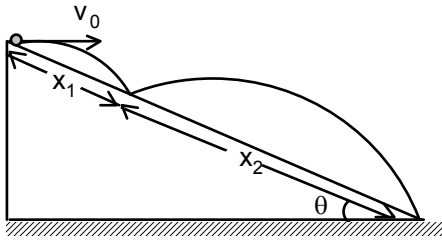


IX. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI-2002



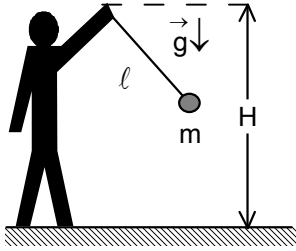
1. Bir top, yatayla θ açısı yapan bir eğik düzlemin ile tepesinden v_0 hızı ile yatay olarak atılmaktadır. Topun eğik düzleme sadece bir kez çarparak zıplaması ve sonrada da eğik düzlemin en alt ucuna düşmesi istenmektedir.

a) Top eğik düzleme ilk çarptığında bu düzlem üzerinde aldığı x_1 yolu nedir?

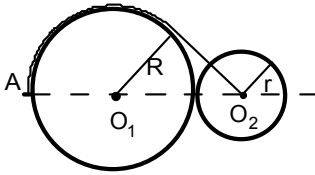
b) Top ilk zıpladığı noktadan itibaren eğik düzlem üzerinde x_2 kadar yol alarak eğik düzlemin alt ucuna ulaşmakta ise $\frac{x_2}{x_1}$ oranı nedir?

c) Cisim eğik düzlem ile birden çok çarpışma yapsaydı, art arda iki çarpışma arasında eğik düzlem üzerinde alınan yolların oranı nedir?

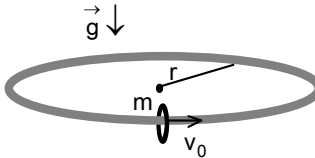
(Not: Çarpışmanın tamamen elnek olduğunu varsayınız ve havanın direncini ihmal ediniz).



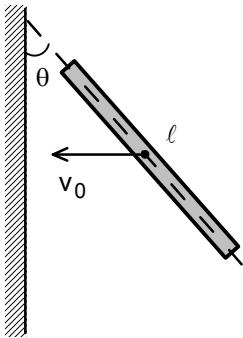
2. Kütleli ve uzunluğu belirli ve ℓ olan bir ipin ucuna bağlı bir m kütleli küçük bir top bulunmaktadır. İpin kopmadan dayanabileceği en yüksek gerilim F olarak verilmektedir. Bir çocuk topu düşey düzlemde dönme hareketi yaptırmaktadır. İp biraz daha sertçe döndürülürse ip kopar ve top fırlar. Topun yere değene kadar yatay düzlemde alacağı yolun maksimum olması için ipin boyu ne olmalıdır? Bu maksimum alınan yol nedir?



3. a) Sürtünmesiz yatay düzlemde durmakta olan ve aralarındaki sürtünme ihmal edilen temasta bulunan R ve r yarıçaplı iki disk veriliyor. Büyük yarıçaplı disk üzerinde A noktasında tutturulan ip sarılı olup ipin diğer ucu küçük yarıçaplı diskin merkezine tutturulmuştur. R yarıçaplı çaplı disk saatin ters yönünde ve açısal hızı zamanla doğrusal olarak artacak şekilde döndürülmeye başlanıyor. r yarıçaplı diskle teması kesildiği ana kadar, büyük diskin süpüreceği açı ne kadar olur?



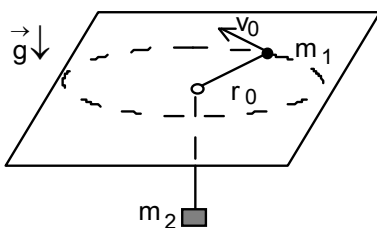
b) Yatay düzlemde havada asılı bulunan, r yarıçaplı çember şeklindeki tele m kütleli ufak bir halka geçirilmiş olup halkaya çembere teğet olarak v_0 ilk hızı veriliyor. Halka ile çember arasındaki sürtünme katsayısı f dir. Halka duruncaya kadar aldığı yol nedir?



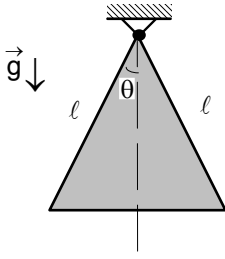
4. Yatay ve sürtünmesiz masa üzerinde uzunluğu ℓ ince homojen olan bir çubuk v_0 hızı ile dikey bir duvara doğru yaklaşmaktadır. Çubuğun eksenini dikey duvar ile θ açısı yapmaktadır. Çubuğun ucu ile dikey duvar arasında esnek çarpışma gerçekleşiyor. Çarpışma süresi çok küçük ve bu süre içinde çubuğu dönmesi ve ötelemesi ile çarpışma süresince sürtünmeler ihmal ediliyor.

a) Çarpışmadan sonra çubuğun duvardan uzaklaşma hızını ve çubuğun kütle merkezi etrafındaki açısal hızı nedir?

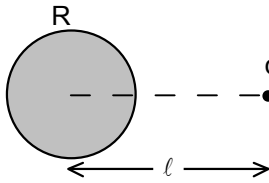
b) Hangi θ_0 açısı için çubuğun kütle merkezi öteleme hareketi yapmaz? Bu durum için çubuğun iki ucunun duvar ile çarpışmalar arasında geçen süre nedir?



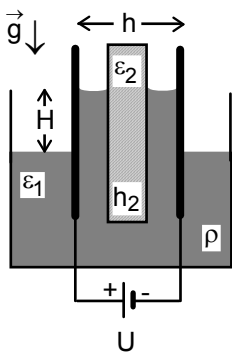
5. Yatay ve sürtünmesiz düzlemde bir ip sayesinde kütlesi m_1 olan noktasal bir cisim yarıçapı r_0 olan çember üzerinde düzgün dairesel hareket yapmaktadır. Bu m_1 kütleli cisim düzlemdeki bir delikten geçen ip ile kütlesi m_2 olan bir cisim tutturulmuştur. Bu sistemin yapacağı küçük titreşimlerin periyodu nedir?



6. Kütlesi m , kenarı ℓ , ikizkenar üçgen şeklinde olan homojen bir levha tepe noktasından asılıdır. Bu fiziksel sarkacın titreşim periyodu nedir?

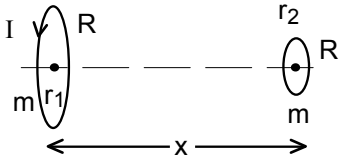


7. Şekilde görüldüğü gibi yalıtılmış iletken bir kürenin dışına q noktasal yükü konulmuştur. Kürenin yarıçapı R olup, ℓ uzaklığı R den büyüktür. Kürenin üzerinde, hiçbir yerde negatif yüzeysel yük olmaması için kürenin üzerine konulması gereken minimum pozitif yük ne olmalıdır?

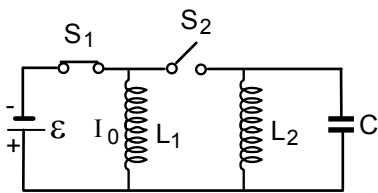


8. Özkütlesi ρ ve bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı ϵ_1 olan sıvı ile dolu bir kabın içine aralarındaki uzaklık h olan bir paralel plakalı kondansatör kısmen batırılıyor. Plakaların arasına, plakalara paralel olacak şekilde ve plakalarla aynı uzunlukta, bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı ϵ_2 ve kalınlığı h_2 olan bir dielektrik levha yerleştiriliyor. Kondansatörün plakalarına yalıtılmış kablolar vasıtası ile e.m.k. değeri \mathcal{E} olan bir üreteç bağlandığında, plakaların arasındaki sıvı seviyesinin yükseldiği gözlenmektedir. Kondansatörün içinde ve dışındaki sıvı seviyeleri arasındaki H farkını bulunuz.

Not: Yerçekimi ivmesi g veriliyor. Kılcal olaylar ihmal ediliyor.



9. Yatay eksenleri çakışık, yarıçapları r_1 ve r_2 , dirençleri R ve indüktans dirençleri ihmal edilecek kadar küçük ve kütleleri m olan iki halka arasındaki uzaklık $x \gg r$ olarak veriliyor. Sol ve sabit olan halkadan I akımı geçmektedir. Sol halka ise eksen üzerinde sürtünmesiz olarak hareket edebilmektedir. Sağ levha serbest bırakılıyor. İki halka arasındaki uzaklık yarıya düştüğünde sağ halkanın hızı ne kadar olur?



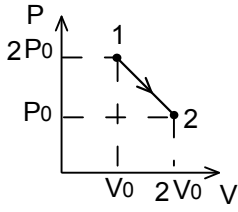
10. Bir L_1 - L_2 - C ve üreteçten şekildedeki gibi oluşan devrede S_1 anahtarı kapalı, S_2 anahtarı açıktır. L_1 indüktanstaki akım I_0 değerinde iken S_1 anahtarını açılmakta, S_2 anahtarını ise kapatılmaktadır. Kondansatör üzerinde oluşabilecek maksimum potansiyel fark nedir? Her indüktansta akabilecek maksimum akımlar nedir?

11. Her ikisi de 2 mm kalınlığında bronz ve nikel plakalar sıvı azotla soğutulup ($T=77$ K) nikel plakaya matkapla dairesel bir delik açılıyor ve buraya bronz parça, tıpa gibi yerleştiriliyor. Nikel disk şeklinde olup dış çapı 28 mm, merkezine açılan deliğin çapı ise 12 mm dir. Bronz bu sıcaklıkta nikel deliğe tam oturmaktadır.

a) Oda sıcaklığında ($T=293$ K) iki metal arasındaki basıncı yaklaşık olarak bulunuz. Deliğin genişlemesinin, plakanın geri kalan kısmının ki ile aynı oranda olduğunu varsayınız.

b) Bu içi bronz dolu nikel diskin oda sıcaklığındaki toplam kütleini bulunuz.

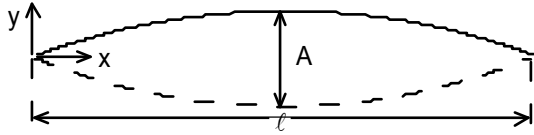
Not: Bronz ve nikelin genleşme katsayıları $\lambda_b=19 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\lambda_{Ni}=11 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, oda sıcaklığındaki yoğunlukları $\rho_b=8,87 \text{ g/cm}^3$ ve $\rho_{Ni}=8,85 \text{ g/cm}^3$, Young modülleri $E_b=9,1 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ ve $E_{Ni}=19 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^{-2}$ olarak verilmektedir.



12. Adyabatik katsayısı γ olan bir ideal gaz ile P-V diyagramında koordinatları $(2P_0, V_0)$ ve $(P_0, 2V_0)$ olan 1. ve 2. noktalar arasında doğrusal bir proses gerçekleştirmektedir. Aynı proses adyabatik katsayısı γ olan reel bir gaz ile gerçekleştirilmektedir. Reel gazlardaki Van der Waals denklemi bir mol için

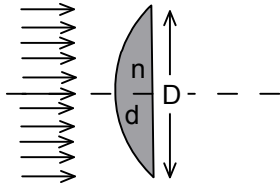
$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

şeklinde yazılabilir. Burada a sabiti moleküller arasındaki etkileşmeyi, b sabiti ise moleküllerin hacimleri ile ilgilidir. Bazı durumlarda reel gazlarda $a \approx 0$ olarak kabul edilebilir. Bu süreçte gerçekleşen maksimum sıcaklık ideal gaz ile gerçekleşen sıcaklıktan ne kadar farklıdır? b'nin değeri çok çok küçük olduğunu kabul edebiliriz. Reel gazın hacme bağlı $c(V)$ molar ısı sığası nedir?

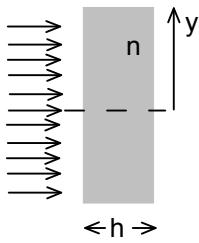


13. $B=1,5$ T olan düzgün bir manyetik alanı içinde bir gitar teli duran dalga oluşturacak şekilde titreşim hareketi yapmaktadır. Gitar telin boyu $l=66$ cm, çapı $D=0,23$ mm, ısı iletkenliği $\chi=80$ W/mK, ısı kapasitesi $c=500$ J/kg.K, çizgisel kütle yoğunluğu $\mu=0,3$ gr/m,

öz direnci $\rho=12 \mu\Omega$.cm olarak veriliyor. Gitar teli en düşük doğal $\nu=330$ Hz salınım frekansında $A=1$ mm genlik ile titreşmekte olup, telin iki ucu $t_0=21$ °C sabit sıcaklıktaki tutuculara bağlıdır. Telde oluşacak ısı tel boyunca telin uçlarından dışarı çıkabilir. Telden ısı açığa çıkması ile ilgili zaman skalası (süre), telin titreşim periyoduna göre çok uzundur. Telde oluşabilecek sıcaklık ne kadardır? Bu yerde gitar çalmaya kalkarsanız ne olur? Yeryüzündeki manyetik alan $B_D=5 \cdot 10^{-5}$ T olan yerde gitar çalınırsa cevap nasıl değişir?



14. a) Bir yüzü düzlem, diğer yüzü küresel olan bir merceğin çapı $D=50$ mm ve ortadaki kalınlığı $d=5$ mm olarak veriliyor. Merceğin yapıldığı maddenin kırıcılık indisi $n=1,66$ ise, küresel yüzeye sonsuzdan gelen bir ışık demetindeki merceğin ortasından geçen dalga yüzeyi ile aynı dalga yüzeyinin merceğin en uç noktasından geçen kısmı arasında ne kadar zaman farkı olur? Bu merceğin odak uzaklığı nedir?

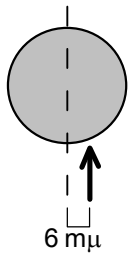


b) Camın kırıcılık indisinin ışık şiddetine $n=n_1+n_2J$ ifadesi ile bağlı olduğunun varsa-yalım. Burada $n_1=1,5$ normal şiddetteki ışık için olan kırıcılık indisi, J W/cm² cinsinden ışık şiddeti ve $n_2=5 \cdot 10^{-15}$ cm²/W dir. Kalınlığı $h=10$ cm olan bir paralel cam blok üzerine gelen düzlem ışık dalgasının ışık şiddeti her noktasında aynı olmayıp bloğun ortasından geçen eksenenden y uzaklığına bağlı olarak

$$J(\text{W/cm}^2)=2 \cdot 10^{15}(\sqrt{10^6 - y^2} - b); y \leq 2,5 \text{ cm}; b=\sqrt{10^6 - 2,5^2} = 999,996875$$

$$J(\text{W/cm}^2)=0: y' \text{ in diğer değerleri için.}$$

şekilde değişmektedir. Bu ışık demetinin cam bloktan geçtikten sonra nerede odaklanır.



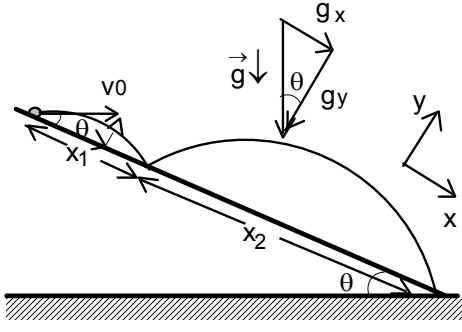
15. Çapı $25 \mu\text{m}$, kırıcılık indisi $n=1,4$ olan bir plastik küre vardır. Lazer ışığı birkaç mikrometre çaplı bir demet olarak bu küre üzerine odaklanmıştır. (Bu ışık demetinin çapını ihmal ederek tek bir ışın gibi düşünebiliriz). Işın plastik küre yüzeyine eksenenden $6 \mu\text{m}$ uzakta ve dik olarak gelmektedir.

a) Işının küreden geçtikten sonra geliş doğrultusuna göre ne kadar saptığını ve $\lambda=530$ nm lik fotonun momentumundaki değişikliği bulunuz.

b) Lazerin gücü 1 W ise, demetteki tüm fotonların momentumunun değiştiğini varsayarsak, bu olaydan ötürü küre üzerine etki eden net kuvvet ne kadardır? (Kürenin hareket etmediğini kabul ediniz)

16. A yere göre v rölativistik hızıyla sağa doğru, B ise aynı hızla sola doğru birbirine çok yakın ve paralel doğrular üzerinde hareket etmektedir. Yerden ölçülmek üzere A ile B arasında l kadar uzaklık olduğunda A el sallar. B de A ile aynı anda (B den gözlenmek üzere) el sallar. Sonra A, B ile aynı anda (A dan gözlenmek üzere) el sallar. Ve bu böyle devam eder. Yerdeki gözlemciye göre A n'inci defa el salladığında A ve B arasında ne kadar uzaklık vardır?

X. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2002



1. a) Eğik düzleme paralel ve dik olan koordinat eksenleriyle çalışırsak ilk hızı ve yerçekimi ivmesi için

$$v_{0x}=v_0\cos\theta; v_{0y}=v_0\sin\theta$$

$$g_x=g\sin\theta; g_y=g\cos\theta$$

yazabiliriz. Buna göre hız denklemleri

$$v_{1x}=v_{0x}+g_x t_\zeta$$

$$v_{1y}=v_{0y}-g_y t_\zeta$$

olarak yazılabilir. Yörüngenin en yüksek noktasında $v_{1y}=0$ olur. Cismin yükselme süresi

$$t_\zeta = \frac{v_0 \tan \theta}{g}$$

olur. Cisim y eksenine göre eğik düzleme $2t_\zeta$ süre sonra aynı hız ile çarpmaktadır. Bu eksene göre ilk çarpmadan sonraki hız

$$v_{1y}=v_{0y}-g_y 2t_\zeta = v_0 \sin \theta - 2g \cos \theta \frac{v_0 \tan \theta}{g} = -v_0 \sin \theta$$

olur. Teğet eksene göre cismin ilk çarpmadan sonraki hızı

$$v_{1x}=v_{0x}+g_x 2t_\zeta = v_0 \cos \theta + 2g \sin \theta \frac{v_0 \tan \theta}{g} = \frac{v_0 (1 + \sin^2 \theta)}{g \cos \theta}$$

teğet eksene göre birinci ve ikinci çarpışmalar arasında alınan yol

$$x_1 = v_{0x} 2t_\zeta + \frac{g_x (2t_\zeta)^2}{2} = v_0 \cos \theta \cdot 2 \frac{v_0 \tan \theta}{g} + \frac{1}{2} g \sin \theta \left(\frac{v_0 \tan \theta}{g} \right)^2 = \frac{2v_0^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

olur. Teğet eksene göre cismin ikinci çarpmadan sonraki hızı

$$v_{2x} = v_{1x} + g_x 2t_\zeta = \frac{v_0 (1 + \sin^2 \theta)}{g \cos \theta} + 2g \sin \theta \frac{v_0 \tan \theta}{g} = \frac{v_0 (1 + 3 \sin^2 \theta)}{g \cos \theta}$$

teğet eksene göre ikinci ile üçüncü çarpışma arasında alınan yol

$$\begin{aligned} x_2 &= v_{1x} 2t_\zeta + \frac{g_x (2t_\zeta)^2}{2} = \frac{v_0 (1 + \sin^2 \theta)}{g \cos \theta} \cdot 2 \frac{v_0 \tan \theta}{g} + \frac{1}{2} \frac{v_0 \tan \theta}{g} \left(\frac{v_0 \tan \theta}{g} \right)^2 = \\ &= \frac{2v_0^2 \sin \theta (1 + 2 \sin^2 \theta)}{g \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{x_2}{x_1} = 1 + 2 \sin^2 \theta$$

oranı nedir?

c) Üçüncü ile dördüncü çarpışma arasında alınan yol

$$\begin{aligned} x_3 &= v_{2x} 2t_\zeta + \frac{g_x (2t_\zeta)^2}{2} = \frac{v_0 (1 + 3 \sin^2 \theta)}{g \cos \theta} \cdot 2 \frac{v_0 \tan \theta}{g} + \frac{1}{2} g \sin \theta \left(\frac{v_0 \tan \theta}{g} \right)^2 = \\ &= \frac{2v_0^2 \sin \theta (1 + 4 \sin^2 \theta)}{g \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

olur. Alınan yolların oranı

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots : x_n = 1 : 1 + 2 \sin^2 \theta : 1 + 4 \sin^2 \theta : \dots : 1 + 2(n-1) \sin^2 \theta$$

olarak bulunur.

$$\frac{rg}{2} \ln \left(\frac{v_0^2}{rg} + \sqrt{1 + \left(\frac{v_0^2}{rg} \right)^2} \right) = fg\ell; \ell = \frac{r}{2f} \ln \left(\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + r^2 g^2}}{rg} \right)$$

olarak bulunur. Bu sorunun çözümünde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

integrali çözümü gereklidir. İntegralde $x=\tan z$ dönüşümünü kullanabiliriz. Türevlersek

$$dx = \frac{dz}{\cos^2 z}$$

bulabiliriz. Buradan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dz}{\cos^2 z \sqrt{1+\tan^2 z}} = \int \frac{dz}{\cos z} = \int \frac{\cos z \cdot dz}{\cos^2 z} = \int \frac{d(\sin z)}{1-\sin^2 z}$$

olarak yazılabilir. Burada $\sin z = u$ dönüşümü kullanarak sonuca varırız.

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{1-u^2} &= \int \frac{(1-u+1+u) du}{2(1-u^2)} = \int \frac{du}{2(1+u)} + \int \frac{du}{2(1-u)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin z}{1-\sin z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}}}{1-\frac{\tan z}{\sqrt{1+\tan^2 z}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)} = \ln(\sqrt{1+x^2}+x) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4. a) Çarpışma süresince momentum değişimi

$$\Delta p = mv - (-mv_0) = \int F \, dt$$

olur. Burada $F(t)$ dikey duvardan meydana gelen tepki kuvvetidir. Bu kuvvetin oluşturduğu moment

$$M(t) = F(t) \frac{\ell \cos \theta}{2}$$

bu momentin momentum değişimi

$$\Delta L = \int M \, dt = \frac{\ell \cos \theta}{2} \int F \, dt$$

olur. Buradan

$$\frac{m\ell^2 \omega}{12} = \frac{m(v+v_0)\ell \cos \theta}{2}; v+v_0 = \frac{\ell \omega}{6 \cos \theta}$$

elde edilir. Çarpışma esnek olduğu için enerji korunumu yasası yazılabilir.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{m\ell^2}{12} \right) \omega^2 + \frac{mv^2}{2}$$

Buradan

$$\begin{aligned} v_0^2 - v^2 &= \frac{\ell^2 \omega^2}{12}, v_0 - v = \frac{\ell \omega \cos \theta}{2} \\ v &= v_0 \frac{1-3\cos^2 \theta}{1+3\cos^2 \theta}; \omega = \frac{12v_0 \cos \theta}{\ell(1+3\cos^2 \theta)} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

b) Çubuğun öteleme hareketi yapmaması için $v=0$ olmalıdır. Buradan aranan açı

$$\theta_0 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ve iki çarpışma arasındaki süre

$$t = \frac{2\theta_0}{\omega} = \frac{\sqrt{3} \ell \theta_0}{3v_0}$$

olarak bulunur.

5. Ana yörünge için

$$\frac{m_1 v_0^2}{r_0} = m_2 g$$

yazabiliriz. Açısal momentumu korunumu yasası

$$m_1 v_0 r_0 = m_1 v r$$

olarak yazılabilir. Birinci cisim ana yörünge etrafında küçük titreşimler yapmaktadır. Bu durumda

$$m_1 \ddot{r} = \frac{m_1 v^2}{r} - T$$

$$m_2 \ddot{r} = T - m_2 g$$

yazabiliriz. Titreşimler küçük ise

$$r = r_0 + x$$

$$\ddot{r} = \ddot{x}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{r} &= (m_1 + m_2) \ddot{x} = \frac{m_1 v^2}{r} - \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{r^3} - \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{r_0^3 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)} - \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = \\ &= \frac{m_1 v_0^2}{r_0 \left(1 + \frac{3x}{r_0}\right)} - \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{r_0} \left(1 - \frac{3x}{r_0}\right) - \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = -\frac{3m_1 v_0^2}{r_0^2} x \end{aligned}$$

elde edilir. Titreşim denklemini

$$\ddot{x} + \frac{3m_1 v_0^2}{(m_1 + m_2) r_0^2} x = 0$$

olarak yazılabilir. Titreşim açısal frekansı ve titreşim periyodu

$$\Omega = \sqrt{\frac{3m_1 v_0^2}{(m_1 + m_2) r_0^2}} ; T = \frac{2\pi r_0}{v_0} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{3m_1}}$$

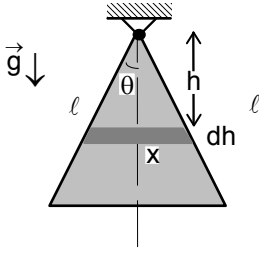
olarak bulunur. Enerji korunumu yasasından

$$\begin{aligned} W &= K + \Pi = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{2r^2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \\ &= \frac{m_1 v_0^2 r_0^2}{2r_0^2 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \frac{m_1 v_0^2}{2} \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^{-2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \\ &= \frac{m_1 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{2x}{r_0} + \frac{3x^2}{r_0^2}\right) + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \\ &= \frac{m_1 v_0^2}{2} - \frac{m_1 v_0^2 x}{r_0} + \frac{3m_1 v_0^2 x^2}{2r_0^2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + m_2 g x = \frac{m_1 v_0^2}{2} + \frac{3m_1 v_0^2 x^2}{r_0^2} + \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\Omega = \sqrt{\frac{3m_1 v_0^2}{(m_1 + m_2) r_0^2}} ; T = \frac{2\pi r_0}{v_0} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{3m_1}}$$

aynı sonuç çıkar. Enerji yönteminde sabit terimlerin titreşim periyodunda katkıları yoktur.



6. Üçgen levhanın tepe noktasına göre eylemsizlik momentini bulmak için tepeden h uzakta bulunan

$$x=2htg\theta$$

uzunlukta ve dh kalınlıkta ince çubuk şeklinde olan bir levha parçası seçelim. Bu parçanın toplam eylemsizlik momenti

$$dJ=\frac{dmx^2}{12}+dmh^2$$

olur. Burada

$$dm=\mu dS$$

seçilen parçanın kütlesi

$$\mu dS$$

birim alana düşen kütle

$$\mu=\frac{m}{S}=\frac{m}{\frac{2l\sin\theta\cdot l\cos\theta}{2}}=\frac{m}{l^2\sin\theta\cos\theta}$$

elementer alan

$$dS=x dh$$

olur. Toplam eylemsizlik momenti

$$J=\int_0^{l\cos\theta}\left(\frac{2m(2htg\theta)^3 dh}{12l^2\sin\theta\cos\theta}+\frac{2mh^3tg\theta dh}{l^2\sin\theta\cos\theta}\right)=\frac{m(3+tg^2\theta)l^2}{6(1+tg^2\theta)}$$

olarak bulunur. Sistemin titreşim periyodunu bulmak için fiziksel sarkaç formülünü kullanabiliriz.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx_m}}$$

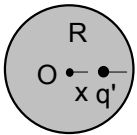
Burada J sistemin toplam eylemsizlik momenti, m sistemin kütlesi,

$$x_m=\frac{2H}{3}=\frac{2l\cos\theta}{3}$$

ise levhanın asılma noktası ile sistemin kütle merkezi arasındaki uzaklıktır. Buradan

$$T=\pi\sqrt{\frac{l(1+2\cos^2\theta)}{g\cos\theta}}$$

olarak bulunur.



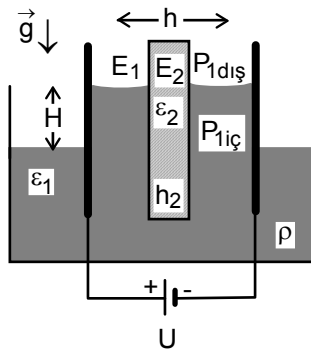
7. Basit bir model olarak kürenin topraklandığını kabul edelim. Bu durumda küre üzerindeki potansiyel kürenin merkezinden $r>R$ uzakta bulunan q ve kürenin merkezinden $x<R$ uzakta bulunan q' yükün sayesinde sıfır olduğunu düşünebiliriz. Merkezden geçen eksene göre ve kürenin üzerinde bulunan noktalar için

$$0=\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-R)}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R-x)}; 0=\frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+R)}+\frac{q'}{4\pi\epsilon_0(R+x)}$$

yazabiliriz. Buradan

$$x=\frac{R^2}{r}; q'=-\frac{qR}{r}$$

olarak bulunur.



8. Dielektrik özellikleri farklı olan maddelerde deplasman vektörü sabittir.

$$D=\epsilon_0\epsilon_1E_1=\epsilon_0\epsilon_2E_2$$

$$\epsilon_1E_1=\epsilon_2E_2$$

$$E_2=\frac{\epsilon_1E_1}{\epsilon_2}$$

İki plaka arasına uygulanan potansiyel farkı

$$U=E_1h_1+E_2h_2=E_1h_1+\frac{\epsilon_1E_1h_2}{\epsilon_2}$$

$$U=U_1+\frac{\epsilon_1U_1h_2}{\epsilon_2h_1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$E_1=\frac{\epsilon_2U}{\epsilon_1h_2+\epsilon_2h_1}=\frac{\epsilon_2U}{\epsilon_2h+(\epsilon_1-\epsilon_2)h_2}; U_1=\frac{\epsilon_2h_1U}{\epsilon_1h_2+\epsilon_2(h-h_2)}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$h_1 = h - h_2$$

alınmıştır. Sıvı içinde ve dışında birim hacme düşen enerji aynı zamanda basıncı vermektedir.

$$P_{1iç} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 E_1^2}{2}; P_{1dış} = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2}$$

Sıvı dengede ise

$$P_{1iç} - P_{1dış} = \rho g H; \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 E_1^2}{2} - \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} = \rho g H$$

şartı yazabiliriz. Buradan

$$H = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - 1)}{2 \rho g} \left(\frac{\epsilon_2 U}{\epsilon_1 h_2 + \epsilon_2 (h - h_2)} \right)^2$$

olarak bulunur. Aynı sonuca potansiyel enerjinin değişimini hesaplayarak varabiliriz. Potansiyel enerji

$$\Pi = \frac{C_1 U_1^2}{2}; C_1 = \frac{\epsilon_0 \ell (\ell - H)}{h_1} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \ell H}{h_1}$$

olarak yazılabilir. Dielektrik plakanın bulunduğu kısmın potansiyel enerjisinin değişimi, bu kısma sıvı girmediğinden dolayı bulunması gerekmiyor. Sıvıya etki eden kuvvet

$$F = - \frac{d\Pi}{dH} = - \frac{dC_1}{dH} \frac{U_1^2}{2} = - \frac{\epsilon_0 (\epsilon_1 - 1) \ell}{2 \rho h_1} \left(\frac{\epsilon_2 U h_1}{\epsilon_1 h_2 + \epsilon_2 (h - h_2)} \right)^2$$

Bu kuvvet ağırlık kuvvetine eşit olmalıdır.

$$F = mg = \rho g H \ell h_1$$

Buradan aynı sonuç çıkar.

9. Sol makarada akan akım x mesafesinde

$$B_1 = \frac{2\mu_0 p_{m1}}{4\pi x^3} = \frac{2\mu_0 I \pi r_1^2}{4\pi x^3}$$

manyetik alan yaratmaktadır. Hareket eden sağ halkada indüksiyon e.m.k.'sı oluşur

$$\mathcal{E}_{in} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - \frac{d(B_1 \cdot \vec{S}_2)}{dt} = - \frac{dB_1}{dx} \frac{dx}{dt} S_2 = \frac{3\mu_0 I \pi^2 r_1^2 r_2^2 v}{2\pi x^4}$$

Bu halkada akan akım

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_{in}}{R} = \frac{3\mu_0 I \pi^2 r_1^2 r_2^2 v}{2\pi x^4 R}$$

ve halkada oluşan manyetik dipol momenti

$$p_{m2} = I_2 S_2 = \frac{3\mu_0 I \pi^3 r_1^2 r_2^4 v}{2\pi x^4 R}$$

olur. Gradianti olan manyetik alanlarda dipole etki eden manyetik kuvvet

$$F_m = p_{m2} \frac{\partial B_1}{\partial x} = - \frac{9\mu_0^2 I^2 \pi^2 r_1^4 r_2^4 v}{4R x^8}$$

ile verilir. Dipolün hareket denklemi

$$ma = m \ddot{x} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = - \frac{9\mu_0^2 I^2 \pi^2 r_1^4 r_2^4 v}{4R x^8}$$

ile verilir. Hızı sadeleştirdikten sonra integrasyon sonucu

$$\int_0^v dv = - \int_x^{0.5x} \frac{9\mu_0^2 I^2 \pi^2 r_1^4 r_2^4 dx}{4R x^8}$$

hız

$$v = \frac{9\mu_0^2 I^2 \pi^2 r_1^4 r_2^4}{28R x^7} \Big|_x^{0.5x} = \frac{127.9\mu_0^2 I^2 \pi^2 r_1^4 r_2^4}{28R x^7}$$

olarak bulunur.

10. Manyetik akının korunması sonucu

$$L_1 I_0 = L_1 I_1 + L_2 I_2$$

yazabiliriz. Kondansatör üzerindeki potansiyel farkın maksimum olabilmesi için kondansatöre daha çok yük gitmemesi gerekir. Bu durumda

$$I_1 = I_2 = I$$

olmalıdır. Enerji korunumu yasasından

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{C U_m^2}{2}$$

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C(L_1 + L_2)}}$$

olarak bulunur. Her indüktansta maksimum akım akması için kondansatör üzerindeki potansiyel fark sıfır olmalıdır. Manyetik akının korunması sonucu

$$L_1 I_0 = L_1 I_{1m} + L_2 I_{2m}$$

yazabiliriz. Enerji korunumu yasasından

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{L_1 I_{1m}^2}{2} + \frac{L_2 I_{2m}^2}{2}$$

$$I_{1m} = \frac{2L_2 I_0}{L_1 + L_2}; I_{2m} = \frac{2L_1 I_0}{L_1 + L_2}$$

olarak bulunur.

11. a) Bir yayın yaydaki kuvvet için

$$F = \frac{ES\Delta\ell}{\ell_0}$$

uzama için

$$\Delta\ell = \ell_0 \lambda \Delta t^\circ$$

yazabiliriz. İki maddenin genişmesini seri bağlı yayın sıkışması gibi modelleyebiliriz. Eşdeğer yay

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_b} + \frac{1}{k_{Ni}}; k = \frac{k_b k_{Ni}}{k_b + k_{Ni}} = \frac{E_b E_{Ni} S}{(E_b + E_{Ni}) r_0}$$

bu yayın toplam uzaması

$$\Delta r = \Delta r_b - \Delta r_{Ni} = (\lambda_b - \lambda_{Ni}) r_0 \Delta t^\circ$$

ve basınç bu durumda

$$P = \frac{F}{S} = \frac{E_b E_{Ni} (\lambda_b - \lambda_{Ni}) \Delta t^\circ}{E_b + E_{Ni}} = \frac{19 \cdot 10^{10} \cdot 9,1 \cdot 10^{10} (19 \cdot 10^{-6} - 11 \cdot 10^{-6}) (293 - 77)}{19 \cdot 10^{10} + 9,1 \cdot 10^{10}} = 1050 \text{ atm}$$

olarak bulunur.

b) Metal kısımların ilk hacimleri

$$V_{ob} = \pi r_b^2 h = 3,14 \cdot 6^2 \cdot 2 = 226,08 \text{ mm}^3$$

$$V_{0Ni} = \pi r_{Ni}^2 h - \pi r_b^2 h = 3,14 \cdot 14^2 \cdot 2 - 3,14 \cdot 6^2 \cdot 2 = 1004,8 \text{ mm}^3$$

olur. Bu metal kısımların hacim artışları

$$\Delta V_b = V_{ob} \cdot 3\lambda_b \Delta t^\circ = 226,08 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 10^{-6} \cdot (293 - 77) = 2,78 \text{ mm}^3$$

$$\Delta V_{Ni} = V_{0Ni} \cdot 3\lambda_{Ni} \Delta t^\circ = 1004,8 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 10^{-6} \cdot (293 - 77) = 7,16 \text{ mm}^3$$

olur. Bu metal kısımların son hacimleri

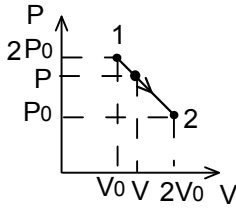
$$V_b = V_{ob} + \Delta V_b = 226,08 + 2,78 = 228,86 \text{ mm}^3$$

$$\Delta V_{Ni} = V_{0Ni} + \Delta V_{Ni} = 1004,8 + 7,16 = 1011,96 \text{ mm}^3$$

olur. Tüm parçanın kütlesi

$$m = \rho_b V_b + \rho_{Ni} V_{Ni} = 8,87 \cdot 228,86 \cdot 10^{-3} + 8,85 \cdot 1011,96 \cdot 10^{-3} \approx 11 \text{ gr}$$

olarak bulunur.



12. Verilen doğru üzerinde (P,V) bir noktanın koordinatları olsun. Bu durumda basınç için

$$\frac{2P_0 - P}{P - P_0} = \frac{V - V_0}{2V_0 - V}; P = P_0 \left(3 - \frac{V}{V_0} \right)$$

yazabiliriz. Aradığımız noktalar için gaz denklemini yazabiliriz.

$$PV = RT = 3P_0V - \frac{P_0V^2}{V_0} = RT; P_0 \left(3 - \frac{2V}{V_0} \right) dV = RdT$$

Bu proseste maksimum sıcaklığını bulmak için $dT=0$ şartından

$$V_{m1} = \frac{3V_0}{2}; P_{m1} = \frac{3P_0}{2}$$

ve gazın maksimum sıcaklığı

$$T_{m1} = \frac{9P_0V_0}{4R}$$

olarak bulunur.

b) Reel gaz için gaz denkleminde

$$P(V-b) = RT; P_0 \left(3 - \frac{V}{V_0} \right) (V-b) = RT; dV = \frac{RdT}{3 - \frac{2V}{V_0} - \frac{b}{V_0}}$$

hacme bağlı molar ısı kapasitesi

$$dQ = PdV + c_v dT = P_0 \left(3 - \frac{V}{V_0} \right) \frac{RdT}{P_0 \left(3 - \frac{2V}{V_0} - \frac{b}{V_0} \right)} + \frac{R}{\gamma - 1} = R \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{3V_0 - V}{3V_0 - 2V - b} \right) dT$$

$$c(V) = \frac{dQ}{dT} = R \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{3V_0 - V}{3V_0 - 2V} \right)$$

olarak bulunur. Bu proseste maksimum sıcaklığını bulmak için $dT=0$ şartından

$$V_{m2} = \frac{V_0}{2} \left(3 + \frac{b}{V_0} \right); P_{m2} = \frac{P_0}{2} \left(3 - \frac{b}{V_0} \right)$$

ve gazın maksimum sıcaklığı

$$T_{m2} = \frac{P_{m2}(V_{m2} - b)}{R} = \frac{\left[\frac{V_0}{2} \left(3 + \frac{b}{V_0} \right) - b \right] \frac{P_0}{2} \left(3 - \frac{b}{V_0} \right)}{R} = \frac{9P_0V_0}{4R} \left(1 - \frac{b}{3V_0} \right)^2 \approx \frac{9P_0V_0}{4R} \left(1 - \frac{2b}{3V_0} \right)$$

ve aradığımız fark

$$\Delta T = T_{m1} - T_{m2} = \frac{3P_0b}{2R}$$

olarak bulunur.

13. Tel sinüzoidal hareket yapmaktadır. Bu hareketi modelleyebiliriz. Bunun için tel düz halde yukarı aşağı hareket ettiğini varsayabiliriz. Özellikle titreşimin genliği telin boyundan çok çok küçük olduğu için model daha iyi çalışır. Oluşan indükte edilmiş e.m.k. nın maksimum değeri

$$\varepsilon_{\text{mak}} = -B\ell v = -B\ell \frac{2}{T} = -2B\ell Av$$

zamana göre değişimi

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{mak}} \sin 2\pi vt$$

bu e.m.k. sayesinde açığa çıkan güç

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{4B^2 \ell^2 A^2 v^2 \langle \sin^2 2\pi vt \rangle}{\frac{\rho \ell}{S}} = \frac{4B^2 \ell SA^2 v^2}{\rho} \frac{1}{2} = \frac{2B^2 \ell SA^2 v^2}{\rho}$$

olarak değerlendirilir. Açığa çıkan ısı iletkenliğin sayesinde tel boyunca iletildiğini kabul edelim. Telin ortasının hızı en büyük olduğu için buradaki sıcaklık da en büyük olduğunu varsayabiliriz. Bundan dolayı ısının telin ortasından uçlara doğru yayıldığını kabul edebiliriz. Telin ortası ile uçları arasındaki sıcaklık farkı

$$P = \chi S \frac{\Delta T}{\Delta x} = \chi S \frac{\Delta T}{\frac{\ell}{2}} = 2\chi S \frac{\Delta T}{\ell}$$

$$\Delta T = \frac{P\ell}{2\chi S} = \frac{B^2 \ell^2 A^2 v^2}{\rho \chi} = \frac{2.1,5^2 \cdot (0,66)^2 \cdot (0,001)^2 \cdot 330^2}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 80} = 5560 \text{ K}$$

telin ortasındaki sıcaklık

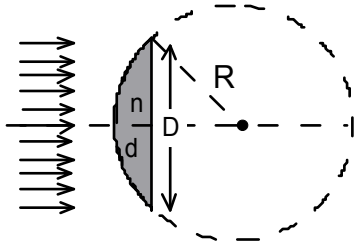
$$T = T_0 + \Delta T = 273 + 21 + 5560 = 5854 \text{ K}$$

olarak bulunur. Bu durumda gitar çalmak çok risklidir. Dünyanın manyetik alanı içinde gitar telinin sıcaklık farkı

$$\Delta T_D = \frac{B_D^2 \ell^2 A^2 v^2}{\rho \chi} = \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (0,66)^2 \cdot (0,001)^2 \cdot 330^2}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-2} \cdot 80} = 0,000024 \text{ K}$$

olur. Bu durumda gitar çalmak tamamen güvenlidir.

4. a) Zaman farkı



$$t_1 = \frac{d}{c} = \frac{nd}{c} = \frac{1,66 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} = 2,77 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

$$t_2 = \frac{d}{c} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^8} = 1,67 \cdot 10^{-11} \text{ s}$$

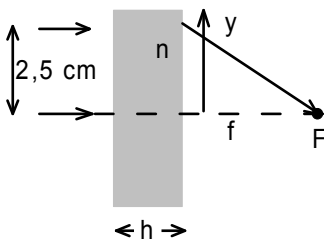
$$\Delta t = t_1 - t_2 = 1,1 \cdot 10^{-11} \text{ s} = 11 \text{ ps}$$

olarak bulunur. Merceğin eğrilik yarıçapı ve odak uzaklığı

$$R^2 = (R-d)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2; R = \frac{D^2 + 4d}{8d} = 63 \text{ mm}$$

$$f = \frac{R}{n-1} = \frac{63}{1,66-1} = 95,4 \text{ mm}$$

olarak bulunur.



b) Cam bloğun eksenini üzerindeki kırıcılık indisi $y=0$ için

$$n_0 = 1,5 + 5 \cdot 10^{-15} \cdot 10^{15} (10^3 - 999,996875) = 1,50156$$

$y=2,5 \text{ cm}$ için

$$n_{2,5} = 1,5$$

Fermat prensibinden

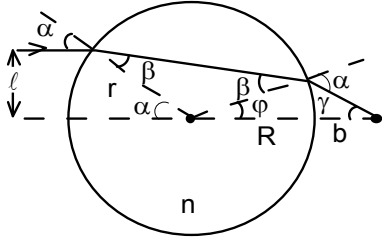
$$n_{2,5} \cdot h + \sqrt{2,5^2 + f^2} = n_0 h + f$$

$$1,5 \cdot 10 + \sqrt{2,5^2 + f^2} = 1,50156 \cdot 10 + f$$

$$f \sqrt{1 + \frac{6,25}{f^2}} = 0,0156 + f; f + \left(1 + \frac{6,25}{2f^2}\right) = 0,0156 + f$$

$$f = \frac{3,125}{0,0156} = 200 \text{ cm}$$

olarak bulunur.



15. a) Işın birinci küresel yüzeye düştüğünde kırılıyor. Bu durumda

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$$

yazılabilir. Küçük açılar için

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha = \frac{l}{r} = 0,12 \text{ rad}$$

$$\sin \beta \approx \tan \beta \approx \beta$$

yaklaşımını kullanabiliriz. Buradan

$$\alpha = n\beta; 0,12 = 1,4\beta; \beta = 0,085 \text{ rad}$$

olarak bulunur. Işın ikinci küresel yüzeye düştüğünde β açısı ile gelip α açısı ile kırılıyor. Sinüs teoreminden

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{r + b} = \frac{\sin \gamma}{r}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\gamma = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \varphi = \alpha - [180^\circ - (180^\circ - \alpha - 2\beta)] =$$

$$2(n-1)\beta = \frac{2(n-1)\alpha}{n} = 0,068 \text{ rad}$$

olarak yazılabilir. Fotonun eksen boyunca momentum değişimi

$$\Delta p_x = p(1 - \cos \gamma)$$

fotonun eksene dik olan momentum değişimi

$$\Delta p_y = p \sin \gamma$$

momentum değişimi

$$\Delta p = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2} = p \sqrt{2(1 - \cos \gamma)} = 2p \sin \frac{\gamma}{2} \approx p\gamma =$$

$$= \frac{2\pi\hbar\gamma}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar\gamma}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 0,068}{530 \cdot 10^{-9}} = 85 \cdot 10^{-30} \text{ kg.m/s}$$

olarak bulunur.

b) Bir fotonun enerjisi

$$W_1 = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{530 \cdot 10^{-9}} = 37,47 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

Birim zamanda küreye düşen foton sayısı

$$N = \frac{P}{W_1} = 26,7 \cdot 10^{17}$$

küreye etki eden kuvvet

$$F = N\Delta p = 2,27 \cdot 10^{-13} \text{ N}$$

olarak bulunur.

16. İzafiyet teorisinde geçerli hız transformasyonu bulmak için

$$x = \gamma(x' + vt')$$

$$t = \gamma \left(t' + \frac{\beta x'}{c} \right); dt = \gamma \left(dt' + \frac{\beta dx'}{c} \right)$$

yazabiliriz. Hareketsiz koordinat sisteminde hız u , hareketli koordinat sisteminde u' olsun. Bu hızlar için

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{\beta dx'}{c^2}} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \left(\frac{dx'}{dt'} \right)} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}; u = \frac{c + v}{1 + \frac{v \cdot c}{c^2}} = c$$

yazabiliriz. İki hareketli arasındaki uzaklık ℓ iken B el kaldırmaya kadar geçen süre

$$\ell = ct_1 + vt_1; t_1 = \frac{\ell}{c + v}$$

olur. Bu anda iki hareketli arasındaki uzaklık

$$\ell_1 = \ell - 2vt_1 = \frac{\ell(c - v)}{c + v}$$

olur. B el kaldırdıktan A'nın bu hareketin algılanmasına kadar geçen süre

$$\ell_1 = ct_2 + vt_2; t_2 = \frac{\ell_1}{c + v} = \frac{\ell(c - v)}{(c + v)^2}$$

olur. Bu anda iki hareketli arasındaki uzaklık

$$l_2 = l_1 - 2vt_2 = \frac{\ell(c-v)^2}{(c+v)^2}$$

olur. A el kaldırdıktan B'nin bu hareketin algılanmasına kadar geçen süre

$$l_2 = ct_3 + vt_3; t_3 = \frac{l_2}{c+v} = \frac{\ell(c-v)^2}{(c+v)^3}$$

olur. Bu anda iki hareketli arasındaki uzaklık

$$l_3 = l_2 - 2vt_3 = \frac{\ell(c-v)^3}{(c+v)^3}$$

olur. n işlen sonra iki hareketli arasındaki uzaklık için

$$l_n = \frac{\ell(c-v)^n}{(c+v)^n}$$

yazabiliriz. İki hareketli arasındaki uzaklık

$$\Delta l = l - l_n = \ell \left(1 - \frac{(c-v)^n}{(c+v)^n} \right)$$

olur. Bu n işlem için gerçekleştirilmek için geçen süre

$$\begin{aligned} t &= t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell(c-v)}{(c+v)^2} + \frac{\ell(c-v)^2}{(c+v)^3} + \dots + \frac{\ell(c-v)^{n-1}}{(c+v)^n} = \\ &= \frac{\ell}{c+v} \left[1 + \frac{c-v}{c+v} + \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^2 + \left(\frac{c-v}{c+v} \right)^3 + \dots \right] = \frac{\ell}{c+v} \frac{1}{1 - \frac{c-v}{c+v}} = \frac{\ell}{2v} \end{aligned}$$

olarak bulunur.