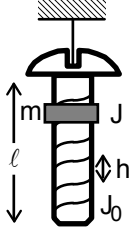
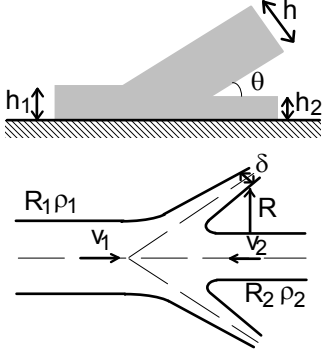


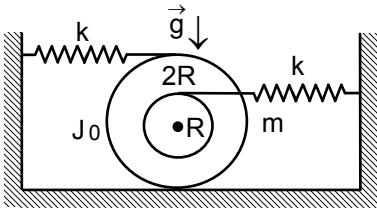
ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI -1992



1. l uzunluğunda bir civata, bir ip ile bir ucundan eksenini doğrultusunda asılmıştır. Civatanın dişleri arasındaki uzaklık h , eylemsizlik momenti J_0 ve yerçekimi ivmesi g veriliyor. Bu civatanın tepesinden sürtünmesiz olarak kütlesi m ve eylemsizlik momenti J olan bir somun dönerek inmektedir. Somun ne kadar zaman sonra civatanın diğer ucundan kurtulur?



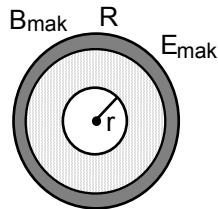
2. a) Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde sabit hız ile akan h genişliğindeki bir sel, θ açısı ile bir engele çarptıktan sonra ikiye ayrılıyor. Ayrılan sellerin h_1 ve h_2 genişliklerini ayrı ayrı bulunuz.
b) Yoğunlukları bilinmeyen ρ_1 ve ρ_2 olan iki sıvı, yarıçapları R_1 ve R_2 olan ve eksenleri çakışan iki silindir şeklindeki fiskiye oluşturuyor. İki fiskiye kafa kafaya çarpıştıktan sonra iki sıvıdan uzayda ilerleyen bir koni oluşuyor. Oluşan koninin tepe açısını ve ekseninden R uzaklıkta koninin δ kalınlığını bulunuz.



3. Yatay ve sürtünmeli bir düzlem üzerinde kütlesi m , eylemsizlik momenti J_0 ve yarıçapları R ve $2R$ olan iki basamaklı bir makara bulunuyor. Yay sabitleri k olan iki özdeş yay ile dikey duvarlara tutturulmuş olup, diğer uçları disk üzerinde, diskin merkezinden R ve $2R$ uzaklıkta iplerle tutturulmuştur. Disk dönerek denge durumundan A kadar mesafeye uzaklaştırılarak ilk hızsız bırakılıyor.
a) Sistemin titreşim periyodunu bulunuz.
b) Hareketin kaymadan ve sadece yuvarlanarak gerçekleşmesi için düzlem ile disk arasındaki sürtünme katsayısı ne kadar olmalıdır?

4. Manyetik olmayan küresel bir kabuk, telle sarılmıştır. Sarım düzlemine dik bir doğrultuya göre her santimetreye n sarım düşmektedir. Sarımlardan I akım geçtiğine göre kabuğun içindeki her noktada manyetik alan şiddetinin aynı olduğunu kanıtlayın ve bu alanın değerini bulunuz.

Not: Problemi çözebilmek için bir model kurarak küresel kabuğu homojen bir manyetik alan içerisinde konmuş bir süperiletken top gibi düşünebilirsiniz. Analogideki benzerlik, kabuğun içerisinde manyetik alanın homojen ve sabit bir değeri alması, süperiletken topun içinde ise manyetik alanın tamamen sıfır olmasından geçmektedir. Bu sınırlamanın gerçekleşmesi için topun üzerinde yüzey akımlarının oluşması gerekmektedir. Bu akımlar verilen problemdeki akımlara benzemektedir. Süperiletken topun özelliği manyetik alanın yüzeye normal bileşenin sıfır olmasıdır. Yüzey akımlarının oluşturduğu etkiyi bir manyetik dipolle modelleyebilirsiniz. Manyetik dipolün yarattığı manyetik alan elektrik dipolüne benzeterek bulunulabilir. Boşluğun manyetik geçirgenlik katsayısı μ_0 veriliyor.

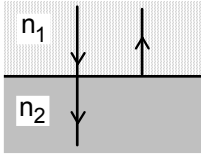


yarıçapı ne olmalıdır? Bu maksimum güç nedir?

5. Yüksek gerilim hatlarındaki enerji kayıplarını önlemek için süperiletken kabloların kullanılması çok uygundur. Böyle süperiletken bir kablo, iç içe, aynı ekseninde iki silindirik süperiletken ve bunların arasında bulunan dielektrik maddeden oluşmuştur. Dielektrik maddenin delinmesi için gerekli maksimum elektrik alan şiddeti E_{mak} , süperiletkenliğin bozulduğu maksimum manyetik alan şiddeti B_{mak} vakumun dielektrik geçirgenliği ϵ_0 , ışık hızı c olarak veriliyor. Süperiletken koaksiyal kablunun dış yarıçapı R ise, kablodan maksimum güç iletebilmesi için iç

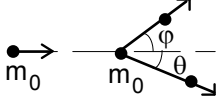


6. Lokal bir bölgede yüklü taneciklerden oluşan demetin sürekli odaklanması için taneciklerin titreşim hareketi silindirik bir kondansatör içinde yapılabilir. Eksenden r_0 mesafesinde ana yörünge üzerinde püskürtülen elektronlar küçük bir açı ile de olsa koni şeklinde giriş noktasına girmektedirler. Hareketin titreşim periyodu ve demetin odaklandığı açığı bulunuz. Küresel kondansatör için odaklama açısını bulunuz.



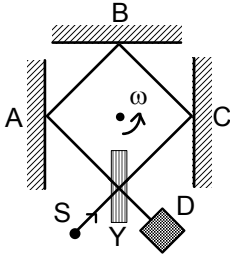
7. a) Düzlemsel bir elektromanyetik dalga kırıcılık indisleri n_1 ve n_2 olan iki farklı olan dielektrik ortamın düz bir sınırına normal olarak düşmektedir. Bu düz sınırdan yansıyan ve geçen elektromanyetik dalgaların genliklerini düşen dalganın genliği cinsinden bulunuz. Hangi şartlarda ve hangi dalgada faz farkı meydana gelir? Bu faz farkı nedir?

b) Düz sınırdan yansıyan ve geçen dalgaların enerji akımlarının eşit olması için iki dielektriğin kırıcılık indisleri arasındaki bağıntı ne olmalıdır?



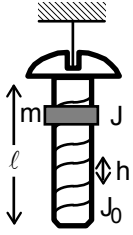
8. Klasik fizikte kendisi ile eşit kütleli ve duran bir cisme v sabit hızı ile çarpan bir cisimle, ikinci cisim arasındaki açı çarpışmadan sonra 90° olmaktadır. Eğer cisim rölativistik hızla hareket ederse saçılma θ ve ϕ açıların tanjantların arasındaki

çarpımının $\tan\theta \cdot \tan\phi$ değeri $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ve $\beta = \frac{v}{c}$ cinsinden nedir?



9. Eylemsizlik, koordinat sistemlerine göre hiç bir mekanik ya da optik deney ile sabit hızlı hareketli etki gözlenemez. İvmeli hareketler, dönen sistemlerde de dahil optik olaylara artık etkili oluyorlar. S ışık kaynağından çıkan λ dalga boyunda ışınlar yarısaydam bir Y levha ile ikiye ayrılıyor ve bir karenin köşelerinde bulunan üç düz A, B ve C aynalarına düştükten ve yansdıktan sonra D detektöründe girişim deseni oluşturmaktadırlar. Sistem yatay düzlemde, karenin merkezinden geçen düşey eksen etrafında sabit ω açısal hızı ile dönmektedir. Dönen sistemde detektörle girişim saçığının ΔN kaydı tespit edilmektedir. Işığın R yarıçaplı bir yörünge üzerinde hareket ettiğini varsayarak ışığın hızını bulunuz.

ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1992



1. Somun h kadar indiğinde döndüğü açı 2π , x kadar indiğinde φ olsun. Buradan

$$x = \frac{\varphi h}{2\pi}$$

olarak bulunur. Burada φ ve 2π açıları civataya göre net dönme açılarıdır. Türevlersek hız için

$$v = \frac{(\omega - \omega_0)h}{2\pi}$$

yazabiliriz. Açısal momentum korunumu yasasından

$$0 = J_0\omega_0 + J(\omega_0 - \omega); \omega_0 = \frac{J\omega}{J_0 + J}$$

olarak bulunur. Buradan çizgisel hız ve açısal hız çizgisel cinsinden

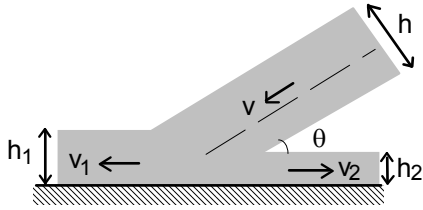
$$v = \frac{h}{2\pi} \left(\omega - \frac{J\omega}{J_0 + J} \right) = \frac{J_0\omega h}{2\pi(J_0 + J)}; \omega = \frac{2\pi(J_0 + J)v}{hJ_0}$$

olarak yazılabilir. Enerji korunumu yasasından hız ve somunun civatadan ayrılma süresi

$$mg\ell = \frac{mv^2}{2} + \frac{J(\omega_0 - \omega)^2}{2} + \frac{J_0\omega_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J(J_0 + J)}{2J_0} \frac{4\pi^2 v^2}{h^2}$$

$$v^2 = \frac{2g\ell}{1 + \frac{4\pi^2 J(J_0 + J)}{mh^2}} = 2a\ell; t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{\frac{2\ell}{g} \left(1 + \frac{4\pi^2 J(J_0 + J)}{mh^2} \right)}$$

olarak bulunur.



2. a) Yatay ve sürtünmesiz düzlem üzerinde sabit hız ile akan h genişliğindeki sel, θ açısı ile bir engele çarptıktan sonra h_1 ve h_2 genişliklerini olan iki sele ayrılıyor. Gelen selde hız v, ayrılan sellerde hız v_1 ve v_2 olsun. Gelen selde h_1 ve h_2 genişliğinde olan iki sel alalım. Basınçtan yapılan iş

$$A = Fx - F_1x_1 = PSx - P_1S_1x_1 = PV - P_1V_1 = 0$$

çünkü $P = P_1$ ve sıvı ideal ve sıkıştırılmayan olduğu için $V = V_1$ olur. Diğer taraftan yapılan iş kinetik enerjinin değişimine eşittir.

$$A = \Delta K = 0$$

Buradan $v = v_1$ sonuca ulaşabiliriz. Diğer sel için de aynısı geçerlidir. Selin engele çarpma olayında momentum korunumu yasası geçerlidir.

$$mv\cos\theta = m_1v_1 - m_2v_2$$

Kütleler için

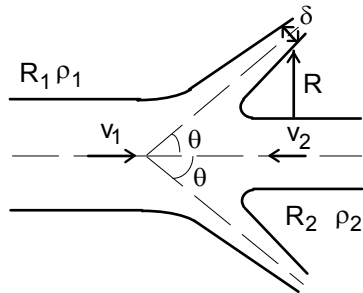
$$m = m_1 + m_2; m \sim h; m_1 \sim h_1, m_2 \sim h_2$$

yazabiliriz. Buradan

$$h\cos\theta = h_1 - h_2; h = h_1 + h_2$$

$$h_1 = h\cos^2\frac{\theta}{2}; h_2 = h\sin^2\frac{\theta}{2}$$

olarak bulunur.



b) İki fiskiye kafa kafaya çarpıştıktan sonra her sıvının hızı sabit kalmaktadır. İki fiskiye ucundaki basınçlar eşit olduğu için

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{2} = \frac{\rho_2 v_2^2}{2}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{v_1}{v_2}$$

olarak yazılabilir.

Oluşan koninin kalınlığı

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

olarak yazılabilir. Her sıvı ideal ve sıkıştırılmayan olduğu için

$$\pi R_1^2 v_1 = 2\pi r \delta_1 v_1; R_1^2 = 2r \delta_1; \delta_1 = \frac{R_1^2}{2r}$$

$$\pi R_2^2 v_2 = 2\pi r \delta_2 v_2 ; R_2^2 = 2r \delta_2 ; \delta_2 = \frac{R_2^2}{2r}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\delta = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2r}$$

olarak bulunur. Koninin tepe açısını bulmak için momentum korunumu yasasını kullanabiliriz.

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) \cos \theta$$

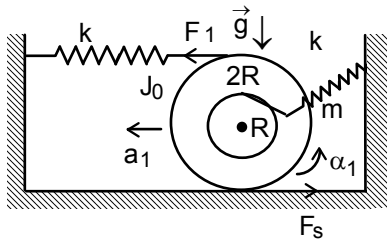
$$m_1 = \rho_1 \pi R_1^2 v_1 \Delta t$$

$$m_2 = \rho_2 \pi R_2^2 v_2 \Delta t$$

Buradan

$$\cos \theta = \frac{1 - \frac{v_1 R_2^2}{v_2 R_1^2}}{1 + \frac{v_1 R_2^2}{v_2 R_1^2}}$$

olarak bulunur.



3. a) Makara sağ tarafa dönerek uzaklaştırılırsa sağ yay gevşiyor, sol yay ise geriliyor. Bu durumda makara yay kuvveti F_1 ve sürtünme F_s kuvvetin etkisi ile harekete geçer. Bu durumda

$$m a_1 = F_1 - F_{s1}$$

$$F_1 = -4kR\theta = -2kx; x = 2R\theta$$

yazabiliriz. Burada x makara merkezinin uzaklaştırıldığı mesafe, θ ise makaranın döndüğü açıdır. Bu iki kuvvet de makaranın dönmesine sebep olurlar.

$$J_0 \alpha_1 = F_1 \cdot 2R + F_{s1} \cdot 2R; \alpha_1 = \frac{a_1}{2R}; \frac{J_0 a_1}{4R^2} = F_1 + F_{s1}$$

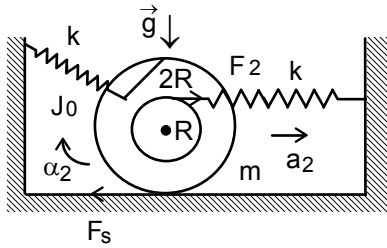
Öteleme ve dönme hareket denklemlerinden

$$\left(m + \frac{J_0}{4R^2} \right) a_1 = 2F_1 = -4kx; \ddot{x} + \frac{16kR^2}{J_0 + 4mR^2} x = 0$$

harmonik osilatör denklemini elde edilir. Titreşim periyodu ve sağ tarafa hareket süresi

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 4mkR^2}{16kR^2}}; t_1 = \frac{T_1}{2} = \pi \sqrt{\frac{J_0 + 4mkR^2}{16kR^2}}$$

olarak bulunur.



Makara sağ taraftan sol tarafa dönerek geçerse sol yay gevşiyor, sağ yay ise geriliyor. Bu durumda makara yay kuvveti F_2 ve sürtünme F_{s2} kuvvetin etkisi ile harekete geçer.

$$m a_2 = F_2 - F_s$$

$$F_2 = -3kR\theta = -\frac{3kx}{2}$$

yazabiliriz. Burada x makara merkezinin uzaklaştırıldığı mesafe, θ ise makaranın döndüğü açıdır. Bu iki kuvvet de makaranın

dönmesine sebep olurlar.

$$J_0 \alpha_2 = F_2 \cdot R + F_{s2} \cdot 2R; \alpha_2 = \frac{a_2}{2R}; \frac{J_0 a_2}{4R^2} = \frac{F_2}{2} + F_{s2}$$

Öteleme ve dönme hareket denklemlerinden

$$\left(m + \frac{J_0}{4R^2} \right) a_2 = \frac{3F_2}{2} = -\frac{9kx}{4}; \ddot{x} + \frac{9kR^2}{J_0 + 4mR^2} x = 0$$

harmonik osilatör denklemini elde edilir. Titreşim periyodu ve sol tarafa hareket süresi

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + 4mkR^2}{9kR^2}}; t_2 = \frac{T_2}{2} = \pi \sqrt{\frac{J_0 + 4mkR^2}{9kR^2}}$$

olarak bulunur. Titreşimin toplam periyodu

$$T = t_1 + t_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} = \frac{7\pi}{12} \sqrt{\frac{J_0 + 4mkR^2}{kR^2}}$$

olarak bulunur.

b) Sağ tarafa hareketinde sürtünme kuvveti ve sağa tarafta kayma duruma geçebilmesi için gereken sürtünme kuvveti

$$F_{s1} = \frac{(4mR^2 - J_0)2kx}{J_0 + 4mR^2} = \frac{(4mR^2 - J_0)2kA}{J_0 + 4mR^2} = f_1 mg$$

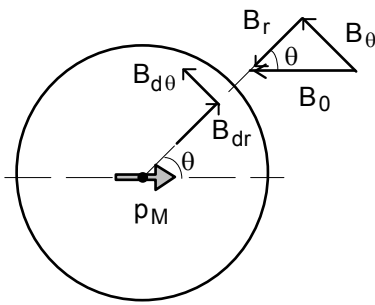
$$f_1 = \frac{(4mR^2 - J_0)2kA}{mg(J_0 + 4mR^2)}$$

sol tarafa hareketinde sürtünme kuvveti ve sağa tarafta kayma duruma geçebilmesi için gereken sürtünme kuvveti

$$F_{s2} = \frac{3(2mR^2 - J_0)kx}{2(J_0 + 4mR^2)} = \frac{3(2mR^2 - J_0)kA}{2(J_0 + 4mR^2)} = f_2 mg$$

$$f_2 = \frac{3(2mR^2 - J_0)kA}{2mg(J_0 + 4mR^2)}$$

olarak bulunur.



4. Soruda yüzey akımların oluşturduğu etkiyi bir manyetik dipolle modelleyebileceğimizi verilmiştir. Manyetik dipol momentinin yarattığı manyetik alan şiddeti

$$B_d = \frac{\mu_0 p_M}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

olarak verilir. Radyalal ve teğetsel yönde bileşenleri

$$B_{dr} = \frac{2\mu_0 p_M \cos\theta}{4\pi r^3}$$

$$B_{d\theta} = \frac{\mu_0 p_M \sin\theta}{4\pi r^3}$$

olarak yazılabilir. Dışarıdaki manyetik alanın bileşenleri

$$B_{0r} = B_0 \cos\theta$$

$$B_{0\theta} = B_0 \sin\theta$$

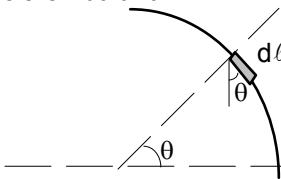
olur. Süperiletken topun özelliği manyetik alanın yüzeye normal bileşenin sıfır olduğundan

$$B_{0r} = B_{dr}, B_0 = \frac{2\mu_0 p_M}{4\pi r^3}; p_M = \frac{2\pi r^3 B_0}{\mu_0}$$

olarak bulunur. Teğetsel yöndeki toplam manyetik alan

$$B_\theta = B_{d\theta} + B_{0\theta} = \frac{2\mu_0 p_M \sin\theta}{4\pi r^3} + B_0 \sin\theta = \frac{3B_0 \sin\theta}{2}$$

olarak bulunur.



Küçük $d\ell$ uzunluktaki bir teğetsel parça için manyetik dolanım teoremini uygulayabiliriz.

$$B_0 d\ell = \mu_0 dI$$

Yatay yöndeki sarım sayısı için $dx = d\ell \sin\theta$

$$\frac{dI}{d\ell} = \frac{B_\theta}{\mu_0} = \frac{3B_0 \sin\theta}{2\mu_0}$$

$$\frac{dI}{d\ell \sin\theta} = \frac{dI}{dx} = \frac{3B_0}{2\mu_0}$$

yazabiliriz. Buradan

$$B_0 = \frac{2\mu_0}{3} \frac{dI}{dx}$$

olarak bulunur. Sayısal değerler konulduğunda

$$B_0 = \frac{2.4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^3}{3} = 16,8 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

olarak bulunur.

5. Böyle süperiletken kablonun içinde iki silindirik süperiletken arasında bulunan dielektrik maddenin delinmesi için gerekli maksimum elektrik alan şiddeti E_{mak} bulmak için Gauss teoremi uygulanabilir.

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}; 2\pi r \ell E = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0}; E_{\text{mak}} r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$$

İki silindirik kabuk arasında uygulanan potansiyel fark

$$U_{\text{min}} = \int_r^R \vec{E} d\vec{r} = \int_a^b \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = E_{\text{mak}} r \ln \frac{R}{r}$$

şeklinde yazılabilir. Süperiletkenliğin bozulduğu maksimum manyetik alan şiddeti B_{mak} bulmak için manyetik dolanım teoreminden faydalanabiliriz.

$$\oint_{\ell} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I; 2\pi r B = \mu_0 I; B_{\text{mak}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; I_{\text{mak}} = \frac{2\pi r B_{\text{mak}}}{\mu_0}$$

şeklinde yazılabilir. Kablodan iletilen güç

$$P = U_{\text{min}} I_{\text{mak}} = \frac{2\pi E_{\text{mak}} B_{\text{mak}}}{\mu_0} r^2 \ln \frac{R}{r}$$

Gücün maksimum olma şartından aranan iç r yarıçap

$$\frac{dP}{dr} = 0; \ln \frac{R}{r} = \frac{1}{2}; \frac{R}{r} = \sqrt{e}; r = \frac{R}{\sqrt{e}}$$

ve iletilen maksimum güç

$$P_{\text{mak}} = \frac{2\pi E_{\text{mak}} B_{\text{mak}}}{\mu_0} \left(\frac{R}{\sqrt{e}} \right)^2 \frac{1}{2} = \frac{\pi R^2 \epsilon_0 c^2 E_{\text{mak}} B_{\text{mak}}}{e}$$

olarak bulunur.

6. Eksenden r_0 mesafesinde ana yörünge üzerinde püskürtülen elektronlar küçük bir açı ile de olsa koni şeklinde giriş noktaya girmektedirler. Gauss teoremi sonucu ana yörünge ve r mesafesindeki yörünge için elektrik alan

$$E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_0}; E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{E_0 r_0}{r}$$

ana yörünge üzerinde elektrona etki eden kuvvet

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r_0}$$

her hangi başka yörünge için radyal denklem

$$ma_r = \frac{mv_{\parallel}^2}{r} - qE(r)$$

açısız momentum korunumu kanunu

$$mv_0 r_0 = mv_{\parallel} r$$

ve küçük sapmalar için

$$r = r_0 + x$$

yazılabilir. Buradan ivme için

$$a = \ddot{x} = \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} - \frac{v_0^2}{r} = \frac{v_0^2 r_0^2}{r_0^3 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)^3} - \frac{v_0^2}{r_0 \left(1 + \frac{x}{r_0}\right)} = \frac{v_0^2}{r_0} \left(1 - 3\frac{x}{r_0}\right) - \frac{v_0^2}{r_0} \left(1 - \frac{x}{r_0}\right) = -\frac{2v_0^2 x}{r_0^2} = -2\omega_0^2 x$$

bulunur. Hareketin titreşim periyodu

$$\omega = \sqrt{2} \omega_0$$

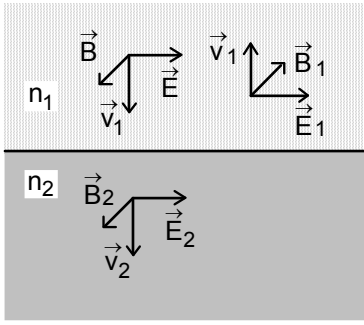
ve her

$$t = \frac{nT}{2}$$

zamanda demet odaklanır. Odaklama açısı için

$$\theta = \frac{\omega_0 T}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} = 127^\circ 16'$$

bulunur. Benzer işlem küresel kondansatör için de yapılabilir. Bu durumda odaklama açısı $\theta = \pi$ olarak bulunur.



7. a) Düzlemsel bir elektromanyetik dalganın kırıcılık indisleri n_1 ve n_2 olan iki farklı olan dielektrik ortamın düz bir sınırına normal olarak düştüğünde, düz sınırdan yansıyan ve geçen elektromanyetik dalgaların genliklerini ve düşen dalganın genlikleri arasındaki bağıntıyı bulmak için elektrik dolaşım teoreminden faydalanabiliriz. Buradan

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = (E + E_1)dl - E_2 dl = 0; E + E_1 = E_2$$

yazabiliriz. Dalgadan taşınan enerji $(w_E + w_M)Svdt$ olarak yazılabilir. Burada

$$w_E = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} = w_M = \frac{B^2}{2\mu_0}; B = vE$$

birim hacimdeki elektrik alan enerjisi

$$v = \frac{c}{n}$$

dalganın hızı

$$n = \sqrt{\epsilon}$$

ortamın kırıcılık indisidir. Buradan elektromanyetik dalgadan birim zamanda birim alandan geçen enerji

$$J = (w_E + w_M)v = 2w_E v = \epsilon\epsilon_0 E^2 \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} = \sqrt{\epsilon} \epsilon_0 c E^2 = n\epsilon_0 c E^2$$

Gelen, yansıyan ve iletilen dalgalar için

$$n_1 \epsilon_0 c E^2 = n_1 \epsilon_0 c E_1^2 + n_2 \epsilon_0 c E_2^2$$

yazabiliriz. Buradan

$$E_1 = \frac{(n_1 - n_2)E}{n_1 + n_2}; E_2 = \frac{2n_1 E}{n_1 + n_2}$$

olarak bulunur. Dalgaların genlikleri negatif olamaz. $n_1 < n_2$ ise yansımada dalganın fazı π kadar değişmektedir. Yani yansımada yarım dalga boyu yol kaybedilmektedir.

b) Düz sınırdan yansıyan ve geçen dalgaların enerji akımları eşit ise

$$n_1 \epsilon_0 c E_1^2 = n_2 \epsilon_0 c E_2^2$$

$$n_1 \left(\frac{(n_1 - n_2)E}{n_1 + n_2} \right)^2 = n_2 \left(\frac{2n_1 E}{n_1 + n_2} \right)^2$$

yazabiliriz. Buradan

$$n_1^2 - 6n_1 n_2 + n_2^2 = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$n_1 = (3 \pm 2\sqrt{2})n_2$$

olarak bulunur.

8. Çarpışmalarda rölativistik enerji ve momentum korunumu yasaları geçerlidir.

$$W + m_0 c^2 = W_1 + W_2$$

$$p = p_1 \cos\theta + p_2 \cos\phi$$

$$0 = p_1 \sin\theta - p_2 \sin\phi$$

Gelen tanecik ve çarpışmadan sonraki tanecikler için bazı kabuller yapalım

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \beta = \frac{v}{c}; \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}}; \beta_1 = \frac{v_1}{c}; \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_2^2}}; \beta_2 = \frac{v_2}{c}$$

$$\gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1}; \gamma_1\beta_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - 1}; \gamma_2\beta_2 = \sqrt{\gamma_2^2 - 1}$$

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 c^2; W_1 = \gamma_1 m_0 c^2; W_2 = \gamma_2 m_0 c^2$$

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 v; p_1 = \gamma_1 m_0 v_1; p_2 = \gamma_2 m_0 v_2$$

Bu kabullerle enerji ve momentum korunumu yasaları için

$$\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = \gamma_1 m_0 c^2 + \gamma_2 m_0 c^2; \gamma + 1 = \gamma_1 + \gamma_2$$

$$\gamma m_0 v = \gamma_1 m_0 v_1 \cos\theta + \gamma_2 m_0 v_2 \cos\phi; \gamma\beta = \gamma_1\beta_1 \cos\theta + \gamma_2\beta_2 \cos\phi$$

$$0 = \gamma_1 m_0 v_1 \sin\theta - \gamma_2 m_0 v_2 \sin\phi; 0 = \gamma_1\beta_1 \sin\theta - \gamma_2\beta_2 \sin\phi$$

yazabiliriz. Momentum korunumu yasasını kullanarak

$$(\gamma\beta - \gamma_1\beta_1 \cos\theta)^2 + (\gamma_1\beta_1 \sin\theta)^2 = \gamma_2^2 \beta_2^2$$

yazabiliriz. Enerji korunumu yasasından

$$\gamma_2 = \gamma + 1 - \gamma_1$$

yazabiliriz. Bu iki denklemden

$$\gamma_1 = \frac{\gamma + 1 + (\gamma - 1)\cos^2 \theta}{\gamma + 1 - (\gamma - 1)\cos^2 \theta} = \frac{1 + x^2 \cos^2 \theta}{1 - x^2 \cos^2 \theta}; x^2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$$

olarak bulunur. Buradan

$$\gamma_1\beta_1 = \sqrt{\gamma_1^2 - 1} = \frac{2x \cos \theta}{1 - x^2 \cos^2 \theta}; \gamma\beta = \sqrt{\gamma^2 - 1} = x(\gamma + 1)$$

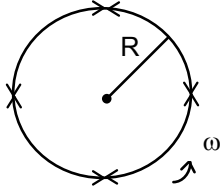
olarak yazılabilir. Buradan

$$\text{tg}\varphi = \frac{\gamma_1\beta_1 \sin \theta}{\gamma\beta - \gamma_1\beta_1 \cos \theta} = \frac{\frac{2x \sin \theta \cos \theta}{1 - x^2 \cos^2 \theta}}{x(\gamma + 1) - \frac{2x \cos^2 \theta}{1 - x^2 \cos^2 \theta}} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{(\gamma + 1)(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{2}{(\gamma + 1)\text{tg}\theta}$$

veya

$$\text{tg}\theta \cdot \text{tg}\varphi = \frac{2}{\gamma + 1} = \frac{2\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}$$

olarak bulunur.



9. Dönen koordinat sistemlerde Doppler olayı formülleri uygulanamaz. Dönme yönünde yayılan fotonların hareket süresi

$$t_1 = \frac{2\pi R + vt_1}{c}; t_1 = \frac{2\pi R}{c - v} \approx \frac{2\pi R}{c} \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Dönme yönünün zıt yönünde yayılan fotonların hareket süresi

$$t_2 = \frac{2\pi R - vt_2}{c}; t_2 = \frac{2\pi R}{c + v} \approx \frac{2\pi R}{c} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

olarak bulunur. Bu sürelerin farkı

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{4\pi Rv}{c^2} = \frac{4\pi R^2\omega}{c^2}$$

olur. Detektörle kayan girişim saçaklarının sayısı

$$\Delta N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{4\pi R^2\omega}{\lambda c}$$

olarak bulunur. Buradan

$$c = \frac{4\pi R^2\omega}{\Delta N\lambda}$$

olarak bulunur.