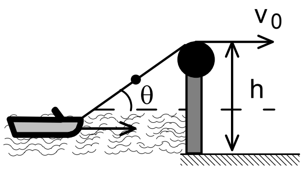
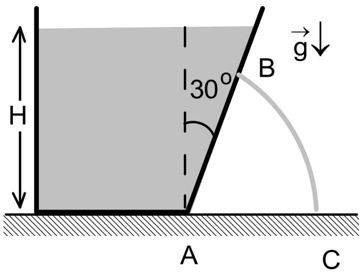
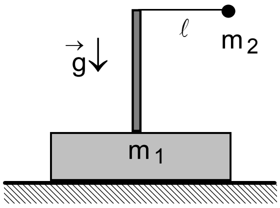
X. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI–2003



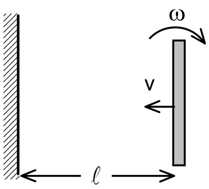
1. h yüksekliğindeki bir tepede bulunan motor vasıtasıyla göldeki kayık halatla çekilmektedir. Motor ipi sabit v_0 hızı ile sarmaktadır ve kayığın hızı hep yataydır. Halat yatayla θ açısı yaptığı anda halat üzerinde tepe ile kayığın tam ortasında bulunan bir düğümün net hız ve ivmesini bulunuz.



2. Yandaki kabın 30° eğimli duvarına ufak bir delik açılıp sıvının yüzeye dik bir şekilde fışkırmasına izin verilmektedir. Su seviyesinin kabın tabanından yüksekliği H'dır. Sıvının viskozitesini ve yüzey gerilimini ihmal ediniz. Sıvının çıktığı B deliğinin yerden yüksekliği h, sıvının yere değdiği ilk nokta C olsun. AC'nin maksimum değeri için h nedir? Bu durumda AC uzaklığını hesaplayınız.



3. Kütlesi m_1 olan bir tahta blok yatay bir masa üzerinde sürtünmesiz olarak hareket edebilmektedir. Bu bloğun üzerine yerleştirilen kütlesi m_2, uzunluğu ℓ olan bir basit sarkaç düşey düzlemde serbestçe salınabilmektedir. Sarkaç şekilde gösterilen yatay konumdan serbest bırakılmaktadır. Sarkaç ipinin kütlesi ve sarkaç topunun yarıçapı ihmal edilebilecek kadar küçük olduğunu varsayınız. Sarkacın serbest bırakıldıktan sonraki hareketi sırasında ipteki gerilmeyi ipin dikeyle yaptığı açıya bağlı olarak bulunuz. İpteki maksimum gerilme kuvveti nedir? $\frac{m_1}{m_2} \to \infty$ ve $\frac{m_1}{m_2} \to 0$ durumları için ipteki maksimum gerilmeyi ve hareketin nasıl olacağını tartışınız.



4. Uzunluğu 10 cm olan bir çubuk yatay düzlem üzerinde v=10 cm/s hızıyla kayarak dönmektedir. Bu çubuk duvardan ℓ=50 cm uzaklıktayken duvara paraleldir. Çubuğun paralel konumda duvara çarpabilmesi için ω açısal hızı ne olmalıdır?

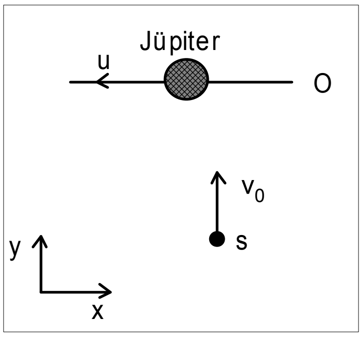
5. Dünyamızın merkezinde küçük yarıçaplı fakat çok yoğun bir maddeden oluşan çekirdek ve bunun etrafında yoğunluğu daha az bir kabuktan oluştuğunu kabul edelim. Ayrıca bu çekirdeğin kütle merkezi ile kabuğun kütle merkezi ortak kütle merkezi ekvator düzleminde ve geometrik merkezinden δ=100 km lik bir uzaklıkta olduğunu kabul edelim. Bu yapıdaki bir dünyanın ekvator düzleminde ve dünya etrafında hareket eden bir uydunun minimum periyodu nedir? Dünyanın yarıçapı R=6400 km, kütlesi m_D ve evrensel çekim sabiti γ olarak veriliyor.

6. Bir kuyruklu yıldız Dünyanın dönme düzleminde bir parabolik yörüngede hareket etmektedir. Parabolik yörünge için, kuyruklu yıldızın çok çok uzakta ve neredeyse sıfıra yakın bir hızla harekete geçtiğini kabul edebiliriz. Kuyruklu yıldızın Güneşe en yakın olduğu mesafe ξR olarak veriliyor. Burada R Dünyanın dairesel yörüngesinin yarıçapı olup $\xi<1$ olan bir sabittir. Kuyruklu yıldızın Dünya yörüngesinin çevrelediği alan içinde harcayacağı t süresini Dünyanın periyodu T_D ve ξ cinsinden bulunuz. Bu maksimum süre nedir?

7. Bu problemde uzay araçlarını istenilen yönde ivmelendirmek üzere sıkça kullanılan bir metot ele alınmaktadır. Uzay aracı gezegene yakın uçarken gezegenin yörünge hareketinden küçük miktarda enerji alarak ilk hızı önemli ölçüde artar ve uçuş yönü büyük ölçüde değişir. Burada Jüpiter'in yakınından geçen bir uzay aracı için bu olayı inceleyeceğiz. Gezegen Jüpiter Güneşin etrafında eliptik bir yörüngede dönmektedir. Bu yörünge, yarıçapı R olan bir daire gibi kabul edilebilir.

a) Jüpiter'in Güneş etrafındaki yörüngesindeki u hızını bulunuz.

b) Uzay aracı, Güneş ile Jüpiter arasında iken (Güneş-Jüpiter arasındaki doğru üzerinde) Güneşin gravitasyonel çekim kuvvetinin Jüpiter tarafından dengelendiği noktanın Jüpiter'e olan uzaklığı nedir?

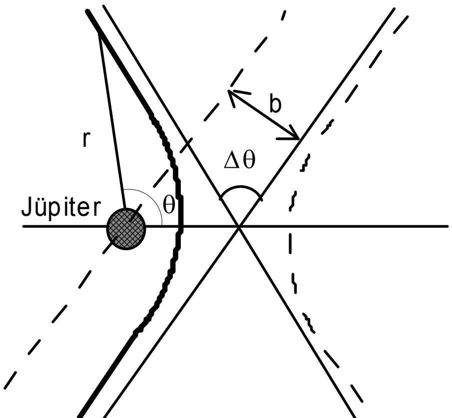


Şekil 1
Güneşin kütle merkezinden görünüm. O Jüpiter'in yörüngesini göstermektedir, s noktası uzay aracıdır.

Kütlesi m=825 kg olan uzay aracı Jüpiter'in yakınından uçmaktadır. Kolaylık olsun diye uzay aracının hareket çizgisinin tamamen Jüpiter'in yörünge düzleminin içinde bulunduğunu kabul ediniz. Böylece uzay aracının yörün-ge düzleminden dışarı atılması gibi önemli bir durumu ihmal edebiliriz. Burada, sadece Jüpiter'in çekim alanının diğer tüm gravitasyonel kuvvetlere üstün geldiği bölgede ne olup bittiğini ele alacağız. Güneşin kütle merkezinin referans çerçevesinde uzay aracının ilk hızı v_0=1,00.10^4 m/s (pozitif y ekseni yönünde) ve Jüpiter'in hızı negatif x ekseni yönünde-dir (Bakınız Şekil-1). ''ilk hız''dan kastedilen uzay aracının gezegenler arası uzayda hala Jüpiter' den uzakta fakat Güneşin çekim alanının Jüpiter'e göre zayıf olduğu bölge-deki hızıdır. Uzay aracı ile Jüpiter'in karşılaşma süresinin, Jüpiter'in Güneş etrafındaki yörüngesinde yönünün değiş-mesi ihmal edilebilecek kadar, küçük olduğu kabul edilecek-tir. Aynı zamanda uzay aracının Jüpiter'in arka tarafından geçtiğini, yani, y-koordinatları aynı olduğu zaman uzay aracı için x-koordinatının, Jüpiter için olan x-koordinatından daha büyük olduğunu kabul edebiliriz.

c) Uzay aracının ilk hız vektörünün yönünü (yani hızının x-ekseni ile yaptığı açısını) ve v ilk hızının büyüklüğünü, Jüpiter'in referans çerçevesine göre, Jüpiter'den hala uzakta olduğu zaman için bulunuz.

d) Uzay aracının Jüpiter'in referans çerçevesine göre toplam enerjisi W'nin değerini bulunuz. Aslında potansiyel enerji sonsuzda sıfır olarak tanımlanırsa da, burada gravitasyonel etkileşmelerin küçük olmasından ötürü uzay aracının hemen hemen sabit hızla gidecek kadar Jüpiter'den uzak olduğu mesafede potansiyel sıfır alınabilir.



Şekil 2

Jüpiter'in referans çerçevesine göre uzay aracının yörüngesi bir hiperboldur ve bu çerçevede polar koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\frac{1}{r}=\frac{\gamma m_J}{v^2b^2}\left(1+\sqrt{\frac{2W\,v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}\cos\theta\right)$$

ile verilmektedir. Burada b Jüpiter ile asimptotlardan birisi arasındaki uzaklık (çarpışma parametresi, nişan hatası), W aracın Jüpiter'e göre toplam mekanik enerjisi, γ çekim sabiti, m_J Jüpiter'in kütlesi, r radyal uzaklık ve θ polar koordinatıdır. Şekil 2. de verilen denklemde tanımlanan hiperbolun iki dalı gösterilmektedir, asimptotlar ve polar koordinatlar da gösteri-mliştir. Bir numaralı eşitlikte orijinin (başlangıç noktasının) hiperbolun çekim odağında olduğuna dikkat ediniz. (Hiperbo-lun vurgulanmış dalı Şekil 2.de verilmiştir)

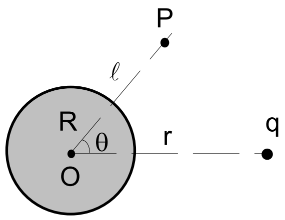
e) Uzay aracının yörüngesini ifade eden denklemi kullanarak, (Şekil 2 de gösterildiği gibi) Jüpiter'in referans çerçevesine göre $\Delta\theta$ açısal sapmasını bulunuz. Bunu ilk hız v ve çarpışma parametresi (impact parameter), b, cinsinden yazınız.

f) Uzay aracının Jüpiter'in merkezine Jüpiter'in yarıçapının 3 katından daha az bir mesafe ile yaklaşa-mayacağını kabul ediniz. Mümkün olan minimum çarpma parametresini ve mümkün olan maksimum açısal sapmayı bulunuz.

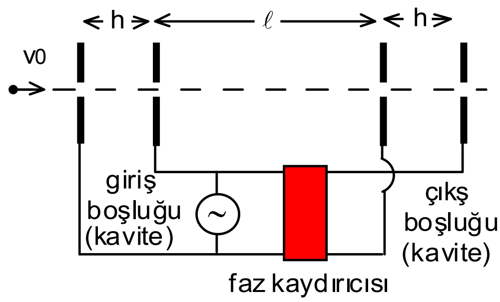
g) Uzay aracının Güneş'in referans çerçevesindeki son v_s hızının bileşenlerini ve büyüklüğünü veren ifadeleri sadece Jüpiter'in u hızı, uzay aracının ilk hızı v_0 ve sapma açısı $\Delta\theta$ cinsinden bulunuz.

h) Bir önceki sorudaki ifadeyi kullanarak, açısal sapma miktarı $\Delta\theta$ mümkün olan en büyük değerini aldığında Güneş'in referans çerçevesindeki son v_s hızının sayısal değerini hesaplayınız

Not: Evrensel çekim sabiti γ=6,67259·10^{-11} $m^3/(kg{\cdot}s^2)$, Güneş'in kütlesi m_G=1,991.10^{30} kg, Dünyanýn kütlesi m_D=5,979.10^{24} kg, Dünya yörüngesinin büyük yarım ekseni $r_{D\text{-}G}$=1,4957.10^{11} m, sideral gün T_S=86164,06 s, bir yıl T_D=31,558150.10^6 s, yerçekimi ivmesi g_{0D}=9,80665 $m{\cdot}s^{-2}$, Jüpiter kütlesi m_J=1,901·10^{27} kg, Jüpiterin ekvator yarıçapı: R_J=69,8.10^6 m, Jüpiterin yörüngesinin ortalama yarıçapı: $r_{J\text{-}G}$=7,783.10^{11} m, bir Jüpiter günü: T_J=35,6.10^3 s, bir Jüpiter yılı T_J=374,32.10^6 s, π=3,14159265 olarak veriliyor.



8. Yarıçapı R olan iletken bir kürenin merkezinden r uzakta q noktasal yük konulmuştur. Kürede indükte edilen yük nedir? Bu yük kürenin merkezinden nerede bulunuyor. Sistemin elektrostatik potansiyel enerjisi nedir? Kürenin merkezi ile yükün belirttiği doğruya göre θ açısı yapan ve geometrik merkezinden ℓ uzakta bulunan P noktasındaki potansiyel nedir? Küre üzerinde oluşan yükün yüzeysel yük yoğunluğunun θ açısına bağlı olan ifadesi nedir?



9. Klystron, çok yüksek frekanslı sinyalleri yükseltmede kullanılan bir aygıttır. Şekilde görüldüğü gibi bir Klystron aygıtı birbirinden ℓ mesafesi kadar ayrılmış birbirine benzer iki çift paralel levhadan (kaviteden) oluşmaktadır. İlk hızı v_0 olan elektron demeti levhalardaki çok küçük deliklerden geçerek tüm aygıtı kat etmektedir. Yükseltilmesi arzu edilen yüksek frekanslı voltaj her iki çift plakaya uygulanmakta ve levhalar arasında (kavitelerde) yatay yönde alternatif (alternating) elektrik alanlar oluşturmaktadır. İki kavite arasında belli bir faz farkı bulunmaktadır (2π lik faz farkı bir periyoda karşılık gelir). Giriş kavitesine giren elektronlar, elektrik alan sağ yöne doğru olduğunda yavaşlamakta, sol yöne olduğunda hızlan-makta ve böylece elektronlar ilk kaviteden belli bir uzaklıkta kümelenmektedir. Elektronların kümeleş-tikleri noktaya çıkış kavitesi konursa, buradaki elektrik alanın fazı uygun seçildiği takdirde elektron demetinden enerji soğurur. Voltaj sinyali, $U=\pm 0{,}5$ Volt şeklinde değişen, periyodu $T=10^{-9}$ s olan kare şeklinde bir dalga olsun. Elektronların ilk hızı $v_0=2.10^6$ m/s ve yükünün kütlesine oranı $\frac{q}{m}=1{,}759.10^{11}$ C/kg dır. Levhalar arasındaki h uzaklığı o kadar küçüktür ki elektronların kaviteler içinden geçiş süresi ihmal edilebilir. Sadece 4 anlamlı basamak tutarak, elektronların kümeleştikleri f mesafesini ve faz kaydırıcısının sağladığı gerekli faz farkını hesaplayınız.

10. Elektromanyetik bir alan içinde bulunan q yükünün hareket denklemleri Lorentz kuvvetinden bulunabilir. Kütlesi m yükü q olan bir parçacığın $\vec{B}=B\vec{e}_z$, $\vec{E}=E_y\vec{e}_y+E_z\vec{e}_z$ alanları içindeki hareketi göz önüne alınırsa:

a) Eğer $z(t=0)=z_0$ ve $\dot{z}(t=0)=\dot{z}_0$ ise parçacığın hareket denkleminin z bileşeni nedir?
b) Başlangıç

$$x(t=0)=-\frac{\dot{y}_0}{\omega_0};\quad \dot{x}(t=0)=\frac{E_y}{B};\ y(t=0)=0;\quad \dot{y}(t=0)=\dot{y}_0$$

değerlerini kullanarak x(t) ve y(t) yi hesaplayınız. (ω_0 cyclotron frekansıdır).

11. Uzunluğu ℓ_0 ve kesit yarıçapı r esnek iletken tel iki ucundan tutturulmuştur. Telin yapıldığı maddenin Young modülü E ($E=\frac{\text{Kuvvet}}{\text{Alan}}\frac{\text{Boy}}{\text{Boyca uzama miktarı}}$) dir. Tel sabit ve homojen B manyetik alanında bulunmaktadır. Başlangıçta tel gerilmemiştir. Telden zayıf I akımı geçtiğinde teldeki gerilme kuvveti ne kadar olur? Telin orta noktasının maksimum sapması nedir? Zayıf akımın ne anlama geldiğini nicel olarak ifade ediniz.

12. Suyun molekülleri arasındaki uzaklığı sıvı fazında d_s ile, gaz fazındaysa d_g ile gösterelim. Her iki fazın 100 ^oC sıcaklıkta ve atmosfer basıncında olduğunu ve buharın ideal bir gaz gibi davrandığını kabul edelim. Aşağıda verilen verileri kullanarak $\frac{d_s}{d_g}$ oranı nedir? Sıvı fazdaki suyun yoğunluğu: $\rho_L=1000$ kg/m^3, suyun molar kütlesi $\mu=18$ g/mol, atmosfer basıncı: $P_a=10^5$ N/m^2, gaz sabiti R=8,3 J/mol.K, Avagadro sayıs $N_A=6.10^{23}$ mol^{-1} olarak veriliyor.

13. Birbiri içinde erimeyen A ve B sıvıların doymuş buhar basınçları sıcaklığa bağlı olarak

$$P_A=P_0\, e^{\frac{a_A}{T}+b_A} \; ; \; P_B=P_0\, e^{\frac{a_B}{T}+b_B}$$

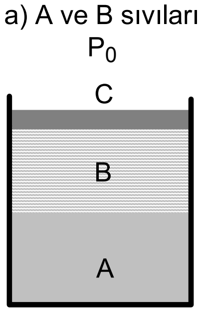
şeklinde değişmektedir. Burada P_0 normal atmosfer basıncı, T sıcaklık, a_A,b_A, a_B, b_B sabitlerdir. Bu bağıntı

$$\ln\frac{P_A}{P_0}=\frac{a_A}{T}+b_A \; ; \; \ln\frac{P_B}{P_0}=\frac{a_B}{T}+b_B$$

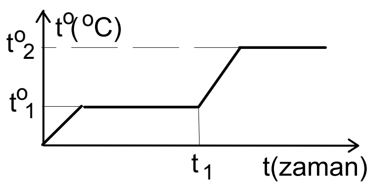
olarak da yazılabilir. A ve B sıvıları için $\frac{P_A}{P_0}$ ve $\frac{P_B}{P_0}$ oranları 40° C ve 90° C sıcaklıklardaki değerleri tabloda verilmekte olup bu değerlerde hata payı yok sayılabilir.

t°(°C)	$\frac{P_A}{P_0}$	$\frac{P_B}{P_0}$
40°	0,284	0,07278
90°	1,476	0,6918

a) A ve B sıvılarının P_0 basıncı altında kaynama sıcaklıklarını bulunuz.



A ve B sıvıları bir kabın içine boşaltılıp şekilde görülen tabakalar oluşuyor. B sıvısının yüzeyi, A ve B sıvıları ile karışmayan ve uçucu olmayan ince bir C sıvı tabakası ile örtülerek, B sıvısının üst yüzeyinin kendiliğinden buharlaşması önleniyor. A ve B sıvılarının gaz durumundaki molar kütlelerinin oranı $\xi=\frac{\mu_A}{\mu_B}=8$ olarak veriliyor. A ve B sıvılarının başlangıçtaki kütleleri m eşit olup 100 gramdır. Kaptaki sıvı tabakalarının yükseklikleri ve yoğunlukları, kabın içindeki her noktadaki basıncın atmosferik basınç P_0 olmasını sağlayacak şekildedir.



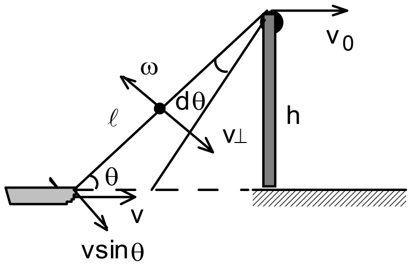
b) Kaptaki sıvılar yavaş ve sürekli biçimde ısıtılmaya başlıyor. Sıvıların t° sıcaklığının t zamana göre değişimi şekilde verilmiştir. Bu grafik yatay kısımlarına karşılık gelen $t°_1$, $t°_2$ sıcaklıklarını bulunuz. Gösterilen belirli bir t_1 anında A ve B sıvılarının kütlelerini bulunuz.

Not: Bulduğunuz $t°_1$ ve $t°_2$ sıcaklıklarını tam sayılara (°C olarak) yuvarlayınız. Sıvıların kütlelerine gramın onda biri hassasiyetle belirtiniz. İki sıvının buharların kısmi basınçları Dalton yasasına tabidir. Doymuş buhar basınca kadar iki sıvı buharı da ideal gaz dibi kabul edilebilir.

14. Ağırlıksız bir plakanın bir yüzeyi tam yansıtıcı, diğeri ise absorbe edicidir. Plaka gaz olan bir ortamda bulunursa hareket hızı ne kadar olur? Plaka fotonlu olan ortamda bulunursa hızı ne kadar olur? Ortamı oluşturan moleküllerin ya da fotonların hızı veriliyor.

15. Dünya oluştuğunda ^{238}U ve ^{235}U izotoplarının var oldukları fakat bunların radyoaktif bozunmaya uğramadıkları varsayılmaktadır. ^{238}U ve ^{235}U'in bozunumları dünyanın t_D yaşını tayin etmekte kullanılmaktadır. ^{238}U izotopun yarı ömrü $4{,}50.10^9$ yıl olarak verilmektedir. Takip eden radyoaktif seride bozunum sonucu oluşan elementlerin yarı ömürleri bundan daha küçüktür ve birinci mertebede ihmal edilebilirler. Bozunum serisi, kararlı bir izotop olan ^{206}Pb ile sona ermektedir. $^{206}\Delta N$ ile gösterilen ^{206}Pb atomlarının sayısını veren ifadeyi, o andaki ^{238}U atomlarının sayısı $^{238}\Delta N$ ile gösterilmektedir) ve ^{238}U'in yarı ömrü cinsinden bulunuz. 10^9 yıl zaman hesaplamalarında birim olarak kullanılabilir. Benzer şekilde, ^{235}Uizotopun $0{,}7.10^9$ yıllık yarı ömürle, daha küçük yarı ömürlü bozunum elementlerinden oluşan bir seri ile ^{207}Pb kararlı izotopunu verecek şekilde bozunur. Kurşun cevheri ile karıştırılmış uranyum cevheri bir kütle spektrometresi ile analiz edilmektedir. Üç kurşun izotopu ^{204}Pb, ^{206}Pb, ^{208}Pb ölçülmekte ve atom sayılarının sırasıyla 1,00:29,6:22,6 oranında olduğu bulunmaktadır. ^{204}Pb radyoaktif bir bozunma sonucu oluşmadığı için referans olarak kullanılmaktadır. Saf kurşun cevheri analizi 1,00:17,9:15,5 oranlarını vermektedir. ^{238}N:^{235}N oranı 137 olarak verilmektedir. Dünyanın yaşı t_D'yi içeren bir denklem bulunuz. T'nin her iki uranyum izotopunun yarı ömürlerinden kabaca çok uzun olduğunu varsayınız ve bu şartlar altında t_D için yaklaşık bir değer bulunuz. Bu yaklaşık değer açıkça, daha büyük olan yarı ömürden çok büyük değildir fakat t_D için daha doğru bir değer bulmak için kullanılabilir. Böyle düşünerek yada istediğiniz başka bir yolla dünyanın yaşını ±%2 hata dahilinde bulunuz.

X. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2003



1. İp yatayla θ açısı yaptığında cismin hızı v olsun. Bu durumda kayıl ile kıyı arasında bulunan ipin uzunluğu

$$\ell=\frac{h}{\sin\theta}$$

olur. İp çok az çekilirse artık ip yatayla $\theta+d\theta$ açısı yapacak ve kayığın hızı v+dv olacak. Kayığın hızının ip üzerindeki bileşeni ipin uzamamsı için ipin hızına eşit olmalıdır.

$$v\cos\theta=v_0$$

Kayığa bağlı ipin ipe dik olan hız bileşeni $v\sin\theta$ küçük dt sürede

$$d\theta=\frac{v\sin\theta dt}{\ell}=\frac{v\sin^2\theta dt}{h}$$

açı taramaktadır. Bu denklemden açısal hız

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v\sin^2\theta}{h}=\frac{v_0\sin^2\theta}{h\cos\theta}$$

ve açısal ivme

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}=\frac{v_0^2\tan^3\theta(1+\cos^2\theta)}{h^2}$$

olarak bulunur. İpin orta noktanın ipe dik olan hız

$$v_\perp=\omega\frac{\ell}{2}=\frac{v_0\tan\theta}{2}$$

olur. Net hız

$$u=\sqrt{v_\perp^2+v_0^2}=v_0\sqrt{\frac{1+3\cos^2\theta}{4\cos^2\theta}}$$

olarak bulunur. İp döndüğü için normal ivme

$$a_n=v_\perp\omega=\frac{v_0^2\tan^2\theta\sin\theta}{2h}$$

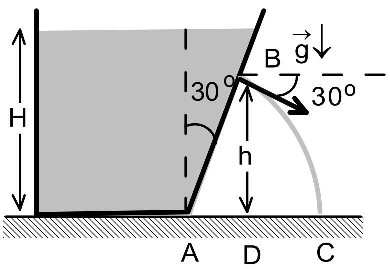
ipin açısı değiştiği için teğetsel ivme

$$a_\tau=\alpha\frac{\ell}{2}=\frac{v_0^2\tan^3\theta(1+\cos^2\theta)}{2h\sin\theta}$$

Tam ivme

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=\frac{v_0^2\tan^2\theta}{2h}\sqrt{1+\frac{\tan^2\theta(1+\cos^2\theta)^2}{\sin^4\theta}}$$

olarak bulunur.



2. Suyun çıkışta kazandığı hız için

$$v=\sqrt{2g(H-h)}$$

bu hızın bileşenleri için

$$v_x=v\cos30°;\ v_y=v\sin30°$$

menzili için

$$x=v_xt$$

düştüğü yüksekliği için

$$h=v_yt+\frac{gt^2}{2}$$

yazabiliriz. Buradan hareket süresi ve AC uzaklığı

$$t=\frac{\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}+\frac{8h}{g}}-\sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}}{2};\ AC=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{H^2+2Hh-3h^2}-H+h)+\frac{h\sqrt{3}}{3}$$

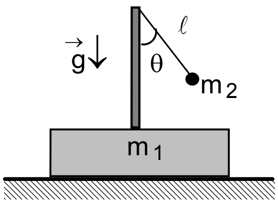
olarak yazılabilir. Maksimum şartı için

$$\frac{d|AC|}{dh}=0;\ 39h^2-26Hh-4H^2=0;\ h=0{,}79H$$

olmalıdır. Buradan aranan uzaklık

$$AC\approx H$$

olarak bulunur.



3. Momentum korunumu yasasından

$$m_1v_1+m_2(v_1-v_{2x})=0$$

$$v_{2x}=v_2\cos\theta;\ v_{2y}=v_2\sin\theta$$

$$v_1=\frac{m_2v_2\cos\theta}{m_1+m_2}$$

enerji korunumu yasasından

$$m_2g\ell\cos\theta=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2(v_1-v_{2x})^2}{2}+\frac{m_2v_{2y}^2}{2}=$$

$$=\frac{m_2(m_1+m_2\sin^2\theta)v_2^2}{2(m_1+m_2)}$$

yazabiliriz. Buradan

$$v_1=\sqrt{\frac{2m_2^2g\ell\cos^3\theta}{(m_1+m_2\sin^2\theta)(m_1+m_2)}}$$

$$v_2=\sqrt{\frac{2(m_1+m_2)g\ell\cos\theta}{(m_1+m_2\sin^2\theta)}}$$

ve ipteki gerilme kuvveti

$$T=m_2g\cos\theta+\frac{m_2v_2^2}{\ell}=m_2g\cos\theta+\frac{2(m_1+m_2)m_2g\cos\theta}{(m_1+m_2\sin^2\theta)}$$

olarak bulunur. Maksimum kuvvet $\theta=0°$ için gerçekleşir.

$$T_{mak}=m_2g\left(3+\frac{2m_2}{m_1}\right)$$

$\frac{m_1}{m_2}\to\infty$ ise $T_{mak}=3m_2g$ olur. $\frac{m_1}{m_2}\to 0$ ise $T\to\infty$ olur. Bu olamayacağı için belirli açıda ip kopar.

4. Çubuk

$$t=\frac{\ell}{v}=\frac{50}{10}=5\text{ s}$$

süre sonra duvara çarpar. Bu süre içinde çubuk için

$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$$

yarı periyot geçmiştir. Buradan aranan açısal hız

$$\frac{\ell}{v}=\frac{\pi}{\omega};\ \omega=\frac{\pi}{5}$$

olarak bulunur. Diğer bir çözüm ise çubuk duvardan $x=\frac{\ell}{2}=5$ cm uzakta iken mümkündür. Bu durumda gereken süre

$$t_2=\frac{x}{v}=\frac{5}{10}=0{,}5\text{ s}$$

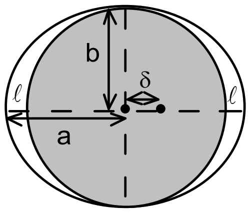
olur. Bu süre içinde çubuk için

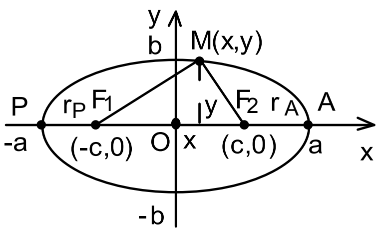
$$\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$$

yarı periyot geçmiştir. Buradan aranan açısal hız

$$\frac{x}{v}=\frac{\pi}{\omega};\ \omega=2\pi$$

olarak bulunur.





5. Uydunun çizdiği elips şeklindeki yörüngenin küçük yarım ekseni gezegenin yarıçapına eşit olmalıdır. Bu durumda elipsin büyük yarım ekseni de gezegenin yarıçapından ℓ kadar daha fazla olmalıdır.

$$a=R+\ell$$

$$b=R$$

Elips, odakları F_1 ve F_2'ye herhangi bir M(x,y) noktasına kadar olan uzaklıkların toplamı sabit olan geometrik noktaların kümesi olarak tanıtılmaktadır.

$$F_1M+MF_2=2a$$

Burada a elipsin büyük yarım ekseni, b küçük yarım ekseni, P perihelion noktası F_1 odak noktasına olan en yakın nokta, A aphelion noktası bu odağa olan en uzak nokta, r_P ve r_A bu noktalara olan uzaklıklar, c ise odak noktalarının merkeze olan uzaklıklarıdır. M(x,y) noktası için

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(c-x)^2+y^2}=2a;\quad \sqrt{(x+c)^2+y^2}-2a=-\sqrt{(c-x)^2+y^2}$$

yazabiliriz. Bu ifadenin karesini alıp

$$xc+a^2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

denklemi elde ederiz. Bu ifadenin karesini alarak

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

denklemi elde ederiz. Burada

$$b^2=a^2-c^2$$

dersek

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

elde ederiz. a^2b^2 ifadesine bölerek

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

elipsin denklemi elde edilir. Elipste

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

eksentrite olarak bilinmektedir. $0<\varepsilon<1$ olmalıdır. Daire için $\varepsilon=0$ olur. En yakın ve en uzak noktalara olan uzaklıklar için

$$a=\frac{r_P+r_A}{2};\ c=a-r_P=\frac{r_A-r_P}{2};\ b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{\left(\frac{r_P+r_A}{2}\right)^2-\left(\frac{r_A-r_P}{2}\right)^2}=\sqrt{r_Ar_P}$$

yazabiliriz. Buradan

$$r_A=R+\ell+\delta;\ r_P=R+\ell-\delta;\ R=\sqrt{(R+\ell+\delta)(R+\ell-\delta)}$$

$$\ell=\frac{\delta^2}{2R}=0{,}784\ \text{km}$$

olarak bulunur. Açısal momentum korunumu yasası için

$$L=mvr=sabit$$

yazabiliriz. İlk durumda (kütle merkezi ile geometrik merkezin çakışık olduğu durumda) uydunun hızı için

$$\frac{mv^2}{R}=\frac{\gamma m_D m}{R^2};\ v=\sqrt{\frac{\gamma m_D}{R}}$$

açısal momentumu için

$$L=m\sqrt{\gamma m_D R}$$

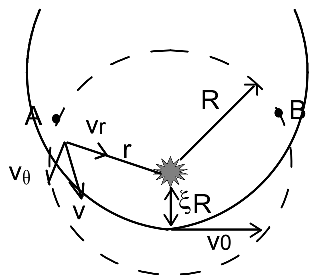
alan hızı için

$$\sigma=\frac{dS}{dt}=\frac{vr}{2}=\frac{L}{2m}=\frac{\sqrt{\gamma m_D R}}{2}$$

yazabiliriz. Uydunun dolanım periyodu

$$T=\frac{S}{\sigma}=\frac{\pi ab}{\sigma}=\frac{\pi(2R^2+\delta^2)}{\sqrt{\gamma m_D R}}$$

olarak bulunur.



6. Dünyanın Güneşin etrafında hareket ettiği yörüngesel hız v_D olsun. Bu hızı bulmak için merkezcil kuvvetin çekim kuvvetine eşit olması durumundan faydalanabiliriz.

$$\frac{\gamma\ m_G m_D}{R^2}=\frac{m_D {v_D}^2}{R}\ ;\ v_D=\sqrt{\frac{\gamma\ m_G}{R}}$$

Dünya Güneş etrafında

$$T_D=\frac{2\pi R}{v_D}=\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\gamma\ m_G}{R}}}$$

sürede bir devir tamamlamaktadır. Kuyruklu yıldızın Dünyanın Güneş etrafındaki yörüngesini A ve B noktalarında kestiğini kabul edelim. Güneşe en yakın noktadaki v_0 hızı ve kuyruklu yıldızın Güneşten r uzakta olduğu zamanki v hızını enerji korunumu yasasından bulabiliriz.

$$\frac{\gamma\ m_G m}{\xi R}=\frac{m {v_0}^2}{2}\ ;\ v_0=\sqrt{\frac{2\gamma\ m_G}{\xi R}}$$

$$\frac{\gamma\ m_G m}{r}=\frac{m v^2}{2}\ ;\ v=\sqrt{\frac{2\gamma\ m_G}{r}}$$

v hızının iki bileşeni vardır: v_r ve v_θ. v_θ bileşenini kuyruklu yıldız için geçerli olan açısal momentumun korunumu yasasını kullanarak bulabiliriz. Yıldız Güneşten r uzakta bulunurken bu hız

$$m v_0 \xi R = m v_\theta r;\ v_\theta=\frac{v_0 \xi R}{r}$$

olur. Kuyruklu yıldızın hızının radyal bileşeni

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\sqrt{v^2-{v_\theta}^2}=\sqrt{\frac{2\gamma\ m_G}{r}-\left(\frac{v_0\xi R}{r}\right)^2}=\frac{\sqrt{2\gamma\ m_G}}{r}\sqrt{r-\xi R}$$

Güneşten dr kadar uzaklaşmak ya da yaklaşmak için gereken süre

$$dt=\frac{dr}{v_r}=\frac{r dr}{\sqrt{2\gamma\ m_G}\sqrt{r-\xi R}}$$

olarak yazılabilir. Yeni bir değişken tanımlayalım.

$$r-\xi R=x;\ r=x+\xi R;\ dr=dx$$

Buradan aradığımız süre

$$t=2\int_{\xi R}^{R}\frac{r dr}{\sqrt{2\gamma\ m_G}\sqrt{r-\xi R}}=2\int_{0}^{R(1-\xi)}\frac{(x+\xi R)dx}{\sqrt{2\gamma\ m_G}\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\gamma\ m_G}}\left(\int_{0}^{R(1-\xi)}\sqrt{x}\,dx+\int_{0}^{R(1-\xi)}\frac{\xi R}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\gamma\ m_G}}\left(\frac{2[R(1-\xi)]^{\frac{3}{2}}}{3}+2\xi.R\sqrt{(1-\xi)R}\right)=\frac{2\sqrt{2(1-\xi)}}{\sqrt{\frac{\gamma\ m_G}{R}}}\frac{R(1+2\xi)}{3}$$

$$t=\frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\gamma\ m_G}{R}}}\frac{\sqrt{2(1-\xi)}\,(1+2\xi)}{3\pi}=\frac{\sqrt{2(1-\xi)}\,(1+2\xi)T_D}{3\pi}$$

olarak bulunur. Maksimum süreyi bulabilmek için

$$\frac{d\left[(1+2\xi)\sqrt{1-\xi}\right]}{d\xi}=0$$

olmalıdır. Buradan $\xi=0,5$

$$t_{mak}=\frac{2T_D}{3\pi}\approx 77\ \text{gün}$$

olarak bulunur.

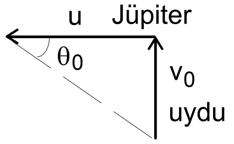
7. a) Jüpiter'in Güneş etrafındaki yörüngesindeki u hızı

$$\frac{m_J u^2}{r}=\frac{\gamma\ m_G m_J}{r^2}\ ;\ u=\sqrt{\frac{\gamma\ m_G}{r}}=1{,}306.10^4\ \text{m/s}$$

olarak bulunur.
b) Uzay aracı, Güneş ile Jüpiter arasında iken (Güneş-Jüpiter arasındaki doğru üzerinde) Güneşin gravitasyonel çekim kuvvetinin Jüpiter tarafından dengelendiği nokta için

$$\frac{\gamma m m_G}{(r_{G-J}-r_0)^2}=\frac{\gamma m m_J}{r_0^2}\ ;\ r_0=\frac{\sqrt{m_J}\ r_{G\text{-}J}}{\sqrt{m_G}+\sqrt{m_J}}=2{,}333.10^{10}\ \text{m}$$

olarak bulunur.



c) Uzay aracının ilk hız vektörünün hızının x-ekseni ile yaptığı θ_0 açısı olsun. Bu durumda

$$v_x=u=v\cos\theta_0$$
$$v_y=v_0=v\sin\theta_0$$

yazabiliriz. Buradan ilk hız ve açı

$$\theta_0=\arctan\frac{v_0}{u}\approx 0{,}653\ \text{rad}=37{,}4°$$

$$v=\sqrt{u^2+v_0^{\,2}}=1{,}65.10^4\ \text{m/s};\ \cos\theta_0=\frac{u}{\sqrt{u^2+v_0^{\,2}}}\ ;\ \sin\theta_0=\frac{v_0}{\sqrt{u^2+v_0^{\,2}}}$$

olarak bulunur.
d) Uzay aracının Jüpiter'in referans çerçevesine göre toplam enerjisi Jüpiter'den uzak olduğu mesafede potansiyel sıfır alınabilmesi ile

$$W=K=\frac{mv^2}{2}=112.10^9\ \text{J}$$

olarak bulunur.
e) Uzay aracının yörüngesini ifade eden denklemi r çok büyük ise

$$\frac{1}{r}=\frac{\gamma m_J}{v^2b^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}\cos\theta\right)\geq 0;\ \cos\theta\geq -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}}$$

yazabiliriz. Açı için

$$\theta_{\pm}=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}}=\pm\arccos\left(\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}}\right)$$

yazabiliriz.
Jüpiter'in referans çerçevesine göre $\Delta\theta$ açısal sapma

$$\Delta\theta=\theta_{+}-\theta_{-}-\pi=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}}$$

olarak bulunur.
f) Uzay aracının Jüpiter'in merkezine Jüpiter'in yarıçapının 3 katından daha az bir mesafe ile yaklaşamayacağı için

$$r_{min}=3R_J=20{,}94.10^7\ \text{m}$$

olur. Bu durumda $\theta=0$ olur. Nişan hatası b olsun. Buradan

$$\frac{1}{r}=\frac{\gamma m_J}{v^2b^2}\left(1+\sqrt{\frac{2W\ v^2b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2} m}}\cos\theta\right);\ \frac{1}{r_{min}}=\frac{\gamma m_J}{v^2b^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{v^4b^2}{\gamma^2 m_J^{\,2}}}\right)$$

$$b_{min}=\sqrt{r_{min}^{\,2}+\frac{2\gamma m_J r_{min}}{v^2}}=\sqrt{9R_J^{\,2}+\frac{6\gamma m_J R_J}{v^2}}=4{,}90.10^8\ \text{m}$$

olarak yazılabilir. Bu minimum mesafede hız v_{min} olsun. Bu hız enerji korunumu yasasından bulunulabilir.

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{mv_{min}^{\,2}}{2}-\frac{\gamma\ m_J m}{r_{min}}\ ;\ v_{min}^{\,2}=v^2+\frac{\gamma\ m_J}{r_{min}}$$

maksimum $\Delta\theta_{mak}$ açısal sapma

$$\Delta\theta_{mak}=\pi-2\arccos\frac{1}{\sqrt{1+\frac{v^4 b_{min}^{\;2}}{\gamma^2 m_J^{\;2}}}}=1{,}526\text{ rad}=87{,}4°$$

olarak bulunur.

g) Uzay aracının Güneş'in referans çerçevesindeki son v_s hızının bileşenlerini ve büyüklüğünü Jüpiter'in u hızı, uzay aracının ilk hızı v_0 ve sapma açısı $\Delta\theta$ cinsinden yazabiliriz. İlk olarak v hızının bileşenlerinin yazalım.

$$v_x=v\cos(\theta_0+\Delta\theta);\ v_y=v\sin(\theta_0+\Delta\theta)$$

Güneş'in referans çerçevesindeki son v_s hızın bileşenleri

$$v_{sx}=v\cos(\theta_0+\Delta\theta)-u;\ v_{sy}=v\sin(\theta_0+\Delta\theta)$$

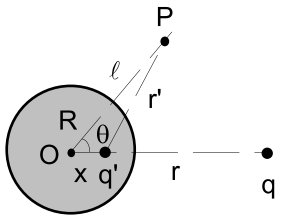
ve hızın büyüklüğü

$$v_s=\sqrt{v_{sx}^{\;2}+v_{sy}^{\;2}}=\sqrt{v_0(v_0+2u\sin\Delta\theta)+2u(1-\cos\Delta\theta)}=\sqrt{v_0^{\;2}+2u^2+\frac{2u(v_0^{\;2}-u^2)}{\sqrt{v_0^{\;2}+u^2}}}$$

h) Bu hızın sayısal değeri

$$v_s=2{,}62.10^4\text{ m/s}$$

olarak bulunur.



8. Basit bir model olarak kürenin topraklandığını kabul edelim. Bu durumda küre üzerindeki potansiyel kürenin merkezinden r>R uzakta bulunan q ve kürenin merkezinden x<R uzakta bulunan q' yükün sayesinde sıfır olduğunu düşünebiliriz. Merkezden geçen eksene göre ve kürenin üzerinde bulunan noktalar için

$$0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r-R)}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(R-x)}\ ;\ 0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(r+R)}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(R+x)}$$

yazabiliriz. Buradan

$$x=\frac{R^2}{r}\ ;\ q'=-\frac{qR}{r}$$

olarak bulunur. Sistemin elektrostatik potansiyel enerjisi

$$\Pi=\frac{qq'}{4\pi\,\varepsilon_0\,(r-x)}=-\frac{q^2R}{4\pi\,\varepsilon_0(r^2-R^2)}$$

olarak bulunur. Bu aynı zamanda kürenin üzerine konulması gereken minimum pozitif yükün değerini de vermektedir. P noktasındaki potansiyel

$$\varphi(r,\theta)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+\ell^2-2r\ell\cos\theta}}-\frac{qR}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{\frac{R^4}{r^2}+\ell^2-\frac{2R^2\ell\cos\theta}{r}}}$$

olarak bulunur. Küre üzerinde oluşan yükün yüzeysel yük yoğunluğu

$$\sigma=-\varepsilon_0\left.\frac{\partial\varphi(r,\theta)}{\partial\ell}\right|_{r=R}=-\frac{q(r^2-R^2)}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^3}}$$

olarak bulunur.

9. Elektronlara etki eden ivme $a=\frac{qU}{m\ell}$ elektronların minimum ve maksimum hızları

$$v_{min}=\sqrt{v_0^{\;2}-2a\ell}=\sqrt{v_0^{\;2}-\frac{2qU}{m}}=\sqrt{(2.10^6)^2-2.1{,}759.10^{11}.0{,}5}=1{,}9555.10^6\text{ m/s}$$

$$v_{mak}=\sqrt{v_0^{\;2}+2a\ell}=\sqrt{v_0^{\;2}+\frac{2qU}{m}}=\sqrt{(2.10^6)^2+2.1{,}759.10^{11}.0{,}5}=2{,}0435.10^6\text{ m/s}$$

olarak bulunur. Bu elektronların odaklandıkları mesafe, aranan süre ve odaklama mesafesi

$$f=v_{min}t=v_{mak}(t-\frac{T}{2});\ t=\frac{v_{mak}T}{2(v_{mak}-v_{min})}=\frac{2{,}0435.10^{-9}}{2(2{,}0435-1{,}9555)}=11{,}61.10^{-9}\text{ s}$$

$$f=v_{min}t=1{,}95556.10^6.11{,}61.10^{-9}=2{,}27\text{ m}$$

faz farkı

$$\Delta\varphi=\pm\left(\frac{t}{T}-n\right).2\pi=\pm(11{,}61-11).2\pi=1{,}22\pi=220°$$

olarak bulunur.

10. a) Yüklü parçacık aynı anda uygulanmış elektrik ve manyetik alanlarda hareket edebilirler. Parçacığa etki eden kuvvet

$$\vec{F}=m\vec{a}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$$

ile verilir. Bileşenlere göre yazdığımızda

$$m\frac{dv_x}{dt}=qBv_y;\ m\frac{dv_y}{dt}=qE_y-qBv_x$$

$$m\frac{dv_z}{dt}=qE_z;\ a_z=\frac{qE_z}{m}$$

elde edilir. Buradan z ekseni boyunca parçacığın hızı zaman göre

$$v_z=\dot{z}_0+a_zt=\dot{z}_0+\frac{qE_zt}{m}$$

parçacığın hareket denkleminin z bileşeni ise

$$z=z_0+\dot{z}_0t+\frac{qE_zt^2}{2m}$$

şeklinde değişir.

b) Üstteki şıkta kuvveti için yazdığımız x ve y bileşenleri kullanabiliriz. Birinci denklemi integre edersek ve bulunan ifadeyi ikinci denkleme yerleştirirsek titreşimin denklemini elde edebiliriz

$$\ddot{y}+\omega_0^2y=\frac{qE_y}{m};\ \omega_0=\frac{qB}{m}$$

Bu denklemin genel çözümü ve hızı için

$$y=C_1\sin\omega_0t+C_2\cos\omega_0t+C_3$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=C_1\omega_0\cos\omega_0t-C_2\omega_0\sin\omega_0t$$

yazabiliriz. İlk şartlardan

$$[v_y(0)=\dot{y}_0];\ C_1=\frac{\dot{y}_0}{\omega_0};\ C_2=-C_3;\ C_3=\frac{qE_y}{m\omega_0^2}$$

olarak yazılabilir. Çözüm

$$y=\frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\sin\omega_0t+\frac{qE_y}{m\omega_0^2}(1-\cos\omega_0t)$$

olarak yazılabilir. Bu ifadenin türevi y yönündeki hızı verir

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{y}_0\cos\omega_0t+\frac{qE_y}{m\omega_0}\sin\omega_0t$$

x yönündeki denklem kuvvet denklemi

$$\frac{dv_x}{dt}=\frac{qBv_y}{m}=\omega_0\dot{y}_0\cos\omega_0t+\frac{qE_y}{m}\sin\omega_0t$$

olur. Buradan integre edilirse

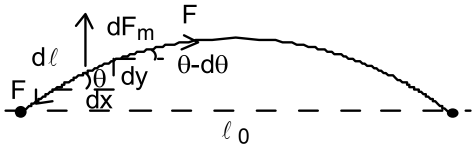
$$v_x-\dot{x}(t=0)=\frac{qBy}{m};\ v_x=\frac{E_y}{B}+\dot{y}_0\sin\omega_0t+\frac{qE_y}{m\omega_0}(1-\cos\omega_0t)$$

elde edilir. Bu ifade integre edersek

$$x=\frac{E_yt}{B}-\frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\cos\omega_0t+\frac{qE_y}{m\omega_0}\left(t-\frac{\sin\omega_0t}{\omega_0}\right)=$$

$$\frac{2E_yt}{B}-\frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\cos\omega_0t-\frac{E_y}{B\omega_0}\sin\omega_0t$$

olarak bulunur.



11. Küçük sapmalar için seçilen tel parçasının uzunluğu

$d\ell \approx dx$

bu parçaya etki eden manyetik kuvvet

$dF=IBdx$

bu tel parçasına etki eden dikey kuvvetine eşit olmalıdır.

$$F\sin\theta - F\sin(\theta-d\theta) \approx F\tan\theta - F\tan(\theta-d\theta) = Fd(\tan\theta) = IBdx$$

$$\frac{d(\tan\theta)}{dx} = \frac{IB}{F} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Bu denklemin çözümü iki kere integre edersek

$$y=\frac{IBx^2}{2F}+C_1x+C_2$$

olarak bulunur. İlk şartlardan integrasyon sabitleri

$$x=0;\ y=0;\ 0=0+0+C_2;\ C_2=0$$

$$x=\ell_0;\ y=0;\ 0=\frac{IB\ell_0^{\,2}}{2F}+C_1\ell_0;\ C_1=-\frac{IB\ell}{2F}$$

olarak bulunur. Bu durumda çözüm

$$y=\frac{IBx(x-\ell_0)}{2F}$$

olur. Seçilen küçük bir parçacığın uzunluğu ve eğim için

$$d\ell=\sqrt{dx^2+dy^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\approx dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

Bu paçanın uzaması

$$\delta(d\ell)=d\ell-dx=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{IB(2x-\ell_0)}{2F}\right)^2dx$$

olur. Telin toplam uzaması

$$\Delta\ell=\int_0^{\ell_0}\frac{1}{2}\left(\frac{IB(2x-\ell_0)}{2F}\right)^2dx=\frac{I^2B^2\ell_0^{\,3}}{24F^2}$$

olur. Gerilme kuvveti için

$$F=\frac{ES\Delta\ell}{\ell_0}=\frac{I^2B^2\ell_0^{\,2}E\pi r^2}{24F^2}$$

yazabiliriz. Buradan gerilme kuvveti

$$F=\sqrt[3]{\frac{I^2B^2\ell_0^{\,2}E\pi r^2}{24}}$$

olarak bulunur. $x=\frac{\ell}{2}$ için maksimum sapma

$$y_{mak}=\left|\frac{IBx(x-\ell)}{2F}\right|=\frac{\ell_0}{4}\sqrt[3]{\frac{3IB\ell_0}{\pi r^2E}}$$

olarak bulunur.

12. Su molekülleri arasındaki uzaklık

$$d_s=\sqrt[3]{\frac{V_{\mu s}}{N_A}}=\sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}=\sqrt[3]{\frac{18.10^{-3}}{1000.6.10^{23}}}\approx 3{,}1.10^{-10}\text{ m}$$

olarak değerlendirilebilir. Burada $V_{\mu s}$ suyun molar hacmidir. Su buharın molar hacmi için

$$PV=nRT;\ n=1;\ V_{\mu g}=\frac{RT}{P}$$

yazabiliriz. Su buharın molekülleri arasındaki uzaklık

$$d_g=\sqrt[3]{\frac{V_{\mu g}}{N_A}}=\sqrt[3]{\frac{RT}{PN_A}}=\sqrt[3]{\frac{8{,}3.373}{10^5.6.10^{23}}}\approx 3{,}7.10^{-9}\text{ m}$$

olarak değerlendirilebilir. Aranan oran

$$\frac{d_g}{d_s}=\frac{3{,}7.10^{-9}}{3{,}1.10^{-10}}\approx 12$$

olarak bulunur.

13. a) Bilinmeyen sabitleri

$$\ln\frac{P_{A1}}{P_0}=\frac{a_A}{T_{kA1}}+b_A;\ \ln 0{,}284=\frac{a_A}{313}+b_A$$

$$\ln\frac{P_{A2}}{P_0}=\frac{a_A}{T_{kA2}}+b_A;\ \ln 1{,}476=\frac{a_A}{363}+b_A$$

$$\ln\frac{P_{B1}}{P_0}=\frac{a_B}{T_{kB1}}+b_B;\ \ln 0{,}07278=\frac{a_B}{313}+b_B$$

$$\ln\frac{P_{B2}}{P_0}=\frac{a_B}{T_{kB2}}+b_B;\ \ln 0{,}6918=\frac{a_B}{363}+b_B$$

denklemlerde bulabiliriz. Buradan

$$a_A=-3748{,}49\text{ K};\ b_A=10{,}711$$
$$a_B=-5121{,}64\text{ K};\ b_B=13{,}735$$

olarak bulunur. İki sıvıda kaynama buharların basıncı dış basınca eşit olduğunda başlamaktadır. Bunun için

$$\frac{a_A}{T_{kA}}+b_A=0;\ \frac{a_B}{T_{kB}}+b_B=0$$

olmalıdır. Buradan kaynama sıcaklıkları

$$T_{kA}=349{,}95\text{ K}=77\ ^\circ\text{C}$$
$$T_{kB}=372{,}89\text{ K}=100\ ^\circ\text{C}$$

olarak bulunur.

b) Kaptaki sıvıların t° sıcaklığının t zamana göre değişimi göz önünde bulundurursak birinci bölgede iki sıvı buharlaşmadan ısınmakta olduğunu anlaşılmaktadır. Sıcaklığın artması ile iki sıvının arasındaki ayırma sınırında oluşan buhar baloncuklar yükselmeye başlamaktadır. İlk olarak bu baloncuklardaki basınç P_0 değerine ulaşmaktadır. Bu

$$P_A+P_B=P_0\ ;\ \frac{P_A}{P_0}+\frac{P_B}{P_0}=1=e^{\frac{a_A}{T}+b_A}+P_0\,e^{\frac{a_B}{T}+b_B}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemi sayısal olarak çözülebilir. Çözüm T=340 K olarak bulunur. Kısmi basınçlar

$$P_A=0{,}734P_0\ ;\ P_B=0{,}267P_0$$

olur. Bu basınçlar baloncuğun hareketinden etkilenmez. Kısmi basınçlar sabit kaldığı için baloncuklardaki sıvı buharların kütlelerin oranı sabit kalmaktadır. Sınırdaki kaynama sıvıların birisinin tamamen buharlaşması ile biter ve sonra kalan sıvı tekrar ısınmaya başlar. Kalan sıvının kaynama sıcaklığı T=373 K dir. Birinci sıvı tamamen buharlaşana kadar T sıcaklığında baloncukta bulunan sıvı buharların kütlelerin oranı

$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{P_A\mu_A}{P_B\mu_B}=8.\frac{0{,}374P_0}{0{,}267P_0}\approx 11{,}2$$

Yani A sıvısı 22 kat daha hızlı buharlaşmaktadır. Her hangi t_1 anında A sıvısı tamamen bitmiş, B sıvısından ise 9 gr buharlaşmış ve 91 gr sıvı kalmıştır.

14. Tüm moleküllerin hızlarının eşit ve u olduğunu ve belli yönde moleküllerin

$$\Delta N=\frac{n_0 S v\Delta t}{6}$$

gittiğini kabul edebiliriz Burada $n_0=\frac{N}{V}$ taneciklerin konsantrasyonu, S moleküllerin geçtikleri alan, $v=\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ moleküllerin hızı, Δt ise S alanından moleküllerin geçiş süreleridir. Bu formül cisim hareketsiz ise doğrudur. Disk hareket ettiği için diske karşı gelen ve dolayısıyla diskle çarpan moleküllerin sayısı daha büyük olur. Diskle çarpışan tanecik sayısı

$$\Delta N_1=\frac{n_0 S(u+v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Burada u diskin hızıdır. Bu moleküllerin diske göre hızları u+v, momentumları m(u+v), momentum değişimleri absorbsyon sonucu m(u+v) olur. Bu moleküllerden diske aktarılan momentum

$$\Delta p_1=\frac{n_0 S(u+v)\Delta t m(u+v)}{6}$$

olur. Diskle aynı yönde hareket eden moleküller diskle daha az sayıda çarpışma yaptıkları için, diske çarpan tanecik sayısı

$$\Delta N_2=\frac{n_0S(u-v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Bu moleküllerin diske göre hızları u-v, momentumları m(u-v), momentum değişimleri 2m(u-v) olur. Bu moleküllerden diske aktarılan momentum

$$\Delta p_2=\frac{n_0S(u-v)\Delta t2m(u-v)}{6}$$

olur. Diske aktarılan bu momentumlar eşittir

$$\frac{n_0S(u+v)\Delta tm(u+v)}{6}=\frac{n_0S(u-v)\Delta t2m(u-v)}{6}$$

Buradan

$$u^2\text{-}6uv+v^2=0;\ u=(3\text{-}2\sqrt{2})v$$

olarak bulunur.
Fotonların hızı c ve fotonların belli yönde

$$\Delta N=\frac{n_0Sc\Delta t}{6}$$

gittiğini kabul edebiliriz Burada $n_0=\frac{N}{V}$ fotonların konsantrasyonu, S fotonların geçtikleri alan, Δt ise S alanından moleküllerin geçiş süreleridir. Bu formül cisim hareketsiz ise doğrudur. Disk hareket ettiği için diske karşı gelen ve dolayısıyla diskle çarpan foton sayısı daha büyük olur. Diskle ön tarafından çarpışan foton sayısı

$$\Delta N_1=\frac{n_0S(c+v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Burada u diskin hızıdır. Diskin karşısına gelen fotonların frekansında maviye kayma gerçekleşmektedir. Bu fotonların momentumu

$$p_1=\frac{\hbar\omega_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

ve momentum değişimleri

$$\Delta p_1=p_1$$

olur. Diskin arka tarafından çarpışan foton sayısı

$$\Delta N_2=\frac{n_0S(c-v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Burada u diskin hızıdır. Diskin karşısına gelen fotonların frekansında maviye kayma gerçekleşmektedir. Bu fotonların momentumu

$$p_2=\frac{\hbar\omega_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

ve momentum değişimleri

$$\Delta p_2=2p_2$$

olur. Diske aktarılan bu momentumlar eşittir

$$\frac{n_0S(c+v)\Delta t}{6}\frac{\hbar\omega_0}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}=\frac{n_0S(c-v)\Delta t}{6}\frac{2\hbar\omega_0}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Buradan

$$v=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}c=(3\text{-}2\sqrt{2})c$$

olarak bulunur.

15. Radyoaktif bozunma yasası

$$N=N_0e^{-\lambda t}$$

şekilde yazılabilir. $N=\frac{N_0}{2}$ için bozunma sabiti

$$\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}=\frac{0,69315}{T_{1/2}}$$

olarak yazılabilir. Bozunan çekirdek sayısı t zaman sonra

$$\Delta N=N_0-N=N_0(e^{\lambda t}-1)$$

olur. Birim olarak 10^9 yıl kullanırsak

$$^{206}\Delta N={}^{238}N_0\left(e^{\frac{0,6931t}{4,5}}-1\right)={}^{238}N_0(e^{0,154t}-1)$$

$$^{207}\Delta N={}^{235}N_0\left(e^{\frac{0,6931t}{0,7}}-1\right)={}^{235}N_0(e^{0,976t}-1)$$

yazabiliriz. Verilen oranlardan bozunan çekirdeklerin oranı

$$^{206}\Delta N:{}^{207}\Delta N=(29,6-17,9)(22,6-15,5)=11,7:7,1$$

olarak bulunur. Buradan oranlarsak $^{238}N_0:{}^{238}N_0=137$ olduğunu göz önünde bulundurarak

$$\frac{11,7}{7,1}=137\left(\frac{e^{0,154t}-1}{e^{0,9762t}-1}\right)$$

elde edilir. Bu denklem sayısal olarak çözülebilir. İlk olarak 4,5 sayısal için çözüm olarak deneyebiliriz. Çözüm zaten o mertebedendir.