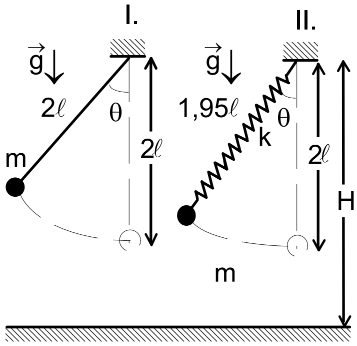
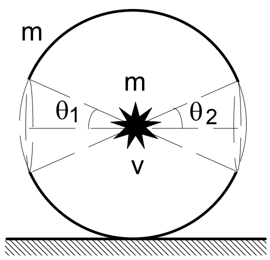
VI. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-1998



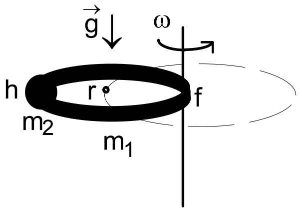
1. 2ℓ uzunluğunda esnek olmayan bir ipin ve gerilmemiş haldeki uzunluğu $1{,}95\ell$, yay sabiti k bilinmeyen bir yayın uçlarında kütleleri bilinmeyen ve m olan cisimler bulun-makta olup, ipin ve yayın asılma noktaları zeminden aynı H yüksekliğinde bulunmaktadır. İp ve yay düşeyle belirli θ açısı yapacak şekilde saptırılıp tutulmakta ve sonra serbest bırakılmaktadır. Her iki cisim de düşey doğrultu-dan geçerken asılma noktalarından 2ℓ uzaklıkta bulun-makta olup, hızlarının sadece yatay doğrultuda olduğu ve kinetik enerjilerinin de eşit olduğu bilinmektedir.

a) Bu durumda yayda depo edilen potansiyel enerji Π nin, ikinci cismin düşey konumdan geçtiği andaki kinetik enerjisi K'ya sayısal oranı nedir?
b) İp düşey doğrultudan geçerken koparsa, cismin menzili H yüksekliğinin yarısı kadar olmaktadır. Bu durumda H kaç ℓ dir?
c) İkinci cisim yay tam düşey doğrultudan geçerken düşey, sürtünmesiz ve esnek olmayan bir duvara çarpıp sadece düşey düzlemde titreşim yapmaktadır. Bu titreşim hareketinin frekansını ℓ ve g cinsinden bulunuz.
d) Cismin konumunu zamanın fonksiyonu olarak yazınız. Cismin titreşim yaparken hızının maksimum değerini ℓ ve g cinsinden bulunuz ve cismin hızını zamanın fonksiyonu olarak yazınız.



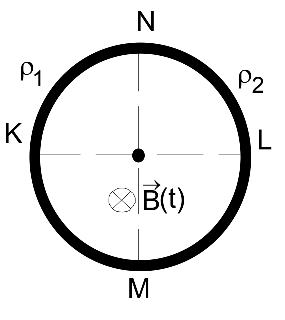
2. Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde içi boş bir küresel kabuk bulunmaktadır. Kabuğun merkezinden geçen yatay doğru etrafında merkezi $2\theta_1$ ve $2\theta_2$ açılarını gören kısımlar kesilip çıkarılmış olup, bu durumdaki kütlesi m dir. Kabuğun geometrik merkezine m kütleli bir bomba yerleştirilmiş olup simetrik bir şekilde patlamaktadır. Bomba patladığı anda oluşan parçaların her birinin hızı v dir. Kabuğun içinde kalan parçalar kabuğun iç tarafına yapışıp kalmaktadırlar.

a) $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta$, $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ ise küresel kabuğun kazanacağı hızının değerini ve yönünü bulunuz.
b) Kabuğun ve bombanın yapıldığı maddenin özısı kapasitesi c, sistemin başlangıç sıcaklığı T_0 dır. Bombanın patlamasından sonra açığa çıkan ısı ve sistemin son sıcaklığı nedir?

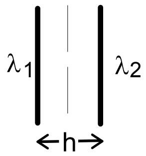


3. Kütlesi m_1, yarıçapı r ve yüksekliği h ince bir halka ile halkaya sabitleş-tirilmiş olan m_2 kütleli küçük bir cisim veriliyor. Halka düşey konumunda bulunan bir çubuk etrafında gittikçe artan açısal ω hızı ile döndürülüyor. Açısal hız belli bir ω_{min} değerine ulaştığında halka yatay konumunda dön-düğünü ve çubuğa göre sabit çizgisel hızla hareket ettiğini gözlenmektedir.
a) Halka ile çubuk arasındaki sürtünme f katsayısı nedir?
b) Bu ω_{min} açısal hızı nedir?
c) Bu durumda sistemin dönme kinetik enerjisi nedir?

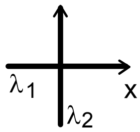
4. Bir maddenin termodinamik hal denklemi $PV=\xi T^3$, iç enerjisi de $U=BT^3\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)$ şeklinde değişmek-tedir. Burada ξ, V_0 bilinen birer sabit, B ise bilinmeyen bir sabittir. B sabiti için bir ifade bulunuz.



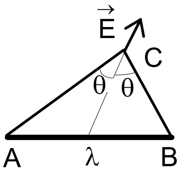
5. Yarıçapı r olan bir halka, kesiti aynı ve özdirençleri ρ_1 ve ρ_2 olan iki farklı maddeden yapılmış iki yarım halkadan oluşmuştur. Halkanın düzlemine dik olacak şekilde $B=\frac{B_0 t}{T}$ manyetik alanı uygulanmaktadır. Burada B_0 ve T sabitler olup, t zamanı göstermektedir.
a) Her yarım halkadaki elektrik alanını bulunuz.
b) K ve L noktaları arasında oluşan U_{KL} ve U_{LK}, K ve L noktaları arasında oluşan U_{KM} ve U_{MK}, L ve M noktaları arasında oluşan U_{LM} ve U_{ML} potansiyel farkı nedir? (K ve L noktaları yarım halkalarının orta noktaları, M ve N noktaları ise iki yarım halkanın eklendiği noktalarıdır.)



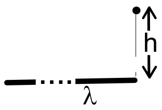
Şekil a)



Şekil b)



Şekil c)



Şekil d)

6. a) Sonsuz, birbirine paralel ve homojen yüklü iki yalıtkan çubuk arasındaki uzaklık h dir. Bunların birim uzunluktaki yükleri sırası ile λ_1 ve λ_2 dir. Çubukların arasında ve iki çubuktan eşit uzaklıktaki bir noktadaki elektrik alanı bulunuz. (Şekil a) Çubuklardan birisinin yükü negatif ise, aynı noktadaki elektrik alan nedir? Aynı iki çubuğu bir koordinat sisteminin eksenleri gibi kullanırsak bunların oluşturduğu düzlemde herhangi bir noktadaki elektrik alanını x ve y koordinatlarına bağlı olarak bulunuz. (Şekil b) Çubukların yükünün işareti aynı ve zıt olduğu durumlarda elektrik alan nedir?

b) Sonlu ve birim uzunluktaki yükü λ olan homojen yüklü yalıtkan bir çubuk düşününüz. Uzaydaki herhangi bir C noktasındaki elektrik alanının yönünün, çubuğun A ve B uçlarını bu C noktasına birleştiren doğrularla oluşan açının açıortayı üzerinde olduğunu kanıtlayınız.

c) Üstteki şıkta verilen bilgilerden faydalanarak çok uzun ve birim uzunluktaki yükü λ olan homojen yüklü yalıtkan çubuğun, bir ucuna dik olan düzlem içinde ve çubuktan h kadar uzaklıktaki bir noktada oluşturduğu elektrik alanının yönünü ve büyüklüğünü bulunuz.

d) Sonsuz ve birim uzunluktaki yükü λ olan homojen yüklü yalıtkan çubuktan, r uzaklıkta çubuğa dik olacak şekilde elektrik dipol momenti p olan bir dipol bulunduğunda, dipole etki eden kuvveti bulunuz. Dipol momenti çubuğa paralel olsaydı kuvvet ne kadar olurdu?

e) Sonsuz ve birim uzunluktaki yükü λ olan homojen yüklü yalıtkan çubuktan r uzaklıkta, kenarı $\ell \ll r$ ve bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı ε olan küp şeklinde bir cisim bulunuyor. Küpe etki eden kuvveti bulunuz. Aynı geometrik özelliklere sahip olan küp bakırdan yapılmış olsaydı küpe etki eden kuvvet ne kadar olurdu?

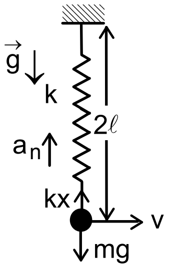
Not: Boşluğun dielektrik geçirgenlik katsayısı ε_0 veriliyor.

7. x ekseni üzerinde, x=0 noktasında odak uzaklığı f olan bir yakınsak ince mercek, $x=\ell<f$ noktasında ise bir düzlem ayna bulunmaktadır. Merceğin solunda herhangi bir noktada bulunan bir cismin görüntüsü bu optik sistem ile elde ediliyor. Daha sonra bu mercek-düzlem ayna ikilisi kaldırılıp tek bir çukur ayna kullanılarak aynı cismin görüntüsü gene aynı yerde ve aynı büyüklükte elde ediliyor. (Yani cismin ve görüntünün eksen üzerindeki konumları ve boyları değişmiyor).

a) Merceğin odak uzaklığı 20 cm, mercek ile düzlem ayna arasındaki uzaklık 18 cm olsun. Cismin mercekten 60 cm ve 40 cm uzakta bulunduğu iki ayrı durum için çukur aynanın odak uzaklığı ve merceğin eskiden bulunduğu yerden uzaklığını bulup karşılaştırınız.

b) Cisim mercekten herhangi bir uzaklıkta bulunuyorsa çukur aynanın odak uzaklığını ve eksen üzerinde nereye yerleştirildiğini f ve ℓ cinsinden ifade ediniz.

VI. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1998



1. a) Birinci cisim için enerji korunumu yasasını yazabiliriz.

$$-mg2\ell\cos\theta = -mg2\ell + \frac{mv_1^2}{2}\ ;\ \frac{mv_1^2}{2} = 2mg\ell(1-\cos\theta)$$

İkinci cisim denge konumundan geçerken yayın uzaması

$$x = 2\ell - 1{,}95\ell = 0{,}05\ell = \frac{\ell}{20}$$

olur. Bu cisim denge konumundan geçerken kuvvet analizi yapalım.

$$kx - mg = \frac{mv_2^2}{2\ell}\ ;\ \ell\left(\frac{k\ell}{20} - mg\right) = \frac{mv_2^2}{2} = 2mg\ell(1-\cos\theta)$$

Buradan yay sabiti

$$k = \frac{20mg(3 - 2\cos\theta)}{\ell}$$

olarak yazılabilir. Bu yay sabitini ifadesi ikinci cisim için enerjinin korunumu yasasından bulabiliriz.

$$-mg1{,}95\ell\cos\theta = -mg2\ell + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$mg\ell(2-1{,}95\cos\theta) = 2mg\ell(1-\cos\theta) + \frac{20mg(3 - 2\cos\theta)}{2\ell}\left(\frac{\ell}{20}\right)^2$$

Buradan

$$\cos\theta = \frac{3}{4}\ ;\ k = \frac{2mg(3 - 2\cos\theta)}{\ell} = \frac{30mg}{\ell}$$

olarak bulunur. Cisimlerin kinetik enerjileri ve hızları

$$K = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mg\ell}{2}\ ;\ v_1^2 = v_2^2 = v^2 = g\ell$$

yayda depo edilen enerji

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{3mg\ell}{80}$$

ve aralarındaki oran

$$\frac{\Pi}{K} = \frac{3}{40}$$

olarak bulunur.

b) Cisim denge konumundan

$$v = \sqrt{g\ell}$$

hızı ile geçer. Cismin düştüğü yükseklik, süre ve menzil

$$h = H - 2\ell;\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\ ;\ x = \frac{H}{2} = vt = \sqrt{2\ell(H - 2\ell)}$$

olur. Buradan

$$H^2 - 8\ell H + 16\ell^2 = 0;\ H = 4\ell$$

olarak bulunur.

c) İnelastik çarpışma sonucu cismin kinetik enerjisi ısıya dönüşmektedir. Yayda depo edilen potansiyel enerji titreşim esnasında kinetik enerjiye dönüşmektedir. Titreşimdeki maksimum hızı enerjinin korunumu yasasından bulabiliriz. Cismin denge konumu

$$kx_0 = mg;\ x_0 = \frac{\ell}{30}$$

olur. Sıfır ilk hızı ile dikey yönde başlayan titreşimlerin maksimum hızı yayın en alt noktadan denge konumuna kadar aldığı yol göz önüne alınırsa bulunabilir. Bu yol titreşimin genliğini verir.

$$A = x - x_0 = \frac{\ell}{20} - \frac{\ell}{30} = \frac{\ell}{60}$$

Titreşimin titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{30g}{\ell}}\ ;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{30g}}$$

olarak bulunur.

d) y konum denklemi

$$y=A\cos\omega t=\frac{\ell}{60}\cos\sqrt{\frac{30g}{\ell}}\,t$$

olarak yazılabilir. Buradan türev aldığımızda hızı zamanın fonksiyonu

$$u=-\frac{\ell}{60}\sqrt{\frac{30g}{\ell}}\cos\sqrt{\frac{30g}{\ell}}\,t=-\sqrt{\frac{g\ell}{120}}\cos\sqrt{\frac{30g}{\ell}}\,t$$

olarak buluruz. Bu hızın maksimum değeri

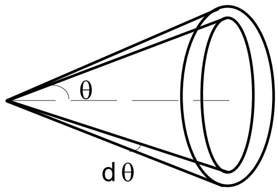
$$u_0=\sqrt{\frac{g\ell}{120}}$$

olur. Bir başka çözüm yolu da enerjinin korunumu yasasını kullanmaktır.

$$\Pi=mg(x-x_0)+\frac{mu_0^{\,2}}{2}+\frac{kx_0^{\,2}}{2};\quad \frac{3mg\ell}{80}=\frac{mg\ell}{60}+\frac{mu_0^{\,2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{mg\ell}{30}\left(\frac{\ell}{20}\right)^2$$

$$u_0=\sqrt{\frac{g\ell}{120}}$$

Görüldüğü gibi sonuç aynıdır.



2. a) Katı elementer açı

$$d\Omega=2\pi\sin\theta d\theta$$

θ açısına tekabül eden katı açı

$$\Omega=\int_{\theta}^{0}2\pi\sin\theta d\theta=2\pi(1-\cos\theta)$$

Bu açısının karşısındaki yarığın alanı

$$\frac{\Omega}{4\pi}=\frac{S}{4\pi r^2};\ S=2\pi r^2(1-\cos\theta);\ S_1=2\pi r^2(1-\cos\theta_1)\ S_2=2\pi r^2(1-\cos\theta_2);\ \sigma=\frac{m}{4\pi r^2}$$

olarak bulunur. Momentum korunumu yasasını kullanarak

$$(\Delta m_2-\Delta m_1)v_x=(m+m-\Delta m_1-\Delta m_2)u$$

$$\Delta m_1=\sigma S_1=\frac{m(1-\cos\theta_1)}{2};\ \Delta m_2=\sigma S_2=\frac{m(1-\cos\theta_2)}{2}$$

$$v_x=v\cos\theta_1\approx v\cos\theta_2\approx v\cos\theta$$

$$\left(\frac{m(1-\cos\theta_2)}{2}-\frac{m(1-\cos\theta_1)}{2}\right)v\cos\theta=\left(2m-\frac{m(1-\cos\theta_1)}{2}-\frac{m(1-\cos\theta_2)}{2}\right)u$$

$$u=\frac{v\cos\theta(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}{2(1+\cos\theta)}$$

elde edilir.

$$\cos\theta_1=\cos\theta;\ \cos\theta_2=\cos(\theta+\Delta\theta)$$

yaklaşımı kullanırsak kürenin hızı

$$u=\frac{v\cos\theta[\cos\theta-\cos(\theta+\Delta\theta)]}{2(1+\cos\theta)}=\frac{v\cos\theta[\cos\theta-\cos\theta\cos\Delta\theta+\sin\theta\sin\Delta\theta]}{2(1+\cos\theta)}=$$

$$=\frac{v\sin\theta\cos\theta.\Delta\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca başka yoldan da ulaşabiliriz. $d\Omega$ açısında yayılan kütle

$$dm=\frac{m2\pi\sin\theta d\theta}{4\pi}=\frac{m\sin\theta d\theta}{2}$$

bu kütlenin momentumu

$$dp=dm.v\cos\theta=\frac{mv\sin\theta\cos\theta d\theta}{2}$$

momentum değişimi

$$\Delta p=\int_0^{\theta_2}\frac{mv\sin\theta\cos\theta d\theta}{2}-\int_0^{\theta_1}\frac{mv\sin\theta\cos\theta d\theta}{2}=\int_0^{\theta_2}\frac{mv\sin 2\theta d(2\theta)}{8}-\int_0^{\theta_1}\frac{mv\sin 2\theta d(2\theta)}{8}=$$

$$=\frac{mv}{8}(1-\cos2\theta_2)-\frac{mv}{8}(1-\cos2\theta_1)=\frac{mv}{8}(\cos2\theta_1-\cos2\theta_2)$$

olarak bulunur. Buradan sonra işlem aynen devam edebilir.

b) Bombadan küresel kabuğun dışına çıkan toplam kütle

$$m(1-\cos\theta)$$

bu kütlenin taşıdığı enerji

$$\frac{mv^2(1-\cos\theta)}{2}$$

açığa çıkan ısı

$$Q=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv^2(1-\cos\theta)}{2}=\frac{mv^2\cos\theta}{2}$$

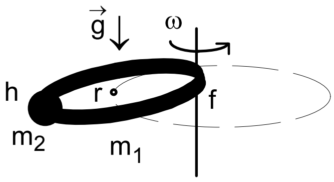
sistemin kütlesi

$$m(1+\cos\theta)$$

sıcaklık artışı ifadesinden sistemin son sıcaklığı

$$\Delta T=\frac{Q}{mc(1+\cos\theta)}=\frac{v^2\cos\theta}{2c(1+\cos\theta)}\ ;\ T=T_0+\Delta T=T_0+\frac{v^2\cos\theta}{2c(1+\cos\theta)}$$

olarak bulunur.



3. a) Halkanın kuvvet denge şartları

$$m_1g+m_2g=F_s=fN$$
$$m_1\omega^2r+m_2\omega^2\,2r=N$$

kütle merkezine göre halkaya etki eden moment denge şartını da

$$N\frac{h}{2}=F_sr_{km}=fNr_{km}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$r_{km}=\frac{m_1r+m_2 2r}{m_1+m_2}$$

çubuk ile sistemin kütle merkezi arasındaki uzaklıktır. Buradan sürtünme katsayısı

$$f=\frac{h(m_1+m_2)}{2r(m_1+2m_2)}$$

olarak bulunur.

b) Açısal hız

$$\omega=\sqrt{\frac{2g}{h}}$$

olur.

c) Sistemin toplam eylemsizlik momenti

$$J=J_1+J_2;\ J_1=J_{01}+m_1r^2\ ;J_{01}=m_1r^2;\ J_{02}=m_2(2r)^2\ ;$$

ve sistemin dönme (rotasyon) kinetik enerjisi

$$K_r=\frac{J\omega^2}{2}=\frac{2(m_1+2m_2)gr^2}{h}$$

olarak bulunur.

4. Maddenin basıncı

$$P=\frac{\xi T^3}{V}$$

iç enerjinin tam değişimi

$$dU=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV;\ \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V=3BT^2\ln\frac{V}{V_0}\ ;\ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T=\frac{BT^3}{V}$$

olarak yazılabilir. Entropi değişimi

$$d\Sigma=\frac{dQ}{T}=\frac{dU+pdV}{T}=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV+\frac{PdV}{T}=$$

$$=\left(3BT\ln\frac{V}{V_0}\right)dT+\left(\frac{BT^2}{V}+\frac{\xi T^2}{V}\right)dV$$

olur. Bu ifade tam diferansiyeldir. Buradan

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(3BT\ln\frac{V}{V_0}\right)_T=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{BT^2}{V}+\frac{\xi T^2}{V}\right)_V\ ;\ \frac{3BT}{V}=\frac{2BT}{V}+\frac{2\xi T}{V}$$

$$B=2\xi$$

olarak bulunur.

5. a) Halkada oluşan indükte edilmiş e.m.k.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi r^2 B_0}{T}$$

olarak yazılabilir. E_1 ve E_2 her yarım halkada oluşan elektrik alanları ise

$$\varepsilon = \oint \vec{E}.d\vec{\ell} = (E_1+E_2)\pi r$$

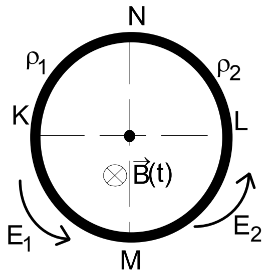
yazabiliriz. Halkada akan akımın akım yoğunluğu

$$j = \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}$$

Buradan

$$E_1 = \frac{\rho_1 B_0 r}{(\rho_1+\rho_2)T}\ ;\ E_2 = \frac{\rho_2 B_0 r}{(\rho_1+\rho_2)T}$$

olarak bulunur.



b) Her çeyrek halkada oluşan U_{KM} ve U_{LM} potansiyel farkları

$$U_{KM} = \int_0^{\frac{\pi r}{2}} \vec{E}_1.d\vec{\ell} = \frac{E_1 \pi r}{2}\ ;\ U_{LM} = \int_0^{\frac{\pi r}{2}} \vec{E}_2.d\vec{\ell} = \frac{E_2 \pi r}{2}$$

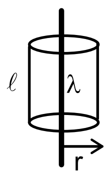
Aradığımız potansiyel farklar

$$U_{KL} = U_{KM} - U_{LM} = \frac{(E_1+E_2)\pi r}{2} = \frac{B_0 \pi r^2}{2} = -U_{LK}$$

$$U_{MK} = E_2 \pi r + \frac{E_1 \pi r}{2} = \frac{B_0 \pi r^2}{(\rho_1+\rho_2)T}\left(\frac{\rho_1}{2} + \rho_2\right);\ U_{MK} = \frac{E_1 \pi r}{2} = \frac{\rho_1 B_0 \pi r^2}{2(\rho_1+\rho_2)T}$$

$$U_{LM} = \frac{E_1 \pi r}{2} + E_2 \pi r = \frac{B_0 \pi r^2}{(\rho_1+\rho_2)T}\left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{2}\right);\ U_{MK} = \frac{E_2 \pi r}{2} = \frac{\rho_2 B_0 \pi r^2}{2(\rho_1+\rho_2)T}$$

olarak bulunur.



6. a) Sonsuz homojen yüklü olan yalıtkan bir çubuğun, çubuktan r uzaklıktaki elektrik alanını Gaus teoreminden

$$\oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

bulabiliriz. Kapalı yüzeyi silindir seçersek tabanlardan geçen elektrik alan akısı sıfırdır. Yan yüzeyden geçen elektrik alan akısı

$$E.2\pi r\ell = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0}$$

olur. Buradan

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

olarak bulunur. İki çubuk pozitif yüklü ise iki çubuğun tam ortasındaki elektrik alan iki çubuğu dik olan ve çubukları birleştiren doğru üzerinde olup her bir çubuğun yarattığı elektrik alanın farkı olur. $r=\frac{h}{2}$ için

$$E = E_1 - E_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi \varepsilon_0 \frac{h}{2}} - \frac{\lambda_2}{2\pi \varepsilon_0 \frac{h}{2}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\pi \varepsilon_0 h}$$

olarak bulunur. Çubukların yüklerinin işareti farklı ise

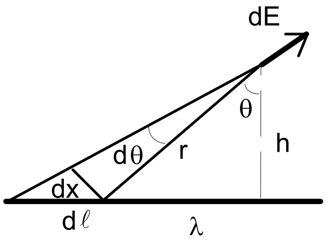
$$E = E_1 + E_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\pi \varepsilon_0 h}$$

olur.

b) İki çubuk birbirine dik ise

$$E_x = \frac{\lambda_2}{2\pi \varepsilon_0 x}\ ;\ E_y = \frac{\lambda_1}{2\pi \varepsilon_0 y}\ ;\ E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0}\sqrt{\frac{\lambda_1^2}{y^2} + \frac{\lambda_2^2}{x^2}}$$

olarak bulunur. İşaret farkı sadece elektrik alanın yönünde fark getirebilir.



c) Çubuktan h uzakta bulunan bir noktadan çubuğa dik geçirilen doğru ile θ açısı olacak şekilde çubuk üzerinde $d\ell$ uzunluktaki bir parça aldığımızda bu parça seçilen noktadan dθ açısı ile görülmektedir. Parça, seçilen noktadan r uzaklıkta ise dθ açısının karşısındaki eğrinin uzunluğu (dx=rdθ) olur. r uzaklığı

$$r=\frac{h}{\cos\theta}$$

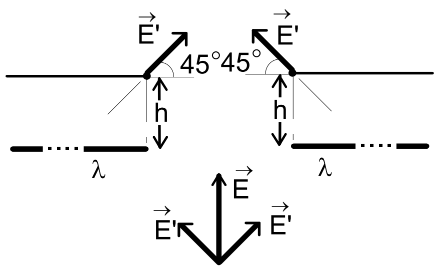
çubuk parçanın uzunluğu

$$d\ell=\frac{dx}{\cos\theta}=\frac{hd\theta}{\cos^2\theta}$$

olarak yazılabilir. Seçilen noktadaki elektrik alanı

$$dE=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 h}$$

olarak bulunur. Bu ifadede uzunluk yoktur. Yani θ açısı ile sağ taraftan dθ açısı ile görülen çubuk üzerinde başka bir parça seçilirse, bu parçanın yarattığı elektrik alan da ilk alana eşit olacak, ama bileşke elektrik alanı açıortay üzerinde olacaktır.



d) Çok uzun bir çubuğun uçları yaklaşık olarak 90° lik açı ile görüldüğünü kabul edebiliriz. Bu durumda çubuğun C noktasındaki elektrik alanı çubuktan geçen eksen ile 45° lik açı yapar. Verilen çubuğa yine çok uzun bir çubuk eklersek sonsuz bir çubuk elde edildiğini düşünebiliriz. Eklenen çubuğun elektrik alanı yine eksenle 45° lik açı yapar. Her bir çubuğun elektrik alanı E' ise bileşke elektrik alan sonsuz çubuğun elektrik alanına eşit olur. Bu durumda Pisagor teoreminden

$$E=\sqrt{E'^2+E'^2}=\sqrt{2}\,E';\; E'=\frac{\sqrt{2}E}{2}=\frac{\sqrt{2}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 h}$$

olarak bulunur.

e) Dipol elektrik alana paralel ise dipole etki eden kuvvet sıfırdır. Dipol elektrik alana dik ise dipole etki eden kuvvet

$$F=p\frac{dE}{dr}=p\frac{d}{dr}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\lambda p}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

olarak bulunur.

f) Dielektrik levhada oluşan dipol momenti aynı zamanda birim alanda indükte edilmiş yüklerin yüzeysel yük yoğunluğu vermektedir.

$$p_1=\sigma=\varepsilon_0\alpha E=\varepsilon_0(\varepsilon-1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda(\varepsilon-1)}{2\pi\varepsilon r}$$

Yüzeyde indükte edilen toplam yük

$$q=\sigma S=\sigma\ell^2$$

oluşan dipolün toplam dipol momenti

$$p=q\ell=\frac{\lambda(\varepsilon-1)\ell^3}{2\pi\varepsilon r}$$

olur. Bu dipole etki eden kuvvet

$$F=p\frac{dE}{dr}=\frac{\lambda(\varepsilon-1)\ell^3}{2\pi\varepsilon r}\frac{d}{dr}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\lambda^2(\varepsilon-1)\ell^3}{4\pi^2\varepsilon\varepsilon_0 r^3}$$

olarak bulunur.

g) Metal küp söz konusu ise birim alanda indükte edilmiş yük

$$\sigma=\varepsilon_0 E=\varepsilon_0\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

yüzeyde indükte edilen toplam yük ($q=\sigma S=\sigma\ell^2$) oluşan dipolün toplam dipol momenti

$$p=q\ell=\frac{\lambda\ell^3}{2\pi r}$$

olur. Bu dipole etki eden kuvvet

$$F=p\frac{dE}{dr}=\frac{\lambda\ell^3}{2\pi r}\frac{d}{dr}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{\lambda^2\ell^3}{4\pi^2\varepsilon_0 r^3}$$

olarak bulunur.

7. a) a_1=60 cm olsun

$$\frac{1}{60}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{20}\text{ ; } b_1=30\text{ cm}$$

Bu durumda büyütme oranı

$$k_1=\frac{b_1}{a_1}=\frac{1}{2}$$

İlk görüntü mercekten 30 cm, aynadan da 12 cm uzaktadır. Ayna için büyütme oranı birdir. Düz aynadan yansıdıktan sonra görüntü mercekten

18-12=6 cm

uzaktadır. Mercek formülünü kullanarak

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{b_3}=\frac{1}{20}\text{ ; } b_3=\frac{60}{7}\text{ cm}$$

Bu durumda büyütme oranı

$$k_3=\frac{b_3}{a_3}=\frac{10}{7}$$

olur. Sistemin toplam büyütme oranı

$$k=k_1k_2k_3=\frac{5}{7}$$

olur. Ayna ile sistemin görüntü oluşturacakları yer aynı olacaktır. Aynanın son görüntüden uzaklığı b' olsun. İki durumda da büyütme oranları aynı olmalıdır.

$$k'=\frac{b'}{a'}=\frac{5}{7}$$

$$b'=\frac{5a'}{7}=\frac{5\left(b'+60+\frac{60}{7}\right)}{7}\text{ ; } b'=\frac{1200}{7}\text{ cm; } a'=240\text{ cm}$$

Çukur ayna formülünden

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{240}+\frac{7}{1200}=\frac{1}{100}=\frac{1}{f_a}\text{ ; } f_a=100\text{ cm}$$

olarak bulunur. Çukur ayna ile mercek arasındaki uzaklık

$$b_3+b'=\frac{60}{7}+\frac{1200}{7}=180\text{ cm}$$

olur. a_1=40 cm olsun

$$\frac{1}{40}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{20}\text{ ; } b_1=40\text{ cm}$$

Bu durumda büyütme oranı

$$k_1=\frac{b_1}{a_1}=1$$

olur. İlk görüntü mercekten 40 cm, aynadan da 22 cm uzaktadır. Ayna için büyütme oranı birdir. Düz aynadan yansıdıktan sonra görüntü mercekten

22-18=4 cm

ve merceğin solundadır. Mercek formülünü kullanarak

$$\frac{1}{(-4)}+\frac{1}{b_3}=\frac{1}{20}\text{ ; } b_3=\frac{10}{3}\text{ cm}$$

Bu durumda büyütme oranı

$$k_3=\frac{b_3}{a_3}=\frac{5}{6}$$

olur.Sistemin toplam büyütme oranı

$$k=k_1k_2k_3=\frac{5}{6}$$

olur. Ayna ile sistemin görüntü oluşturacakları yer aynı olacaktır. Aynanın son görüntüden uzaklığı b' olsun. İki durumda da büyütme oranları aynı olmalıdır.

$$k'=\frac{b'}{a'}=\frac{5}{6}$$

$$b'=\frac{5a'}{6}=\frac{5\left(b'+40-\frac{10}{3}\right)}{6};\ b'=\frac{550}{3}\ \text{cm};\ a'=220\ \text{cm}$$

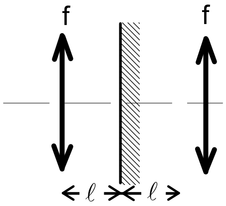
Çukur ayna formülünden

$$\frac{1}{a'}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{220}+\frac{3}{550}=\frac{1}{100}=\frac{1}{f_a};\ f_a=100\ \text{cm}$$

olarak bulunur. Çukur ayna ile mercek arasındaki uzaklık

$$b_3+b'=\frac{10}{3}+\frac{550}{3}=180\ \text{cm}$$

olur. Görüldüğü gibi aynı sonuç çıkar.



b) Merceğin aynadaki görüntüsü mercekten 2ℓ uzaktadır. Böyle bir optik sistemin optik kuvveti

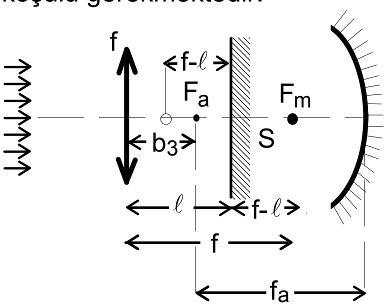
$$D_s=D_1+D_2-D_1D_2 2\ell;\ D_1=D_2=\frac{1}{f}$$

$$D_s=\frac{2(f-\ell)}{f^2}$$

olur. Görüntünün aynı özelliklere sahip olması için

$$D_s=D_a$$

koşulu gerekmektedir.



Sonsuzdan gelen paralel ışık demeti mercekten f kadar uzakta odaklanmaktadır. Görüntü merceğin F_m odak noktasında oluşmakta-dır.

$$\frac{1}{\infty}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{f};\ b_1=f$$

Bu görüntü düzlem aynadan

$$a_2=f-\ell$$

uzakta bulunur. Bu görüntünün aynadan yan-sıyan görüntüsü aynanın önünde aynı uzakta

$$b_2=f-\ell$$

ve mercekten

$$a_3=\ell-b_2=2\ell-f$$

uzakta bulunur. Merceğe göre

$$\frac{1}{a_3}-\frac{1}{b_2}=\frac{1}{f}$$

yazabiliriz. Buradan

$$b_3=\frac{f(2\ell-f)}{2(f-\ell)}$$

olarak bulunur. Sonsuzdan gönderilen paralel ışık demeti sadece küresel ayna kullanıldığında da aynı noktada oluşmalıdır. Bu da demektir ki görüntü küresel aynanın F_a odak noktasında bulunacaktır. Optik kuvvet

$$D=\frac{1}{f}$$

formülü ile sadece tek optik eleman için ifade edilmektedir. Küresel ayna tek optik eleman olduğu için küresel aynanın odak uzaklığı

$$f_a=\frac{1}{D_a}=\frac{f(2\ell-f)}{2(f-\ell)}$$

olur. Aynanın merceğe olan uzaklığı

$$x=b_3+f_a=\frac{f(2\ell-f)}{2(f-\ell)}+\frac{f^2}{2(f-\ell)}=\frac{f\ell}{f-\ell}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca matris metodu kullanarak da ulaşabiliriz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{f-2\ell}{f} & 2\ell \\ -\frac{2(f-\ell)}{f^2} & \frac{f-2\ell}{f} \end{vmatrix}$$

Mercek-düzlem ayna sistem matrisin determinantının sayısal değeri bir olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2x+R}{R} & \frac{2xR+2x^2}{R} \\ \frac{2}{R} & \frac{2x+R}{R} \end{vmatrix}$$

Çukur aynanın merceğin eski konumuna göre sistem matrisin determinantının sayısal değeri bir olmalı-dır. Bu iki sistemin aynı optik özelliklere sahip olması için matris elemanları aynı olmalıdır. İkinci satır birinci sütün elemanlarının karşılaştırmasından

$$\frac{2}{R} = \frac{2(f-\ell)}{f^2}$$

denkleminden

$$R = \frac{f^2}{\ell - f}$$

ve buradan da aynanın odak uzaklığı

$$f_a = -\frac{R}{2} = \frac{f^2}{2(f-\ell)}$$

olarak bulunur. Birinci satır birinci sütün elemanlarının karşılaştırmasından

$$\frac{2x+R}{R} = \frac{f-2\ell}{f}$$

Mercekten çukur aynanın olan uzaklığı

$$x = \frac{f\ell}{\ell - f}$$

olarak bulunur. Aynı sonuçlar diğer matris elemanlarının kullanılması ile de bulunabilir.

$$\frac{f-2\ell}{f} = \frac{2x+R}{R} \; ; \; 2\ell = \frac{2xR+2x^2}{R}$$

Matrisle çalıştığımızda işaret kurallarını çukur aynanın yarıçapı negatif, yakınsak merceğin odak uzaklığı pozitif olarak almalıyız.