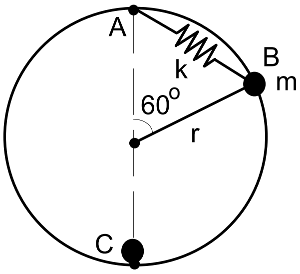
ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI-1990

1. Yatay ve sürtünmesiz düzlem üzerinde uzunluğu 2ℓ, kütlesi m_1 olan ince bir homojen çubuk bulunmaktadır. Kütlesi m_2 ufak bir top düzlem üzerinde çubuğa dik doğrultuda hareket etmektedir. Top çubuğun ucuna çarpar. Etkileşmeden sonra çubuğun kütle merkezi hız kazanır ve çubuk kütle merkezi etrafında dönmeye başlar. Yarım devir sonra çubuğun diğer ucu topa çarpar.

a) Bu olay ancak belli $\frac{m_1}{m_2}$ kütle oranı ile mümkündür. Bu oranı bulunuz.

b) Çarpışma esnasında maksimum deformasyon potansiyel enerjisi nedir?

Not: Tüm çarpışmalar esnektir.



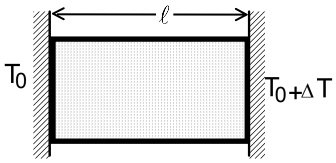
2. Belirli m kütlesine sahip olan ufak bir metal bilye r yarıçaplı dairesel ve dikey düzlemde bulunan sürtünmesiz bir tele geçirilmiştir. Bilye bir ucu çemberin tepe A noktasına tutturulmuş, yay sabiti k ve ilk uzunluğu ℓ_0=r olan bir yayın ucuna tutturulmuş olup, çemberin merkezinden ve bilyeden geçen doğru dikeyle 60° yapacak durumunda B noktasında bulunmaktadır. Bu durumundan bilye serbest bırakılıyor.

a) Bilye C noktasına ulaştığında hızı nedir? Çemberin en alt noktasında bulunan C noktasına ulaşabilmesi için bilyenin sahip olması gereken kütlenin minimum değeri m_{C1} nedir?

b) Tel üzerindeki bilyenin denge konumu bulunuz. C kararlı bir denge nokta olabilmesi için kütlenin m_{C2} minimum değeri ne kadar olmalıdır?

c) Yukarıda tarif edilen durumları gerçekleştirmek için gerekli olan daha küçük kütlenin olanın iki katı daha büyük bir m_0 kütle alınırsa C noktasında denge durumundaki küçük titreşimlerin titreşim periyodu nedir?

d) C noktasında birinci bilye ile ikinci özdeş bir m_0 kütleli bilye bulunsun ve tel üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilsin. Başlangıç noktasında bırakılan ilk bilye ikinci bilye ile esnek olarak çarpıyor. Bu bilyelerin çıkabilecekleri yükseklikleri bulunuz.



3. Uzunluğu ℓ olan ısıca yalıtılmış bir silindirin içinde ideal gaz bulunuyor. Silindirin iki ucundaki sıcaklık sabit olup T_0 dır. Silindirin bir ucundaki sıcaklık $\Delta T << T_0$ kadar artırılıyor. Gazın kütle merkezi ne kadar yer değiştirmiştir?

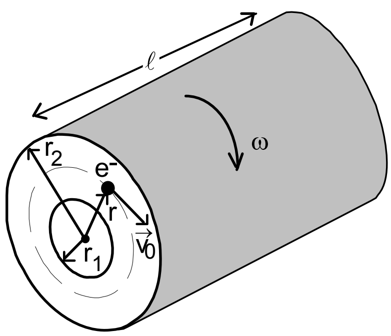
4. Özelliklerini incelemek amacı ile bir yarı iletken maddeye silindir şekli veriliyor. Silindirin iç yarıçapı r_1=2 mm, dış yarıçapı r_2=16 mm, yüzeyler metalle kaplı, dış yüzey pozitif potansiyelli, aralarındaki potansiyel farkının 6 V olduğunu bilinmektedir. Bu yarı iletkenden T_1=300 K sıcaklığında $I_1=1{,}5.10^{-4}$ A ve T_2=500 K sıcaklığında I_2=0,75 A akım geçmektedir.

a) Yarı iletkenin enerji bandının genişliği U_g kaç eV tur.

b) Dış silindire ulaşan elektronların hızı nedir?

c) İki elektrot arasındaki yolu elektronlar ne kadar zamanda alırlar?

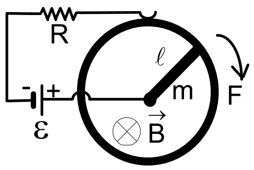
Not: Yarı iletkenin özdirenci $\rho=\rho_0\, e^{\frac{U_g}{2KT}}$ olarak verilmektedir. Boltzman sabiti $k=1{,}38.10^{-23}$ JK^{-1}, elektronun mobilitesi $\mu=1500V^{-1}\,s^{-1}$ dir.



5. Dairesel kesitli iki uzun iletken boru, eksenleri çakışacak şekilde iç içe yerleştiriliyor. İçteki borunun yarıçapı r_1, dıştaki r_2, boruların uzunluğu ise ℓ dir. Yarıçaplar arasındaki fark çok küçük olup, borular yaklaşık olarak aynı yüzeye sahiptir. E.m.k. sı U olan bir bataryanın artı ucu içteki boruya, eksi ucu ise dıştaki boruya bağlanıyor. Bir süre sonra batarya devreden çıkarılıp, dıştaki boru ekseni çevresin-de sabit ω açısal hızıyla döndürülmeye başlıyor. Boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısı μ_0 ve boşluğun dielektrik geçirgenlik katsayısı ε_0, elektronun kütlesi m ve yükü q olarak veriliyor.

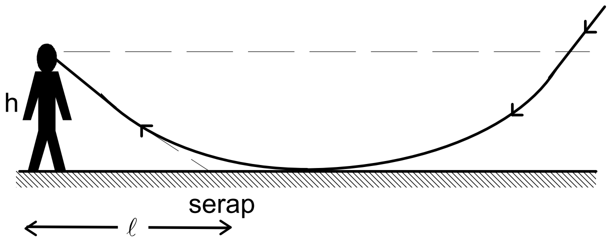
a) Borular arasında kalan boşlukta oluşan elektrik ve manyetik alanları bulunuz.

b) Borular arasındaki boşlukta bulunan bir elektron, v sabit hızı ile ortak eksen çevresinde ve dıştaki boruyla aynı yönde hareket etmektedir. Bu dairesel yörüngenin yarıçapını bulunuz.



6. Uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan iletken bir çubuk ucundan geçen düşey eksenin etrafında yatay düzlemde dönebilmektedir. Çubuğun döndüğü düzleme dik yönde sabit ve homojen manyetik B alanı uygulanmaktadır. Çubuğun iki ucuna R direncin sayesinde sabit ε e.m.k. uygulanmaktadır.

a) Çubuğa etki eden sabit F sürtünme kuvveti varsa, çubuğun döndüğü sabit açısal hızı bulunuz.
b) Sürtünme kuvveti ihmal edilecek kadar küçük ise çubuğun açısal hızını zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.



7. Düz bir çölde yürüyen h=1,60 m boyunda bir adam ℓ=250 m kadar ilerde, gökyüzünün yansıması olan bir serap görüyor. Havanın kırıcılık indisi $n=1+\xi\rho$ olarak veriliyor. Burada ξ bir sabit, ρ ise havanın özkütlesidir. Adamın gözü düzeyindeki hava sıcaklığı 30 °C olarak veriliyor. Yukarıdaki denklemden görüleceği üzere, gökten gelen ışınlar daha sıcak olan zemine yaklaştıkça kırılıp, zeminde 90° derecelik bir kırılma ile göze geliyor. Zeminin sıcaklığını bulunuz.

Not: 15 °C sıcaklığında havanın kırıcılık indisi n_0=1,000276 olarak veriliyor.

ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI İKİNCİ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1990

1. a) Çarpışmalar için momentum, enerji ve açısal momentum korunumu yasaları geçerlidir.

$$m_2v_0=(m_1+m_2)v;\ v_0=(1+x)v;\ x=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{m_2v_0^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+\frac{J_0\omega^2}{2};\ J_0=\frac{m_1(2\ell)^2}{12}=\frac{m_1\ell^2}{3}$$

$$m_2v_0\ell=m_2v\ell+J_0\omega$$

Bu üç denklemden

$$(1+x)^2v^2=(1+x)v+3xv^2\ ;\ 2x=x^2$$

elde edilir. Bu denklemin iki kökü vardır. Bu köklerden $x_1=0$ kökün fiziksel anlamı yoktur. Diğer kök $x_2=2$ çözüm olur.

b) Çarpışma esnasında maksimum deformasyon potansiyel enerjisi küçük cismin çubuğun alt ucuna göre hızı eşit ise gerçekleşiyor.

$$v_2=v_1+\omega_1\ell$$

Bunun gerçekleşmesi için

$$m_2v_0=m_1v_1+m_2v_2$$

$$m_1v_1\ell=J_0\omega_1=\frac{m_1\ell^2\omega_1}{3};\omega_1=\frac{3v_1}{\ell}$$

olmalıdır. Buradan

$$v_1=\frac{m_2v_0}{m_1+4m_2}=\frac{v_0}{6};\ v_2=\frac{4m_2v_0}{m_1+4m_2}=\frac{2v_0}{3}$$

olarak bulunur. Maksimum deformasyon potansiyel enerjisi

$$\Delta\Pi=\frac{m_2v_0^2}{2}-\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_2v_2^2}{2}\ \frac{J_0\omega_1^2}{2}=\frac{m_1^2m_2v_0^2}{2(m_1+4m_2)^2}$$

olarak bulunur.

2. a) Bilye serbest bırakıldığında çemberin alt noktasında bulunan C noktasına ulaşma şartını enerji korunumu yasasını kullanarak bulabiliriz.

$$mg(r+r\cos 60°)=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{kx_1^2}{2}$$

$$x_1=2r-\ell_0=2r-r=r$$

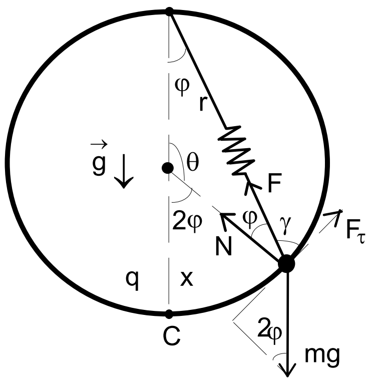
Cismin C noktasındaki hızı

$$v_C=\sqrt{3gr-\frac{kr^2}{m}}\geq 0$$

olmalıdır. Buradan kütle için şart

$$m_{C1}\geq\frac{kr}{3g}$$

olarak bulunur.



b) Cisim dengede üç kuvvetin etkisi ile kalmaktadır.

$$\vec{G}+\vec{N}+\vec{F}=0$$

Cismin denge durumunu bulmak için teğetsel ve normal koordinatları kullanabiliriz. Teğet eksene göre kuvvetler eşit ve zıt yönlü olmalıdır.

$$G_\tau=F_\tau$$

$$mg\sin 2\varphi=F\cos\gamma$$

$$2\varphi+\theta=180°;\ \varphi=\frac{180°-\theta}{2};\ \varphi+\gamma=90°$$

$$F=kx=k(2r\sin\frac{\theta}{2}-r);\ kr(2\sin\frac{\theta}{2}-1)\cos\frac{\theta}{2}=2mgr\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{kr}{2(kr-mg)}$$

olarak bulunur. C noktasının denge noktası olabilmesi için

$$-1<\sin\frac{\theta}{2}<1;\ \frac{kr}{2g}<m<\frac{3kr}{g}$$

olmalıdır. C noktasını denge noktası olması için

$$\sin\frac{\theta}{2}=1;\ m_{C2}=\frac{kr}{2g}$$

olmalıdır. C noktasında dengenin kararlı olabilmesi için $m>m_{C2}>m_{C1}$ olmalıdır.
c) Cisim C noktasında etrafında küçük titreşimler yaptığında

$$m_0a_\tau=m_0.2r\ddot{\varphi}=F\sin\varphi-m_0g\sin2\varphi=-(2m_0g-kr)\varphi;\ m_0=2m_{C1}=\frac{2kr}{3}$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{2m_0g-kr}{2m_0r}\varphi=0;\ \ddot{\varphi}+\frac{g}{4r}\varphi=0$$

yazabiliriz. Buradan

$$\omega=\sqrt{\frac{2m_0g-kr}{2m_0r}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{r}};\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2m_0r}{2m_0g-kr}}=4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

olarak bulunur.
d) Çarpışma sonucu birinci cisim durur ikinci cisim ise h yüksekliğe çıkmaktadır. Enerji korunumu yasasından ikinci cismin sapma açısı

$$\frac{m_0v_C^{\,2}}{2}=m_0gh_2;\ h_2=r(1-\cos\beta)$$

$$3gr-\frac{kr^2}{m_0}=2gh_2;\ h_2=\frac{3r}{2}-\frac{kr^2}{2m_0g}=\frac{3r}{4};\ \cos\beta=\frac{kr}{2m_0g}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

olarak bulunur. İlk cisim ise δ açıya sapıp durduğunda

$$\frac{kr^2}{2}=\frac{k\left(r\cos\frac{\delta}{2}\right)^2}{2}+m_0gh_1;\ h_1=r(1-\cos\delta);\ \cos\delta=1;\ \sin\delta=0$$

olarak bulunur. Yani bu cisim denge konumu etrafında küçük titreşimler yapmaktadır.

3. Tüm silindirde sıcaklık T_0 iken gazın basıncı P_0 ve konsantrasyonu n_{01} olduğunu kabul edelim. Aralarındaki ilişki

$$n_{01}=\frac{P_0}{kT_0}$$

olarak yazılabilir. Sıcaklığı T_0 sol ucundan x uzaklıkta bulunan ve dx kalınlıktaki bir gaz bandın sıcaklığı

$$T_x=T_0+\frac{\Delta Tx}{\ell}=T_0\left(1+\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)$$

olarak yazılabilir. Gazın ısınması ile silindirde artık yeni bir P basıncı meydana gelir. Seçilen bantta konsantrasyon

$$n_{0x}=\frac{P}{kT_x}=\frac{P}{kT_0\left(1+\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)}=\frac{P}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)$$

olur. Tanecik sayısı değişmediği şartından

$$N=n_{01}S\ell=\frac{P_0S\ell}{kT_0}=\int_0^\ell n_{0x}Sdx=\int_0^\ell\frac{P}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)Sdx=\frac{P\ell}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{2T_0}\right)$$

$$P=\frac{P_0}{1-\frac{\Delta T}{2T_0}}=P_0\left(1+\frac{\Delta T}{2T_0}\right)$$

olarak bulunur. Bu durumda sol ucunda sıcaklık T_0 olmasına rağmen gazın konsantrasyonu n_{02}

$$n_{02}=\frac{P}{kT_0}=\frac{P_0}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{2T_0}\right)=n_{01}\left(1-\frac{\Delta T}{2T_0}\right)$$

olur. Sol ucundan x uzaklıkta bulunan gaz bandın konsantrasyonu

$$n_{0x}=\frac{P}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)=n_{01}\left(1+\frac{\Delta T}{2T_0}\right)\left(1-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)$$

olarak yazılabilir. Silindirin içinde bulunan gazın kütle merkezi ilk durumda tam silindirin ortasındadır.

$x_{m1}=\frac{\ell}{2}$ İkinci durumda ise gazın kütle merkezi

$$x_{m2}=\frac{\int_0^\ell dM.x}{M}=\frac{\int_0^\ell mn_{0x}Sxdx}{Nm}=\frac{\int_0^\ell n_{01}\left(1+\frac{\Delta T}{2T_0}\right)\left(1-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)Sxdx}{n_{01}S\ell}=$$

$$=\frac{\int_0^\ell\left(1+\frac{\Delta T}{2T_0}-\frac{\Delta Tx}{T_0\ell}\right)xdx}{\ell}=\frac{\ell}{2}-\frac{\Delta T\ell}{12T_0}$$

olur. Burada sıcaklık değişimi ΔT küçük olduğundan dolayı ikinci mertebeden olan terimi ihmal edebiliriz. Kütle merkezin yer değiştirmesi

$$\Delta x=|x_{m2}-x_{m1}|=\frac{\Delta T\ell}{12T_0}$$

olarak bulunur.

4. a) İncelenen yarı iletken silindirin yüksekliği h olsun. Eksenden r uzaklıkta ince silindirik bir kabuk aldığımızda bu kabuğun direnci

$$dR=\frac{\rho dr}{2\pi rh}$$

olarak yazılabilir. Tüm direnç

$$R=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\rho dr}{2\pi rh}=\frac{\rho}{2\pi h}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{\rho_0 e^{\frac{U_g}{2kT}}}{2\pi h}\ln\frac{r_2}{r_1}=\frac{U}{I}$$

olur. Farklı sıcaklıklarda akan akımlar

$$I_1=\frac{2\pi hUe^{-\frac{U_g}{2kT_1}}}{\ln\frac{r_2}{r_1}};\ I_2=\frac{2\pi hUe^{-\frac{U_g}{2kT_2}}}{\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

olarak yazılabilir. Bu iki ifadeyi oranlayıp logaritma aldığımızda yarı iletkenin enerji bandın genişliği

$$U_g=\frac{2k}{\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}}\ln\frac{I_2}{I_1}\approx 1{,}1\text{ eV}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca farklı bir yoldan da ulaşabiliriz. Verilen silindir şeklindeki örnek için Gauss teoremi uygulanılabilir. Elektrik alan için

$$\oint\vec{E}d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0};2\pi hE=\frac{\lambda h}{\varepsilon\varepsilon_0};\ E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$$

yazabiliriz. İki elektrot arasında uygulanan potansiyel fark ifadesinden elektrik alan

$$U_0=\int_{r_1}^{r_2}\vec{E}\,d\vec{r}=\int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda\,dr}{2\pi\varepsilon\,\varepsilon_0 r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon\,\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1};\ \lambda=\frac{2\pi\,\varepsilon\varepsilon_0 U_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}};\ E=\frac{U_0}{r\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

olarak bulunur. Eksenden r uzaklıkta ince silindirik bir kabuktan geçen akım yoğunluğu

$$j=\frac{E}{\rho}=\frac{U_0}{\rho r\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{I}{2\pi rh}$$

olarak bulunur.

b) Elektronların hızı

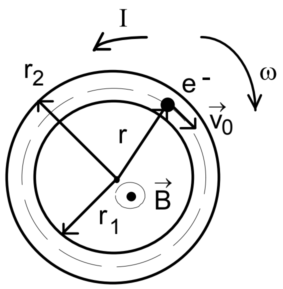
$$v(r)=\frac{dr}{dt}=\mu E=\frac{\mu U_0}{r\ln\frac{r_2}{r_1}};\ v(r_2)=\frac{\mu U_0}{r_2\ln\frac{r_2}{r_1}}=27.10^4\text{ m/s}$$

olarak bulunur.

c) Hareket süresi hız ifadesinden

$$t=\ln\frac{r_2}{r_1}.\int_{r_1}^{r_2}\frac{rdr}{\mu U_0}=\frac{(r_2^2-r_1^2)}{2\mu U_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=2{,}9.10^{-8}\text{ s}$$

olarak bulunur.



5. a) İki iletken boru arasındaki uzaklık çok küçük olduğu için borular arasında oluşan elektrik alan yaklaşık olarak paralel plakalı kondansatörün elektrik alanı olduğu kabul edebiliriz.

$$E=\frac{U}{h}=\frac{U}{r_2-r_1}$$

Oluşan kondansatörün üzerindeki yük

$$q=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{h}=\frac{\varepsilon_0 2\pi r_2 \ell U}{r_2-r_1}$$

olur. Dış yüzey negatif yüklü olup döndürülürse, dönme yönünün zıt yönünde akım geçmektedir. Bu durumda boru bir selenoid gibi davranmaktadır. Akım

$$NI=n\ell I=\frac{q}{T}=\frac{q\omega}{2\pi};\ nI=\frac{\varepsilon_0\omega r_2 U}{r_2-r_1}$$

selenoidin ekseni üzerinde oluşan manyetik alan

$$B=\mu_0 nI=\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega r_2 U}{r_2-r_1}$$

olarak bulunur.

b) Elektrona etki eden kuvvetler elektrik ve manyetik kuvvetidir. Elektrik kuvveti merkeze doğru, manyetik kuvveti ise dışarıya doğrudur. Elektronun sabit yarıçaplı yörünge üzerinde dönme şartından

$$eE-ev_0B=\frac{mv_0^2}{r};\ r=\frac{mv_0^2(r_2-r_1)}{eU(1-\mu_0\varepsilon_0\omega v_0 r_2)}$$

olarak bulunur.

6. a) Çubuk sabit açısal hızı ile dönerse moment denklemini

$$F\ell=F_A\frac{\ell}{2};\ F_A=IB\ell$$

şeklinde yazabiliriz. Verilen güç ısıya çıkan güç ve sürtünme kuvvetine karşı güç olarak harcanmaktadır. Buradan açısal hız

$$\varepsilon I=I^2R+Fv;\ v=\omega\ell;\ \omega=\frac{2\varepsilon}{B\ell^2}\left(1-\frac{2FR}{B\ell\varepsilon}\right)$$

olarak bulunur.

b) Sürtünme kuvveti ihmal edilecek kadar küçük ise çubuk ivmeli hareket yapar. Bu durumda akan akımı ikinci Kirchoff yasasını kullanarak bulabiliriz.

$$\varepsilon-\varepsilon_{in}=IR;\ \varepsilon_{in}=-\frac{B\ell^2\omega}{2}$$

Çubuğa etki eden moment

$$M=J\alpha=F_A\frac{\ell}{2};\ \alpha=\frac{d\omega}{dt};\ J=\frac{m\ell^2}{3}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{m\ell^2}{3}\frac{d\omega}{dt}=\frac{B\ell^2}{2R}\left(\varepsilon-\frac{B\ell^2\omega}{2}\right);\ \int_0^\omega\frac{d\omega}{\varepsilon-\frac{B\ell^2\omega}{2}}=\int_0^t\frac{3Bdt}{2mR}$$

$$\frac{2}{B\ell^2}\ln\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\frac{B\ell^2\omega}{2}}=\frac{3Bt}{2mR};\ \omega=\frac{2\varepsilon}{B\ell^2}\left(1-e^{-\frac{3B^2\ell^2 t}{4mR}}\right)$$

olarak bulunur.

7. Havanın özkütlesi

$$\rho=\frac{P_0\mu}{RT}$$

olarak yazılabilir. Havanın kırıcılık indisini farklı sıcaklıklarda

$$n_0\text{-}1=\frac{\xi P_0\mu}{RT_0}\;;\; T_0=273+15=288\text{ K},$$

$$n\text{-}1=\frac{\xi P_0\mu}{RT}\;;\; T=273+30=303\text{ K}$$

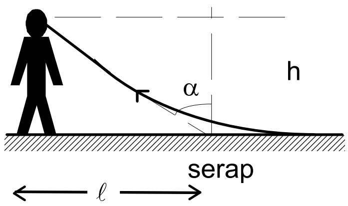
$$n_x\text{-}1=\frac{\xi P_0\mu}{RT_x}$$

olarak yazılabilir. Burada T_x bilinmeyen zemin sıcaklığıdır. Bu denklemlerden kırıcılık indisi ve bilinmeyen sıcaklık

$$n=1+(n_0\text{-}1)\frac{T_0}{T}=1{,}00262$$

$$T_x=\frac{(n_0-1)T_0}{n_x-1}$$

olarak bulunur.



Serabın gözlenmesi iç yansıma sonucudur.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 90^{o}}=\frac{n_x}{n}\;;\;\sin\alpha=\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}$$

$$n_x=\frac{n\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}=1{,}0002418$$

ve sıcaklık

$$T_x=\frac{(n_0-1)T_0}{n_x-1}=329\text{ K}=56^\circ\text{ C}$$

olarak bulunur.