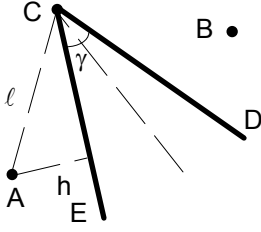
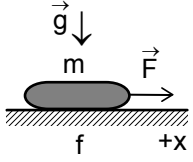


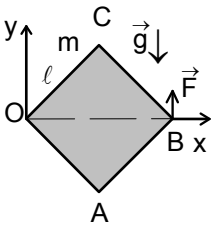
VIII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI-2001



1. ECD üçgeni şeklinde bir körfezin kıyısında, A noktasında bir balıkçı yaşamaktadır. A noktasından kıyıya dik uzaklığı h, körfezin tepe noktasına kadar uzaklığı l dir. Körfezin açıortayına ve A noktasına göre simetrik olarak B noktasında balıkçının bir dostu yaşamaktadır. Balıkçının karadaki hızı v sudaki hızı ise $\frac{v}{n}$ dir. Buna göre balıkçı A' dan B 'ye en kısa olarak ne kadar zamanda ulaşabilir? Körfezin tepe açısı γ olarak veriliyor.

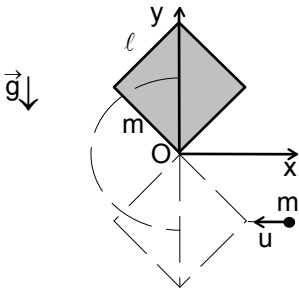


2. İlk kütlesi $m_0=1,5$ kg olan bir sabun yatay yönde uygulanmış sabit $F=6$ N kuvvetin etkisi ile yatay düzlem üzerinde harekete geçmektedir. Sabun ile düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $f=0,1$ dir. Sabun katı bir cisim olmadığından, düzlem ile etkileşmesi sonucu aşınmaya başlıyor. Deneysel ölçümler sonucu sabun 5 m yol aldığı anda kütlesinin %1 kadarını kaybettiği gözlenmiştir. Sabunun kütlesi yarıya indiğinde sabunun hızı ne olur? Yerçekimi ivmesi g veriliyor.

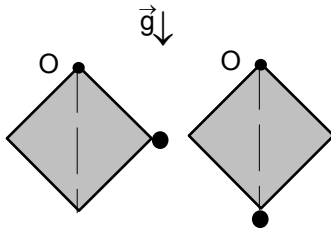


3. a) Düşey düzlemde O noktasından geçen yatay eksen etrafında serbestçe dönebilen, kütlesi m ve kenar uzunluğu l olan kare şeklindeki bir levhanın OB köşegeni yatay x eksenini üzerinde bulunuyor ve B noktasından düşey y eksenine paralel kalacak şekilde sabit F kuvveti uygulanıyor. Levha saat yönünün tersi yönde dönmeye başlıyor. Karenin açısal ω hızını OB köşegeninin x eksenine yaptığı θ açısına bağlı olarak bulunuz.

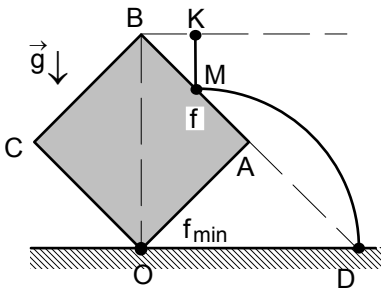
b) Dönme sırasında karenin kütle merkezi O noktasından geçen dikey eksen üzerine geldiği anda F kuvveti kaldırılıyor. Bu anda eksene etki eden tepki kuvveti sıfır ise F kuvveti nedir?



c) Kare levha bu en üst konumundan en alt konumuna serbest olarak dönüp geldiğinde, karenin merkezinden geçen doğru üzerinde hareket eden ve aynı kütleye sahip olan bir noktasal cisim ile tam esnek olmayan çarpışma gerçekleşmektedir. Çarpma anında cismin hızı yatay olup değeri u bilinmemektedir. Çarpışma sonucu levha durursa açığa çıkan ısı nedir?



d) Levha ile cisimden oluşan sistemde O noktasından geçen eksenin etrafında çarpışmadan sonra küçük titreşimler başlar. Bu titreşimlerin periyodu T_1 dir. Cisim yavaş yavaş levhanın kenarı boyunca kayarak levhanın en alt noktasına kadar gitmektedir. Bu durumda sistemin yeni titreşim periyodu T_2 olur. $\frac{T_1}{T_2}$ oranı nedir?

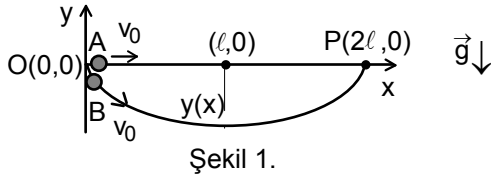


e) Levha, merkezi OB dikey doğrultusu üzerinde olacak şekilde yatay ve yeterli sürtünmeye sahip sürtünmeli masa üzerinde dengelenip yerleştiriliyor. Bir noktasal cisim, B noktasından geçen yatay doğrultu üzerindeki K noktasından serbest bırakılıyor. Cisim levhanın M noktasına çarparak BA doğrusunun uzantısı üzerindeki D noktasına düşüyor. Levha cismin hareketi sırasında konumunu değiştirmiyor. Levha ile cisim arasındaki sürtünme katsayısı f ne kadardır?

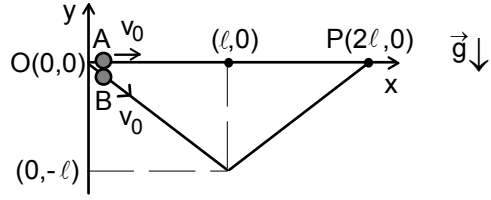
Not: Çarpışma sırasında hızın BA kenarına dik olan bileşenin büyüklüğü korunmaktadır.

f) Levhanın konumunun değişmemesi için levha ile zemin arasındaki sürtünme katsayısının belli bir değerden daha büyük olması gerekir. Bu sürtünme katsayısının minimum f_{min} değeri nedir?

Not: Çarpışma süresi çok küçük olduğu için meydana gelen tepki kuvvetleri ağırlık kuvvetinden çok çok büyüktür.



Şekil 1.



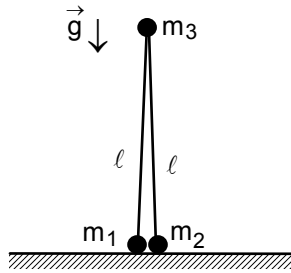
Şekil 2.

4. Bir boncuk (A) ilk hızı v_0 olmak üzere kayarak $+x$ yönünde hareket ederek $O(0,0)$ noktasından $P(2l,0)$ noktasına gelmektedir. A boncuğu ile özdeş bir B boncuğu ise aynı ilk hızla harekete başlayıp bir $y=f(x)$ fonksiyonu ile tanımlanan bir yörüngede yerçekimi etkisi altında giderek aynı P noktasına varmaktadır. (Bak Şekil 1)

a) Her iki boncuğun hareket sürelerini veren ifadeleri bulunuz.

b) Eğer B boncuğunun takip ettiği yörünge Şekil 2 de verildiği gibi ise, $l=1$ m için, A ve B boncuklarının P noktasına aynı anda varmalarını sağlayacak v_0 ilk hızını hesaplayınız.

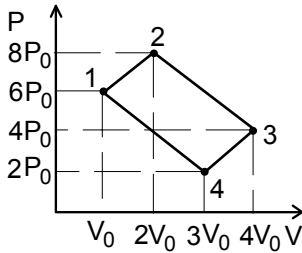
Not: $(0,-l)$ noktasındaki süreksizliği göz önüne almayınız. Yerçekimi ivmesi $g=9,8$ m/s² olarak veriliyor.



5. Yatay ve sürtünmesiz düzlem üzerinde kütleleri $m_1=m$, $m_2=2m$, $m_3=m$ olan cisimler birbirine uzunlukları l olan iki çubukla bağlı olup bir sistem oluşturmaktadır. Çubuklar düşey düzlemde bulunmakta ve m_3 kütleli cisim etrafında serbestçe dönebilmektedirler. Sistem serbest bırakılıyor. Çubuklar

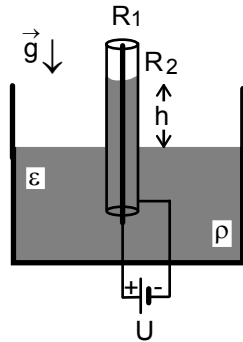
yatayla θ açısı yaptıklarında m_3 kütleli cismin hızı \vec{v}_3 nedir?

Not: Yerçekimi ivmesi g veriliyor.



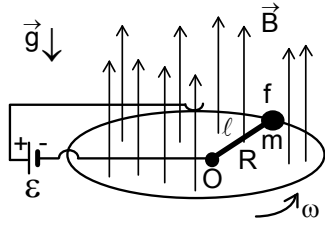
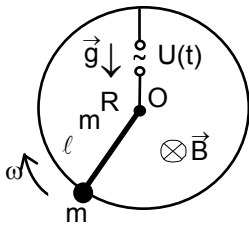
6. P-V diyagramında verilen ve kapalı olan 1-2-3-4-1 prosesinde gerçekleşen en küçük basınç $2P_0$, en küçük hacim V_0 , en büyük basınç $8P_0$ ve en büyük hacim $4V_0$ olarak veriliyor. Proses tek atomlu gaz ile yapılırsa:

- Bu proseste yapılan iş nedir?
- Sistemin ulaştığı en büyük ve en küçük sıcaklık nedir?
- Sisteme verilen ısı nedir?
- Prosesin verimi nedir?



7. Bir maddenin bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısını ölçmek için özkütlesi ρ ve bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı ϵ olan bir sıvı kullanılmaktadır. Sıvı bir kabın içine dolduruluyor. Sıvı içine iç yüzeyi metal ile kaplanmış olan ince camdan yapışmış bir tüp batırılıyor. Bu tüpün ekseninden yarıçapı R_1 olan ince metal bir tel geçirilmiştir. Cam tüpün iç yüzeyin yarıçapı R_2 dir. İki metal yüzey arasında U potansiyel farkı uygulandığında sıvının h kadar yükseldiği gözlenmektedir. Bu maddenin bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı ϵ nedir?

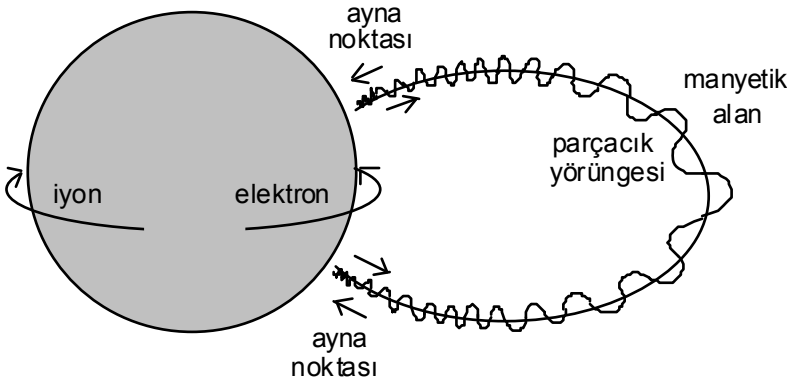
Not: Yerçekimi ivmesi g veriliyor. Kılcal olaylar ihmal ediliyor.



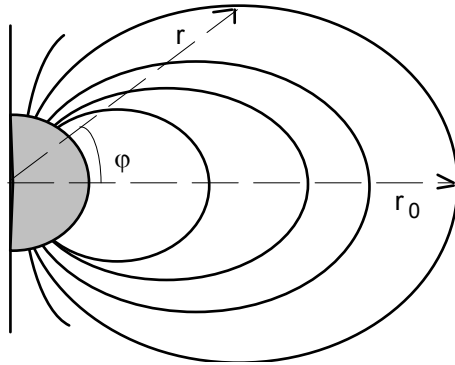
8. B manyetik alanını bulmak için iki farklı deney tasarlanıyor. İki deneyde de ağırlıksız, uzunluğu ℓ ve direnci R olan bir çubuk ile ucuna takılan ve kütlesi m olan bir metal bilye kullanılmaktadır. Birinci deneyde çubuk bir ucundan geçen O yatay eksenini etrafında döndürülmektedir. Bu durumda bilye iletken ve dikey konumda bulunan bir halka ile temas edecek şekilde hareket

etmektedir. Halka ile halkanın merkezi arasında dönmeyi engellemeyecek şekilde yerleştirilmiş alternatif potansiyel kaynağı bağlanmıştır. Bütün sistem sabit, homojen ve içeriye doğru yönelmiş B manyetik alanında bulunmaktadır. Çubuk belli sabit ω açısal hız ile döndüğünde akım kaynağının uyguladığı maksimum potansiyel U_{\max} , akım kaynağının uyguladığı minimum potansiyel U_{\min} olup aralarındaki oran $\frac{U_{\max}}{U_{\min}} = n$ olarak veriliyor. İkinci deneyde aynı çubuk, ucundan geçen O dikey eksen

etrafında, diğer ucunda bulunan bilye yatay konumda bulunan halka ile temas edecek şekilde dönebilmektedir. Çubuğun dönme düzlemine dik yönde sabit ve homojen bir B manyetik alanı bulunmaktadır. Çubuğun iki ucuna değeri ε olan sabit e.m.k. uygulanmaktadır. Çubuk ile halka arasındaki sürtünme katsayısı f dir. Her iki durumda da çubuğun döndüğü açısal hız ω ise B nedir?

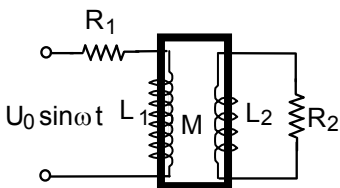


9. Yarıçapı R olan gezegen Dünyanın manyetik alanının bir manyetik dipolden meydana geldiği kabul edilmektedir. Bu dipolün dipol momenti kutuplar doğrultusunda yönelmiştir. Dünya üzerinde bir noktanın koordinatlarını enlem ve boylam olarak verilmektedir. Enlem açısı φ dir. Dünya manyetik alanı sayesinde uzaydan gelen ve yüksek enerjili yüklü taneciklerden korunmaktadır. Dünyanın dipol manyetik alanı ekvatorunda minimum kutuplarda ise maksimum değere ulaşmaktadır. Bu alan içinde kalan yüklü tanecikler manyetik alanın maksimum olduğu ayna noktaları arasında gidip gelirler ve heliks olan bir yörünge çizerler. Ekvator civarında Dünyanın manyetik alanına giren bir yüklü tanecik uygun şartlar altında manyetik alan çizgileri boyunca hareket edebilir. Bu durum ekvatorundan $\varphi=0^\circ$ durumu için r_0 uzak-

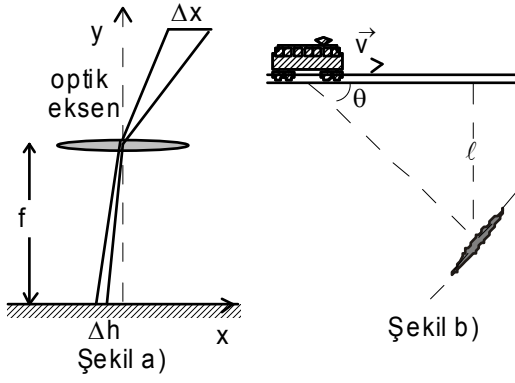


ta gerçekleşmektedir. Taneciğin yansıdığı nokta Dünyadan φ enlem açısında gözlenmektedir. Yüklü tanecikler ekvatordaki manyetik alana göre hangi açı ile gelmelidir ki belirtilen ayna noktaları arasında gidip gelsinler?

Not: Dünyanın ekvatordaki manyetik alanı B_E olarak verilmektedir.

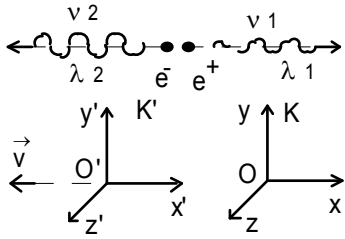


10. Bir transformatörün primerinin ohmik direnci $R_1=R$ indüktansı $L_1=4L$ dir. Aynı transformatörün sekonderinin ohmik direnci $R_2=4R$ indüktansı $L_2=L$ dir. Transformatörün primeri ile sekonderi arasında indüktif bağıntı bulunmaktadır. $X_{L2}=R$ durumunda primerin ve sekonderin empedans-ları nedir?

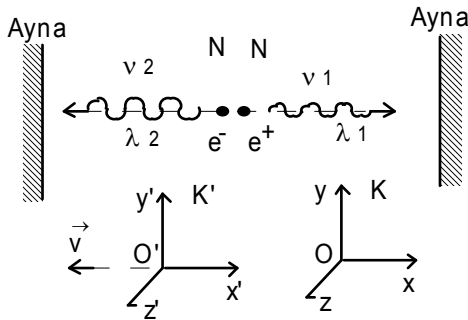


11. Fotoğraf makinelerinde hareketli cisimlerin görüntülerinin net olabilmesi için kağıdın kalitesinden kaynaklanan bazı şartlar mevcuttur. Fotoğraf çekerken bir cismin objektifinin eksenine paralel olarak fotoğraf makinesine yaklaşması görüntünün fotoğraf filmi üzerinde herhangi bir bulanıklık meydana getirmez. Ancak cismin optik eksene dik olacak şekilde, yani x yönünde hareket etmesi sırasında film üzerinde oluşan görüntü bir miktar kayacaktır. Fotoğraf makinesinde objektif çok kısa sürede açılıp kapanıyor. Bu sırada cisim Δx kadar ilerlediğinde, görüntü film üzerinde Δh kadar kayıyor. Bu Δh kayma miktarı cismin hızına, optik eksenle yaptığı açığa, objektifin açılma süresine ve kağıdın kalitesine bağlı olup belli miktarı geçmemesi gerekir. Bu verilen bilgilerden faydalanarak aşağıdaki problemi çözün. Bir tren v hızı ile raylar üzerinde hareket etmektedir. Raylardan ℓ kadar dik uzaklıkta bir fotoğraf makinesi yerleştirilmiştir. İlk anda fotoğraf makinesinin objektifinin optik ekseninin raylarla yaptığı açı θ olarak veriliyor. Merceğin odak uzaklığı $f \ll \ell$ dir. Film üzerindeki kayma Δh kadar olabilir. Fotoğraf makinesinin objektifinin açılması ve kapanması arasında geçen süre ne kadar olmalıdır?

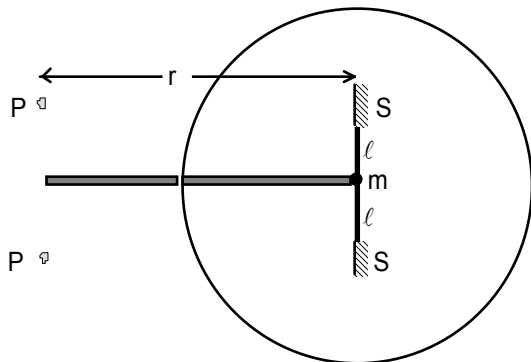
kalitesine bağlı olup belli miktarı geçmemesi gerekir. Bu verilen bilgilerden faydalanarak aşağıdaki problemi çözün. Bir tren v hızı ile raylar üzerinde hareket etmektedir. Raylardan ℓ kadar dik uzaklıkta bir fotoğraf makinesi yerleştirilmiştir. İlk anda fotoğraf makinesinin objektifinin optik ekseninin raylarla yaptığı açı θ olarak veriliyor. Merceğin odak uzaklığı $f \ll \ell$ dir. Film üzerindeki kayma Δh kadar olabilir. Fotoğraf makinesinin objektifinin açılması ve kapanması arasında geçen süre ne kadar olmalıdır?



12. a) Hareketsiz halde bulunan ve durgun kütleleri m_0 olan, birisi elektron diğeri pozitron iki tanecik tamamen yok olmakta ve bu taneciklerin yok olması sonucu iki foton yaratılmaktadır. Bu çift foton oluşumu olayını hareketsiz K koordinat referans sisteminden inceleyerek her bir fotonun sahip olabileceği dalga boyunu bulunuz. Aynı çift foton oluşumunda, fotonların dalga boylarını sabit v hızı ile sola doğru hareket eden bir K' koordinat referans sistemindeki bir gözlemciye göre türetip bulunuz.

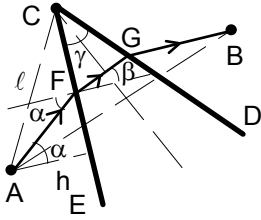


b) Her saniye N elektron ve N pozitronun durgun halde iken tamamen yok olup çift foton oluşturduğunu kabul edelim. Sağ ve sol tarafa yayılan fotonların x eksenine dik olacak şekilde yerleştirilen birer düzlemsel aynaya çarptığını varsayalım. Hareketsiz K koordinat sisteminden bakan gözlemcinin aynalara etki eden kuvveti F , hareketli K' koordinat sisteminden bakan bir gözlemci sol aynaya etki eden kuvveti F_1 , sağ aynaya etki eden kuvvet F_2 olarak ölçmektedir. $\frac{F}{F_1}$ ve $\frac{F}{F_2}$ oranı nedir?



13. Havası boşaltılmış bir cam balonun içinde sürtünmesiz olarak kütlesi m ve uzunluğu 2ℓ olan bir çubuk, çubuğun merkezinden geçen dikey eksen etrafında serbestçe dönebilmektedir. Çubuğun uçlarına alanları S olan ve kütlesi ihmal edilecek kadar küçük ve düz ayna rolünü oynayan alüminyumdan yapılmış ince plakalar yerleştirilmiştir. Çubuktan r uzakta ve aynaların karşısında monokromatik ve gücü P olan iki noktasal ışık kaynağı yerleştiriliyor. Bir siyah engel sayesinde kaynaklardan çıkan ışınlar sadece karşılığında bulunduğu aynalara düşmektedir. $r \gg \ell \gg \sqrt{S}$ ise çubuğun yapacağı küçük titreşimlerin periyodunu bulunuz. Işık hızı c olarak veriliyor.

VIII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2001



1. Balıkçı A' dan B 'ye en kısa zamanda ulaşabilmesi için körfeze göre geçirilen dik doğruyla α açısı ile hareket ederek, suya giriş noktasında açıortaya dik olarak hareket etmelidir. Bu durum bir ışının bir prizmanın hareketine benzetilebilir. Işın prizmanın tabanına paralel gittiğinde sapma minimum olur. Kırılma yasasını

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_k}{v_s} = n$$

olarak yazabiliriz. Minimum sapma durumunda $\beta = \frac{\gamma}{2}$ olur. Şeklin geometrisinden

$$EC = \sqrt{\ell^2 - h^2}; EF = h \cdot \tan \alpha = h \frac{n \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

$$CF = EC - EF = \sqrt{\ell^2 - h^2} - h \frac{n \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

olarak yazılabilir. $CF > 0$ ise balıkçı kayıkla yolunu devam etmek zorundadır. Bu durumda

$$FG = 2CF \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \left(\sqrt{\ell^2 - h^2} - h \frac{n \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \right) \sin \frac{\gamma}{2}$$

olarak bulunur. Balıkçı karada

$$AF = GB = \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{h}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}}$$

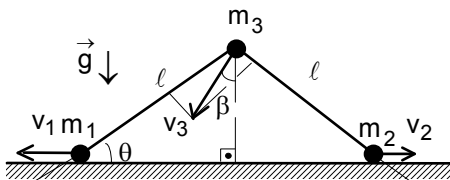
olur. Balıkçının bu durumda hareket süresi

$$t = 2 \frac{AF}{v} + \frac{FG}{\frac{v}{n}} = \frac{2h}{v \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} + \frac{2n}{v} \left(\sqrt{\ell^2 - h^2} - h \frac{n \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}} \right) \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{v} \left(n \sqrt{\ell^2 - h^2} \sin \frac{\gamma}{2} - h \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \right)$$

olarak bulunur. $CF \leq 0$ ise

$$t = \frac{2\ell}{v}$$

olur.



2. m_1 ve m_2 kütleli cisimler yatay olarak hareket etmektedir. m_3 kütleli cismin hızı ise düşeyle β açısı yapmaktadır. Çubukların uzamama şartı

$$v_1 \cos \theta = v_3 \cos[(90^\circ - \theta) - \beta] = v_3 \sin(\theta + \beta)$$

$$v_2 \cos \theta = v_3 \cos[(90^\circ - \theta) + \beta] = v_3 \sin(\theta - \beta)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{v_1}{v_3} = \frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos \theta}; \frac{v_2}{v_3} = \frac{\sin(\theta - \beta)}{\cos \theta}$$

olarak yazılabilir. Momentum korunumu yasasından

$$m_1 v_1 + m_3 v_3 \sin \beta = m_2 v_2; m v_1 + m v_3 \sin \beta = 2m v_2$$

$$\frac{v_1}{v_3} + \sin \beta = 2 \frac{v_2}{v_3}$$

$$\frac{\sin(\theta + \beta)}{\cos \theta} + \sin \beta = 2 \frac{\sin(\theta - \beta)}{\cos \theta}$$

$$\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta+\cos\theta\sin\beta=2\sin\theta\cos\beta-2\cos\theta\sin\beta; \operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\theta}{4}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\sin\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{16+\operatorname{tg}^2\theta}}; \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}}=\frac{4}{\sqrt{16+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

olarak yazılabilir. m_1 ve m_2 kütleli cisimlerin hızları

$$v_1=\frac{v_3 \sin(\theta+\beta)}{\cos\theta}=v_3(\operatorname{tg}\theta\cos\beta+\sin\beta)=\frac{5v_3 \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{16+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

$$v_2=\frac{v_3 \sin(\theta-\beta)}{\cos\theta}=v_3(\operatorname{tg}\theta\cos\beta-\sin\beta)=\frac{3v_3 \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{16+\operatorname{tg}^2\theta}}$$

olarak yazılabilir. Enerji korunumu yasasından

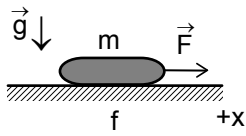
$$m_3g\ell(1-\sin\theta)=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{m_3v_3^2}{2}$$

$$2g\ell(1-\sin\theta)=v_1^2+2v_2^2+v_3^2$$

$$2g\ell(1-\sin\theta)=\frac{4(4+11\operatorname{tg}^2\theta)v_3^2}{16+\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$v_3=\sqrt{\frac{2g\ell(1-\sin\theta)(16+\operatorname{tg}^2\theta)}{4(4+11\operatorname{tg}^2\theta)}}$$

olarak bulunur.



3. Kütle nin değ iş imi

$$dm=-\xi m dx$$

olarak da yazılabilir. Buradan kütle yola ba ğ lı olarak

$$\frac{dm}{m}=-\xi dx; \ln \frac{m}{m_0}=-\xi x; m=m_0 e^{-\xi x}$$

ş ekinde değ iş mektedir. ξx çok çok küçük ise

$$e^{-\xi x}=1-\xi x$$

olarak yazılabilir. Verilen sayısal değ erlerden

$$0,99m_0=m_0(1-5\xi)$$

$$\xi=2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

olarak bulunur. Kütle yarıya inene kadar alınan yol

$$0,5m_0=m_0 e^{-\xi x_0}$$

$$x_0=\frac{\ln 2}{\xi}=346,5 \text{ m}$$

olarak bulunur. Dinamik denkle mi

$$F-fmg=\frac{dp}{dt}=\frac{dm}{dt}v+m\frac{dv}{dt}=\frac{dm}{dx}\frac{dx}{dt}v+m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dm}{dx}v^2+m\frac{dv}{dx}$$

$$=-\xi m_0 e^{-\xi x_0}v^2+m_0 e^{-\xi x}\frac{v dv}{dx}\approx m_0 e^{-\xi x}\frac{v dv}{dx}$$

$$F-fgm_0 e^{-\xi x}=m_0 e^{-\xi x}\frac{v dv}{dx}; \left(\frac{Fe^{\xi x}}{m_0}-fg\right)dx=v dv$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\int_0^{x_0}\frac{Fe^{\xi x}}{m_0}dx-\int_0^{x_0}fgdx=\int_0^v v dv; \frac{F(e^{\xi x_0}-1)}{\xi m_0}-fgx_0=\frac{v^2}{2}$$

$$v=\sqrt{2\left(\frac{F(e^{\xi x_0}-1)}{\xi m_0}-fgx_0\right)}=\sqrt{2\left(\frac{F(e^{\ln 2}-1)}{\xi m_0}-\frac{fg \ln 2}{\xi}\right)}=\sqrt{\frac{2}{\xi}\left(\frac{F}{m_0}-fg \ln 2\right)}=57,5 \text{ m/s}$$

olarak bulunur.

4. a) A boncuğun hareket süresi

$$t_A = \frac{2\ell}{v_0}$$

olur. B boncuğu y kadar aşağıya inerse hızı enerji korunumu yasasından

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgy; v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

olarak bulunur. Bu noktadaki lokal eğim açısı

$$\text{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

olur. Buradan

$$\sin\theta = \frac{\text{tg}\theta}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}}; \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

olarak yazılabilir. Boncuğun yatay hızı

$$v_x = v\cos\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy}}{\sqrt{1+y'(x)^2}}$$

dx yolu boyunca hareket süresi ve toplam hareket süresi

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} dx; t_B = \int_0^{2\ell} \frac{dx}{v_x} = \int_0^{2\ell} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2gy}} dx$$

olarak ifade edilir.

b) Bu durumda B boncuğun hareket doğrusu yatayla 45° dir. Soruda verilen simetriden faydalanabiliriz. B boncuğu y kadar aşağıya inerse kazandığı hız

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gx}$$

boncuğun yatay hızı

$$v_x = v\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v_0^2 + 2gx}$$

dx yolu boyunca hareket süresi

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}}$$

toplam hareket süresi

$$t_B = 2 \int_0^\ell \frac{dx}{v_x} = \int_0^\ell \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} = \frac{2\sqrt{2} (\sqrt{v_0^2 + 2g\ell} - v_0)}{g}$$

olarak bulunur. İki süre birbirine eşit olmaları için ilk hız

$$\frac{2\ell}{v_0} = \frac{2\sqrt{2} (\sqrt{v_0^2 + 2g\ell} - v_0)}{g}; \frac{\sqrt{2} \ell g}{2v_0} + v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell}$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{2})\ell g}}{2} = 2,8 \text{ m/s}$$

olarak bulunur. Şimdi de fonksiyonun özelliklerini kullanarak B boncuğun hareket süresini bulalım. İlk yarıda

$$y = -x; y' = 1$$

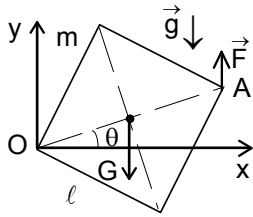
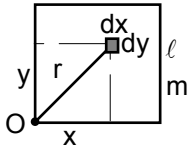
ikinci yarıda

$$y = x - 2\ell; y' = 1$$

yazabiliriz. Bu durumda hareket süresi

$$\begin{aligned} t_B &= \int_0^\ell \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx + \int_\ell^{2\ell} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} dx = \int_0^\ell \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{v_0^2 + 2gx}} dx + \int_\ell^{2\ell} \frac{\sqrt{1+(-1)^2}}{\sqrt{v_0^2 - 2g(x-2\ell)}} dx = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gx} \Big|_0^\ell + \frac{\sqrt{2}}{g} \sqrt{v_0^2 - 2gx + 4g\ell} \Big|_\ell^{2\ell} = \frac{2\sqrt{2} (\sqrt{v_0^2 + 2g\ell} - v_0)}{g} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Yani aynı sonuç çıkar. Simetrik durumda iniş süresi çıkış süresine eşittir.



5. a) Kare şeklindeki bir levhanın kütlesi

$$m = \sigma S = \sigma \ell^2$$

olarak veriliyor. Levhanın eylemsizlik momentinin bulabilmek için , levhanın bir köşesinden ve levhaya dik olan eksene göre

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

uzaklıkta bulunan, alanı

$$dS = dx \cdot dy$$

olan küçük bir parça alabiliriz. Birim alandaki kütle σ ise bu parçanın kütlesi

$$dm = \sigma dS$$

bu parçanın eylemsizlik momentini

$$dJ = dm \cdot r^2 = \sigma(x^2 + y^2) dx dy$$

olur. Levhanın toplam eylemsizlik momentini

$$J = \int dJ = \int_0^\ell \int_0^\ell \sigma(x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\ell \sigma \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) dy \Big|_{x=0}^{x=\ell} =$$

$$= \int_0^\ell \sigma \left(\frac{\ell^3}{3} + \ell y^2 \right) dy = \sigma \left(\frac{\ell y^3}{3} + \frac{\ell y^3}{3} \right) \Big|_{y=0}^{y=\ell} = \frac{2\sigma \ell^4}{3} = \frac{2m \ell^2}{3}$$

olarak bulunur. Levhanın dönmesini

$$J\alpha = \frac{2m \ell^2}{3} \frac{d\omega}{dt} = \frac{2m \ell^2}{3} \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2m \ell^2 \omega}{3} \frac{d\omega}{d\theta} = F \sqrt{2} \ell \cos\theta - mg \frac{\sqrt{2} \ell \cos\theta}{2}$$

denklemlerle verilir. Buradan integrasyon sonucu

$$\int_0^\omega 2\omega d\omega = \int_0^\theta \frac{3\sqrt{2} (2F - mg) \cos\theta d\theta}{2m\ell}; \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2} (2F - mg) \sin\theta}{2m\ell}}$$

olarak bulunur. Aynı sonuca enerji korunuma yasasından yola çıkarak bulabiliriz. F kuvveti sadece dikey yönde etki ettiği için

$$F \sqrt{2} \ell \sin\theta = \frac{mg\sqrt{2} \ell \sin\theta}{2} + \frac{J\omega^2}{2}; \omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2} (2F - mg) \sin\theta}{2m\ell}}$$

olarak bulunur.

b) Levha en üst konumunda iken $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$ olur. Bu durumda

$$mg - N = m\omega^2 r; r = \frac{\sqrt{2} \ell}{2}; N = 0$$

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{2} g}{\ell} = \frac{3\sqrt{2} (2F - mg)}{2m\ell}$$

yazabiliriz. İki ifadeyi karşılaştırdıktan sonra

$$F = \frac{5mg}{6}$$

olarak bulunur.

c) Levha en üst konumundan en alt konumuna geçtiğinde kazandığı açısal hızını enerji korunumu yasasından bulabiliriz.

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{mg\sqrt{2} \ell}{2} = \frac{J\omega_s^2}{2} - \frac{mg\sqrt{2} \ell}{2}; \omega_s^2 = \frac{4\sqrt{2} g}{\ell}$$

Levhanın cisim ile çarpma sonucu durması için açısal momentumlar birbirine eşit olmalıdır.

$$J\omega_s = mu \frac{\sqrt{2} \ell}{2}$$

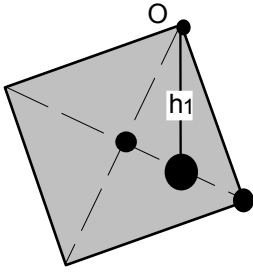
Bu şarttan cismin hızı

$$u = \frac{4\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2} g \ell}}{3}$$

Açığa çıkan ısı

$$Q = \frac{J\omega_s^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{mg\sqrt{2} \ell}{2} = \frac{28\sqrt{2} mg \ell}{9}$$

olarak bulunur.



d) Küçük titreşimlerde sistemin toplam eylemsizlik momenti

$$J_{t1} = J + m\ell^2 = \frac{5m\ell^2}{3}$$

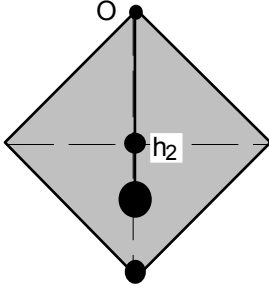
sistemin toplam kütlesi $m_t = 2m$ sistemin kütle merkezi ile dönme eksenindeki uzaklık

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\ell}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}\ell}{4}$$

sistemin küçük titreşimlerin titreşim periyodu

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{t1}}{m_t g h_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{10}\ell}{3g}}$$

olarak bulunur.



Cisim levhanın en alt noktasına yerleştirilirse sistemin yeni sistemin toplam eylemsizlik momenti

$$J_{t2} = J + m(\sqrt{2}\ell)^2 = \frac{8m\ell^2}{3}$$

sistemin toplam kütlesi yine $m_t = 2m$ sistemin kütle merkezi ile dönme eksenindeki uzaklık

$$h_2 = \frac{3\sqrt{2}\ell}{4}$$

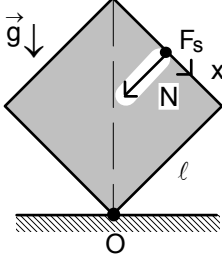
sistemin küçük titreşimlerin titreşim periyodu

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_{t2}}{m_t g h_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{8\sqrt{2}\ell}{9g}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} T$$

olarak bulunur. Aradığımız oran

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{8}}$$

olarak bulunur.



e) Çarpma anında levhaya etki eden normal kuvvet N ve sürtünme kuvveti

$$F_s = fN$$

dir. Çarpışma süresince normal kuvvetin ve sürtünme kuvvetinin değerleri devamlı değişmektedir fakat her an için O noktasına göre momentlerin toplamı sıfır olmalıdır.

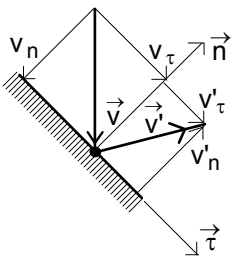
$$Nx = fN\ell; x = f\ell$$

Cisim

$$KM = h = (\ell - x)\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}\ell(1-f)}{2}$$

yükseklüğünden düşmektedir ve

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{\sqrt{2}g\ell(1-f)}$$
 hızı ile levhaya çarpmaktadır.



Levhanın kenarına göre paralel ve dik olan τ - n koordinat sistemi tayin edelim.

Hızın bileşenleri

$$v_\tau = v_n = \frac{\sqrt{2}v}{2}$$

dir. Çarpma anında momentum değişimi

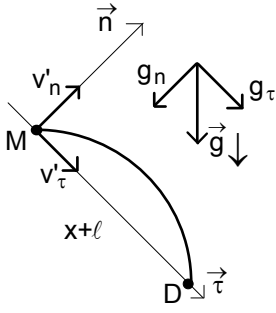
$$\Delta p = \int F dt \text{ olur. Bileşenlere göre}$$

$$n \text{ yönünde: } \int N dt = 2mv_n = \sqrt{2}mv; v_n = v'_n$$

$$\tau \text{ yönünde: } f \int N dt = mv_\tau - mv'_\tau = f\sqrt{2}mv$$

Buradan

$$v'_\tau = \sqrt{2}v \left(\frac{1}{2} - f \right) \text{ olarak bulunur.}$$



Sürtünme katsayısı için kısıtlama şartı $f < \frac{1}{2}$ getirmektedir.

$$v' = \sqrt{v_n'^2 + v_t'^2} = v \sqrt{1 - 2f + 2f^2}$$

çarpmadan sonraki hızdır. Çarpmadan sonra cisim eğik atış yapmaktadır. τ eksenine göre cismin aldığı yol

$$L = x + \ell = \ell(1 + f)$$

dir. Yerçekimi ivmesi bileşenleri

$$g_t = g_n = \frac{\sqrt{2}g}{2}$$

olarak yazılabilir. Uçuş süresi

$$t = \frac{2v_n}{g_n} = \frac{2v}{g}$$

olarak bulunur. τ eksenine göre alınan yol

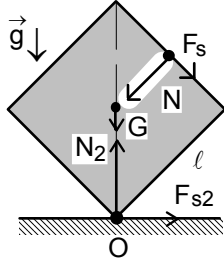
$$L = v't + \frac{g_t t^2}{2}; \ell(1+f) = \sqrt{2} v \left(\frac{1}{2} - f \right) \frac{2v}{g} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}g}{2} \left(\frac{2v}{g} \right)^2$$

$$\ell(1+f) = 2\sqrt{2} (1-f)v^2$$

$$\ell(1+f) = 2\sqrt{2} (1-f) \sqrt{2} g \ell \sqrt{1-f}$$

$$1+f = 4(1-f)^2; 4f^2 - 9f + 3 = 0; f = \frac{9 - \sqrt{33}}{8} \approx 0,4$$

olarak bulunur.



f) Yatay ve dikey koordinat sisteme göre çalışırsak yatay düzlemden levhaya etki eden tepki kuvveti

$$N_2 = mg + N \cos 45^\circ + F_s \cos 45^\circ =$$

$$= mg + (1+f)N \cos 45^\circ \approx (1+f)N \cos 45^\circ$$

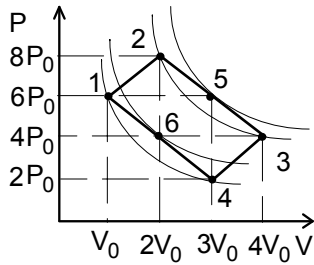
şeklinde yazılabilir. Yatay yönde denge koşulunu

$$N \sin 45^\circ = F_s \sin 45^\circ + F_{s2} = f N \sin 45^\circ + f_{\min} N_2$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$f_{\min} = \frac{1-f}{1+f} \approx 0,42$$

olarak bulunur.



6. a) Her durum için ideal gaz hal denklemini yazalım

$$P_1 V_1 = 6P_0 V_0 = RT_1$$

$$P_2 V_2 = 8P_0 2V_0 = 16P_0 V_0 = RT_2$$

$$P_3 V_3 = 4P_0 4V_0 = 16P_0 V_0 = RT_3$$

$$P_4 V_4 = 2P_0 3V_0 = 6P_0 V_0 = RT_4;$$

$$T_2 = T_3; T_4 = T_1$$

Her kapalı proses için iş P-V diyagramında kapalı prosesin çevrelediği alan ile verilmektedir.

$$A = (P_2 - P_4)(V_3 - V_1) - 2 \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} - 2 \frac{(P_2 - P_3)(V_3 - V_2)}{2} =$$

$$(8P_0 - 2P_0)(4V_0 - V_0) - (8P_0 - 6P_0)(2V_0 - V_0) - (8P_0 - 4P_0)(4V_0 - 2V_0) = 8P_0 V_0$$

b) Bu denklemlerden 2. ci ve 3. cü noktalar ile 1. ci ve 4. cü noktalar aynı izoterm üzerinde bulunmaktadır. İzoterm çizerek 1-2-5 ve 4-6 noktaları arasında sisteme ısı verildiğini anlayabiliriz. 5. ci ve 6. cü noktalarda ekstremum gerçekleşmektedir. Bu noktaların koordinatlarını bulmak için benzerlikten faydalanabiliriz.

$$\frac{P_2 - P_5}{P_5 - P_3} = \frac{V_5 - V_2}{V_3 - V_5}; \frac{8P_0 - P_5}{P_5 - 4P_0} = \frac{V_5 - 2V_0}{4V_0 - V_5}; P_5 = 12P_0 - \frac{2P_0 V_5}{V_0}$$

Aradığımız noktalar için gaz denklemini yazabiliriz.

$$P_5 V_5 = RT_5 = 12P_0 V_5 - \frac{2P_0 V_5^2}{V_0}$$

Sıcaklığın V_5 hacmine göre türevini alıp sıfıra eşitlersek

$$0 = 12P_0 - \frac{4P_0 V_5}{V_0}; V_5 = 3V_0; P_5 = 6P_0; T_5 = \frac{P_5 V_5}{R} = \frac{18P_0 V_0}{R}$$

olarak bulunur. Aynı işlem diğer ara nokta için yapılabilir.

$$\frac{P_1 - P_6}{P_6 - P_4} = \frac{V_6 - V_1}{V_4 - V_6}; \frac{6P_0 - P_6}{P_6 - 2P_0} = \frac{V_6 - V_0}{3V_0 - V_6}$$

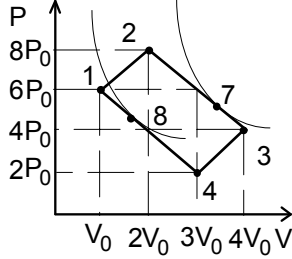
$$P_6 = 8P_0 - \frac{2P_0 V_6}{V_0}; P_6 V_6 = RT_6 = 8P_0 V_6 - \frac{2P_0 V_6^2}{V_0}; 0 = 8P_0 - \frac{4P_0 V_6}{V_0}$$

$$V_6 = 2V_0; P_6 = 4P_0; T_6 = \frac{P_6 V_6}{R} = \frac{8P_0 V_0}{R}$$

Bu sıcaklık minimum sıcaklık değildir. Minimum sıcaklık 1. ya da 4. noktalarda gerçekleşmektedir. Bu sıcaklık

$$T_{\min} = \frac{P_1 V_1}{R} = \frac{6P_0 V_0}{R}$$

olarak bulunur.



c) Sisteme verilen ısıyı bulmak için farklı adyabatik eğrileri çizerek koordinat sistemin merkezinden uzaklaştığında sisteme verilen ısı artmaktadır. 2-3 prosesinde adyabatik eğrilerden birisi teğet geçirebilir. Yani 7. nokta ekstremum noktasıdır. Isı 2-7 noktalar arasında verilmektedir. 7. noktanın koordinatlarını bulmak için bulduğumuz denklemden faydalanabiliriz.

$$P_7 = 12P_0 - \frac{2P_0 V_7}{V_0} = 12P_0 - \frac{2P_0 V}{V_0}$$

Adyabatik eğriler için $PV^\gamma = \text{sabit}$ olduğu bilinmektedir. Bu demektir ki

$$\left(12P_0 - \frac{2P_0 V}{V_0}\right) V^\gamma = \text{sabit}$$

ifadesinin V 'ye göre türevi sıfır olmalıdır. Bu şarttan

$$12\gamma P_0 V^{\gamma-1} - \frac{2(\gamma+1)P_0 V^\gamma}{V_0} = 0; V_7 = \frac{6\gamma V_0}{\gamma+1} = \frac{15V_0}{4}$$

olarak bulunur. Burada $\gamma = \frac{5}{3}$ tek atomlu gazın adyabatik katsayısıdır. Basınç

$$P_7 = 12P_0 - \frac{2P_0 V_7}{V_0} = \frac{9P_0}{2}$$

olur. Bulduğumuz nokta için gaz denklemini yazabiliriz.

$$P_7 V_7 = RT_7; T_7 = \frac{135P_0 V_0}{8R}$$

Sisteme verilen ısı

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{27} = \Delta U_{12} + A_{12} + \Delta U_{27} + A_{27} =$$

$$= c_V(T_2 - T_1) + \frac{(6P_0 + 8P_0)(2V_0 - V_0)}{2} + c_V(T_7 - T_2) + \frac{(8P_0 + P_7)(V_7 - 2V_0)}{2} =$$

$$= \frac{3R}{2}(T_7 - T_1) + 7P_0 V_0 + \frac{\left(8P_0 + \frac{9P_0}{2}\right)\left(\frac{15V_0}{4} - 2V_0\right)}{2} =$$

$$= \frac{3R}{2}\left(\frac{135P_0 V_0}{8R} - \frac{6P_0 V_0}{R}\right) + \frac{287P_0 V_0}{16} = \frac{137P_0 V_0}{4}$$

olur.

d) Kapalı prosesin verimi η

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{32}{137} \approx \%23,3$$

olarak bulunur.

7. $R_1 < r < R_2$ için kondansatör çok uzun olduğundan Gauss teoremi uygulanabilir.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}; 2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon\epsilon_0}; E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r}$$

olarak yazılabilir. İki yüzey arasındaki potansiyel fark

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

olarak bulunur. Kondansatörün kapasitesi

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

olarak bulunur. Bulunan ifadeler genel durum için geçerlidir. Sıvı kısmen yükselirse eşdeğer kapasite

$$C = C_1 + C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0(\ell - h)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

olur. Sıvıya etki eden kuvvet

$$F = -\frac{d\Pi}{dh} = -\frac{dC}{dh} \frac{U^2}{2} = -\frac{\pi\epsilon_0(\epsilon - 1)U^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

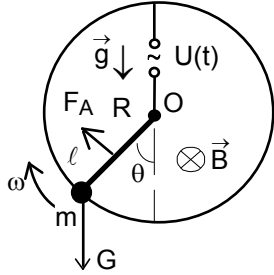
Bu kuvvet ağırlık kuvvetine eşit olmalıdır.

$$F = mg = \rho g(\pi R_2^2 - \pi R_1^2)h = \rho g\pi(R_2^2 - R_1^2)h$$

Buradan maddenin bağıl dielektrik geçirgenlik katsayısı

$$\epsilon = 1 + \frac{\rho g(R_2^2 - R_1^2)h}{\epsilon_0 U^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

olarak bulunur.



8. Birinci durumda çubuk sabit hızla döndüğünde

$$mg \ell \sin\theta = F_A \frac{\ell}{2}; \theta = \omega t$$

$$F_A = IB \ell$$

yazabiliriz. İkinci Kirchoff yasasından

$$U + \epsilon_{in} = IR; \epsilon_{in} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B \ell^2 \omega}{2}$$

potansiyel fark

$$U = \frac{B \ell^2 \omega}{2} + \frac{2mgR}{B \ell} \sin\omega t$$

olarak bulunur. Akım kaynağın uyguladığı maksimum ve minimum potansiyel

$$U_{\max} = \frac{B \ell^2 \omega}{2} + \frac{2mgR}{B \ell}; U_{\min} = \frac{B \ell^2 \omega}{2} - \frac{2mgR}{B \ell}$$

aralarındaki oranından

$$\frac{U_{\max}}{U_{\min}} = n = \frac{B^2 \ell^3 \omega + 4mgR}{B^2 \ell^3 \omega - 4mgR}; \omega = \frac{4(n+1)mgR}{(n-1)B^2 \ell^3}$$

olarak bulunur. İkinci durumda Çubuk sabit hızla döndüğünde

$$fmg \ell = F_A \frac{\ell}{2}; F_A = IB \ell$$

yazabiliriz. İkinci Kirchoff yasasından

$$\epsilon + \epsilon_{in} = IR$$

akan akım ve açısal hız

$$I = \frac{2\epsilon - B \ell^2 \omega}{2R}; \omega = \frac{2\epsilon B \ell - 4fmgR}{B^2 \ell^3}$$

iki ifadenin karşılaştırmasından

$$B = \frac{2mgR}{\epsilon \ell} \left(f + \frac{n+1}{n-1} \right)$$

olarak bulunur.

9. Manyetik dipolün oluşturduğu manyetik alan

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta; B_r = \frac{2\mu_0 p_m \cos \theta}{4\pi r^3}; B_\theta = \frac{\mu_0 p_m \sin \theta}{4\pi r^3}; B = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{1+3\cos^2 \theta}}{4\pi r^3}$$

ile verilmektedir. Kuzey ya da enlem açısı

$$\varphi = 90^\circ - \theta$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$B_r = -\frac{2\mu_0 p_m \sin \varphi}{4\pi r^3}; B_\varphi = \frac{\mu_0 p_m \cos \varphi}{4\pi r^3}; B = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}{4\pi r^3}$$

olarak yazılabilir. Ayrıca manyetik alan için

$$B_r = -\frac{d\Phi}{dr}; B_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{d\varphi}$$

yazabiliriz. Burada Φ manyetik dipolün potansiyeli gibi kabul edilebilir. Bu bağıntılardan

$$\frac{dr}{r} = \frac{B_r d\varphi}{B_\varphi} = -\frac{2 \sin \varphi d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{2d(\cos \varphi)}{\cos \varphi}$$

elde edilir. İntegre edersek

$$r = r_0 \cos^2 \varphi$$

olarak bulunur. Burada r_0 $\varphi = 0^\circ$ için mesafedir. Ekvatordaki manyetik alan için

$$B_E = \frac{\mu_0 p_m}{4\pi R^3}$$

yazabiliriz. Buradan manyetik dipol momenti

$$p_m = \frac{4\pi R^3 B_E}{\mu_0}$$

olarak bulunur. r uzaklığına ve φ açısına bağlı olan manyetik alan

$$B = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}{4\pi (r_0 \cos^2 \varphi)^3} \frac{4\pi R^3 B_E}{\mu_0} = \frac{B_E}{x^3} \frac{\sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}{\cos^6 \varphi}, x = \frac{R}{r_0}$$

olarak bulunur. Manyetik alanda m kütleli q yüklü bir tanecik hareket ederse

$$\frac{mv^2}{r} = qvB; r = \frac{mv}{qB}$$

yazabiliriz. Bu hareket bir akım gibi incelenirse çerçevelenen akımın manyetik dipol momenti

$$p_m = IS = \frac{q}{T} \pi r^2 = \frac{q}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{qr v}{2} = \frac{mv^2}{2B} = \frac{q}{2m} mvr = \frac{qL}{2m}$$

olarak yazılabilir. Açısal momentum korunduğu için manyetik dipol da korunmaktadır. Eğer tanecik belirli ve α açısı ile manyetik alana giriş yaparsa

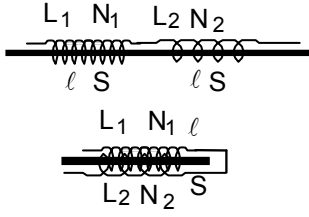
$$p_m = \frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{2B}; \frac{\sin^2 \alpha}{B} = \text{sabit}$$

yazabiliriz. φ_m taneciğin $\alpha = 90^\circ$ açı ile geldiği enlem olsun. Bu durumda ekvator da tanecik belirli ve kritik α_{kr} açı ile gelebilir.

$$\frac{\sin^2 \alpha_{kr}}{B_E} = \frac{\sin^2 90^\circ}{B}$$

$$\sin^2 \alpha_{kr} = \frac{B_E}{B_m} = \frac{x^3 \cos^6 \varphi}{\sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}; \sin \alpha_{kr} = \cos^3 \varphi \sqrt{\frac{x^3}{\sqrt{1+3\sin^2 \varphi}}}$$

olarak bulunur.



10. Bir indüktans için

$$B = \mu_0 n I = \frac{\mu_0 N I}{\ell}; \Phi = N I S = \frac{\mu_0 N^2 I S}{\ell} = L I$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

yazabiliriz. Yani uzunlukları ve kesit alanları S olan bobinlerin indüktansları bobinlerin sarım sayısının karesi ile doğru orantılıdır. İki bobin için

$$L_1 \sim N_1^2; L_2 \sim N_2^2$$

olur. Bu iki bobin seri olarak bağlandıklarında oluşan bobinin toplam sayısı için

$$N = N_1 \pm N_2$$

yazabiliriz. Buradan oluşan sistemin indüktansı

$$L \sim N^2 \sim (N_1 \pm N_2)^2 \sim N_1^2 \pm 2N_1 N_2 + N_2^2 = L_1 + 2\sqrt{L_1 L_2} + L_2 = L_1 \pm 2M + L_2$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2} = 2L$$

olarak bulunur. Ayrıca dirençler için

$$X_{L1} = \omega L_1 = \omega 4L = 4X_{L2} = 4R; X_{L2} = \omega L_2 = \omega L = R$$

indüktif bağıntıdan kaynaklanan katkı

$$\omega M = \omega 2L = 2R$$

olur. Primerde akan akım indüktif bağlantıdan dolayı sekonderde e.m.k. indükte etmekte ve sekonderde akım akmaktadır. Sekonderde akan akım primerde e.m.k. indükte etmektedir. Primerde uygulanan gerilim için karmaşık sayılarla çalışmamız daha uygun olur.

$$U = U_0 \sin \omega t; \hat{U} = U_0 e^{i\omega t}$$

primerde akan akım için

$$I_1 = I_{01} \sin(\omega t + \phi_1); \hat{I}_1 = I_{01} e^{i(\omega t + \phi_1)}$$

sekonderde akan akım için

$$I_2 = I_{02} \sin(\omega t + \phi_2); \hat{I}_2 = I_{02} e^{i(\omega t + \phi_2)}$$

yazabiliriz. Primer için

$$U - L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt} = I_1 R_1; -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt} = I_2 R_2$$

$$\hat{U} - i\omega L_1 \hat{I}_1 - i\omega M \hat{I}_2 = \hat{I}_1 R_1; -i\omega M \hat{I}_1 - i\omega L_2 \hat{I}_2 = \hat{I}_2 R_2$$

$$\hat{U} - i4R \hat{I}_1 - i2R \hat{I}_2 = \hat{I}_1 R; -i2R \hat{I}_1 - iR \hat{I}_2 = \hat{I}_2 4R$$

yazabiliriz. Buradan primerdeki empedans

$$\hat{I}_2 = \frac{2\hat{I}_1(1-4i)}{17}; \hat{U} = \frac{\hat{I}_1 R(33+64i)}{17} = \hat{I}_1 \hat{Z}_1$$

$$|\hat{Z}_1| = R \sqrt{\frac{(33+64i)(33-64i)}{17 \cdot 17}} = \frac{72R}{17}$$

olarak bulunur. Sekonder için

$$\hat{I}_2 = \frac{2\hat{I}_1(1-4i)}{17} = \frac{2\hat{U}(1-4i)}{R(33+64i)}$$

$$\hat{Z}_2 = \frac{R(33+64i)}{2(1-4i)} = \frac{R(-223+196i)}{34}$$

$$|\hat{Z}_2| = \sqrt{\frac{(-223+196i)(-223-196i)}{34 \cdot 34}} = \frac{297R}{34}$$

olarak bulunur.

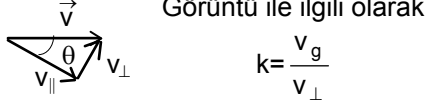
11. Objektifin büyütme oranı

$$k = \frac{b}{a} = \frac{f}{a}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$a = \frac{\ell}{\sin \theta}; b \approx f$$

olduğunu kabul etmiş oluyoruz.



yazabiliriz. Burada

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

objektifin eksenine dik olan hızıdır.

$$v_g = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

ise fotoğraf kağıdı üzerindeki görüntünün hızıdır. Buradan

$$\Delta t = \frac{\Delta h \ell}{fv \sin^2 \theta}$$

olarak bulunur.

12. a) Elektron-pozitron çiftinin yok olması ile iki foton yaratılmaktadır. Bu çift foton oluşumu olayını hareketsiz K koordinat referans sisteminden inceleyebiliriz. Bu koordinat sisteminde oluşan fotonların dalga boyları için

$$2m_0c^2 = 2\hbar\omega = 2 \frac{2\pi\hbar c}{\lambda}; \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0c}$$

yazabiliriz. Şimdi aynı olayı v hızı ile hareket eden K' koordinat sisteminde inceleyelim. Bu koordinat sistemde elektron ve pozitron sabit v hızı ile hareket etmektedir. Bu iki taneciğin enerji ve momentumları için

$$2W = 2\sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1} + \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_2}; 2p = 2\gamma m_0v = \frac{2m_0v}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_1} - \frac{2\pi\hbar}{\lambda_2}; \beta = \frac{v}{c}$$

yazabiliriz. Bu denklemlerden

$$2\sqrt{\left(\frac{m_0c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)^2 c^2 + m_0^2c^4} + \frac{2m_0c^2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1}; m_0c^2 \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{1-\beta^2} + 1} + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}; \omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{m_0c} \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

olarak bulunur.

b) Her saniye N tane elektron ve pozitron anihilasyon prosesine girdiğine göre K gözlemciye göre sağ ve sol tarafa N tane foton yayılacağı anlama gelmektedir. K gözlemciye göre aynalara etki eden kuvvetler eşit olup

$$F = N\Delta p_{\gamma} = N \cdot 2p_{\gamma} = 2N \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = 2Nm_0c$$

olarak bulunur. Hareketli K' gözlemcisine göre fotonların dalga boyları, momentumları ve birim zamanda aynalara çarpan foton sayıları farklı olacaktır. Aynalara etki eden kuvvetler

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{\Delta t_1} = \frac{1}{\gamma \Delta t} = N \sqrt{1-\beta^2}; \Delta t = \frac{1}{N}$$

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_0 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}; \omega_{12} = \omega_{21} = \omega_0 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$F_1 = N_1(p_{12} + p_{11}) = N_1 \left(\frac{\hbar\omega_{12}}{c} + \frac{\hbar\omega_{11}}{c} \right) = \frac{N\hbar\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c} \left(\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \right) = 2Nm_0c$$

$$F_2 = N_2(p_{22} + p_{21}) = N_2 \left(\frac{\hbar\omega_{12}}{c} + \frac{\hbar\omega_{21}}{c} \right) = \frac{N\hbar\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}}{c} \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} + \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \right) = 2Nm_0c$$

olarak bulunur. Kuvvetlerin oranı birdir.

13. Bir fotonun enerjisi

$$W_1 = \hbar\omega$$

momentumu ise

$$p_1 = \frac{\hbar\omega}{c}$$

olur. Her lambadan birim zamanda çıkan foton sayısı

$$N = \frac{P}{\hbar\omega}$$

r uzakta bir küre düşünürsek birim alana düşen tanecik sayısı

$$N_0 = \frac{N}{4\pi r^2} = \frac{P}{4\pi r^2 \hbar\omega}$$

S alana düşen foton sayısı

$$N_S = N_0 S = \frac{PS}{4\pi r^2 \hbar\omega}$$

bu fotonların yansımaya sonucu uğradıkları momentum değişimi yansımaya sonucu aynı zamanda etki eden kuvveti vermektedir.

$$F = N_S \cdot 2p_1 = \frac{PS}{4\pi r^2 \hbar\omega} \frac{2\hbar\omega}{c} = \frac{PS}{2\pi r^2 c}$$

Bu kuvvetin oluşturduğu moment

$$M = F \cdot \ell = \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c}$$

olur. Çubuklar çok küçük açıyla dönerse momentum değişimi yaklaşık olarak aynı kaldığı, ama S yüzeye düşen foton sayısı değiştiği kabul edebiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} J\alpha &= \frac{PS\ell}{2\pi(r+\ell\theta)^2 c} - \frac{PS\ell}{2\pi(r-\ell\theta)^2 c} = \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c \left(1 + \frac{\ell\theta}{r}\right)^2} - \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c \left(1 - \frac{\ell\theta}{r}\right)^2} = \\ &= \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c \left(1 + \frac{2\ell\theta}{r}\right)} - \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c \left(1 - \frac{2\ell\theta}{r}\right)} = \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c} \left(1 - \frac{2\ell\theta}{r}\right) - \frac{PS\ell}{2\pi r^2 c} \left(1 + \frac{2\ell\theta}{r}\right) = -\frac{2PS\ell^2\theta}{\pi r^3 c} \\ \alpha + \frac{6PS\theta}{\pi r^3 mc} &= 0; J = \frac{m(2\ell)^2}{12} = \frac{m\ell^2}{3} \end{aligned}$$

titreşimin açısal frekansı ve periyodu

$$\Omega = \sqrt{\frac{3PS}{\pi r^3 mc}}; T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{6PS}{\pi r^3 mc}}} = \sqrt{\frac{2\pi^3 r^3 mc}{3PS}}$$

olarak bulunur.