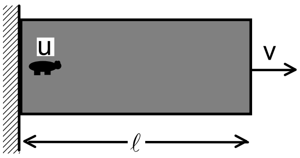
III. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-1995



1. Yalnız boyca esneme özelliğine sahip bir lastik bant sol ucundan sabit bir duvara tutturulmuştur. t =0 anında lastiğin duvarla birleştiği noktadan ağırlığı ihmal edilecek kadar az olan bir böcek banda göre u sabit hızı ile sağa doğru harekete başlamaktadır. Aynı anda bu bandın serbest ucu v sabit hızı ile sağa doğru (çekilmek suretiyle) harekete başlamaktadır. Sürekli olarak gerilmekte olan bu lastik bandın; her zaman yere paralel olarak kaldığı ve gerilme kabiliyetinin sonsuz olduğu (yani hiçbir zaman kopmayacağı) varsayılmakta olup, t=0 anındaki gerilmemiş boyu ℓ kadardır.

a) Böceğin ne kadar zaman sonra lastiğin serbest ucuna ulaşacağını bulunuz.

b) (a) şıkkında bulduğunuz zaman ifadesini kullanarak $u\to 0$ ve $v\to 0$ durumlarını ayrı ayrı inceleyerek tartışınız.

ÖNERİLER:

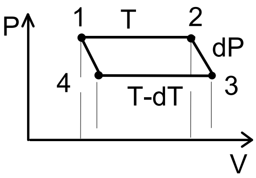
Problemi çözümünde böceğin herhangi bir anda başlangıçtan beri almış olduğu yolun o andaki toplam yola oranını kullanmak, problemdeki matematiksel işlemleri basitleştirir. Yukarıda önerilen yöntemi kullanmazsanız bu durumda karşılaşabileceğiniz

$$\frac{df(t)}{dt}=A+\frac{1}{g(t)}\left(\frac{dg(t)}{dt}\right)f(t)$$

gibi bir diferansiyel denklemde A bir sabit, f(t) ve g(t) zamanın birer fonksiyonları ise; bu denklemin çözümü

$$f(t)=g(t)h(t)$$

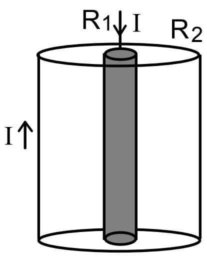
şeklinde olup, h(t) önerilen çözümün diferansiyel denklemde yerine yerleştirilmesi ile elde edilebilir.



2. a) Bir cismin faz değişimi sırasında sıcaklığın basınca bağlı olduğu bilinmektedir. Bu bağıntıyı bulmak için P-V diyagramında sonsuz küçük değişimlerden meydana gelen bir Carnot prosesini inceleyelim. Faz değişimi olduğu için hem sıcaklık hem basınç sabittir. Bu durumda 1-2 izoterm ve izobar, 2-3 adyabatik, 3-4 izoterm ve izobar, 4-1 adyabatik prosesler olarak gerçekleşiyor. Bu prosesin verimini hesaplayarak $\frac{dP}{dT}$ oranını bulunuz. Birim kütleye düşen özhacim her iki fazda V_1 ve V_2, birim kütleye faz değişimi için verilen ısı L olarak veriliyor. Bu ifade Clausis Clapeyron formülü olarak bilinmektedir. Sıvı-gaz faz değişimindeki basıncın sıcaklığa bağlı olan ifadesini bulunuz.

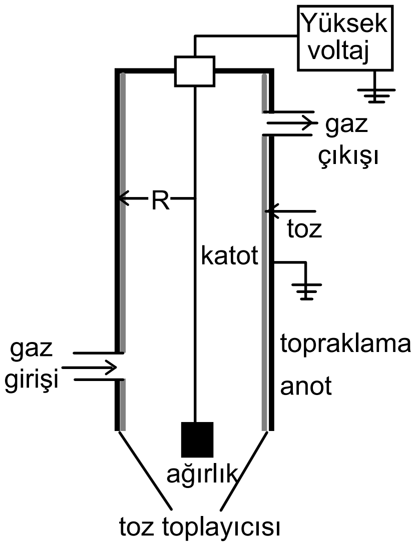
b) 0 °C sıcaklıkta buz üzerindeki su buharı basıncı P_1=4,58 mm cıvadır. 0 °C sıcaklıkta buzun erime ısısı λ=80 cal/gr dır. 0 °C de suyun buharlaşma ısısı L=596 Cal/gr dır. T= -1 °C de buz üzerindeki su buharı basıncı ne olur?

c) Bir mol ideal tek atomlu gazın uyduğu proses PV^3=sabit olarak veriliyor. P_1=20 atmosfer basınçtaki V_1=11 cm^3 hacminden V_2=33 cm^3 hacmine genişlerse iç enerji ve entropideki değişimi bulunuz. Bu gazın aldığı veya verdiği ısıyı irdeleyiniz. Sabit hacimdeki molar özısı kapasitesi $c_V=\frac{3R}{2}$ olarak verilmektedir.



3. Aynı eksenli koaksiyal kablo ortada R_1 yarıçaplı silindirik bir iletken ve etrafında R_2 yarıçaplı çok ince metalden yapılmış silindirik bir kabuktan oluşmuştur. Bu iki iletkenin arasında boşluk bulunmaktadır. I akımı ortadaki iletkenden girip dışarıdaki iletkenden çıkmaktadır. Bu telde depolanan enerjiden giderek, telin birim uzunluğunun indüktansını bulunuz.

Not: Vakumun dielektrik geçirgenlik katsayısı ε_0, vakumun manyetik geçirgenlik katsayısı μ_0 olarak veriliyor.



4. Elektrostatik toz temizleyici endüstriyel gazların toz partiküllerinden arındırılmasında mesela, kömür yakılarak çalıştırılan elektrik santrallerinde çıkan dumanın kül parçacıklarından arındırılmasında kullanılır. Çıkan gaz veya duman koronal deşarj ile iyonize edilir ve iyonlar toz parçacıklarını yüklü hale getirerek elektrik alanı vasıtasıyla elektrotlarda toplanmasını sağlar. Bu elektrotlar periyodik olarak temizlenerek toz parçacıkları dışarı atılır. Bu tip temizleyicilerde, anot yarıçapı R=150 mm olan topraklanmış bir silindir, katot ise bu silindirin ekseni boyunca yerleştirilmiş ve üzerinde U=50 kV potansiyeli uygulayan bir telden oluşur. Silindirin içinden geçen gaz iyonize edilir ve $\pm$ iyonlar telin etrafında koronal (iletken) bir ortam oluştururlar. Pozitif iyonlar katoda, negatif iyonlar anoda doğru hareket ederler. Böylece, silindirik hacimde oluşan uzaysal yük dağılımı daha çok negatiftir. Bu durumda elektrik alanı E sabit ve düzgün kabul edilebilir. Toz parçacıkları hafif iletken olsalar bile üzerlerinde toplanan negatif yük $q=12\pi\varepsilon_0 E r_0^2$ olup, burada r_0 toz kürelerinin yarıçapıdır.

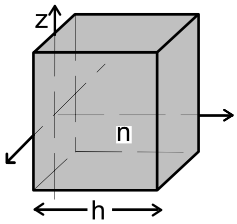
a) Telden r uzaklıkta radyal yönde, birim uzunluktaki elektrik akımı bulunuz.

Not: Toz taneciklerin hacimsel yük yoğunluğu ρ, bu taneciklerin mobilitesi (hareketliliği) μ $\left(\mu = \frac{v}{E}\right)$ olarak veriliyor.

b) Toz parçacıklarının, sürüklenme v hızları bulunuz.

Not: Gazın viskozitesi η dır. Sürüklenme hızı $v=\dfrac{F}{6\pi\eta r_0}$ Stoke teoremi olarak bilinmektedir. Burada F uygulanan kuvvettir.

c) Eğer $\mu=2.10^{-4}$ m^2/Vs, r_0=5mm ve $\eta=2.10^{-5}$ kg/ms olarak verilirse toz parçacıklarının katottan anoda gitmeleri için gereken zamanı, I akımı ve ve ρ hacimsel yoğunluğunu bulunuz.



5. Kalınlığı h olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir cam plakanın kırıcılık indisi her yerinde aynı değerde olmayıp $n=n_0-\alpha z^2$ olarak verilmektedir. Burada n_0 ve α sabit olup, z ise şekilde gösterildiği gibi tabana paralel olan herhangi bir düzlemden olan düşey uzaklığı göstermektedir.

a) Bu cam tabakanın bir mercek gibi davrandığını gösteriniz ve odak uzaklığını bulunuz.

b) $n=n_0-\alpha z^2$ ifadesindeki n_0 teriminin ışığın dalga boyuna bağımlılığının Cauchy denklemindeki ilk iki terimle ifade edildiğini varsayınız. Eğer $n_0(\lambda=0{,}4\ \mu m)=2{,}0$ ve $n_0(\lambda=0{,}6\ \mu m)=1{,}6$, ayrıca $n(\lambda=0{,}4\ \mu m,\ z=2{,}0\ cm)=n(\lambda=0{,}6\ \mu m,\ z=0)$ olarak veriliyorsa, kırıcılık indisinin λ ve z cinsinden ifadesini yazınız.

c) Yeşil ışık altında bu problemin (a) şıkkındaki sistemle aynı odak uzaklığına sahip bir simetrik(iki yüzünün eğrilik yarıçapları aynı) mercek yapmak için; kırıcılık indisi (b) şıkkında tanımlanan n_0 ile aynı olan bir cam kullanılmaktadır. Bu mercekte optik eksen doğrultusundaki renkleme kusurunu $\alpha=0{,}05$ cm^{-2} ve h=4,0 cm olduğu durum için renksel bozulmayı hesaplayınız

Not: Renksel bozulma optik spektrumu sınırlayan λ_1 ve λ_2 dalga boyları için ifade edilen f_1 ve f_2 odak uzaklıkların f_1-f_2 farkı olarak tarif edilmektedir.

II. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1995

1. a) Lastik bant lineer olarak gerilmekte olup böceğin bulunduğu noktanın hızı $\frac{x}{y}$ ile orantılıdır. Bu nedenle böceğin toplam hızı

$$\frac{dx}{dt} = u + \frac{x}{y}v$$

dir. Lastik için

$$\frac{dy}{dt} = v$$

olarak verilmiştir.

$$z=\frac{x}{y}$$

dersek

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}y - \frac{dy}{dt}x}{y^2} = \frac{(u+\frac{x}{y}v)y - vx}{y^2} = \frac{u}{y} + \frac{xv}{y^2} - \frac{vx}{y^2} = \frac{u}{y}$$

yazabiliriz. İntegre edersek

$$z=u\int\frac{dt}{y} = u\int_o^t \frac{dt}{\ell + vt} = \frac{u}{v}\int_o^t \frac{d(\ell+vt)}{\ell+vt} = \frac{u}{v}\ln\frac{\ell+vt}{\ell}$$

bulabiliriz. Böcek uç noktaya vardığında z=1 olacaktır;

$$z(T)=1=\frac{u}{v}\ln\left(1+\frac{vT}{\ell}\right)$$

$$\frac{v}{u} = \ln\left(1+\frac{vT}{\ell}\right);\ e^{\frac{v}{u}} = 1+\frac{vT}{\ell};\ T=\frac{\ell}{v}\left(e^{\frac{v}{u}} - 1\right)$$

b) $u\to 0$ ise

$$T=\frac{\ell}{v}\left(e^{\frac{v}{0}} - 1\right) \to\infty$$

yani böceğin kendi hızı yoksa lastiğin diğer ucuna hiçbir zaman ulaşamaz. v>>u olursa

$$T=\frac{\ell}{v}e^{\frac{v}{u}}$$

olur ve böcek maksimum başlangıç noktasından

$$x_{mak}=vT=\frac{u\ell}{v}e^{\frac{v}{u}}$$

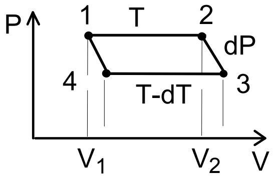
uzaklığa uzaklaşır. $v\to 0$ ise

$$e^{\frac{v}{u}} \approx 1+\frac{v}{u}+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{u}\right)^2 + \ldots \approx 1+\frac{v}{u}$$

olur. Bu durumda eğer lastik gerilmiyorsa böcek

$$T\to\frac{\ell}{v}\left(1+\frac{v}{u}-1\right) \cong \frac{\ell}{u}$$

zamanda diğer uca ulaşacaktır.



2. a) P-V diyagramında bir mol için sonsuz küçük değişimlerden meydana gelen Carnot proseste yapılan iş

$$dA=dP(V_2-V_1)$$

verilen ısı

$$dQ_1=L$$

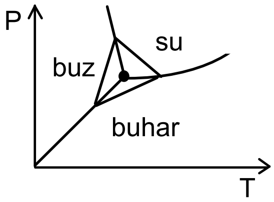
proseste sağlanan verim

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=\frac{dT}{T}=\frac{dA}{dQ_1}=\frac{dP(V_2-V_1)}{L}$$

olarak yazılabilir. Buharlaşma veya süblimasyon için $V_2 >> V_1$ olur. Bu durumda

$$\frac{dT}{T}=\frac{dPV}{L};V=\frac{RT}{\mu P};\frac{dP}{P}=\frac{\mu LdT}{RT^2};\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P}=\int_{T_0}^{T}\frac{\mu LdT}{RT^2};P=P_0\,e^{\frac{\mu L}{R}\left(\frac{1}{T_0}-\frac{1}{T}\right)}$$

olarak bulunur.



b) Isıca yalıtılmış bir sistemde faz atlatılırsa gerekli olan ısı birinci termodinamik yasasından bulunur. Sisteme ısı verilmezse

$$\Delta U=A$$

yazabiliriz. Suyun üçlü noktası etrafında bir kapalı proses gerçekleştirelim.

$$m\lambda+mL-m\delta=A$$

Bu kapalı prosesi sonsuz küçük üçgen şeklinde gerçekleştirilirse A=0 olur ve

$$\delta=\lambda+L=80+596=676\text{ cal/gr}$$

olarak bulunur. Faz değişimi noktasının civarında $\Delta T<<T$ sıcaklık değişimi ΔP basınç değişimi meydana getirmektedir. Yeni basınç

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\mu L\Delta T}{RT^2};\ \Delta P=-0{,}38\text{ mm Hg};\ P_2=P_1-\Delta P=4{,}2\text{ mm Hg}$$

olarak bulunur.

c) PV^3=sabit ise PV=RT denklemi kullanarak TV^2=sabit denklemi elde edilir. Buradan sıcaklık değişimi ve iç enerji değişimi

$$T_1V_1^2=T_2V_2^2;\ T_2=\frac{T_1V_1^2}{V_2^2};\ \Delta T=T_2-T_1=-T_1\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)$$

$$\Delta U=c_V\Delta T=-\frac{3R}{2}T_1\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)=-\frac{3P_1V_1}{2}\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)=29{,}2\text{ cal/mol}$$

entropi değişimi

$$\Delta\Sigma=\int\frac{\delta Q}{T}=\int\frac{dU+PdV}{T}=\int\frac{c_VdT}{T}+\int\frac{PdV}{T}=\frac{3R}{2}\ln\frac{T_2}{T_1}+R.\ln\frac{V_2}{V_1}=$$

$$=-3R.\ln\frac{V_2}{V_1}+R.\ln\frac{V_2}{V_1}=-2R.\ln\frac{V_2}{V_1}=-4\text{ cal/mol.K}$$

verilen veya alınan ısı

$$Q=\int\left(c_VdT+PdV\right)=c_V\Delta T+\int\frac{P_1V_1^3dV}{V^3}=--\frac{3R}{2}T_1\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)+$$

$$+\frac{R}{2}T_1\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)=-P_1V_1\left(1-\frac{V_1^2}{V_2^2}\right)=-417\text{ cal/mol}$$

olarak bulunur.

3. R_1 yarıçaplı silindirik iletkende akım yoğunluğu

$$j=\frac{I}{\pi R_1^2}$$

olur. Yarıçapı $r<R_1$ iletkenden geçen akım

$$I_1=j\pi r^2$$

bu akımın oluşturduğu manyetik alan

$$B_1=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}$$

olur. R_2 yarıçaplı çok ince metalden yapılmış silindirik dış kabuktan kaynaklanan manyetik alan $R_1<r<R_2$ için

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

olur. Kabloda birim uzunlukta depo edilen enerji

$$W=\int_0^{R_1}\frac{B_1^2 dV}{2\mu_0}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{B_2^2 dV}{2\mu_0}=\frac{1}{2\mu_0}\int_0^{R_1}\left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2}\right)^2 2\pi r dr+$$

$$+\frac{1}{2\mu_0}\int_{R_1}^{R_2}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 2\pi r dr=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}+\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{LI^2}{2}$$

olur. Buradan indüktans

$$L=\frac{\mu_0}{8\pi}+\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}=\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

olarak bulunur.

4. a) r, r+dr yarıçapları arasında seçilen bir silindirik kabuktan radyal yönde geçen yük

$$dq=\rho dV=\rho 2\pi r dr \ell=\rho 2\pi r v dt \ell$$

olarak yazılabilir. Buradan birim uzunluktaki akan akım

$$I_1=\frac{I}{\ell}=\frac{1}{\ell}\frac{dq}{dt}=2\rho\pi r v=2\rho\pi r\mu E$$

olarak bulunur.

b) Toz parçacıklarının, sürüklenme hızları

$$v=\frac{F}{6\pi\eta r_0}=\frac{qE}{6\pi\eta r_0}=\frac{12\pi\varepsilon_0 r_0^2 E^2}{6\pi\eta r_0}=\frac{2\varepsilon_0 r_0 E^2}{\eta}$$

olarak bulunur.

c) Elektrik alan sabit olarak kabul edilmiştir. Buradan

$$E=\frac{U}{R}=\frac{50\,000}{0{,}15}\approx 3{,}3.10^5 \text{ V/m}$$

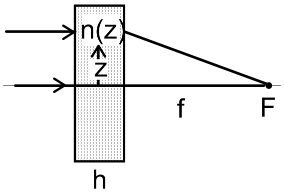
olarak bulunur. Gauss teoreminden hız ve zaman

$$\oint_\ell \vec{E}\, d\vec{\ell}=\frac{q}{\varepsilon_0}\;;2\pi r\ell E=\frac{\rho\pi r^2\ell}{\varepsilon_0}$$

$$\rho=\frac{2\varepsilon_0 E}{r}=\frac{5{,}9.10^{-6}}{r}\text{ C/m}^3\;;\; I=2\pi r\mu E\frac{2\varepsilon_0 E}{r}=4\pi\varepsilon_0\mu E^2=2{,}45.10^{-3}\text{ A}$$

$$v=\frac{2\varepsilon_0 r_0 E^2}{\eta}=0{,}5 \text{ m/s};\; t=\frac{R}{v}=0{,}3 \text{ s}$$

olarak bulunur.



5. a) Fermat prensibinden optik yolların eşitliği kullanılarak odak uzaklığı

$$n(z).h+\sqrt{z^2+f^2}=n_0h+f$$

yazabiliriz. Paraaksiyel optik yaklaşımında f>>z olarak kabul edilebilir.

$$\sqrt{z^2+f^2}=f\sqrt{1+\frac{z^2}{f^2}}\approx f+\frac{z^2}{2f}$$

Buradan

$$n(z)=n_0-\frac{z^2}{2fh}=n_0-\alpha z^2;\ f\cong\frac{1}{2\alpha h}$$

olarak bulunur. Verilen sistem odak uzaklığı $\frac{1}{2\alpha h}$ olan yakınsak bir mercek gibi davranır. Böyle bir etki ya paralel plakalı ama değişken kırıcılık indise sahip olan sistemde, ya da sabit kırıcılık indisi ama eğrisel yüzeye sahip olan sistemle yapılabilir.

b) Cauchy denklemi

$$n_0=A+\frac{B}{\lambda^2}$$

olarak yazılabilir.

$$2=A+\frac{B}{(0,4)^2}\ ;\ 1,6=A+\frac{B}{(0,6)^2}$$

Bu iki denklemin çözümünden;

$$B=0,1152\ (\mu m)^2,\ A=1,28;\ n_0=1,28+\frac{0,1152}{\lambda^2}$$

$$n\ (\lambda=0,4\mu m,\ z=2\ cm)=2-4\alpha=1,6;\ \alpha=0,1\ cm^{-2}$$

olarak bulunur. O halde kırılma indisinin λ ve z bağımlı genel ifadesi;

$$n=1,28+\frac{0,1152}{\lambda^2}-\alpha z^2=1,28+\frac{0,1152}{\lambda^2}-0,1z^2$$

olur.

c) Mercek formülünü

$$\frac{1}{f_y}=(n_y-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=(n_y-1)\frac{2}{R}$$

Burada n_F=2, n_C=1,6 ve n_y=1,8 ortalama değer olarak alınabilir

$$\frac{1}{f_y}=2\alpha h=(n_y-1)\frac{2}{R}=(1,8-1)\frac{2}{R}=\frac{1,6}{R};\ f_y=2,5\ cm$$

$$R=\frac{1,6}{2\alpha h}=\frac{1,6}{2.0,05.4}=4\ cm$$

olur. Ayrıca odak uzaklık

$$\frac{1}{f_C}=(1,6-1)\frac{2}{4}=\frac{1,2}{4}=0,3;\ f_C=3,33\ cm$$

$$\frac{1}{f_F}=(2.-1)\frac{2}{4}=0,5;\ f_F=2\ cm$$

ve renksel bozulma

3,33-2=1,33 cm

olarak bulunur.