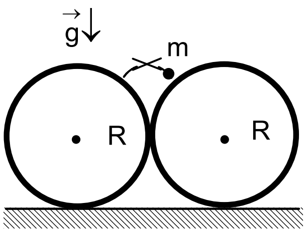
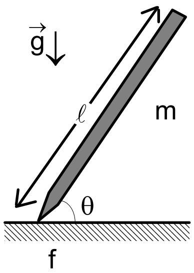
VIII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-2000



1. Yarıçapları R olan iki çember, her zaman birbirlerine dokunacak şekilde düşey düzlemde bulunmaktadırlar. Kütlesi m ve yarıçapı ihmal edilecek kadar küçük bir top bu iki çemberle elastik çarpışmalar yaparak periyodik hareketine devam etmektedir. Topun yörüngesi çemberlere yatayla θ açısı yapacak şekilde dokunmaktadır.
a) Topun momentumunun yatay bileşeni, çemberlerin herhangi birine her çarpışmada, Δp_x kadar değişmekte ise; hangi θ açısı için Δp_x maksimum olur?
b) Topun çembere çarpmadan önceki hızı v olsun. $\theta \cong \varepsilon$ ve $\theta \cong \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε çok küçük bir açı olmak üzere iki limit durumu inceleyiniz. Her iki limit durumu için v hızının yaklaşık ifadelerini türetiniz.
c) Topun çemberler arasında defalarca tekrarlanan hareketi süresince çemberlerin birbiri ile temas durumlarının bozulmaması için gerekli olan yatay düzlemdeki ortalama kuvvete $F_{ort}(\theta)$ diyelim. Her iki limit durumu için $F_{ort}(\theta)$'nın yaklaşık ifadelerini türetiniz.

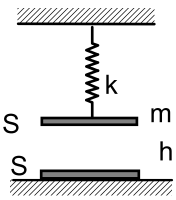
Not: $\sin\varepsilon \cong \varepsilon$, $\cos\varepsilon \cong 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ gibi küçük açı yaklaşımlarını b) ve c) şıklarında kullanabilirsiniz.

2. Yoğunluğu ρ olan bir parçacık bulutu kütlesi M ve yarıçapı R olan bir yıldıza doğru v hızı ile yaklaşmaktadır. Yıldızın kütlesinin artış hızı nedir? Burada yıldız ile çarpışmaya uğrayan parçacıkların yıldız tarafından yutulduğunu varsayınız.



3. Uzun ve silindir şeklindeki bir kurşun kalemin kütlesi m uzunluğu ℓ olup, kütle homojen olarak dağılmıştır. Kalemi masa üzerine dik olarak koyup serbest bırakalım. Kalem düşerken statik f sürtünme katsayısına bağlı olarak θ açısının kritik bir değerinden itibaren, ucu başlangıçta koymuş olduğumuz noktadan kaymaya başlar. Kayma olduğu durumlar için sürtünme katsayısı ile θ açısı arasındaki ilişkiyi gösteren ifadeyi türetiniz. Sürtünme katsayısının maksimum değeri ne olabilir ve bu koşulda kalem hangi açı değerleri için kayar?

4. a) 100 °C sıcaklığında bulunan 1,0 kg su ve 0 °C sıcaklığında bulunan ve kütlesi çok büyük olan buz kalıbı verilmektedir. Buz ile su arasında tersinir bir ısı makinesi ile, sudan alınan ısı, sistemden iş alınamayacak duruma gelinceye kadar, buza verilmektedir. Bu işlemden sonra suyun sıcaklığı nedir? Ne kadar buz erimiştir? Isı makinesi tarafından ne kadar iş yapılmıştır?
b) 1,0 kg suyu dondurabilmek için gerekli minimum mekanik işi kuramsal olarak hesaplayınız. Suyun ve etraftaki havanın ilk sıcaklığı t°_o=25 °C dir.
c) 20 °C deki 10 kg su, -10 °C sıcaklığında bulunan bir depo ile temasta tutularak -10 °C deki buza dönüştürülmüştür. Bu işlem sabit basit basınç altında yapılmış olup, suyun bu sabit basınç altında ısı kapasitesi c_s=4180 J/kg.K, buzun c_k=2090 J/kg.K, buzun erime özısısı $L_e=3{,}34.10^5$ J/kg olduğuna göre, evrenin entropisi ne kadar değişmiştir?



5. Yüzey alanları S olan iki düzlem plakadan oluşan kondansatörün alt plakası yatay düzlemdeki yalıtkan bir masa üzerinde bulunmaktadır. Üst plaka ise, başlangıçta masadan h kadar yüksekte ve alt plakaya paralel olarak duracak şekilde tavandan yay sabiti k olan bir yay ile asılmıştır. Bu kondansatör bir pile bağlanarak U voltajı ile yüklendikten sonra pil devreden çıkarılmaktadır. (Yüklenme sırasında üst plakanın yerinin değişmediğini varsayınız). Kondansatörün plakalarının birbirine değmemesi için yayın yay sabitinin değeri ne olmalıdır? ($h \ll \sqrt{S}$ kabul ediniz).

6. İletken ve çapı b olan bir telden yapılmış dairesel halkanın çapı D, özdirenci ρ ve özkütlesi ξ dir. Bu halka yerden yüksekliği h olan bir noktadan serbest bırakılmakta ve düşerken $B_z = B_o(1+kz)$ ifadesi ile verilen değişken bir manyetik alan etkisi altında kalmaktadır. Burada k bir sabittir. Halka düzlemi her zaman z eksenine dik olan x-y düzlemine paralel kalmaktadır. Hava direncini ihmal ederek halkanın limit hızını bulunuz. Yerçekimi ivmesi g veriliyor.

7. Odak uzaklığı f, çapı D olan yakınsak bir mercek a uzaklıktaki noktasal bir cismin gerçek görüntüsünü b uzaklığında bulunan bir film üzerinde noktasal olarak oluşturmaktadır. Cisim bulunduğu noktadan daha uzak (a_2), ya da daha yakın (a_1) bir yere yerleştirildiğinde noktasal cismin görüntüsü aynı ekran üzerinde d çaplı bir daire olarak oluşmaktadır. Cismin, görüntüsünün çapının en fazla d olması şartı ile, bulanabileceği aralığa, yani a_2-a_1 uzaklığına bu merceğin alan derinliği adı verilmektedir.

a) Bu durumda alan derinliğinin ifadesini a, f, d ve A cinsinden bulunuz. Burada A kameranın göreceli açıklığı olup $A=\frac{f}{D}$ olarak tanımlanır.

b) a, f ve d büyüklükleri sabit kalmak koşulu ile kamera merceğinin çapını değiştirerek alan genişliği maksimize edilebilir mi? Cevabınız; evet ise bu çap değerini bulunuz, hayır ise açıklayınız.

VIII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2000

1. a) Top birinci çembere çarpıp geri döndüğü andaki hızının bileşenleri v_x ve v_y olsun. Diğer çembere gidene kadar geçen süre

$$t=\frac{2v_y}{g}$$

yatay yönde alınan yol ise

$$v_x t=2R(1-\cos\theta)$$

olur. İki bileşen arasındaki ilişki

$$v_y=v_x\tan\theta$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$v_x=\sqrt{gR\cot\theta(1-\cos\theta)}\ ;\ v_y=\sqrt{gR\tan\theta(1-\cos\theta)}$$

olarak bulunur. Momentum değişimi

$$\Delta p_x=2mv_x=2m\sqrt{gR\cot\theta(1-\cos\theta)}$$

θ açısına göre türev alıp ve alınan türev sıfıra eşitlenirse

$$\cos^3\theta-2\cos\theta+1=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri sayısal olarak çözülebilir. Bu kökler

$$\cos\theta=1 \text{ ve } \cos\theta=0{,}618=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur. $\cos\theta=1$ istenilen çözüm değildir.(Çünkü $\theta=0$ $v_x=0$ olur) O halde diğer kök çözüm olup $\theta=52°$ için Δp_x maksimum olacaktır.

b) $\theta\cong\varepsilon$ $\varepsilon\to0$, $\sin\varepsilon\cong\varepsilon$, $\cos\varepsilon\cong1-\frac{\varepsilon^2}{2}$, kullanılırsa

$$v_x=\sqrt{gR\cot\theta(1-\cos\theta)}\to\sqrt{gR\frac{\varepsilon}{2}}\ ;\ v_y=\sqrt{gR\tan\theta(1-\cos\theta)}\to\sqrt{gR\frac{\varepsilon^3}{2}}$$

olarak bulunur. Hızın değeri

$$v^2=v_x^2+v_y^2$$

olduğuna göre,

$$v=\sqrt{\frac{gR}{2}\varepsilon}\to0$$

olarak bulunur. $\theta\cong\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ durumunda ise;

$$v_x=\sqrt{gR\cot\theta(1-\cos\theta)}\to\sqrt{gR\varepsilon}\ ;\ v_y=\sqrt{gR\tan\theta(1-\cos\theta)}\to\sqrt{\frac{gR}{\varepsilon}}$$

olarak bulunur. Hızın değeri

$$v^2=v_x^2+v_y^2$$

olduğuna göre,

$$v=\sqrt{\frac{gR}{\varepsilon}}\to\infty$$

olarak bulunur.

c) Ortalama kuvvet için

$$F_{ort}(\theta)=\frac{\Delta p_x}{t}$$

yazabiliriz. Burada t çarpışmalar arasında geçen süredir. Buradan

$$F_{ort}(\theta).t=2mv_x\frac{g}{2v_y}=mg\cot\theta$$

olarak bulunur.

$\theta\cong\varepsilon$ $\varepsilon\to0$ durumu için

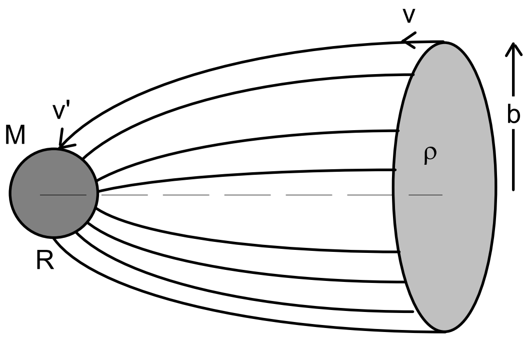
$$F_{ort}(\theta)=mg\cot\theta\cong\frac{mg}{\varepsilon}\to\infty$$

olup topun hızı sıfıra yaklaşırken, yatay yöndeki ortalama kuvvet sonsuza yaklaşmaktadır, çünkü çarpışma frekansı çok yüksektir.

$\theta\cong\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ durumunda ise

$$F_{ort}(\theta)=mg\cot\theta\cong mg\varepsilon\to0$$

olup topun hızı sonsuza yaklaşırken, yatay yöndeki ortalama kuvvet sıfıra yaklaşmaktadır.



2. Yıldız çekim kuvveti sayesinde çok uzakta bulunan tanecikleri kendisine doğru çekmeye başlar. Yıldızın etki alanına giren tanecikler yıldız tarafından yutulur. Yıldıza doğru hiç sapmadan hareket eden taneciklerin belirttiği doğrudan belirli ve b uzakta bulunan tanecikler bu etki alanına girmektedir. Bu tanecikler yıldızdan çok uzakta oldukları için enerji korunumu yasası

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv'^2}{2}-\frac{\gamma Mm}{R}$$

açısal momentum korunumu yasası

$$mvb=mv'R$$

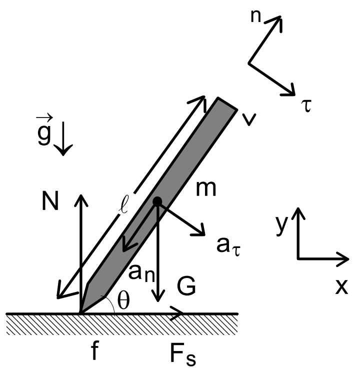
olarak yazılabilir. Buradan

$$v'=\frac{bv}{R};\ \frac{v^2}{2}=\frac{(vb)^2}{2R^2}-\frac{\gamma M}{R};\ b=\sqrt{R^2+\frac{2\gamma MR}{v^2}}$$

nişan hatası olarak bilinir. Nişan hatasından daha küçük mesafeden geçen tanecikler yutulur. Kütlenin artış hızı

$$\frac{dM}{dt}=\rho\pi v\left(R^2+\frac{2\gamma MR}{v^2}\right)$$

olarak bulunur.



3. Kalem düşerken statik sürtünme kaymasını önler. Kaymanın başlangıcında enerji kaybı yoktur. Enerji korunumu yasasından

$$\frac{mg\ell}{2}=\frac{mg\ell\sin\theta}{2}+\frac{J\omega^2}{2};\ J=\frac{m\ell^2}{3}$$

kayma anına kadar kalemin kazandığı açısal hız

$$\omega^2=\frac{3g(1-\sin\theta)}{\ell}$$

olarak bulunur. Kalemin masaya temas ettiği noktaya göre moment alırsak kalemin kazandığı açısal ivmeyi bulabiliriz.

$$M=J\alpha=\frac{mg\ell\cos\theta}{2},\ \alpha=\frac{3g\cos\theta}{2\ell}$$

Kaymanın başladığı anda (açıda) kütle merkezinin teğetsel ve normal ivmeleri

$$a_\tau=\frac{\alpha\ell}{2}=\frac{3g\cos\theta}{4};\ a_n=\frac{\omega^2\ell}{2}=\frac{3g(1-\sin\theta)}{2}$$

olur. Yatay ve dikey yöndeki ivmelerin bileşenleri ise

$$a_x=a_\tau\sin\theta-a_n\cos\theta=\frac{3g(3\sin\theta-2)\cos\theta}{4};\ a_y=a_\tau\cos\theta+a_n\sin\theta=\frac{3g(1+2\sin\theta-3\sin^2\theta)}{4}$$

olarak yazılabilir. Kaleme etki eden kuvvetler ağırlık G, tepki N ve sürtünme F_s kuvveti ise

$$N-mg=-ma_y;\ N=\frac{mg(3\sin\theta-1)^2}{4};\ F_s=fN=ma_x=\frac{3mg(3\sin\theta-2)\cos\theta}{4}$$

yazabiliriz. Belirli bir kritik θ_{kr} açısında dik kuvvet statik sürtünmeden kaynaklanan maksimum kuvvete fN eşit olduğunda kayma başlayacaktır. Buradan

$$f=\frac{3(3\sin\theta-2)\cos\theta}{(1-3\sin\theta)^2}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin türevi alıp sıfıra eşitlersek

$$\frac{(3-6\sin^2\theta+2\sin\theta)(1-3\sin\theta)+6(1-\sin^2\theta)(3\sin\theta-2)}{(1-3\sin\theta)^3}=0$$

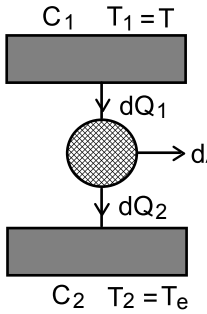
$$3-12\sin^2\theta-7\sin\theta+18\sin^3\theta+18\sin\theta-18\sin^3\theta-12+12\sin^2\theta=0;\ \sin\theta=\frac{9}{11};\ \theta=54{,}9°;\ f_s=0{,}37$$

olarak bulunur. Yani bu f için 0°<θ<54,9° olduğu sürece kayma gözlenir. N=0 durumunda ise θ_0=19,5° olmaktadır. Sürtünme katsayısını bulmak için kaleme paralel ve kaleme dik olan teğet ve normal koordinatları da kullanabiliriz.

$$F_s\cos\theta+N\sin\theta-mg\sin\theta=-ma_n$$

$$F_s\sin\theta+mg\cos\theta-N\cos\theta=ma_\tau;\ F_s=fN$$

Buradan aynı sonuç çıkar.



4. a) Isıtıcının ısı kapasitesi sonlu, soğutucunun ısı kapasitesi sonsuz olarak kabul edilebilir. Isıtıcının sıcaklığı sürekli olarak değişmektedir. Maksimum işi bulabilmek için ısıtıcıdan sonsuz küçük dQ_1 ısısı alınarak, ısı makinesi ile sonsuz küçük dA işi yapılıp soğutucuya sonsuz küçük miktarda dQ_2 ısı aktarılarak kapalı proses yapıldığını kabul edelim. Bu sonsuz küçük proses için ısıtıcının sıcak-lığının T olduğunu ve bu sıcaklığın sabit kaldığını kabul edebiliriz. Bu yapılan sonsuz küçük kapalı proseslerin Carnot prosesleri olduğunu kabul edebiliriz. Carnot prosesinin verimi η

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=\frac{T-T_e}{T}$$

$$T_1=T;\ T_{01}=T_K=373\text{ K};\ T_2=T_e=273\text{ K}$$

olarak veriliyor. Burada $T_{01}=T_K$ suyun ilk kaynama sıcaklığı, $T_2=T_e$ ise buzun erime sıcaklığıdır. Suyun son sıcaklığı buzun sıcaklığına eşit olur. Verimi ısıtıcıdan sisteme verilen ısı ve sistemden soğutucuya verilen ısılar cinsinden de yazabiliriz.

$$\eta=\frac{dA}{dQ_1}=\frac{dQ_1-dQ_2}{dQ_1}$$

İki ifadeyi karşılaştırılarak

$$\frac{dQ_1}{T_1}=\frac{dQ_2}{T_2};\ -\frac{Mc_s dT}{T}=\frac{dQ_2}{T_e}$$

yazılabilir. Isıtıcının sıcaklığı sürekli azaldığı için

$$dQ_1=-C_1dT_1=-Mc_sdT$$

olarak yazılabilir. Buradan buza verilen ısı

$$Q_2=-\int_{T_k}^{T_e}\frac{Mc_sT_edT}{T}=Mc_sT_e\int_{T_e}^{T_k}\frac{dT}{T}=Mc_sT_e\ln\frac{T_K}{T_e}=356\ 000\text{ J}$$

olarak bulunur. Eritilen buz kütlesi

$$\Delta M_b=\frac{Q_2}{L_{buz}}=1{,}06\text{ kg}$$

ısıtıcıdan alınan ısı

$$Q_1=mc_s(T_k-T_e)=418\ 000\text{ J}$$

yapılan iş

$$W=Q_1-Q_2=62\ 000\text{ J}$$

olarak bulunur.

b) Minimum iş

$$W=W_1+W_2$$

olarak yazılabilir. Burada W_1 suyun sıcaklığını T_0=298 K den T_e=273 K'e indirmek için yapılan iş, W_2 suyu buz haline getirmek için yapılan iştir. (M= 1 kg)

$$W_1=Q_{11}-Q_{21}=Mc_s(T_0-T_e)-Mc_sT_e\ln\frac{T_0}{T_e}=4600\text{ J}$$

Buz haline getirilirken buzun ve ortamın sıcaklığı sabit olduğu için

$$\frac{dQ_1}{T_1}=\frac{dQ_2}{T_2};\ \frac{Q_{12}}{T_e}=\frac{Q_{22}}{T_0};\ Q_{22}=\frac{Q_{12}T_0}{T_e};\ W_2=Q_{12}-Q_{22}=ML_e-\frac{ML_eT_0}{T_e}=30\ 500\text{ J}$$

toplam iş W≈35 000 J olarak bulunur

c) Sistemden ısı çıktığı için entropi azalır. Suyun sıcaklığı T_1=293 K den, T_e=273 K'e kadar ve sonra da T_2=263 K'e kadar düşmektedir. (M=10 kg)

$$\Delta\Sigma_1=\int_{T_1}^{T_e}\frac{Mc_sdT}{T}=-Mc_s\ln\frac{T_1}{T_e}=-2955\text{ J/K}$$

$$\Delta\Sigma_2=-\frac{ML_e}{T_e}=-12234\text{ J/K}$$

$$\Delta\Sigma_3=\int_{T_e}^{T_2}\frac{Mc_kdT}{T}=-Mc_k\ln\frac{T_e}{T_2}=-757\text{ J/K}$$

$\Delta\Sigma_d$ deponun entropisi ısı alma sonucu artar

$$\Delta\Sigma_d=\frac{[Mc_s(T_1-T_2)+ML_e+Mc_k(T_e-T_2)]}{T_2}=16673\text{ J/K}$$

Toplam entropi değişimi

$$\Delta\Sigma=\Delta\Sigma_1+\Delta\Sigma_2+\Delta\Sigma_3+\Delta\Sigma_d=727\text{ J/K}$$

olarak bulunur.

5. Pile bağlandığı zaman kapasitör plakaları +q ve -q yükleri ile yüklenecektir. Yük

$$q=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{h}$$

olup üst plaka alt plaka tarafından oluşturulan elektrik alanı altında

$$F=qE_1$$

kuvveti ile aşağı doğru çekilecektir. Burada E_1 bir plakanın oluşturduğu elektrik alandır. Plaka boyutu h'tan çok büyük olduğu durumda elektrik alanını düzgün yüklenmiş bir sonsuz plakanın yarattığı alan olarak kabul edebiliriz;

$$E_1=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U}{2h}$$

F kuvveti üst plakayı aşağı çekerken yay gerilecek olup yayın etkidiği kuvvet plakanın yer değiştirme miktarına bağlı olacaktır. m kütleli plaka denge durumu etrafında harmonik salınım yapmaya başlayacaktır.

$$F+mg=F_k$$

Salınım hareketinin genliğine A dersek,

$$A<0{,}5h$$

için plakalar birbirine dokunmazlar. Kuvvet

$$F_k=k(\Delta x+A),$$

olup denge durumunda

$$mg=k\Delta x$$

yazılabilir. Buradan

$$F+k\Delta x=k(\Delta x+A);\ A=\frac{F}{k}$$

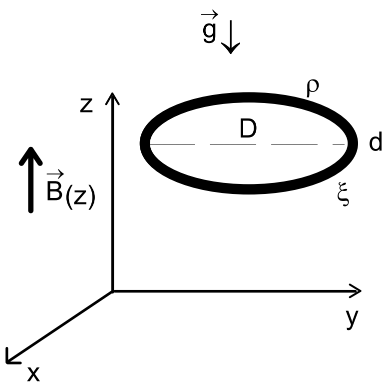
olur. Kısıtlama şartından

$$\frac{F}{k}<\frac{h}{2}$$

yay sabiti için

$$k>\frac{2F}{h}=\frac{2qE}{h}=\frac{\varepsilon_0 SU^2}{h^3}$$

bulunur.



6. Halkanın düşmesi sırasında indükte edilmiş e.m.k

$$\mathcal{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=-S\frac{dB}{dt}=$$

$$=-\frac{\pi D^2}{4}kB_0\frac{dz}{dt}=-\frac{kB_0\pi D^2 v}{4}$$

akan akım

$$I=\frac{|\mathcal{E}|}{R}=\frac{kB_0\pi D^2 v}{4R}=\frac{kB_0\pi D b^2 v}{16\rho}$$

$$R=\rho\frac{\ell}{S_t}=\rho\frac{\pi D}{\frac{\pi b^2}{4}}=\rho\frac{4D}{b^2}$$

olur. Bu akımın oluşturduğu manyetik dipol momenti

$$p_m=IS=\frac{kB_0\pi D b^2 v}{16\rho}\frac{\pi D^2}{4}=\frac{kB_0\pi^2 D^3 b^2 v}{64\rho}$$

bu dipol momentine etki eden kuvvet

$$F=p_m\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{kB_0\pi^2 D^3 b^2 v}{64\rho}kB_0=\frac{k^2 B_0^{\,2}\pi^2 D^3 b^2 v}{64\rho}$$

ağırlık kuvvetine eşit olmalıdır. Ağırlık kuvveti

$$mg=\xi\frac{\pi d^2}{4}\pi D g=\frac{\xi\pi^2 D b^2 g}{4}$$

olarak yazılabilir. Buradan limit hız

$$v=\frac{16\rho\xi g}{k^2 B_0^{\,2} D^2}$$

olarak bulunur. Soruyu enerji analizinden de çözebiliriz. Birim zamanda kaybettiği ısı enerjisi

$$P_{\text{ısı}}=\frac{\mathcal{E}^2}{R}=\frac{k^2 B_0^{\,2}\pi^2 D^3 b^2 v^2}{64\rho}$$

olur. Ağırlık kuvvetinin kazandırdığı güç

$$P_g=mgv=\frac{\xi\pi^2Db^2gv}{4}$$

olur. Halka limit hızı ile hareket ediyorsa iki güç birbirine eşittir.

$$\frac{k^2B_0{}^2\pi^2D^3b^2v^2}{64\rho}=\frac{\xi\pi^2Db^2gv}{4}$$

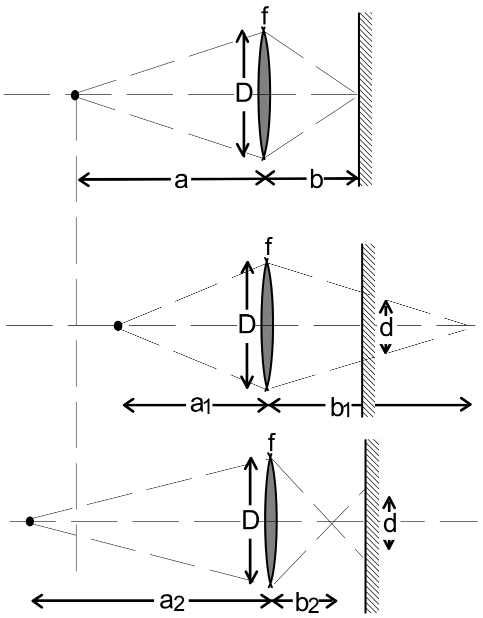
Buradan hız için aynı sonuç çıkar. Genel çözüm

$$m\frac{dv}{dt}=mg-\frac{k^2B_0{}^2\pi^2D^3b^2v}{64\rho}\ ;\ \frac{dv}{dt}=g-\frac{k^2B_0{}^2\pi^2D^3b^2v}{64m\rho}=g-Cv$$

$$\frac{dv}{g-Cv}=dt;\ \int_0^v\frac{dv}{g-Cv}=\int_0^t dt\ ;\ \ln\frac{g-Cv}{g}=-Ct$$

$$v=\frac{g(1-e^{Ct})}{C}$$

olarak bulunur.



7. a) Mercek formülünden ilk durum için

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\ ;\ b=\frac{af}{a-f}$$

yazabiliriz. İkinci durumda

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f}\ ;\ a_1=\frac{b_1f}{b_1-f}$$

şeklin geometrisinden

$$\frac{D}{b_1}=\frac{d}{b_1-b}\ ,\ b_1=\frac{Db}{D-d}$$

olup

$$a_1=\frac{Dbf}{Db-fD+fd}=\frac{Db}{bA-D+d}$$

olarak bulunur. Üçüncü durumda

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f}\ ;\ a_2=\frac{b_2f}{b_2-f}$$

şeklin geometrisinden

$$\frac{D}{b_2}=\frac{d}{b-b_2}\ ,\ b_2=\frac{Db}{D+d}$$

olup

$$a_2=\frac{Dbf}{Db-fD-fd}=\frac{Db}{bA-D-d}$$

olarak bulunur. Alan derinliği

$$a_2-a_1=\frac{Db}{bA-D-d}-\frac{Db}{bA-D+d}=\frac{2Ddb}{(bA-D)^2-d^2}=$$

$$=\frac{2a(a-f)f^2dA}{A^2f^4-d^2(a-f)^2}=\frac{2Ddbf^2}{(b-f)^2D^2-d^2f^2}$$

olarak bulunur.

b) Maksimum ya da minimum araştırmak için a_2-a_1 ifadesinin D'ye göre türevini alıp sıfıra eşitlemeliyiz.

$$\frac{\partial(a_2-a_1)}{\partial D}=\frac{\partial}{\partial D}\left(\frac{2Ddbf^2}{(b-f)^2D^2-d^2f^2}\right)=$$

$$=\frac{2dbf^2\{[(b-f)^2D^2-d^2f^2]-2(b-f)^2D^2\}}{[(b-f)^2D^2-d^2f^2]^2}=-\frac{2dbf^2[(b-f)^2D^2+d^2f^2]}{[(b-f)^2D^2-d^2f^2]^2}\neq 0$$

Yani bu durumda türev yoktur. Bu denklemin payındaki terimlerin hepsi pozitif olduğundan bu denklemi sıfıra eşitleyecek herhangi bir D değeri bulmak mümkün değildir. Yani a, f, ve d sabit tutularak mercek çapını değiştirerek alan derinliğini maksimize etmek mümkün değildir.