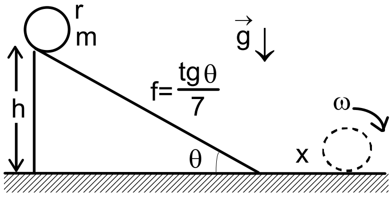
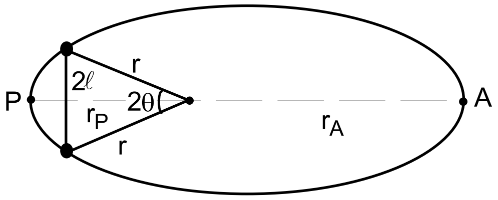
ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI -1991



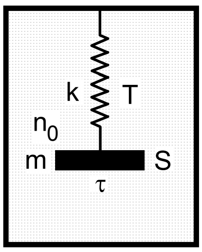
1. Kütlesi m ve yarıçapı R olan homojen bir küre eğim açısı θ olan eğik bir düzlem üzerinde, eğik düzlemin tabanına göre h yüksekliğinde bulunmaktadır. Küre ile eğik ve yatay düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $f=\frac{tg\theta}{7}$, ve yerçekimi ivmesi g olarak veriliyor.

a) Kürenin eğik düzleminin tabanına vardığında kazanacağı doğrusal ve açısal hızları bulunuz.

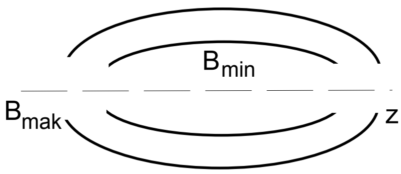
b) Kürenin yatay düzleme geçişte zıplamadığını varsayarak, yatay düzlemde ne kadar yol kat ettikten sonra kayma hareketi bitip, salt yuvarlanma hareketinin başlayacağını bulunuz. Bu yol yaklaşık kaç derecelik bir açı için sıfır olur?



2. Uzay yolculuklarıyla ilgili olarak farklı senaryolar üretilmektedir. Nötron yıldızlarının ışık akısı çok küçük olduğundan, bu yıldızların fark edilmesi güçtür. Örneğin uzay gemimiz nötron yıldızın yakınından geçer ise bu yıldızın etkisinin altında kalabilir ve kısa sürede yıldızın üzerine düşebilir. Uzay gemisinin motorların gücünün yıldızdan gemiyi kurtarmak için yeterli olmadığını ve sadece belli bir süre için gemiyi eliptik yörünge üzerinde tutabileceğini kabul edelim. Yıldızın çekim alanından kurtulmak için sıra ile geminin yıldıza bulunduğu en yakın noktada (perihelion noktası) uzun bir iple birbirine bağlı (ipin uzunluğu yörüngenin büyük ve küçük yarım eksenlerinden çok çok küçüktür) iki eşit parçaya ayrılmasını sağlayabiliriz. Bu iki eşit parça yıldızdan belli bir θ açısı ile görülmektedir. Bu ayrılan iki parçayı eliptik yörünge üzerinde yıldızdan en uzakta bulunan noktaya (aphelion noktası) kadar θ açısı sabit tutarak götürmesi de mümkün olabilir Aphelion noktasında iki parça birleştirilir gemi bir bütün olarak apheliondan periheliona kadar gidebilir. Sonra perihelionda gemi yine iki parçaya ayrılıp aphelion noktasına kadar ayrılmış vaziyette, aphelionda parçalar birleşip bir bütün olarak gemi perihelion noktasına kadar gidebilir. Bu işlem tekrar tekrar yapılır ise geminin nötron yıldızının çekim alanından kurtulacağını kanıtlayınız.



3. Yay sabiti k olan bir yayın ucunda kütlesi m ve kesit alanı S olan bir disk düşük basınçlı izole edilmiş bir kabın içinde bulunmakta olup, periyodu τ olan sönümlü titreşimler yapmaktadır. Ardışık iki genlik arasındaki oran $\frac{A_n}{A_{n+1}}=1+\xi$, $\xi \ll 1$, kapta bulunan gazın molar kütlesi μ, sıcaklığı T, gaz sabiti R olarak veriliyor. Kapta bulunan gazın konsantrasyonu n_0 ve gazın basıncı P nedir?



4. z ekseni boyunca yavaş bir şekilde artan homojen olmayan bir manyetik alan içinde hareket eden q yüklü ve m kütleli tanecikler, yarıçapı gittikçe azalan bir spiral yörüngede hareket etmekte ve yavaşlayarak, yüksek manyetik alan bölgesinden geriye yansımaktadırlar. Bu tür düzenek manyetik ayna (manyetik şişe) olarak bilinmektedir. Bu şekilde silindirik simetriye sahip $\vec{B}=B_r\vec{e}_r+B_z\vec{e}_z$ manyetik alanın maksimum değeri B_{mak}, minimum değeri ise B_{min} olarak veriliyor. Yüklü taneciklerin manyetik alanda hangi şartlar altından yansımadan kurtulabileceklerini gösteriniz.

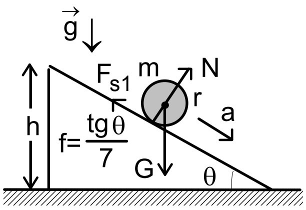
5. Son yıllarda " Serbest elektron lazeri" adıyla anılan bir lazer türü geliştirilmektedir. Bu sistemde yüklü taneciklerin yönü homojen olmayan, belli bir şekilde değişen manyetik alan ile saptırılabilir. U_0=0,5 MeV potansiyel farkına kadar hızlandırılan elektronlar x ekseni üzerinde hareket etmektedirler. z yönünde uygulanan manyetik alan x uzaklığına göre $B_z(x)=B_0\sin kx$ şeklinde değişmektedir. Burada B_0 ve k sabit parametrelerdir. Elektron manyetik alanı içeren bölgeye giriş noktasına v_0 ilk hızı ile x eksenine paralel olacak şekilde x=0 noktasında girmektedir. Elektronun hızının x, y ve z bileşenlerinin x ekseni boyunca x koordinatına bağlı olarak nasıl değişeceğini bulunuz.

6. a) Bir Fraunhofer kırınım deneyinde kırınım saçakları yarık önüne bir konulmuş düzlem-dış bükey mercek sayesinde gözlenmektedir. Merceğin kırcılık indisi n=2, eğrilik yarıçapı R=100 cm, yarık aralığı d=0,4 mm olarak veriliyor. Odak düzleminde oluşan desenler incelendiğinde yarıktan gönderilen λ_1 dalga boyunda ışınların perde üzerinde 4. minimumu ile λ_2 dalga boyunda ışınların 5. minimumu ile çakıştığı gözleniyor. Bu iki minimum merkezi doğrudan 5 mm uzakta bulunuyorlar. λ_1 ve λ_2 dalga boylarını bulunuz.
b) Odak uzaklığı f= -2 m olan bir düzlem-içbükey mercek, düzlem yüzü yukarıdaki mercekle çakışacak şekilde ekleniyor. Ekran bu mercek sistemin odak düzleminde iken merkezi saçaktan 6 mm ötede oluşan görüntüyü tanımlayın.

7. a) Bir elektron v rölativistik hızı ile kırıcılık indisi n ve uzunluğu ℓ olan saydam bir ortama girdiğinde meydana gelen Çerenkov ışımasının nasıl yayılacağını elektronun durgun kütlesi m_0, fotonun enerjisi $\hbar\omega$, ışık hızı c ve n cinsinden bir ifade ile belirtiniz.

b) Bulunan ifadede optik fotonlara ait terimi ihmal ederek, ortamın sonlu ℓ uzunluğundan dolayı ortaya çıkan ışıma açısındaki belirsizliği bulunuz.

ULUSAL FİZİK OLİMPİYATI ÜÇÜNCÜ AŞAMA SINAVI ÇÖZÜMLERİ-1991



1. a) Küre eğik düzlem üzerinde harekete geçerse kaymadan yuvarlanabilir, ya da kayarak yuvarlanabilir. Küre kayarsa

$$G_\tau - F_{s1} = ma$$
$$F_{s1} = fN_1$$
$$N_1 = G_n$$
$$mg\sin\theta - fmg\cos\theta = ma_0$$

yazabiliriz. Buradan

$$mg\sin\theta - \frac{tg\theta}{7} mg\cos\theta = ma_0$$

$$a_0 = \frac{6g\sin\theta}{7}$$

olarak bulunur. Küre kaymadan yuvarlanıyor ise

$$J\alpha_0 = F_{s1} r$$

$$\frac{2mr^2}{5}\alpha_0 = fmgr\cos\theta = \frac{tg\theta}{7} mgr\cos\theta$$

$$\alpha_0 = \frac{5g\sin\theta}{14r}$$

$$\alpha_0 r = \frac{5g\sin\theta}{14} < a_0$$

yazabiliriz. Bu durumdan küre hem kaydığını hem de yuvarlandığı anlaşılmaktadır. Cisim eğik düzlemin en alt noktasına

$$v = \sqrt{2a_0\ell} = \sqrt{2\frac{6g\sin\theta}{7}\frac{h}{\sin\theta}} = \sqrt{\frac{12gh}{7}}$$

hızla ulaşır. Küre bu yolu

$$t = \frac{v}{a_0} = \sqrt{\frac{7h}{3g\sin^2\theta}}$$

zamanda alır. Kürenin bu yolun sonunda ulaştığı açısal hız

$$\omega = \alpha_0 t = \frac{5g\sin\theta}{14r}\sqrt{\frac{7h}{3g\sin^2\theta}} = \frac{5}{2r}\sqrt{\frac{gh}{21}}$$

olarak bulunur.

b) Küre eğik düzlemin sonuna mv momentumu ile gelmektedir. Bu momentumun yatay ve dikey bileşeni

$$p_x = mv\cos\theta$$
$$p_y = mv\sin\theta$$

olur. Soruda küre yatay düzleme geçişte zıplamadığını varsayıldığını söylenmektedir. Bu durumda dikey yönündeki momentum değişimi

$$\Delta p_y = 0 - (-mv\sin\theta) = mv\sin\theta$$

olur. Yatay yöndeki momentum değişimi

$$\Delta p_x = mu_0 - mv\cos\theta = -f\Delta p_y = -fmv\sin\theta = -\frac{tg\theta}{7} mv\sin\theta$$

olarak yazılabilir. Buradan kürenin yatay düzlem üzerindeki ilk hız

$$u_0 = \sqrt{\frac{12gh}{7}}\left(\cos\theta - \frac{\sin^2\theta}{7\cos\theta}\right) = \frac{1}{7\cos\theta}\sqrt{\frac{12gh}{7}}\,(8\cos^2\theta - 1)$$

olarak bulunur.

Çarpışma esnasında kürenin açısal momentum sürtünme kuvvetinden dolayı değişmektedir.

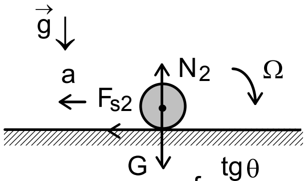
$$J(\omega - \Omega_0) = \Delta p_x r = fmvr\sin\theta = \frac{tg\theta}{7} mvr\sin\theta$$

$$\frac{2mr^2}{5}\left(\frac{5}{2r}\sqrt{\frac{gh}{21}} - \Omega_0\right) = \frac{tg\theta}{7} mvr\sin\theta$$

Kürenin çarpışmadan sonraki ilk açısal hız

$$\Omega_0 = \frac{5}{2r}\sqrt{\frac{12gh}{7}}\left(\frac{\sin^2\theta}{7\cos\theta} + \frac{1}{6}\right)$$

olarak bulunur.



$f=\frac{tg\theta}{7}$

Yatay düzlem üzerinde kürenin hareketi için

$-F_{s2}= -ma;\ F_{s2}=fN_2;\ N_2=G$

$a=fg$

$J\alpha=F_{s2}r=fmgr$

$\alpha=\frac{fmgr}{J}$

yazabiliriz. Kürenin çizgisel hızı sürekli azalmaktadır. Buna karşılık olarak kürenin açısal hızı artmaktadır.

$u=u_0-fgt$

$\Omega=\Omega_0+\alpha t$

Kürenin hızı

$u=\Omega r$

olduğunda kayma biter ve küre sadece yuvarlanmaya devam eder.

$u=u_0-fg\tau=(\Omega_0+\alpha\tau)r$

Buradan kaymanın bitme süresi

$$\tau=\frac{2}{tg\theta}\sqrt{\frac{12gh}{7}}\left(\frac{3\cos^2\theta-1}{2\cos\theta}-\frac{5}{12}\right)$$

olarak bulunur. Bu süre içinde küreden alınan yol

$$x=\frac{u_0{}^2-u^2}{2a}=\frac{u_0{}^2-(u_0-fg\tau)^2}{2fg}$$

olur. x=0 şartından hangi θ açısı için küre sadece yuvarlanarak hareketine devam edeceği bulunulabilir.

2. Verilen örnek aslında parametrik rezonansla ilgilidir. Temelinde ise geminin nokta şeklinde olmadığı bulunmaktadır. Perihelion noktasında etki eden kuvvet

$$F=2F_1\cos\theta=\frac{\gamma Mm\cos^3\theta}{r^2}$$

gösteriyor ki bu noktada çekim sabiti $\gamma\cos^3\theta$ olarak yazılabilir. Enerji ve açısal momentumu korunma kanunları iki durum için de yazılabilir

$$-\frac{\gamma Mm\cos^3\theta}{r_{P1}}+\frac{mv_{P1}{}^2}{2}=-\frac{\gamma Mm\cos^3\theta}{r_{A1}}+\frac{mv_{A1}{}^2}{2}$$

$$r_{P1}v_{P1}=r_{A1}v_{A1}=\sigma$$

$$v_{P1}+v_{A1}=\frac{2\gamma M\cos^3\theta}{\sigma}$$

yazılabilir.

$$\frac{2\gamma M}{\sigma}=\xi$$

kabul edersek

$$v_{P1}+v_{A1}=\xi\cos^3\theta$$

yazabiliriz. Burada r_{P1}, r_{A1}, v_{P1} ve v_{A1} perihelion ve aphelion noktasında ilk geçişte mesafeler ve hızlardır. Aphelion noktasında geminin iki parçası birleşip artık bir noktasal cisim oluşturmaktadırlar ve bu durumda enerji ve açısal momentumu korunumu yasaları normalde yazdığımız gibi yazabiliriz

$$-\frac{\gamma Mm}{r_{A1}}+\frac{mv_{A1}{}^2}{2}=-\frac{\gamma Mm}{r_{P2}}+\frac{mv_{P2}{}^2}{2}$$

$$r_{A1}v_{A1}=r_{P2}v_{P2}=\sigma$$

$$v_{A1}+v_{P2}=\xi$$

yazılabilir. Burada r_{P2}, v_{P2} perihelion noktasından ikinci geçişteki mesafe ve hızdır. Buradan

$$v_{P2}=v_{P1}+\xi\ (1-\cos^3\theta)$$

Perihelion noktasında gemi yine iki parçaya ayrılıyor. Enerji ile açısal momentum korunumu yasaları

$$-\frac{\gamma Mm\cos^3\theta}{r_{P2}}+\frac{mv_{P2}{}^2}{2}=-\frac{\gamma Mm\cos^3\theta}{r_{A2}}+\frac{mv_{A2}{}^2}{2}$$

$$r_{P2}v_{P2}=r_{A2}v_{A2}=\sigma$$

$$v_{P2}+v_{A2}=\xi\cos^3\theta$$

şeklinde yazılabilir.

$$v_{A1}+v_{P1}=v_{P2}+v_{A2}$$

eşitliğinden

$$v_{A2}=v_{A1}-\xi(1-\cos^3\theta)$$

aphelion noktasındaki hızın azaldığını görebiliriz. Bu işlemi her defasında yaptığımızda görüyoruz ki perihelion noktasındaki hız hep aynı miktarda artmaktadır, aphelion noktasındaki hız ise hep aynı miktarda azalmaktadır. N işlemden sonra hızlar

$$v_{PN}=v_{P1}+\xi N(1-\cos^3\theta)$$
$$v_{AN}=v_{A1}-\xi N(1-\cos^3\theta)$$

mesafeler

$$r_{PN}=\frac{r_{P1}v_{P1}}{v_{P1}+\xi N(1-\cos^3\theta)}$$
$$r_{AN}=\frac{r_{A1}v_{A1}}{v_{A1}-\xi N(1-\cos^3\theta)}$$

şeklinde yazılabilir.

$$N\to\frac{v_{A1}}{\xi(1-\cos^3\theta)}$$

ise

$$r_{AN}\to\infty$$

yaklaştığını görebiliriz. Demek ki bu yöntemle gemi gerçekten nötron yıldızdan uzaklaşabilir. Yıldızın kütlesi ne kadar büyük, boyutları ne kadar küçük ise bu yöntem de o kadar daha iyi çalışmaktadır.

3. Tüm moleküllerin hızları eşit ve u olduğunu ve belli yönde moleküllerin

$$\Delta N=\frac{n_0 S u\Delta t}{6}$$

gittiğini kabul edebiliriz Burada $n_0=\frac{N}{V}$ taneciklerin konsantrasyonu, S moleküllerin geçtikleri alan, $u=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ moleküllerin hızı, Δt ise S alanından moleküllerin geçiş süreleridir. Bu formül cisim hareketsiz ise doğrudur. Disk hareket ettiği için diske karşı gelen ve diskle çarpışan moleküllerin sayısı daha büyük olduğu için diskle çarpışan tanecik sayısı

$$\Delta N_1=\frac{n_0 S(u+v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Burada v diskin hızıdır. Bu moleküllerin diske göre hızları u+v, momentumları m(u+v), momentum değişimleri 2m(u+v) olur. Bu moleküllerden diske aktardıkları momentum

$$\Delta p_1=\frac{n_0 S(u+v)\Delta t 2m(u+v)}{6}$$

olur. Diske aynı yönde hareket eden moleküller diskle daha az sayıda çarpışama yaptıkları için, diske çarpışan tanecik sayısı

$$\Delta N_2=\frac{n_0 S(u-v)\Delta t}{6}$$

olarak yazılabilir. Bu moleküllerin diske göre hızları u-v, momentumları m(u-v), momentum değişimleri 2m(u-v) olur. Bu moleküllerden diske aktardıkları momentum

$$\Delta p_2=\frac{n_0 S(u-v)\Delta t 2m(u-v)}{6}$$

olur. Diske aktarılan toplam momentum

$$\Delta p=\Delta p_1-\Delta p_2=\frac{mn_0 S(u+v)^2\Delta t}{3}-\frac{mn_0 S(u-v)^2\Delta t}{3}=\frac{4mn_0 Suv\Delta t}{3}$$

diske etki eden kuvvet

$$F=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{4mn_0 Suv}{3}=\chi v;\ \chi=\frac{4mn_0 Su}{3}$$

olarak bulunur. Diske etki eden kuvvetler ve bu kuvvetlerin etkisi ile hareket denklemi

$$Ma=-kx-\chi v;\ \ddot{x}+\frac{\chi}{M}\dot{x}+\frac{k}{M}x=0;\ \ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$$

olarak yazılabilir. Bu tip denklemler sönümlü harmonik osilatörün denklemi olarak bilinmektedir. Bu denklemin çözümü bir trigonometrik periyodik fonksiyon içermek zorundadır. Ssistemin genliği azalabilir ama titreşim yaparak. Çözümde genliğini azaltan bir terim de olmak zorundadır. Bu sebeple çözüm

$$x=Ae^{-\beta t}\cos\omega t$$

şeklinde aranılabilir. Bu ifadenin birinci ve ikinci türevi alıp

$$\dot{x}=-\beta Ae^{-\beta t}\cos\omega t-A\omega e^{-\beta t}\sin\omega t$$

$$\ddot{x}=\beta^2Ae^{-\beta t}\cos\omega t+2A\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t-A\omega^2e^{-\beta t}\cos\omega t$$

harmonik osilatörün denklemine koyarsak

$$(\beta^2-\gamma\beta+\omega_0{}^2-\omega^2)Ae^{-\beta t}\cos\omega t+(\gamma\omega-2\beta\omega)Ae^{-\beta t}\sin\omega t=0$$

denklemi elde ederiz. Bu denklem her durumda sıfır verebilmesi için cosωt ve sinωt önündeki katsayılar sıfır olmalıdır. Buradan

$$-\omega^2+\beta^2-\gamma\beta+\omega_0{}^2=0;\ \gamma-2\beta=0;\ \beta=\frac{\gamma}{2},\ \omega=\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}$$

olarak bulunur. Çözüm ise

$$x=A\,e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}\,t$$

olarak yazılabilir. Görüldüğü gibi genlik zamanla eksponensiyel bir şekilde azalmaktadır. Ardışık iki genlik arasındaki oran

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}=\frac{e^{-\frac{\gamma n\tau}{2}}}{e^{-\frac{\gamma(n+1)\tau}{2}}}=e^{\frac{\gamma\tau}{2}}$$

olarak yazılabilir. Sönümler küçük ise titreşim frekans

$$\omega=\sqrt{\omega_0{}^2-\frac{\gamma^2}{4}}=\omega_0\sqrt{1-\frac{\gamma^2}{4\omega_0{}^2}}\cong\omega_0\left(1-\frac{\gamma^2}{8\omega_0{}^2}\right)=\omega_0-\frac{\gamma^2}{8\omega_0}$$

ardışık iki genlik arasındaki oran

$$\frac{A_n}{A_{n+1}}\cong1+\frac{\gamma\tau}{2}$$

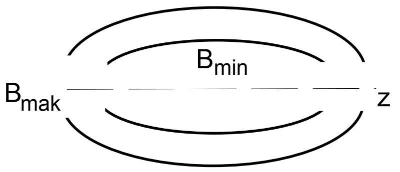
olarak yazılabilir. Soruda bu oran 1+ξ olduğu verilmektedir. Buradan konsantrasyon

$$\xi=\frac{\gamma T}{2}=\frac{2mn_0S\tau}{3M}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}\ ;\ n_0=\frac{3M\xi}{2mS\tau}\sqrt{\frac{\mu}{3RT}}$$

kaptaki gazın basıncı

$$P=\frac{mn_0u^2}{3}=\frac{M\xi}{2S\tau}\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$$

olarak bulunur.



4. Manyetik alanlarda manyetik dipol momenti

$$p_m=IS=\frac{q\pi r^2}{T}=\frac{qv_\perp\pi r^2}{2\pi r}=$$

$$=\frac{qv_\perp r}{2}=\frac{qv_\perp}{2}\frac{mv_\perp}{qB}=\frac{mv_\perp{}^2}{2B}$$

korunmaktadır. Gradienti olan manyetik alanlarda manyetik ayna yaratılması mümkün olabilir. Hareket eden tanecik sıklaşan manyetik çizgiler ile karşılaştığında geri yansır. Manyetik dipol momentin korunmasından

$$\frac{v^2\sin^2\theta}{B}=\frac{v_0{}^2\sin^2\theta_0}{B_0}$$

yazabiliriz. Yansıma durumunda sinθ=1, $B=B_{mak}$, $B_0=B_{min}$ ve tanecikler

$$\sin\theta_{0mak}=\sqrt{\frac{B_{min}}{B_{mak}}}$$

eşitliğinden bulunan açıdan daha büyük bir açı ile manyetik alana girer ise geri yansıyabilir. Bu problem özellikle füzyon reaksiyonu gerçekleştirmesinde temel problemlerinden birisidir. Sadece manyetik izolasyon problemi ve bununla beraber plazmanın yeterince süre ile lokal bölgede yeterli sıcaklıklarda tutulması sağlanır ise füzyon reaksiyonları mümkün olabilir.

5. U_0=0,5 MeV potansiyel farkına kadar hızlandırılan elektronlar artık rölativistik enerjilere sahip oldukları için rölativite teorisinin formüllerini kullanmak zorundayız. Elektronların kinetik enerjileri ve hızları

$$K=W-m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}-m_0c^2=eU;\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$$

$$v_0=\frac{c}{m_0c^2+eU}\sqrt{eU(eU+2m_0c^2)}$$

olarak bulunur. Elektronlara etki eden kuvvet

$$\vec{F}=-e(\vec{v}\times\vec{B})=m\vec{a}=\gamma m_0\vec{a}$$

$$-e(v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k})xB_z\vec{k}=\gamma m_0\left(\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}\right)$$

olarak yazılabilir. Birim $\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$ vektörleri için

$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j};\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\gamma m_0\frac{dv_y}{dt}=ev_xB_z;\ \gamma m_0\frac{dv_x}{dt}=ev_yB_z$$

denklemleri elde edilir. Birinci denklemden

$$\gamma m_0\frac{dv_y}{dt}=e\frac{dx}{dt}B_0\sin kx;\qquad dv_y=\frac{eB_0\sin kx}{\gamma m_0}dx$$

$$v_y=\int_0^{v_y}dv_y=\int_0^{x}\frac{eB_0\sin kx\,dx}{\gamma m_0}=\frac{eB_0(1-\cos kx)}{k\gamma m_0}$$

Manyetik alanda hız değişmediğinden dolayı

$$v_x=\sqrt{v_0^2-v_y^2}=\sqrt{v_0^2-\left(\frac{eB_0(1-\cos kx)}{k\gamma m_0}\right)^2}$$

olarak bulunur.

6. a) Merceğin odak uzaklığı

$$\frac{1}{f_1}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right);\ R_1=R;\ R_2=\infty;\ f_1=\frac{R}{n-1}=100\text{ cm}$$

olarak bulunur. Görüntü odak düzleminde oluştuğu için ekrana kadar olan uzaklığı 1000 mm alabiliriz. Minimumlar için

$$d\sin\theta=d\frac{x_k}{f}=k_1\lambda_1;\ \lambda_1=\frac{dx_k}{k_1f}=\frac{0{,}4.5}{4.1000}=5.10^{-4}\text{ mm}$$

$$d\sin\theta=d\frac{x_k}{f}=k_2\lambda_2;\ \lambda_2=\frac{dx_k}{k_2f}=\frac{0{,}4.5}{5.1000}=4.10^{-4}\text{ mm}$$

olarak bulunur.

b) İki mercek yan yana getirilirse sistemin optik kuvveti

$$D_s=D_1+D_2$$

olur. Bu durumda sistemin odak uzaklığı

$$\frac{1}{f_s}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}=\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{1}{200};\ f_s=200\text{ cm}=2000\text{ mm}$$

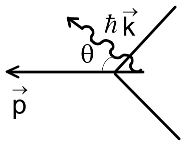
olarak bulunur. Yukarıda bulunan dalga boyların yarısı kadar bulunur. Bu durumda minimumlar için

$$\frac{dx_{k1}}{f_s}=k_1\lambda_1;\ x_{k1}=\frac{k_1\lambda_1f_s}{d}=10\text{ mm};\ \frac{dx_{k2}}{f_s}=k_1\lambda_1;\ x_{k2}=\frac{k_2\lambda_2f_s}{d}=10\text{ mm}$$

yazabiliriz. Görüldüğü gibi 4. ve 5. minimum tekrar çakışık ama merkezi doğrudan uzaklaşmış oluyorlar. Merkezi saçaktan 6 mm ötesinde

$$k_1=\frac{dx}{f_s\lambda_1}=\frac{0{,}4.6}{2000.5.10^{-4}}=2{,}4;\ k_2=\frac{dx}{f_s\lambda_2}=\frac{0{,}4.6}{2000.4.10^{-4}}=3$$

birinci dalga boyu için minimum ya da maksimum geçekleşmez. İkinci dalga boyu için ise bu noktada 3. minimum bulunmaktadır.



7. a) Elektron v rölativistik hızı ile kırıcılık indisi n olan saydam bir ortama hareket ederse frekans değişmediğine göre enerjisi de değişmez. Işık hızı ise artık

$$c'=\frac{c}{n}$$

olur. Dolayısıyla fotonun momentumu

$$p_\gamma=\frac{\hbar\omega}{c'}=\frac{n\hbar\omega}{c}$$

olur. Elektronun foton ışıması tamamen enerji ve momentum korunumu yasalarla izah edilebilir.

$$\vec{p}_e=\vec{p}'_e+\hbar\vec{k}\,,\ \vec{p}'_e=\vec{p}_e-\hbar\vec{k}\,,\ k=\frac{n\omega}{c}$$

$$p'^2_e=p_e^2+\frac{n^2\hbar^2\omega^2}{c^2}-\frac{2n\hbar\omega p_e\cos\theta}{c}$$

$$W_e=W'_e+W_\gamma$$

$$\sqrt{p_e^2c^2+m_0^2c^4}=\sqrt{p'^2_e c^2+m_0^2c^4}+\hbar\omega$$

Enerji korunumu yasasındaki $\hbar\omega$ ifadesini sol tarafa aktarıp ifadenin karesinin alabiliriz.

$$p_e^2c^2+m_0^2c^4+\hbar^2\omega^2-2\hbar\omega\sqrt{p_e^2c^2+m_0^2c^4}=p'^2_ec^2+m_0^2c^4=$$

$$=p_e^2c^2+n^2\hbar^2\omega^2+m_0^2c^4-2n\hbar\omega p_e c.\cos\theta$$

Buradan

$$\hbar^2\omega^2-2\hbar\omega W_e=n^2\hbar^2\omega^2-2n\hbar\omega p_e c.\cos\theta;\ \cos\theta=\frac{W_e}{p_e cn}+\frac{(n^2-1)\hbar\omega}{2p_e cn}$$

olarak bulunur. Rölativistik durumda sistemin momentumu ve enerji

$$p=\gamma m_0 v;\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\ \beta=\frac{v}{c}$$

$$W=\gamma m_0c^2=K+m_0c^2=W_0^2+p^2c^2\ ;\ W_0=m_0c^2$$

rölativistik sistemin kütle merkezinin hızı

$$v=\frac{pc^2}{W}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$\cos\theta=\frac{c}{nv}+\frac{(n^2-1)\hbar\omega}{2p_e cn}\approx\frac{c}{nv}$$

olarak bulunur. Burada optik fotonlara ait terimi elektronun enerjisine göre çok küçük olduğu için ihmal edebiliriz.

b) Bulunan ifadeyi türevlersek

$$-\sin\theta d\theta=-\frac{cdv}{nv^2}$$

bulabiliriz. Belirsizlik ilkesi

$$\delta p\delta x=\hbar;\ \delta x=\ell;\ \delta p=\delta m\delta v;\ \delta v=\frac{\hbar}{\ell.\delta m}$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$d\theta=\delta\theta=\frac{c\hbar}{nv^2\ell.\delta m\sin\theta}$$

olarak bulunur.