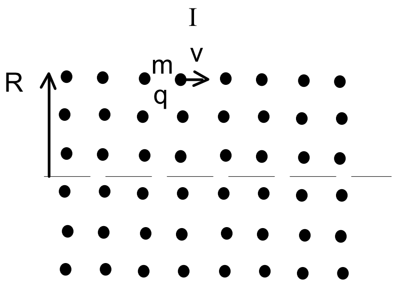
2. Yatay sürtünmeli zemin ile eğik sürtünmesiz duvar arasındaki açı θ olarak veriliyor. Oluşan siperin içinde yarıçapı r ve kütlesi m olan ve kağıt düzlemine dik bir eksen etrafında sabit ω_0 açısal hıza kadar döndürülen katı bir küre, siperin her yüzü ile aynı anda temas edecek şekilde yavaşça bırakılmaktadır. Küre ile yatay zemin arasındaki sürtünme katsayısı f, yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.

a) Eğer $f<\tan\theta$ ise kürenin durması için geçen süre nedir?

b) Eğer f□$>\tan\theta$ ise kürenin hareketi nasıl olur?

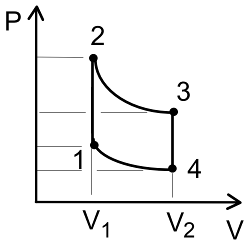


3. Şekilde görülen düzgün bir elektrik alanının içine, yüklenmiş paralel levhalı bir kondansatörü yerleştirebilmek için yapılan iş A_1 dir. Bu kondansatörü elektrik alanı içinde θ açısı kadar döndürmek için yapılan iş A_2 ise $\dfrac{A_2}{A_1}$ oranı ne olur. Burada kondansatörü kendi elektrik alanının düzgün ve tamamen kendi içinde kaldığını ayrıca levhalar θ açısıyla döndürülürken levhalar üzerindeki yüklerin sabit kaldığını varsayınız.

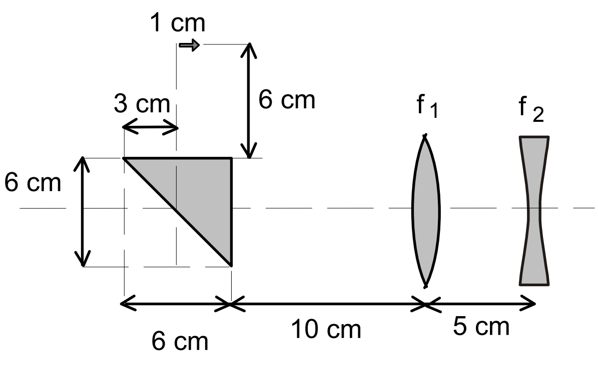


4. Yarıçapı R ve uzunluğu R'den çok büyük olan bir iyon demetini göz önüne alınız. Bu iyon demetinin akım değeri I, iyonların her birinin yükü q, kütlesi m ve hızları v ise demetin en dışında bulunan q yüklü bir iyona etki eden kuvveti nedir? Bu demetin yarıçapının, demet ilerledikçe büyüme $\dfrac{dr}{dt}$ oranı nedir?

Not: İyonun r yönündeki ilk hızını sıfır varsayınız.

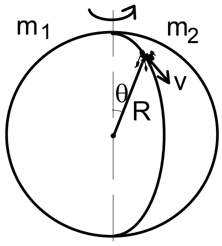


5. Adyabatik katsayısı γ olan bir gaz ile P-V diyagramında yapılan kapalı olan 1-2-3-4-1 prosesin 1-2 izokor, 2-3 adyabatik, 3-4 izokor ve 4-1 adyabatik proseslerden oluşmaktadır. Bu kapalı prosesin verimi nedir?



6. Kırıcılık indisi n=1,5 olan camdan yapılmış bir dik açılı prizmanın dik kenarlarının uzunluğu 6 cm dir. Şekilde gösterildiği gibi bu prizmanın bir dik yüzünden 10 cm uzakta, odak uzaklığı f_1=20 cm olan yakınsak bir mercek bulunmaktadır. Bu mercekten 5 cm uzağa odak uzaklığı f_2=10 cm olan ıraksak bir mercek konulmuştur. Prizmanın diğer dik yüzünden 6 cm uzakta bulunan 1 cm boyundaki bir cismin bu sistem tarafından oluşturulan görüntüsünün yerini ve boyunu bulunuz.

IX. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2001



1. Açısal momentum korunum yasasından

$$J_{01}\omega_0=J\omega;\ J_{01}=\frac{2m_1R^2}{5};\ J=J_{01}+m_2R^2\sin^2\theta$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt};\ \theta=\frac{vt}{R}$$

ve hareket süresi için $\tau=\frac{\pi r}{v}$ yazabiliriz. Buradan

$$\theta=\int_0^\tau \frac{\frac{2m_1R^2\omega_0}{5}dt}{\frac{2m_1R^2}{5}+m_2R^2\sin^2\left(\frac{vt}{R}\right)}=\int_0^\pi \frac{\frac{2m_1R\omega_0}{5v}dx}{\frac{2m_1}{5}+m_2\sin^2 x}=$$

$$=\int_0^\pi \frac{\frac{m_1R\omega_0}{5v}d2x}{\frac{2m_1}{5}+\frac{m_2(1-\cos 2x)}{2}}=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{m_1R\omega_0}{5v}dz}{\left(\frac{2m_1}{5}+\frac{m_2}{2}\right)\left(1-\frac{5m_2\cos z}{4m_1+5m_2}\right)}=$$

$$=B\int_0^{2\pi}\frac{dz}{1-D\cos z};\ B=\frac{2m_1R\omega_0}{(4m_1+5m_2)v};\ D=\frac{5m_2}{4m_1+5m_2}$$

yazabiliriz. $u=\tan\frac{z}{2}$ dönüşümü yapalım. Buradan

$$dz=\frac{2du}{1+u^2};\ \cos z=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{dz}{1-D\cos z}=4\int_0^1\frac{\frac{2udu}{1+u^2}}{1-D\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=8\int_0^1\frac{du}{1-D+(1+D)u^2}=$$

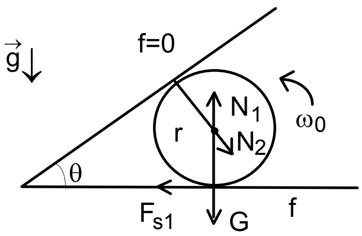
$$=8\int_0^1\frac{du}{(1-D)\left(1+\frac{1+D}{1-D}u^2\right)}=8\int_0^1\frac{\sqrt{\frac{(1-D)}{1+D}}\,d\left(\sqrt{\frac{(1+D)}{1-D}}u\right)}{(1-D)\left(1+\sqrt{\frac{(1+D)u}{1-D}}^{\,2}\right)}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{1-D^2}}\int_0^1\frac{d\left(\sqrt{\frac{(1+D)}{1-D}}u\right)}{1+\sqrt{\frac{(1+D)u}{1-D}}^{\,2}}=\frac{8}{\sqrt{1-D^2}}\arctan 1=\frac{2\pi}{\sqrt{1-D^2}}$$

olarak bulunur. Buradan kürenin dönme açısı

$$\theta=\frac{2m_1R\omega_0}{(4m_1+5m_2)v}\ \frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{5m_2}{4m_1+5m_2}\right)^2}}=\frac{\omega_0R\pi}{v}\sqrt{\frac{2m_1}{2m_1+5m_2}}$$

olarak bulunur.



2. a) Disk olduğu yerde döndüğü için

$$\vec{G}+\vec{F}_{s1}+\vec{N}_1+\vec{N}_2=0$$

olmalıdır. Bu denklemi bileşenlere ayırabiliriz.

$$F_{s1}=N_2\sin\theta;\ F_{s1}=fN_1$$

$$mg+N_2\cos\theta=N_1$$

Buradan

$$N_1=\frac{mg\tan\theta}{\tan\theta-f};\ F_{s1}=\frac{fmg\tan\theta}{\tan\theta-f}$$

olarak bulunur. Küreye etki eden moment

$$M=F_{s1}r=J\alpha;\ J=\frac{2mr^2}{5}$$

olur. Buradan açısal ivme ve diskin durma süresi

$$\alpha=\frac{5fg\tan\theta}{2r(\tan\theta-f)};\ t=\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{2\omega_0 r(\tan\theta-f)}{5fg\tan\theta}$$

olarak bulunur.

b) Eğer $f>\tan\theta$ ise açısal ivme için bulduğumuz ifade negatif olur. Bunun fiziksel anlamı ise küre durmadan ger döner.

3. Kondansatörün E alanının içine konmadan önceki enerjisi $\Pi_{1k}=\frac{\varepsilon_0 E_0^{\,2}}{2}V$ olarak yazılabilir. Burada E_0 kondansatörün plakaların arasındaki elektrik alanı, V ise kondansatörün hacmidir. Aynı hacim içindeki elektrik alan enerjisi $\Pi_{1e}=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}V$ olarak yazılabilir. Kondansatör elektrik alanın içine şekildeki gibi yerleştirilirse kondansatör içindeki elektrik alanı

$$E_1=E_0+E$$

ve bu durumda kondansatörün enerjisi $\Pi_2=\frac{\varepsilon_0 E_1^{\,2}}{2}V$ olarak yazılabilir. Yapılan iş

$$A_1=-\Delta\Pi_1=-[\Pi_2-(\Pi_{1k}+\Pi_{1e})]=-\varepsilon_0 EE_0V$$

olarak bulunur. Verilen durumdan kondansatör θ açısına döndürülürse bileşke elektrik alan kosinüs teoremine göre

$$E_2^{\,2}=E^2+E_0^{\,2}-2EE_0\cos(180°-\theta)=E^2+E_0^{\,2}+2EE_0\cos\theta$$

ve bu durumda kondansatörün enerjisi $\Pi_3=\frac{\varepsilon_0 E_2^{\,2}}{2}V$ olarak yazılabilir. Yapılan iş

$$A_2=-\Delta\Pi_2=-[\Pi_3-\Pi_2)]=-\varepsilon_0 EE_0V(\cos\theta-1)$$

ve aradığımız oran

$$\frac{A_2}{A_1}=\cos\theta-1$$

olarak bulunur. İkinci bir yöntemde dipol enerji yaklaşımı kullanabiliriz. Kondansatörün dipol momenti

$$p=\varepsilon_0(\varepsilon-1)EV$$

enerjisi

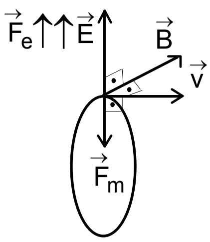
$$\Pi=-\vec{p}.\vec{E}$$

olur. İlk durumda bu enerji sıfır çünkü dipol elektrik alanında bulunmamaktadır. Birinci durumda enerji $\Pi_1=-pE$, ikinci durumda enerji $\Pi_2=-pE\cos\theta$ olur. Her durumda yapılan işler

$$A_1=-\Delta\Pi_1=-(\Pi_1\ \Pi_0)=pE$$

$$A_2=-\Delta\Pi_2=-(\Pi_2-\Pi_1)=\cos\theta-1$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi aynı oran çıkar.



4. Demetin şekli silindir olduğunu, yüklü taneciklerin bu demetin içinde hacimsel olarak homojen daldığını kabul edelim. Yüklü taneciklerin hacimsel yük yoğunluğu ρ olsun. Elektik akım ifadesinden bu yük yoğunluğu

$$I=\frac{dQ}{dt}=\rho v\pi R^2;\ \rho=\frac{I}{v\pi R^2}$$

olarak bulunur. Silindir yüzeyi için Gauss yasasından elektrik alan

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0};\ E.2\pi r\ell=\frac{\rho\ell\pi r^2\ell}{\varepsilon_0};\ E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}=\frac{Ir}{2v\varepsilon_0\pi R^2}$$

olarak bulunur. Yüke etki eden elektriksel kuvvet

$$F_E(r=R)=qE_R=\frac{Iqr}{2v\varepsilon_0\pi R^2}=\frac{Iq}{2v\varepsilon_0\pi R}$$

olarak bulunur. Manyetik alan dolanım teoreminden manyetik alan

$$\oint_\ell \vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_0 I;\ B.2\pi r=\mu_0\rho v\pi r^2;\ B=\frac{\mu_0 v\,\rho r}{2}=\frac{\mu_0\, Ir}{2\pi R^2}$$

yüke etki eden manyetik kuvvet

$$F_M(r=R)=qvB_R=\frac{\mu_0 qv\, Ir}{2\pi R^2}=\frac{\mu_0 qv\, I}{2\pi R}$$

olarak bulunur. Yaratılan manyetik alan hıza dik, manyetik kuvvet ise elektrik kuvvete zıt olup silindir eksenine dik olacaktır. Net kuvvet

$$F_n=F_e-F_m=\frac{Iq}{2v\varepsilon_0\pi R}-\frac{\mu_0 qv\, I}{2\pi R}=\frac{qI}{2v\varepsilon_0\pi R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right);\ \left(c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right)$$

olarak bulunur. Radyal yönde r mesafesine bağlı olarak etki eden kuvvet

$$F(r)=qE-qvB=\frac{Iqr}{2v\varepsilon_0\pi R^2}-\frac{\mu_0 qv\, Ir}{2\pi R^2}=\frac{qIr}{2v\varepsilon_0\pi R^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

olarak yazılabilir. En dış nokta r=R için

$$F(R)=\frac{qI}{2v\varepsilon_0\pi r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

yazabiliriz. Bu kuvvetin etkisi ile kazanılan ivme

$$F(r)=ma=m\frac{du}{dt}=m\frac{du}{dr}\frac{dr}{dt}=mu\frac{du}{dr};\ u=\frac{dr}{dt}$$

olarak yazılabilir. Buradan integrasyon sonucu aranan demetin genişleme hızı

$$\frac{u^2}{2}=\int_0^r\frac{F(r)dr}{m}=\int_R^r\frac{qIdr}{2v\varepsilon_0 m\pi r}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{qI}{2v\varepsilon_0 m\pi}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ln\frac{r}{R}$$

$$u=\sqrt{\frac{qI}{v\varepsilon_0 m\pi}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\ln\frac{r}{R}}$$

olarak bulunur.

5. Bir kapalı prosesin verimi

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=\frac{A}{Q_1}$$

olarak tanımlanır. Burada Q_1 ısıtıcıdan sisteme verilen ısı, Q_2 ise sistemden soğutucuya verilen ısı miktarı, A ise sistemin yaptığı iştir. Verilen ısı için

$$Q_1=\Delta U_{12}=c_V(T_2-T_1)$$

sistemin verdiği ısı için

$$Q_2=\Delta U_{34}=c_V(T_4-T_3)$$

verim için

$$\eta=1-\frac{T_3-T_4}{T_2-T_1}$$

yazabiliriz. 1-2 olan izokorik proses için

$$\frac{P_1}{T_1}=\frac{P_2}{T_2}$$

2-3 adyabatik proses için

$$T_2V_1^{\gamma-1}=T_3V_2^{\gamma-1}$$

3-4 izokorik proses için

$$\frac{P_3}{T_3}=\frac{P_4}{T_4}$$

4-1 adyabatik proses için

$$T_4V_2^{\gamma-1}=T_1V_1^{\gamma-1}$$

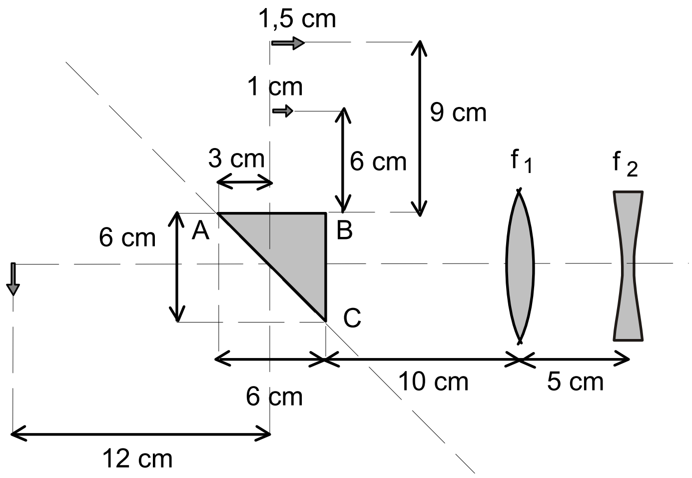
yazabiliriz. Buradan

$$\frac{T_2}{T_3}=\frac{T_1}{T_4}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

olarak bulunur. Prosesin verimi

$$\eta=1-\frac{T_3-T_4}{T_2-T_1}=1-\frac{T_4}{T_1}=1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

olarak bulunur.



6. Prizmanın yatay AB yüzü tarafından oluşturulan görüntü bu yüzden

$$\frac{1}{a_1}+\frac{n}{b_1}=\frac{n-1}{\infty}\ ;\ \frac{1}{6}+\frac{1{,}5}{b_1}=\frac{1{,}5-1}{\infty}$$

$$b_1=9\text{ cm}$$

yukarıdadır. Görüntünün boyu değişmemektedir. Büyütme oranı

$$k=\frac{\frac{b_1}{n}}{a_1}=1$$

olur. Bu görüntü AC yüzü için 3+9=12 cm uzaktaki bir cisim gibi davranacaktır. Bu yüze gelen ışınlar için sınır açısı

$$\sin\theta=\frac{1}{n}=\frac{1}{1{,}5}\ ;\ \theta=42^\circ$$

olup ışınlar 45° ile geldiğinden tam yansıma olacaktır. Bu durumda eğik AC yüzü bir düzlem ayna gibi davranacak ve ikinci görüntünün arka ucu AC yüzünden 12 cm solda olacaktır. Dikey BC yüzü ise kendinden

$$a_{21}=12+3=15\text{ cm}$$

uzaktaki bu cismin görüntüsünü kendisinden

$$\frac{n}{a_{21}}+\frac{1}{b_{21}}=\frac{1-n}{\infty}\ ;\ \frac{1{,}5}{15}+\frac{1}{b_{21}}=\frac{1-1{,}5}{\infty}\ ;\ b_{21}=10\text{ cm}$$

sol tarafta verecektir. Bu görüntü bir cisim gibi davranmaktadır. Sonuç olarak birinci mercek için cisim

$$a_{31}=10+10=20\text{ cm}$$

uzaktadır. Yani odaktadır ve bu mercek

$$b_{31}=a_{14}=\infty$$

sonsuzda görüntü oluşturur. Optik eksene paralel gelen ışınlar ikinci (ıraksak) merceğin odağında toplanacakları için bu merceğin solunda

$$b_{14}=10\text{ cm}$$

son görüntü olacaktır. Görüntü boyu

$$h_{s1}=\frac{f_2}{f_1}.h_1=\frac{10}{20}.1=0{,}5\text{ cm}$$

olarak bulunur.