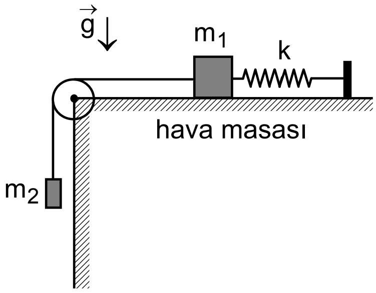
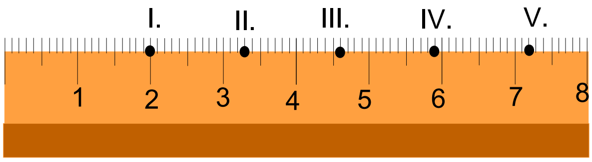
VII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI–2000



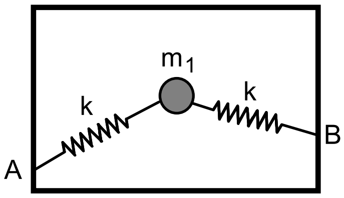
1. a) Bir yayın yay sabitinin bulunması için bir deney yapılmaktadır. Bu deneyde sürtünmeyi ihmal etmek için hava masası kullanılmaktadır. Hava masası üzerinde kütlesi bilinen (m_1) bir cisim masanın kenarına sabitlenmiş ve yay sabiti k olan bir yaya, diğer tarafta ise makaradan geçen bir ip sayesinde değişken m_2 kütleli bir cisme bağlıdır. Sistem dengede iken, kıvılcım zamanlayıcısı çalıştırılarak m_1 kütleli cismin yeri işaretlenir. Bu işlem çeşitli m_2 kütleleri için tekrarlanır. Bu şekilde alınan ölçümler DATA-1 adlı kağıtta verilmiştir. Burada m_1 kütlesinin konumuna ait numaralar şu şekildedir;

DATA-1



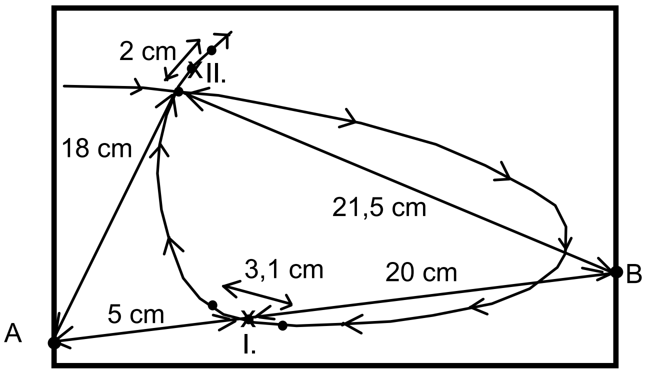
Konum No	m_2 (gr)
I.	30
II.	50
III.	70
IV.	90
V.	110

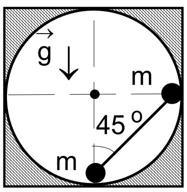
DATA-1'i kullanarak yayın yay sabit k'yı bulunuz.



b) Yukarıda k değerini bulduğunuz yayla özdeş ikinci bir yay kullanılarak hava masası üzerinde yanda üstten görünüşü verilen sistem kurulmuştur. Masa yatay konumdadır. Yayların serbest boyları ℓ_0=10 cm, m_1=500 gr olup kıvılcım zamanlayıcısı ν=40 Hz frekansta çalışmaktadır. Sistem harekete başlayınca kütlenin eliptik bir yörünge üzerinde hareket ettiği gözlenmekte olup, belirli anlardaki konumu kağıt üzerine işaretlenmektedir. DATA 2 adlı kağıtta verilen ölçümleri kullanarak sistemin **I.** ile gösterilen konumundaki toplam enerjisini hesaplayınız. Aynı işlemi **II.** ile gösterilen konum için tekrar ediniz ve sonuçları karşılaştırarak tartışınız. (DATA-2 de cismin sadece **I.** ve **II.** konumlar civarındaki data noktaları verilmektedir).

DATA-2

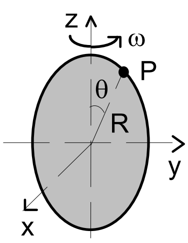




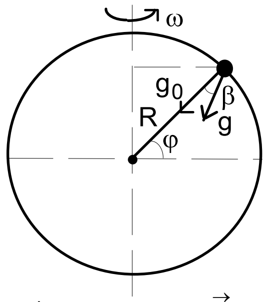
2. Kütleleri m olan iki bilye kütlesiz bir çubukla birbirine bağlanıp sürtünmesiz içi boş bir küre içerisine yerleştirilmiştir. Çubuk düşeyle 45° lik bir açı yaptığı anda sistem serbest bırakılıyor. Yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.

a) Çubuktaki gerilme kuvveti çubuğun döndüğü açı θ'ya nasıl bağlıdır?

b) Tepki kuvvetleri çubuğun döndüğü açı θ'ya nasıl bağlıdır?

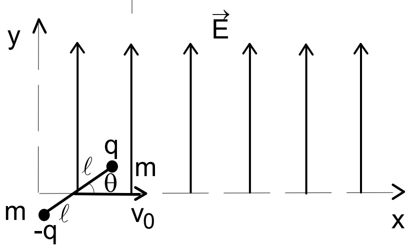


3. Yarıçapı R ve kütlesi m olan homojen katı bir disk çapı boyunca geçen bir eksen etrafında açısal hızı ile döndürülmektedir. Bu diskin çevresi üzerinde verilen bir P noktası v_p hızı ile dönmektedir. P noktası aniden sabitlenirse diskin kütle merkezinin hızı v_p cinsinden ne olur?



4. Gezegen Dünya kendi eksenin etrafında dönme sonucu yerçekimi ivmesi enlemine bağılıdır. Dünyanın dönmesi ihmal edilirse yerçekimi ivmesi Dünyanın merkezine doğru olup g_0 değerinedir. Dünyanın açısal hızı ω, yarıçapı R ise φ enleminde bulunan bir nokta için yerçekimi g ivmesini ve Dünyanın merkeze doğru geçirilen doğrultu ile yaptığı β açı nedir?

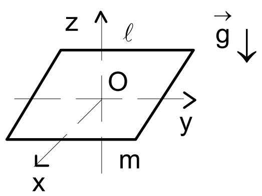
Not: Dünyanın yarıçapı $R=6{,}37.10^3$ km, kütlesi $m=5{,}78.10^{24}$ kg, kendi ekseni etrafında dönme periyodu T=23 h 56 dak 4 s, çekim sabiti $\gamma=6{,}67.10^{-11}$ Nm^2/kg^2 olarak veriliyor.



5. a) 2ℓ gibi küçük bir uzaklıkla birbirlerinden ayrılan kütleleri m, yükleri -q ve +q zıt ve eşit değerli noktasal iki yük bir dipol oluşturmaktadır. x-y koordinat sistemine göre y ekseni boyunca uygulanan ve y ekseni boyunca değişmekte olan E şiddetinde bir elektrik alanı ile θ açısı yapacak şekilde bu elektrik dipole etki eden kuvvetin yönünü ve değerini bulunuz. Elektrik alanının gradyenti sabit olup $\frac{dE}{dy}=\xi$ olarak verilmektedir.

b) Tarif edilen dipol θ açısı yaparak yukarıda bahsedilen elektrik alanına x yönünde v_0 hızı ile hareket ederek girmekte ve $L>>\ell$ kadar yol aldıktan sonra elektrik alanının dışına çıkmaktadır. Bu durumda dipol y-yönünde ne kadar yer değiştirmiştir? Dipolün kinetik enerjisi elektrik alanı içinden geçerken çok fazla değişmediğini kabul ediniz. Ayrıca y yönünde meydana gelen yer değişmeyi $0<x<2L$ aralığında kabaca çiziniz.

c) t=0 anında, serbestçe dönebilen p dipolünün elektrik alanına küçük θ_0 açısı yaparak v_0 hızı ile girdiğini düşünürsek herhangi bir t anında dipol ekseni ne kadar dönmüştür? t=0 anında dipolün açısal hızının sıfır olduğu verilmektedir.

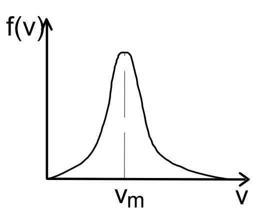


6. Kenar uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan kare şeklindeki bir süper iletken çerçeve ($B_x=-\xi x$, $B_y=0$, $B_z=\xi z+B_0$) bileşenlerinden oluşan düzgün olmayan bir manyetik alan içine şekilde görüldüğü gibi yerleştirilmiştir. Çerçevenin indüktans değeri L'dir. Başlangıç anında çerçeve merkezi O orijini ile çakışacak şekilde tutulmakta olup kenarları x ve y eksenlerine paraleldir ve çerçevede akım yoktur. Daha sonra çerçeve serbest bırakılıyor. Çerçeve nasıl hareket edecek ve t zaman sonra nerede bulunacaktır?

7. a) Homojen B_0 manyetik alanında bulunan ve içinden j yoğunluğunda homojen akım geçen silindir şeklindeki bir iletkenin içindeki manyetik kuvvet basıncının gradyantı nedir?

b) Eğer bu basıncın gradyantı çok büyük ise katı cisim bir sıvı gibi davranır. Telin dış yüzeyinde basınç P=0 dır. Yarıçapı R olan I akımı geçiren bir telde, telin ekseninden radyal yönde r uzaklıktaki bir noktada P basıncını bulunuz. Bulduğunuz basınç ifadesi manyetik kuvvetin teli radyal yönde sıkıştırdığını gösterecektir. Yarıçapı 0,5 mm olan bir telden 50 kA akım geçirilirse telin eksenindeki basıncı nedir? Boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısı $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ olarak veriliyor

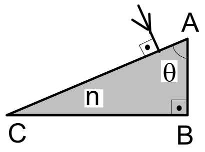
c) Eğer tel iç yarıçapı R_1 dış yarıçapı R_2 olan ortası boş bir tüp şeklinde ise, içteki boşluğa bakan kısımdaki basıncı R_1, R_2 ve I cinsinden bulunuz.



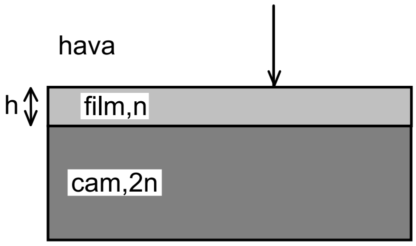
8. T sıcaklığında bulunan bir gazdaki moleküllerin hızlarının dağılımı Maxwell dağılımı

$$f(v)=4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3}\,v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

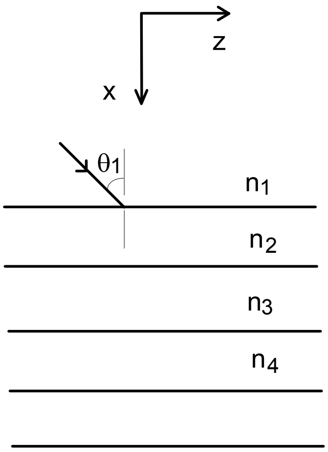
ile verilmektedir. Maxwell dağılımında çok net bir maksimum mevcuttur. Maksimumun gerçekleştiği değere en muhtemel hız v_m denir. Kütlece eşit miktarda ortalama hızı $v_O=400$ m/s olan ${}^{16}_{8}O$ oksijen molekülleri ve ortalama hızı $v_N=500$ m/s olan ${}^{14}_{7}N$ azot molekülleri karıştırılıyor. Oluşan karışımda oksijen ve azot moleküllerinin en muhtemel hızlarını bulunuz. Verilen gazların ısı kapasitelerinin eşit olduğunu varsayınız.



9. Kırıcılık indisi n, camdan yapılmış dik ve tepe açısı θ olan prizmanın AC yüzeyine, bir ışın dik olarak düşmekte ve prizmanın içinde önce AB yüzeyine gelmektedir. Prizmadan çıktığında ışının uğradığı toplam sapmanın minimum olabilme koşullarını araştırınız.



10. Kırıcılık indisi 2n olan bir cam plakanın üzeri h kalınlığında ve n kırıcılık indisine sahip şeffaf bir film ile kaplanıyor. Havadan yüzeye dik olarak gelen ve λ=400 nm dalga boyundaki paralel bir ışık demeti altında film yüzeyinin tam karanlık gözükmesi için, kaplama maddesinin kırıcılık indisi n, ve kalınlığı h ne olmalıdır?



11. Bir ortamın kırıcılık indisi x yönünde sürekli olarak değişmektedir. Bu durumda kırıcılık indisinin n_1 olduğu yerde θ_1 gelme açısıyla ortama giren ışık ışınının n(x) ortamında ilerlerken takip ettiği yol

$$1)\quad \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \frac{n^2(x)}{n_1^2 \sin^2\theta_1} - 1$$

denklemini sağlayacak şekildedir. Burada n(x) ortamın x'e göre değişen kırıcılık indisidir.

a) Işığın girdiği ortamın homojen olduğu durumda x ve z arasındaki bağlantıyı bulup tartışınız.

b) θ_1=30°, n_1=1,0 ve n_2=1,5 için ışığın takip ettiği yolu (a) şıkkında bulduğunuz denkleme göre ve Snell yasasına göre bulup karşılaştırınız.

c) Yukarıda verilen (1) nolu denklemin özel bir hali

$$2)\quad \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2n_1^2 \sin^2\theta_1}\frac{dn^2(x)}{dx}$$

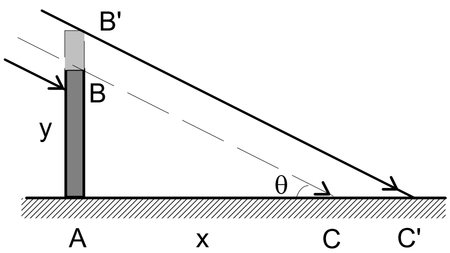
şeklinde olup ışın denklemi diye anılır. Kırıcılık indisinin

$$3)\quad n^2(x) = n_0^2 - Dx^2$$

olarak değiştiği bir ortamda, ışın denklemini kullanarak, ışığın takip ettiği yolu, yani x'i z'nin fonksiyonu olarak n_0 (x=0 daki n değeri), θ_1 ve D cinsinden bulunuz.

d) n_0=1,5, D=0,1 mm^{-2} olarak verilmektedir. θ_1=30° ve 60° için ışının bu ortamda takip edeceği yolları(x-z grafiklerini) çiziniz ve tartışınız.

e) (c) şıkkında bulduğunuz x(z) denkleminin (1) nolu denklemin bir çözümü olduğunu gözönüne alarak, ışının (3) nolu denklemle tanımlanan ortama x yönünde en fazla x_{max} mesafesine sapacağına gösteriniz. Bu x_{mak} nedir?



12. Yüksekliği y olan bir AB duvarına sol taraftan yatayla θ açısı yaparak gelen paralel bir ışık demeti bu duvarın AC boyundaki gölgesini yatay düzlem üzerinde oluşturmaktadır. Eğer duvarın boyu üst taraftan belli bir hızla uzatılırsa yeni boyu AB'=y' olduğunda gölgesinin boyu da AC' olacaktır. Duvarın boyunun uzama hızı $v_d=\beta c$ (β<1 ve c ışık hızı) olsun.

a) Gölge boyunun ortalama hızı v_g'yi; β, c ve θ cinsinden bulunuz.

b) β=0,5 ise, $v_d=v_g$ olması için θ açısının değerini bulunuz.

c) Bu problemin (a) şıkkını duvarın boyunun $v_d=\beta c$ (β<1 ve c ışık hızı) hızı ile kısaldığı durum için çözünüz. Bulduğunuz çözüme dayanarak $\beta \ll \sin\theta$, $\beta=\sin\theta$ ve $\beta>\sin\theta$ durumları için gölgenin hareketini irdeleyiniz.

VII. ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-2000

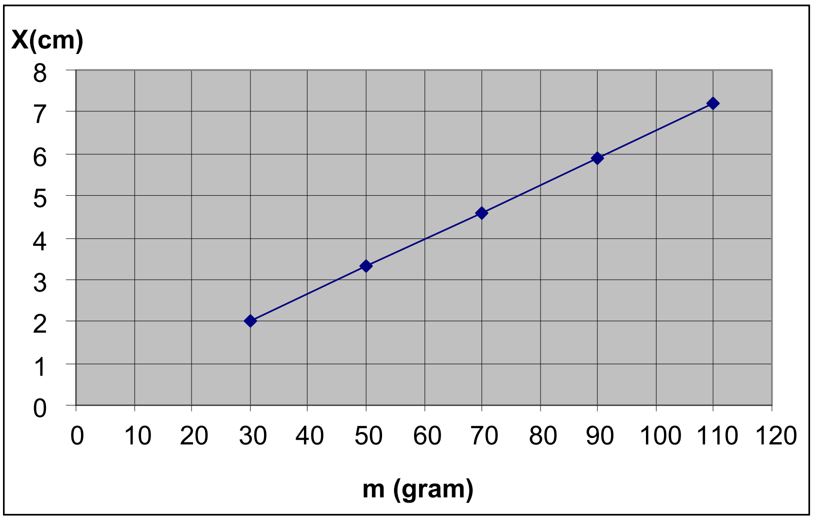
1. a) Data-1 deki kütlenin konumunu gösteren noktalar bir cetvelle birleştirilerek bir doğru çizilir. Bu doğru üzerinde herhangi bir nokta(data noktası olması şart değildir) merkez alınarak bu noktaların uzaklığı bulunur.

$$k(x-x_0)=mg$$

denklemine göre:

$x-x_0$(cm)	m_2 (gr)
2	30
3,3	50
4,6	70
5,9	90
7,2	110

değerleri kullanılarak $(x-x_0)$-m grafiği çizilirse eğim $\frac{g}{k}$ olacaktır. Buradan k g=9,8 m/ s^2 alınarak hesaplanır. Eğim=0,0665614 cm/gr olup k=14,7 N/m olarak bulunur.



b) 1 nolu konum için yay uzunlukları, yayların bağlandıkları noktalardan olmak üzere ölçülürse ℓ_1=5 cm, ℓ_2=20 cm olarak bulunur. ℓ_0=10 cm verilmiştir. Buradan potansiyel enerji

$$\Pi=\frac{kx_1^2}{2}+\frac{kx_2^2}{2}=\frac{14,7.(0,05)^2}{2}+\frac{m_1v^2}{2}=0,092 \text{ J}$$

olarak bulunur. Kinetik enerjiyi bulmak için 1. Konum civarındaki hızı bulmak gerekir. Bu konumdan bir önceki ve bir sonraki data noktaları arasındaki uzaklık Δx=3,1 cm olarak ölçülür. Bu sırada geçen süre $t=2.\frac{1}{\nu}$ dir. Burada ν, kıvılcım zaman ayarlayıcısının frekansı 40 Hz dir. Hız

$$v=\frac{\Delta x}{t}=\frac{3,1.40}{2}=62 \text{ cm/s}$$

olarak bulunur. Kinetik enerji

$$K=\frac{m_1v^2}{2}=0,096 \text{ J}$$

olur. Toplam enerji W=K+Π=0,188 J olarak bulunur. 2. konum için: gerekli ölçümler yapılırsa ℓ_1=18 cm, ℓ_2=21,5 cm olarak bulunur. ℓ_0=10 cm verilmiştir. Buradan potansiyel enerji

$$\Pi=\frac{kx_1^2}{2}+\frac{kx_2^2}{2}=\frac{14,7.(0,08)^2}{2}+\frac{14,7.(0,115)^2}{2}=0,144 \text{ J}$$

olarak bulunur. Kinetik enerjiyi bulmak için 1. Konum civarındaki hızı bulmak gerekir. Bu konumdan bir önceki ve bir sonraki data noktaları arasındaki uzaklık Δx=2 cm olarak ölçülür. Hız

$$v=\frac{\Delta x}{t}=\frac{2.40}{2}=40 \text{ cm/s}$$

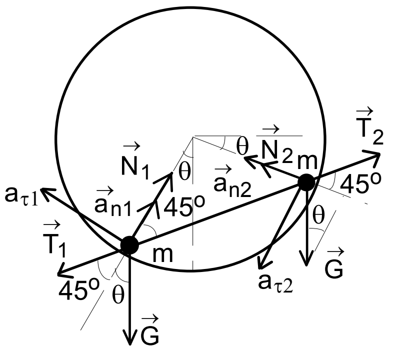
olarak bulunur. Kinetik enerji

$$K=\frac{m_1v^2}{2}=0,04 \text{ J}$$

olur. Toplam enerji

$$W=K+\Pi=0,184 \text{ J}$$

olarak bulunur. Toplam enerji hareket sırasında az da olsa bir miktar sürtünme olduğundan azalmıştır.



2. a) Çubuk θ açısına döndüğünde

$$\vec{G}+\vec{T}_1+\vec{N}_1=m\vec{a}_1;\ \vec{G}+\vec{T}_2+\vec{N}_2=m\vec{a}_2$$

yazabiliriz. Normal ve teğetsel koordinatları kullanarak bileşenlere ayırabiliriz.

$$N_1\text{-}mg\cos\theta\text{-}T\cos45°=m\omega^2 r;\ T\sin45°\text{-}mg\sin\theta=ma_\tau$$

$$N_2\text{-}mg\sin\theta\text{-}T\cos45°=m\omega^2 r;\ mg\cos\theta\text{-}T\sin45°=ma_\tau$$

Buradan teğetsel yöndeki denklemlerden

$$a_\tau=\frac{g(\cos\theta-\sin\theta)}{2};\ T=\frac{\sqrt{2}\,mg(\cos\theta+\sin\theta)}{2}$$

olarak bulunur.

b) Normal yöndeki denklemleri kullanabilmek için enerji korunumu yasasına ihtiyaç vardır.

$$mgr=mgr(1\text{-}\sin\theta)+mgr(1\text{-}\cos\theta)+2\frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

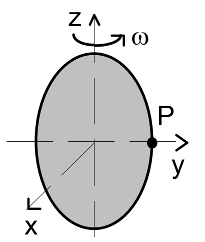
Buradan

$$\omega^2 r=g(\sin\theta+\cos\theta\text{-}1)$$

olarak bulunur. Bu ifadenin yardımı ile tepki kuvvetleri

$$N_1=\frac{mg(5\cos\theta+3\sin\theta-2)}{2};\ N_2=\frac{mg(3\cos\theta+5\sin\theta-2)}{2}$$

olarak bulunur.



3. P noktası y ekseni boyunca olsun. Açısal momentum korunumu yasasından diskin P noktasının etrafında dönmeye başladıktan sonraki açısal hız

$$J_0\omega_0=J\omega;\ J_0=\frac{mR^2}{4};\ J=J_0+mR^2;\ \omega=\frac{\omega_0}{5}$$

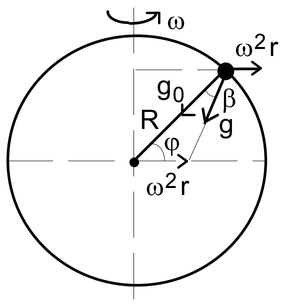
olarak bulunur. Disk katı cisim olduğu için diskin tüm noktaları aynı açısal hız ile dönmeye başlarlar. Soruda tarif edilen P noktanın çizgisel hızı

$$v_P=\omega_0 r=\omega_0 R\sin\theta$$

olarak yazılabilir. Diskin kütle merkezinin P noktası etrafında dönme sonucu çizgisel hızı

$$v_m=\omega r=\frac{\omega_0 R\sin\theta}{5}=\frac{v_P}{5}$$

olarak bulunur.



4. Dünyanın dönmesi ihmal edilirse yerçekimi ivmesi Dünyanın merkezine doğru olup

$$g_0=\frac{\gamma m}{R^2}=9{,}832\ m/s^2$$

Dünyanın

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=0{,}000072884\ rad/s$$

açısal hızı ile dönme sonucu φ enleminde bulunan bir nokta için yerçekimi g ivmesi Dünyanın merkeze doğru geçirilen doğrultu ile β açısı yaparsa

$$\frac{g}{\sin\varphi}=\frac{g_0}{\sin(180^o-\varphi-\beta)}=\frac{\omega^2 r}{\sin\beta}$$

yazabiliriz. β açısı çok küçüktür. Bu durumda $\sin\beta\approx\beta$; $\cos\beta=1$ yazabiliriz. Buradan

$$\frac{g}{\sin\varphi}=\frac{g_0}{\sin(\varphi+\beta)}=\frac{g_0}{\sin\varphi\cos\beta+\cos\varphi\sin\beta}=\frac{g_0}{\sin\varphi+\beta\cos\varphi}=$$

$$=\frac{g_0}{\sin\varphi(1+\beta\,\mathrm{ctg}\varphi)}=\frac{g_0(1-\beta\,\mathrm{ctg}\varphi)}{\sin\varphi};\ g=g_0(1\text{-}\beta\,\mathrm{ctg}\varphi)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{g}{\sin\varphi}=\frac{\omega^2 r}{\sin\beta};\ \frac{g_0(1-\beta\,\mathrm{ctg}\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{\omega^2 R\cos\varphi}{\beta};\ g_0(\beta\text{-}\beta^2\mathrm{ctg}\varphi)=\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\beta\approx\frac{\omega^2 R\sin\varphi\cos\varphi}{g_0}=0{,}00344\sin\varphi\cos\varphi$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$g=g_0(1\text{-}\omega^2 R\cos^2\varphi)=9{,}832(1\text{-}0{,}0034\cos^2\varphi)$$

olarak bulunur. Bu ifade $\varphi=90°$ için maksimumdur, $\varphi=0°$ için minimumdur.

5. a) Dipolün elektrik alan boyunca dipol momenti

$$p_{\parallel}=p\sin\theta$$

olarak yazılabilir. Bu dipole etki eden kuvvet

$$F_y= p_{\parallel}\frac{dE}{dz}=p\xi\sin\theta;\ \xi=\frac{dx}{dz}$$

olup y yönündedir.

b) Dipolün kazandığı ivme

$$a_y=\frac{\xi p\sin\theta}{m}$$

olur. Bu dipol x ekseni boyunca sabit hızla gitmektedir.

$$t_1=\frac{L}{v_0}$$

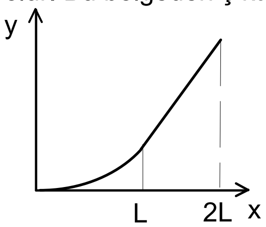
sürede y ekseni boyunca sapma, $0\leq x\leq L$ durumunda

$$\Delta y_1=\frac{a_y t_1^2}{2}=\frac{\xi p\sin\theta}{2m}\frac{L^2}{v_0^2}=\frac{\xi pL^2\sin\theta}{4K};\ K=\frac{mv_0^2}{2}$$

olur. Bu bölgede y ekseni boyunca dipolün kazandığı hız

$$v_y=a_y t_2=\frac{p\alpha\sin\theta}{m}\frac{L}{v_0}$$

olur. Bu bölgeden çıktıktan sonra dipol y ekseni boyunca sabit hız ile gitmektedir.



$x\geq L$ durumunda dipol

$$t_2=\frac{x-L}{v_0}$$

süre ile hareket eder ve kazandığı sapma

$$\Delta y_2=v_y t_2=\frac{p\alpha\sin\theta}{m}\frac{L}{v_0}\frac{x-L}{v_0}=\frac{\xi pL(x-L)\sin\theta}{2K}$$

olur. Toplam sapma

$$\Delta y=\Delta y_1+\Delta y_2=\frac{\xi pL^2\sin\theta}{4K}+\frac{\xi pL(x-L)\sin\theta}{2K}=\frac{\xi pL^2\sin\theta}{4K}\left(\frac{2x}{L}-1\right)$$

olarak bulunur. Grafikte kabaca dipolün x mesafesine bağlı olan sapması verilmektedir.

c) Dipol elektrik alanında belirli bir açı ile bulunursa dipole moment etki eder. Bu momentin etkisi ile dipol küçük titreşimler yapar. Bu titreşimlerin titreşim açısal frekansı

$$J\alpha=J\ddot{\theta}= -pE\sin\theta\approx -pE\theta$$

$$\ddot{\theta}+\frac{pE}{J}\theta=0;\ \omega=\sqrt{\frac{pE}{J}}$$

olarak bulunur. Açısal konumu veren denklem

$$\theta=\theta_0\cos\omega t$$

şeklinde yazılabilir.

6. Çerçevenin harekete geçmesi ile çerçevede indükte edilmiş akım akmaya başlar. Manyetik akı ile indükte edilmiş e.m.k. arasındaki ilişkiden akan akım

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}= -L\frac{dI}{dt};\ \Delta(BS)=L\Delta I$$

$$(\xi z+B_0)\ell^2-B_0\ell^2=L(I-0);\ I=\frac{\xi\ell^2 z}{L}$$

olarak bulunur. Çerçevenin dipol momenti

$$\vec{p}_m=IS\vec{n};\ p_m=IS=\frac{\xi\ell^4 z}{L}$$

olur. Bu dipole etki eden kuvvet

$$F=p_m\frac{\partial B_z}{\partial z}=\frac{\xi^2\ell^4 z}{L}$$

olup hareketin zıt yönünde etki etmektedir. Hareket denklemi

$$ma=mg-F=mg-\frac{\xi^2\ell^4 z}{L};\ \ddot{z}+\frac{\xi^2\ell^4 z}{mL}=g$$

olur. Bu diferansiyel denklem harmonik titreşimin denklemimidir. Titreşimin titreşim açısal frekansı

$$\omega=\sqrt{\frac{\xi^2\ell^4}{mL}}$$

olarak yazılabilir. Çerçevenin serbest bırakıldığı yerden maksimum hıza ulaşma mesafesi F=mg için gerçekleşir. Buradan bu mesafe

$$z_0=\frac{mgL}{\xi^2\ell^4}$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin çözümü homojen diferansiyel denklemin çözümü ile kısmi çözümün toplamıdır. Bu çözüm

$$z(t)=z_1(t)+z_2(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+C_3$$

şeklinde yazılabilir. $z_2(t)=C_3$ kısmi çözümden kaynaklanan bir sabittir. Bu durumda $\ddot{z}=0$ olur. Bu sabit

$$\frac{\xi^2\ell^4C_3}{mL}=g;\ C_3=\frac{mgL}{\xi^2\ell^4}=z_0$$

olarak bulunur. Çerçevenin hızı

$$v(t)=-\omega C_1\sin\omega t+\omega C_2\cos\omega t$$

olur. $t_0=0$ anında

$$z(0)=0$$
$$v(0)=0$$

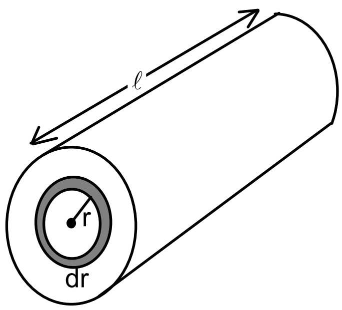
dır. Buradan

$$C_2=0$$
$$C_1=-C_3$$

olarak bulunur. Çözüm ise

$$z(t)=\frac{mgL}{\xi^2\ell^4}(1-\cos\omega t)=\frac{mgL}{\xi^2\ell^4}\left(1-\cos\sqrt{\frac{\xi^2\ell^4}{mL}}t\right)$$

olarak bulunur.



7. a) Akan akım için

$$dI=jdS$$
$$dS=2\pi rdr$$

yazabiliriz. Bu akım Manyetik alan oluşturmaktadır. etki eden kuvvet için

$$d\vec{F}=d\vec{I}\times(\vec{B}+\vec{B}_0)\,\ell=\vec{j}\times(\vec{B}+\vec{B}_0)\,Sdr;\ S=2\pi r\ell$$

yazabiliriz. Burada B_0 dış manyetik alandır. Manyetik kuvvetin basıncının gradyantı

$$\frac{dP}{dr}\vec{e}_r=\vec{j}\times(\vec{B}+\vec{B}_0)$$

$$P=\frac{dF}{dS}$$

olarak bulunur. Dış manyetik alan sıfır ise

$$\vec{j}\perp\vec{B}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{dP}{dr}=jB$$

olarak yazılabilir. Bu ifadeyi başka yoldan da türetebiliriz. Dolanım teoreminden telde akan akımın r uzaklığına bağlı olarak oluşturduğu manyetik alan

$$\oint_\ell \vec{B}.d\vec{\ell}=\mu_0 I$$

$$2\pi rB=\mu_0 j\pi r^2;\ B=\frac{\mu_0 jr}{2}$$

olarak bulunur. Bu manyetik alanın r uzaklıktaki basınç ve aynı zamanda birim hacimdeki manyetik alan enerjisi

$$P_M=\frac{B^2}{2\mu_0}=\frac{\mu_0 j^2r^2}{8}$$

olur. Telde sürekli belirli yük olduğu için bir homojen yüklü çubuk gibi davranacak ve radyal yönde elektrik alan oluşturacak. Bu durumda Gaus teoremi uygulanılabilir.

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}\quad ;2\pi r\ell E=\frac{\rho\pi r^2\ \ell}{\varepsilon_0}\ ;\ E=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

olarak yazılabilir. Bu elektrik alanın r uzaklıktaki basınç ve aynı zamanda birim hacimdeki elektrik alan enerjisi

$$P_E=\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}=\frac{\rho^2 r^2}{8\varepsilon_0}$$

olur. Burada ρ elektrik yükün hacimsel yük yoğunluğudur. Telde akım aktığı için iki enerji yoğunluğu birbirine eşit olmalıdır. Toplam basınç

$$P=P_M+P_E=2P_M=\frac{B^2}{\mu_0}=\frac{\mu_0 j^2 r^2}{4}$$

bu basıncın gradienti

$$\frac{dP}{dr}=\frac{\mu_0 j^2 r}{2}=jB$$

olarak bulunur.

b) Akım yoğunluğu

$$j=\frac{I}{\pi R^2}$$

olarak verilir. r<R kesitteki sınırdaki uzaklıktaki manyetik alan

$$B=\frac{\mu_0 I_r}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi r^2}{2\pi r}=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

olur. Soruda da verildiği gibi manyetik kuvvet yoğunluğu

$$|\vec{j}\times\vec{B}|=jB=\frac{\mu_0 I^2 r}{2\pi^2 R^4}=\frac{dP}{dr}$$

olarak yazılabilir. Buradan integrasyon sonucu

$$P=\int_r^R \frac{\mu_0 I^2 r dr}{2\pi^2 R^4}=\frac{\mu_0 I^2 (R^2-r^2)}{4\pi^2 R^4}$$

olarak bulunur. r=0 için

$$P=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 R^2}=3{,}185.10^8\ \text{Pa}$$

olarak bulunur.

c) Bu durumda akım yoğunluğu

$$j=\frac{I}{\pi(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})}$$

olarak verilir. $R_1<r<R_2$ kesitteki sınırdaki uzaklıktaki manyetik alan

$$B=\frac{\mu_0 I_r}{2\pi r}=\frac{\mu_0 j\pi(r^2-R_1^{\ 2})}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I(r^2-R_1^{\ 2})}{2\pi r(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})}$$

olur. Soruda da verildiği gibi manyetik kuvvet yoğunluğu

$$|\vec{j}\times\vec{B}|=jB=\frac{\mu_0 I^2(r^2-R_1^{\ 2})}{2\pi^2 r(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})^2}=\frac{dP}{dr}$$

olarak yazılabilir. Buradan integrasyon sonucu

$$P=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I^2(r^2-R_1^{\ 2})dr}{2\pi^2 r(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})^2}=$$

$$=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi^2(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})^2}\left(\frac{R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2}}{2}-R_1^{\ 2}\ln\frac{R_2}{R_1}\right)=$$

$$=\frac{\mu_0 I^2 R_2^{\ 2}}{4\pi^2(R_2^{\ 2}-R_1^{\ 2})^2}\left[1-\frac{R_1^{\ 2}}{R_2^{\ 2}}\left(1+2\ln\frac{R_2}{R_1}\right)\right]$$

olarak bulunur.

8. Maxwell dağılımının

$$f(v)=4\pi\sqrt{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^3}\,v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

türevini alıp sıfıra eşitlersek en muhtemel hızı bulabiliriz.

$$2v\,e^{-\frac{mv^2}{2kT}}-v^2\frac{2mv}{2kT}\,e^{-\frac{mv^2}{2kT}}=0;\ v_m=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Oksijen ve azot moleküllerinin kinetik enerjileri için

$$\frac{m_O v_O^2}{2}=\frac{32m_p v_O^2}{2}=\frac{3kT_O}{2};\ \frac{m_N v_N^2}{2}=\frac{28m_p v_N^2}{2}=\frac{3kT_N}{2}$$

yazabiliriz. Burada m_p protonun kütlesidir. Buradan sıcaklıklar için

$$T_O=\frac{32m_p v_O^2}{3k};\ T_N=\frac{28m_p v_N^2}{3k}$$

yazabiliriz. Kütlece eşit olan karışımın sıcaklığı

$$Mc(T_O-T)=Mc(T-T_N)$$

denkleminden

$$T=\frac{T_O+T_N}{2}=\frac{m_p}{3k}(16v_O^2+14v_N^2)$$

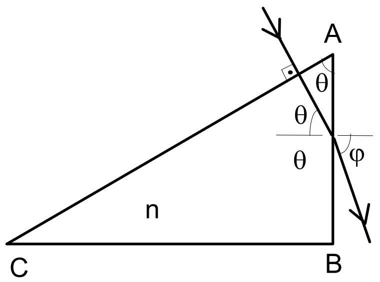
olarak bulunur. Oksijen moleküllerin en muhtemel hızı

$$v_{mO}=\sqrt{\frac{2kT}{m_O}}=\sqrt{\frac{8v_O^2+7v_N^2}{24}}=355\text{ m/s}$$

azot moleküllerin en muhtemel hızı

$$v_{mN}=\sqrt{\frac{2kT}{m_N}}=\sqrt{\frac{8v_O^2+7v_N^2}{21}}=380\text{ m/s}$$

olarak bulunur.



9. İlk kırılmanın olduğu AB yüzeyi için iki durum inceleyebiliriz. İlk durumda AB yüzeyinin normaline θ açısı ile gelen ışın φ açısı ile kırılmaktadır. Kırılma yasasından

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}=\frac{1}{n};\ \sin\varphi=n\sin\theta$$

yazabiliriz. Işının sapması $\delta=\varphi-\theta$ olarak yazılabilir. Sapma minimum olması için

$$\frac{d\delta}{d\theta}=\frac{d\varphi}{d\theta}-1=0$$

olmalıdır. Kırılma yasası ifadesinin türevinden

$$n\cos\theta d\theta=\cos\varphi d\varphi;\ \frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{n\cos\theta}{\cos\varphi}$$

olarak yazılabilir. Buradan

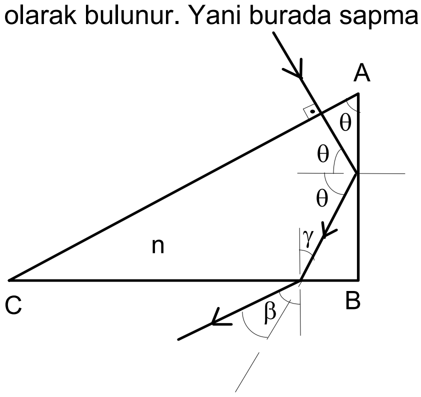
$$\frac{d\delta}{d\theta}=\frac{n\cos\theta}{\cos\varphi}-1=0;\ n\cos\theta=\cos\varphi$$

olarak bulunur. Bu ifadenin karesini alarak kırıcılık indisi

$$n^2\cos^2\theta=\cos^2\varphi=1-n^2\sin^2\theta;\ n^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1$$

$$n^2=1;\ n=1$$

olarak bulunur. Yani burada sapma için bir minimum şartı bulunamaz.



İkinci durumda AB yüzeyinin normaline θ açısı ile gelen ışın kritik açıdan daha büyük bir açı ile düşer. İç yansıma yapar ve BC ikinci kırılma yüzeyinde kırılır. Bu durumda ışının sapması

$$\delta_1=180°-2\theta$$

olur. BC yüzeyinin normaline

$$\gamma=90°-\theta$$

açısı ile gelen ışın β açısı ile kırılmaktadır. Kırılma yasasından

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{1}{n};\ \sin\beta=n\cos\theta$$

yazabiliriz. Işının sapması bu durumda

$$\delta_2=\beta-\gamma=\beta-90°+\theta$$

olarak yazılabilir. Toplam sapma

$$\delta=\delta_1+\delta_2=90°-\theta+\beta$$

olur. Sapmanın minimum olması için

$$\frac{d\delta}{d\theta}=-1+\frac{d\beta}{d\theta}=0$$

olmalıdır. Kırılma yasası ifadesinin türevinden

$$-n\sin\theta d\theta=\cos\beta d\beta;\quad \frac{d\beta}{d\theta}=-\frac{n\sin\theta}{\cos\beta}$$

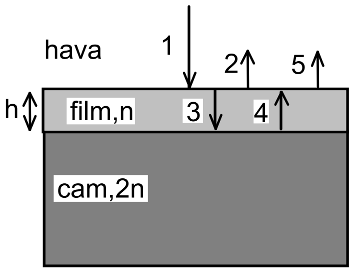
olarak yazılabilir. Buradan

$$\frac{d\delta}{d\theta}=-1-\frac{n\sin\theta}{\cos\beta}=0;\ -n\sin\theta=\cos\beta$$

olarak bulunur. Bu ifadenin karesini alıp

$$n^2\sin^2\theta=\cos^2\beta=(1-\sin^2\beta)=(1-n^2\cos^2\theta);\ n^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=1;\ n=1$$

olarak bulunur. Yani bu durumda da minimum yoktur.



10. Çeşitli bölgelerdeki ışıkların genlikleri ve fazları için

1. A $\qquad \varphi=0°$
2. $\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}A=\frac{dx}{v_0}A$ $\qquad \varphi=180°$
3. $\frac{2n_1}{n_1+n_2}A=\frac{2}{1+n}$ $\qquad \varphi=0°$
4. $\frac{2}{1+n}\frac{n-2n}{n+2n}A=-\frac{2}{3(1+n)}A$ $\qquad \varphi=180°$
5. $-\frac{2}{3(1+n)}\frac{2n}{n+1}A=-\frac{4n}{3(1+n)^2}A$ $\qquad \varphi=180°$

yazabiliriz. Yok edici girişimin tam olması, yani tam karanlık elde edebilmek için 2 ve 5 nolu genlikler eşit olmalıdır. Buradan

$$\frac{1-n}{1+n}A=-\frac{4n}{3(1+n)^2}A$$

$$3n^2-4n-3=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$n_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{52}}{6}$$

olup - işareti negatif n değeri vereceği için fiziksel değildir. O halde çözüm

$$n=\frac{4+\sqrt{52}}{6}=\cong 1{,}87$$

olur. Bu değer gerçek değer olup

$$n\approx\sqrt{n_{hava}n_{cam}}$$

yaklaşık ifadesinden bulunacak değer ise n=1,41 dir. Film kalınlığını bulmak için girişim yapan dalgaların fazları incelenmelidir. 2 ve 5 nolu dalgalar aynı fazlı olduklarından, karanlık şartı minimum kalınlık için

$$\Delta=2nh=\frac{\lambda}{2}$$

olmalıdır. Buradan

$$h=\frac{400nm}{4.1{,}87}=53{,}5\ nm$$

olarak bulunur.

11. a) Homojen ortamda n sabit olduğu için

$$\frac{dx}{dz}=\sqrt{\frac{n^2}{n_1{}^2\sin^2\theta_1}-1}=A$$

yazabiliriz. İntegre edersek

$$x(z)=Az+B$$

bir doğru denklemi olduğu anlaşılmaktadır.

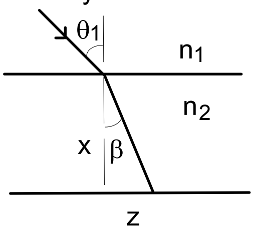
b) Verilen değerler kullanılarak

$$\frac{dx}{dz}=\sqrt{\frac{(1{,}5)^2}{1.\sin^2 30^o}-1}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

bu denklem

$$x(z)=2\sqrt{2}\,z+B$$

olarak yazılabilir. z=0 için x=0 alınırsa $x(z)=2\sqrt{2}\,z$ olur.



Snell yasasından

$$\frac{\sin 30^o}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin\beta=0{,}5\frac{1}{1{,}5}=\frac{1}{3}\,;\ \cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

şeklin geometrisinden

$$ctg\beta=\frac{x}{z}\,;\ x=zctg\beta=2\sqrt{2}\,z$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuç aynıdır.

c) Verilen denklemi kullanmak için kırıcılık indisinin ifadesinin türevini alıp

$$n^2(x)=n_0{}^2-Dx^2$$

$$\frac{dn^2}{dx}=-2Dx$$

verilen ışın denklemini

$$\frac{d^2x}{dz^2}=\frac{1}{2n^2{}_1\sin^2\theta_1}\frac{dn^2}{dx}=\frac{2Dx}{2n^2{}_0\sin^2\theta_1}$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{Dx}{n^2{}_0\sin^2\theta_1}=0$$

ikinci mertebeden titreşim diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}z\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}z\right)$$

şeklindedir. x=0 durumda z=0 olmalıdır.

$$0=A.0+B.1;\ B=0$$

olmalıdır. Bu durumda çözüm

$$x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}z\right)$$

Işığın x-yönünde aldığı yol, z- yönünde aldığı yola göre periyodik olup periyodu

$$T=2\pi\frac{n_0\sin\theta_1}{\sqrt{D}}$$

olur.

d) Verilen değerler x(z) denkleminde yerine konulursa:

$\theta=30^o$ için

$$x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{0{,}1}}{1{,}5.\sin 30}z\right)\cong A_1\sin(0{,}42z)$$

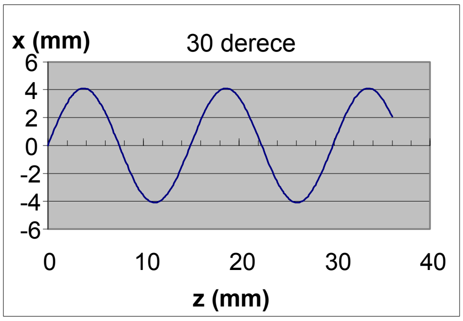
$$\theta=60^o \text{ için; } x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{0{,}1}}{1{,}5.\sin 60}z\right)\cong A_2\sin(0{,}24z)$$

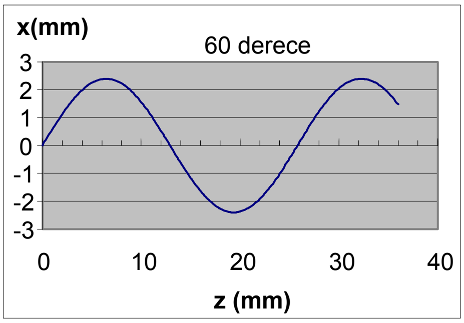
olarak bulunur. Bu denklemlerde (z) milimetre cinsinden kullanılmalıdır. A_1 ve A_2 genlikleri farklıdır.

$\theta=30^o$ için periyot: $0{,}42z=2\pi$ eşitliğinden 14,.9 mm,

$\theta=60^o$ için periyot: $0{,}24z=2\pi$ eşitliğinden 25,8 mm

olarak bulunur.





e) (c) şıkkında bulduğumuz çözümden

$$x(z)=A\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}z\right)=A\sin kz;\ \frac{dx}{dz}=Ak\cos kz;\ k=\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}$$

ve (1) nolu denklemde koyarsak

$$(Ak\cos kz)^2=\frac{n_0{}^2-Dx^2}{n_0{}^2\sin^2\theta_1}-1$$

$$A^2\frac{D}{n_0{}^2\sin^2\theta_1}\cos^2 kz=\frac{n_0{}^2-DA^2\sin^2 kz-n_0{}^2\sin^2\theta_1}{n_0{}^2\sin^2\theta_1}$$

$$A^2=\frac{n_0{}^2\cos^2\theta_1}{D};\ A=\frac{n_0\cos\theta_1}{\sqrt{D}}$$

olarak bulunur. Bu genliği kullanarak

$$x=\frac{n_0\cos\theta_1}{\sqrt{D}}\sin\left(\frac{\sqrt{D}}{n_0\sin\theta_1}z\right)$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi genlik geliş açısına bağlıdır.
(d) şıkkında incelediğimiz durumlara tekrar bakarsak ;
$\theta=30^o$ için $A_1=4,1$ mm, $\theta=60^o$ için $A_2=2,4$ mm olarak bulunur. Bu durumda denklemler

$$x(z)=4,1\sin(0,42z);\ x(z)=2,4\sin(0,24z)$$

olarak yazılabilir. Yani geliş açısı küçüldükçe genlik büyümekte (2,4 mm den 4,1 mm ye çıkmakta), periyot ise küçülmektedir (25,8 mm den 14,9 mm ye düşmekte). Kırıcılık indisi x-yönünde değiştiği için, küçük geliş açısı durumunda ışık n'nin değiştiği yönde ilerlemek durumunda olup z yönünde daha kısa mesafede eğilmekte ve periyodu küçülmektedir.

12. a) Duvarın yüksekliği AB=y, gölgenin uzunluğu x osun. Şeklin geometrisinden

$$y=x\text{tg}\theta$$
$$\Delta y=\Delta x\text{tg}\theta$$

yazabiliriz. Duvar $v_d=\beta c$ hızı ile Δy kadar yükselirse bunun için gerekli süre

$$\Delta t_d=\frac{\Delta y}{\beta c}$$

olur. B noktasından yayılan ışık C noktasına kadar gelene kadar geçen süre

$$\Delta t_1=\frac{BC}{c}=\frac{y}{c\sin\theta}$$

B' noktasından yayılan ışık C' noktasına kadar gelene kadar geçen süre

$$\Delta t_2=\frac{B'C'}{c}=\frac{y+\Delta y}{c\sin\theta}$$

olarak yazılabilir. Gölgenin hareketi tamamen duvarın yükselmesi ve ışığın B' noktasından C' noktasına gelmesi ile son bulur. Bunun için gereken süre

$$\Delta t_g=\Delta t_d+\Delta t_2-\Delta t_1=\frac{\Delta y(\beta+\sin\theta)}{\beta c\sin\theta}$$

olur. Gölgenin hızı

$$v_g=\frac{\Delta x}{\Delta t_g}=\frac{\Delta y\beta c\sin\theta}{\Delta y\text{tg}\theta(\beta+\sin\theta)}=\frac{\beta c.\cos\theta}{\beta+\sin\theta}$$

olarak bulunur.

b) Bu hız duvarın hızına eşit ise

$$\beta+\sin\theta=\cos\theta;\ 0{,}5+\sqrt{1-\cos\theta^2}=\cos\theta$$

$$8\cos^2\theta-4\cos\theta-3=0;\ \cos\theta=\frac{1+\sqrt{7}}{4}=0{,}91;\ \theta=24°$$

olarak bulunur.
c) Duvar $v_d=\beta c$ hızı ile Δy kadar kısalırsa bunun için gerekli süre

$$\Delta t_d=\frac{\Delta y}{\beta c}$$

olur. B noktasından yayılan ışık C noktasına kadar gelene kadar geçen süre

$$\Delta t_1=\frac{BC}{c}=\frac{y}{c\sin\theta}$$

B’ noktasından yayılan ışık C’ noktasına kadar gelene kadar geçen süre

$$\Delta t_2=\frac{B'C'}{c}=\frac{y-\Delta y}{c\sin\theta}$$

olarak yazılabilir. Gölgenin hareketi tamamen duvarın yükselmesi ve ışığın B’ noktasından C’ noktasına gelmesi ile son bulur. Bunun için gereken süre

$$\Delta t_g=\Delta t_d+\Delta t_2-\Delta t_1=\frac{\Delta y(\sin\theta-\beta)}{\beta c\sin\theta}$$

olur. Gölgenin hızı

$$v_g=\frac{\Delta x}{\Delta t_g}=\frac{\Delta y\beta c\sin\theta}{\Delta y tg\theta(\sin\theta-\beta)}=\frac{\beta c.\cos\theta}{\sin\theta-\beta}$$

olarak bulunur. $\beta<<\sin\theta$ ise $v_g=\beta c.ctg\theta$ olur. $\beta=\sin\theta$ ise $v_g=\infty$ olur. $\beta>\sin\theta$ ise bu fiziksel olarak mümkün değil çünkü sebep-neden ilişkisi bozulmaktadır.